



**YÜKSEK BASAMAKTAN KESİRLİ SINIR DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN
LYAPUNOV TİPİ EŞİTSİZLİKLER**

Dilara YILDIZ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ŞUBAT 2022

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Dilara YILDIZ

07.02.2022

YÜKSEK BASAMAKTAN KESİRLİ SINIR DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN LYAPUNOV
TİPİ EŞİTSİZLİKLER
(Yüksek Lisans Tezi)

Dilara YILDIZ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Şubat 2022

ÖZET

Bu tezde $1 < \xi \leq 2$, $3 < \xi \leq 4$ ve $n - 1 < \xi \leq n$ olmak üzere ξ -yinci basamaktan kesirli sınır değer problemleri için elde edilen Lyapunov tipi eşitsizlikler üzerinde durulmuştur. Konuyla ilgili temel tanımlar, özellikler, teoremler ve sonuçlar verildikten sonra ξ -yinci basamaktan kesirli sınır değer problemleri için literatürdeki bazı sonuçlara tarihsel süreç içerisinde yer verilmiştir. Tamamen orijinal sonuçlardan oluşan son bölümde ξ -yinci basamaktan kesirli sınır değer problemleri için yeni Lyapunov tipi eşitsizlikler elde edilmiştir.

Bilim Kodu : 20406
Anahtar Kelimeler : Lyapunov tipi eşitsizlikler, kesirli sınır değer problemleri
Sayfa Adedi : 87
Danışman : Prof. Dr. Mustafa Fahri AKTAŞ

LYAPUNOV-TYPE INEQUALITIES FOR HIGH ORDER FRACTIONAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS

(M. Sc. Thesis)

Dilara YILDIZ

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

February 2022

ABSTRACT

In this thesis, we consider Lyapunov type inequalities for ξ -th order fractional boundary value problem where $1 < \xi \leq 2$, $3 < \xi \leq 4$ and $n - 1 < \xi \leq n$. After giving the basic definitions, properties, theorems and results related to the subject, some results in the literature for the ξ -th order fractional boundary values problems are given in a chronological order. In the last section, which consists of completely original results, new Lyapunov type inequalities are given for ξ -th order fractional boundary value problems.

Science Code : 20406
Keywords : Lyapunov-Type inequalities, fractional boundary value problems
Number of pages : 87
Supervisor : Prof. Dr. Mustafa Fahri AKTAŞ

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim esnasında tez konumun belirlenmesi, çalışmalarımın planlanıp yürütülmesi ve bu tezin hazırlanmasında benden desteğini esirgemeyen ve değerli vaktini bana ayıran saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Mustafa Fahri AKTAŞ'a, her türlü bilgi birikimini benimle paylaşıp yüksek lisans eğitimimde hep desteğini hissettiğim emeği çok büyük olan arkadaşım Hatice GÜL'e, her zaman desteğini hissettiğim her konuda bana yardımcı olan sayın hocam Arş. Gör. Dr. Melek SOFYALIOĞLU'na, eğitim hayatım ve tüm yaşantım boyunca bu noktaya gelmemi sağlayan, maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen ve bu süreçte yaşadığım tüm zorluklarda yanımda olan varlıklarıyla gurur duyduğum kıymetli aileme sonsuz sevgi, saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ	viii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR	x
1. GİRİŞ.....	1
2. TANIMLAR ve TEOREMLER	5
2.1. Temel Kavramlar	5
2.2. Gamma Fonksiyonu.....	5
2.3. Riemann-Liouville Kesirli Türev ve İntegralinin İnşası	11
2.4. Tek Noktalı ve İki Noktalı Green Fonksiyonlarının İnşası	22
3. LİTERATÜRDEKİ KESİRLİ SINIR DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN LYAPUNOV TİPİ EŞİTSİZLİKLER	39
4. KESİRLİ SINIR DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN YENİ LYAPUNOV TİPİ EŞİTSİZLİKLER	61
4.1. $1 < \xi \leq 2$ Olmak Üzere ξ -yinci Basamaktan Yeni Lyapunov Tipi Eşitsizlikler.....	61
4.2. $3 < \xi \leq 4$ Olmak Üzere ξ -yinci Basamaktan Yeni Lyapunov Tipi Eşitsizlikler.....	68
4.3. $n - 1 < \xi \leq n$ Olmak Üzere ξ -yinci Basamaktan Yeni Lyapunov Tipi Eşitsizlikler.....	73
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	81
KAYNAKLAR	83
ÖZGEÇMİŞ	87

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 2.1. $\Gamma(x)$ fonksiyonunun bazı özel değerleri	10
Çizelge 2.2. Türev-Ters Türev İlişkisi	12

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. Gamma fonksiyonunun grafiği.....	9

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılan simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
$x^{(k)}$	Faktöriyel fonksiyonu
$H(x, s)$	Tek noktalı Green fonksiyonu
$G(x, s)$	Green fonksiyonu
$\Gamma(x)$	Gamma fonksiyonu
$C(0, 1)$	$C(0, 1)$ aralığında tanımlı ve sürekli tüm reel değerli fonksiyon uzayı
$C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$	$(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ aralığında tanımlı ve sürekli tüm reel değerli fonksiyon uzayı
$D^1 f(x)$	$f(x)$ fonksiyonunun türevi
$D^{-1} f(x)$	$f(x)$ fonksiyonunun belirsiz integrali
$D^{-1} f(x)$	$f(x)$ fonksiyonunun a 'dan x 'e belirsiz integrali
$D^\xi y(x)$	$y(x)$ fonksiyonunun ξ -yinci basamaktan Riemann-Liouville kesirli türevi
${}^C D^\xi y(x)$	$y(x)$ fonksiyonunun ξ -yinci basamaktan Caputo kesirli türevi
$D^{-\xi} y(x)$	$y(x)$ fonksiyonunun ξ -yinci basamaktan kesirli integrali

Kısaltmalar	Açıklamalar
Eş.	Eşitlik/Eşitsizlik

1. GİRİŞ

Kesirli analiz, n tam sayı iken n -inci türevin n tam sayı olmadığına genelleştirme yapıp yapılmayacağı sorusu ile ortaya çıkmıştır. L'Hopital, bu soruyu ilk olarak 30 Eylül 1695 yılında ortaya atmıştır. O gün; L'Hopital $f(x)$ yeterince düzgün bir fonksiyon olmak üzere $y = f(x)$ fonksiyonunun n -inci türevi için Leibniz'in $\frac{D^n f(x)}{Dx^n}$ notasyonu hakkında Leibniz'e bir mektup yazdı. L'Hopital $n = \frac{1}{2}$ olduğunda sonucun ne olduğunu merakla sordu. Leibniz, bunun "bir gün faydalı sonuçların elde edileceği açık bir paradoks (aykırı düşünce)" olacağını söyledi [1]. Bu benzeri görülmemiş tartışmanın ardından, kesirli analiz konusu çoğu doğrudan veya dolaylı olarak gelişimine katkıda bulunan Euler, Laplace, Fourier, Lacroix, Abel, Riemann ve Liouville gibi büyük matematikçilerin dikkatini çekti.

1819 yılında Lacroix, kesirli bir türevden bahseden bir makale yayınlayan ilk matematikçi oldu [2]. Lacroix, $m \in \mathbb{Z}^+$ için $y = x^m$ ile başlayarak n -inci türevini $m \geq n$ için

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n} \quad (1.1)$$

buldu.

Genelleştirilmiş faktöriyel için Legendre'nin Γ sembolünü kullanarak Eş. (1.1) eşitliğini

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n} \quad (1.2)$$

şeklinde yeniden yazdı. Son olarak, $m = 1$ ve $n = \frac{1}{2}$ alarak

$$\frac{d^{1/2} y}{dx^{1/2}} = \frac{d^{1/2} x}{dx^{1/2}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} \quad (1.3)$$

elde etti. Ancak kesirli işlemlerin ilk kullanımı Lacroix tarafından değil, 1823 yılında Abel tarafından yapılmıştır [2]. Başlangıç noktasından bağımsız olan düzgün yerçekimi altındaki bir nesnenin azalan zamanını temsil eden bir eğrinin şeklini belirleme problemi olan Tautochrone probleminin formülünde ortaya çıkan bir integral denklemin çözümünde, kesirli analiz uygulandı.

Şimdi tezimizde önemli bir yere sahip olan Green fonksiyonunun kısa bir tarihçesinden bahsedelim. Adi ve Kısmi diferensiyel denklemlerde sınır değer problemleri matematiğin, matematiksel fiziğin ve uygulamalı bilimlerin ayrılmaz bir parçası olmuştur. Bu sınır değer problemlerine karşılık gelen Green fonksiyonu, Matematikçiler, Fizikçiler ve Uygulamalı Bilim adamlarının dikkatini çeken önemli bir konu haline gelmiştir. Green fonksiyonu ilk kez 1828 yılında İngiliz Matematikçi George Green tarafından belirli mekanik problemlerde özellikle de yay problemlerinde "etki fonksiyonu" ve "potansiyel" olarak fiziksel yorumlama ile tanıtılmış olsa da günümüzde Green fonksiyonu geliştirilmiş ve yaygın olarak kullanılmıştır [3].

Kısaca Green fonksiyonunun bahsedecek olursak; homogen sınır şartlarına sahip L diferensiyel operatör olmak üzere $Ly(x) = f(x)$ denklemi $f(x) = 0$ için sadece aşıkâr çözüme sahip ise karşılık gelen lineer operatörün tersi vardır ve onun ters operatörü $L^{-1}f(x)$, Green fonksiyonu $G(x,s)$ ile tanımlanan bir integral çekirdeği ile karakterize edilir. Homogen sınır şartlarına sahip $Ly(x) = f(x)$ denkleminin çözümü $x \in [a,b]$ için

$$y(x) = L^{-1}f(x) = \int_a^b G(x,s)f(s)ds \quad (1.4)$$

ile verilir [4]. Bu tezde, kesirli sınır değer problemine karşılık gelen Green fonksiyonu yardımıyla en iyi olasılığa sahip yeni Lyapunov tipi eşitsizlikler elde edilmiştir.

Şimdi ise Lyapunov eşitsizliğinin tarihçesinden kısaca bahsedilsin. XIX. yüzyılın sonlarında Rus asıllı matematikçi, Lyapunov

$$\begin{cases} y''(x) + q(x)y(x) = 0, & a < x < b \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

adi sınır değer probleminin aşıkâr olmayan bir çözümü için $q(x)$ reel değerli ve sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$\frac{4}{b-a} < \int_a^b |q(s)|ds \quad (1.6)$$

eşitsizliğini elde etti. O tarihten sonra bu eşitsizlik Lyapunov eşitsizliği olarak adlandırıldı.

Günümüze kadar çeşitli eşitsizlikler arasında Lyapunov eşitsizliği büyük öneme sahip olmuştur ve matematiğin birçok dalında uygulaması mevcuttur. Lyapunov eşitsizliğinin birçok genellemesi diferensiyel, fark, zaman skalası ve q -analizde yer alan salınımlılık, diskonjuge, özdeğer problemleri, kararlılık, varlık-teklik ve diğer uygulamalar için kullanışlı bir araç olmuş ve birçok yazarın dikkatini buraya çekmeyi başarmış bir konudur. Lyapunov tipi eşitsizlik elde etmek için bir çok yöntem vardır. Tezimizde bunlardan en kullanışlı ve en iyi olasılığı elde etmeye yardımcı olan, Green fonksiyonu yardımıyla Lyapunov tipi eşitsizlik elde edilmesi kullanılacaktır. Bu metod aşağıdaki gibidir:

Eş. (1.4)'de de ifade edildiği gibi Eş. (1.5) problemine karşılık gelen Green fonksiyonu

$$G(x, s) = - \begin{cases} \frac{(x-a)(b-s)}{b-a}, & a \leq s \leq x \\ \frac{(s-a)(b-x)}{b-a}, & x \leq s \leq b \end{cases} \quad (1.7)$$

olmak üzere Eş. (1.5) problemine denk olan

$$y(x) = \int_a^b G(x, s) q(s) y(s) ds \quad (1.8)$$

integral denklemi şeklinde yazılabilir. $y(x)$, Eş. (1.5) probleminin aşikar olmayan çözümü ve

$$|y(x_0)| = \max_{a \leq x \leq b} |y(x)| \quad (1.9)$$

olmak üzere

$$|y(x_0)| \leq |y(x_0)| \max_{a \leq x \leq b} \int_a^b |G(x, s)| |q(s)| ds \quad (1.10)$$

veya

$$1 \leq \max_{a \leq x \leq b} \int_a^b |G(x, s)| |q(s)| ds \quad (1.11)$$

elde edilir. G_{maks} sabit olmak üzere $0 < \max_{a \leq x, s \leq b} |G(x, s)| = G_{maks}$ ise Eş. (1.11)'den Eş. (1.5)

adi sınır değeri problemi için

$$\frac{1}{G_{maks}} \leq \int_a^b |q(s)| ds \quad (1.12)$$

Lyapunov eşitsizliği elde edilir. Aslında, Eş. (1.5) problemi için $G_{maks} = \frac{b-a}{4}$ olduğundan Eş. (1.6) klasik Lyapunov eşitsizliği elde edilir. Ayrıca, bu 4 sayısının en iyi olasılık olduğu gösterilmiştir [5]. Hazırladığımız bu tezin ikinci bölümünde temel tanımlar, teoremler, sonuçlar ve örnekler verilecektir. Üçüncü bölümde ise kesirli sınır değeri problemi için elde edilen Lyapunov tipi eşitsizliklerine ilişkin sonuçlar tarihsel süreç içerisinde sistematik bir biçimde sunulacaktır. Son bölümde $1 < \xi \leq 2$, $3 < \xi \leq 4$ ve $n-1 < \xi \leq n$ olmak üzere ξ -yinci basamaktan kesirli sınır değeri problemleri için elde edilen Green fonksiyonu yardımıyla yeni ve orijinal Lyapunov tipi eşitsizlikler verilecektir.

2. TANIMLAR VE TEOREMLER

Bu tezde, ihtiyaç duyulan bilgiler ve teoremler verilecektir.

2.1. Temel Kavramlar

2.2. Gamma Fonksiyonu

Bu alt bölümde, Leibnitz formülü ve faktöriyel fonksiyonunun tanımları verildikten sonra Gamma fonksiyonunun tanımı ve bazı temel özellikleri verilecektir.

2.2.1 Tanım (Faktöriyel Fonksiyon)

Kesirli analizde karşılaşılan en ilginç fonksiyonlardan biri $x^{(k)}$ ile gösterilen faktöriyel fonksiyonu veya kuvvetidir. $x \in \mathbb{R}$ ve $\Gamma(x)$ Gamma fonksiyonu olmak üzere

- (a) $k \in \mathbb{Z}^+$ için $x^{(k)} = x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)$
- (b) $k = 0$ için $x^{(0)} = 1$
- (c) $x \neq k$ ve $k \in \mathbb{Z}^-$ için $x^{(k)} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x-k)}$
- (d) $k \notin \mathbb{Z}$ için $x^{(k)} = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-k+1)}$

şeklinde tanımlanan fonksiyona faktöriyel fonksiyon denir.

2.2.2 Tanım (İntegralde Leibnitz Formülünün Tanımı)

$f(x, t)$ bir $D = \{(x, t) : a \leq x \leq b, c \leq t \leq d\}$ dikdörtgensel bölgesinde tanımlı, $u_0(x)$ ve $u_1(x)$ fonksiyonları $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı iki fonksiyon olmak üzere

$$\phi(x) = \int_{u_0(x)}^{u_1(x)} f(x, s) ds \quad (2.1)$$

şeklinde ifade edilen $\phi(x)$ fonksiyonu integral yardımıyla tanımlanmış bir fonksiyondur.

İntegral yardımıyla tanımlanmış $\phi(x)$ fonksiyonunun türevi,

$$\phi'(x) = f(x, u_1(x))u_1'(x) - f(x, u_0(x))u_0'(x) + \int_{u_0(x)}^{u_1(x)} \frac{\partial f(x, s)}{\partial x} ds \quad (2.2)$$

şeklinde. Bu formül, integral yardımıyla tanımlanan fonksiyonlarda Leibnitz formülü olarak bilinir.

Gamma fonksiyonu, faktöriyel fonksiyonun karmaşık sayılar ve tam sayı olmayan reel sayılar için genellemesi olan bir fonksiyondur.

2.2.3 Tanım (Gamma Fonksiyonu)

Gamma fonksiyonu $0 < x < \infty$ değerleri için Euler integrali denilen

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} s^{x-1} e^{-s} ds \quad (2.3)$$

genelleştirilmiş integrali ile tanımlanır [1].

2.2.1. Teorem (Yakınsaklık)

$x > 0$ için $\Gamma(x)$ fonksiyonu yakınsaktır.

İspat

Eş. (2.3) integrali, $I_1 = \int_0^1 s^{x-1} e^{-s} ds$ ve $I_2 = \int_1^{\infty} s^{x-1} e^{-s} ds$ olmak üzere

$$\Gamma(x) = \int_0^1 s^{x-1} e^{-s} ds + \int_1^{\infty} s^{x-1} e^{-s} ds = I_1 + I_2 \quad (2.4)$$

şeklinde yazılabilir. $[0, 1]$ aralığında e^{-s} fonksiyonu azalan olduğundan $s = 0$ 'dan

$$I_1 = \int_0^1 s^{x-1} e^{-s} ds < \int_0^1 s^{x-1} ds = \frac{1}{x} \quad (2.5)$$

elde edilir. Böylece I_1 yakınsaktır. Ayrıca, $I_2 = \int_1^\infty s^{x-1} e^{-s} ds$ integralinin yakınsaklığı için

$$1 \leq s \Rightarrow s^{x-1} e^{-s} \leq e^{-s/2} \Leftrightarrow s^{x-1} \leq e^{s/2} \Leftrightarrow \frac{s^{x-1}}{e^{\frac{s}{2}}} \leq 1 \quad (2.6)$$

eşitsizliği $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^{x-1}}{e^{\frac{s}{2}}} = 0$ olduğundan

$$I_2 = \int_1^\infty s^{x-1} e^{-s} ds \leq \int_1^\infty e^{-\frac{s}{2}} ds = 2e^{-\frac{1}{2}} \quad (2.7)$$

elde edilir. Eş. (2.3) integrali $x > 0$ için yakınsaktır.

Şimdi $\Gamma(x)$ Gamma fonksiyonunun özelliklerinden bazıları ispatları ile birlikte verilsin.

1. $x > 0$ için $\Gamma(x)$ fonksiyonu süreklidir.

2. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ sağlanır.

İspat

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^\infty e^{-s} s^x ds = -e^{-s} s^x \Big|_0^\infty + x \int_0^\infty e^{-s} s^{x-1} ds \\ &= x\Gamma(x) \end{aligned} \quad (2.8)$$

elde edilir.

$$\mathbf{3.} \quad \Gamma(x+n) = (x+n-1)\dots(x+1)x\Gamma(x) \quad (2.9)$$

$$\Gamma(1) = 1 \quad (2.10)$$

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (2.11)$$

ve

$$\Gamma(0) = +\infty \quad (2.12)$$

sağlanır.

4. $x = -n$ için

$$\begin{aligned} \Gamma(-n) &= \frac{\Gamma(-n+1)}{\Gamma(-n)} = \frac{\Gamma(-n+2)}{n(n-1)} \\ &= \frac{\Gamma(-n+3)}{n(n-1)(n-2)} = \dots = (-1)^n \frac{\Gamma(0)}{n!} = (-1)^n \infty \end{aligned} \quad (2.13)$$

bulunur.

5. Eş. (2.8) özelliğinden elde edilen

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \quad (2.14)$$

kullanılarak $-1 < x < 0$ aralığında $\Gamma(x)$ fonksiyonu tanımlanabilir. Özel olarak, $x = 0$ için

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \Gamma(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\Gamma(x+1)}{x} = +\infty \quad (2.15)$$

ve

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \Gamma(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\Gamma(x+1)}{x} = -\infty \quad (2.16)$$

olduğuna dikkat edilmelidir. Diğer yandan, Eş. (2.14) özelliği $(x+1)$ ile çarpılıp bölünürse Eş. (2.8)'den

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+2)}{x(x+1)} \quad (2.17)$$

elde edilir. Eş. (2.17) kullanılarak $-2 < x < -1$ aralığında $\Gamma(x)$ fonksiyonu tanımlanabilir.

Özel olarak, $x = -1$ için

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \Gamma(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\Gamma(x+2)}{x(x+1)} = -\infty \quad (2.18)$$

ve

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \Gamma(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\Gamma(x+2)}{x(x+1)} = +\infty \quad (2.19)$$

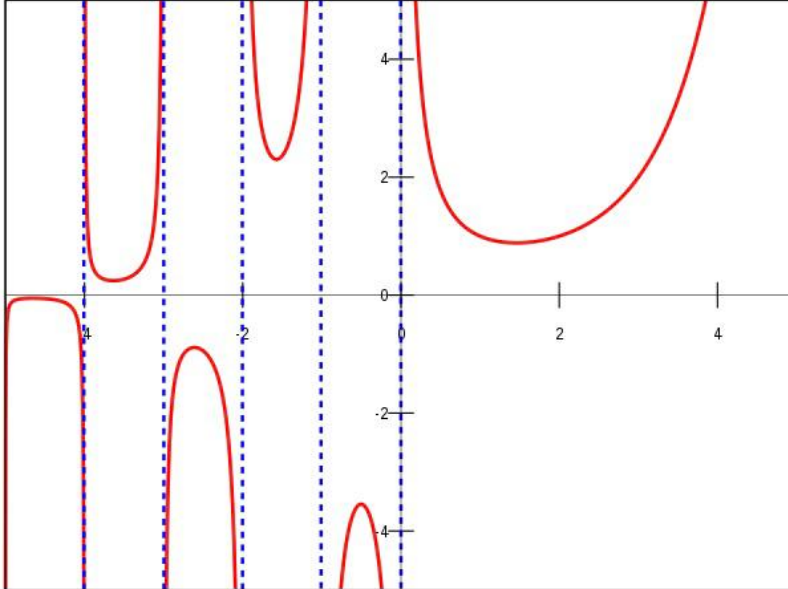
elde edilir. Benzer şekilde devam edilerek, Eş. (2.9) özelliğinden

$$-n < x < -(n-1) \text{ için } \Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\dots(x+n-1)} \quad (2.20)$$

ve $x+n = \xi$ değişken değişimi yapılırsa

$$\Gamma(\xi - n) = \frac{(-1)^n \Gamma(\xi)}{(1-\xi)(2-\xi)\dots(n-\xi)} \quad (2.21)$$

elde edilir. $\Gamma(x)$ fonksiyonunun sıfır ve negatif tam sayılarda; yani, $\Gamma(0)$, $\Gamma(-1)$, $\Gamma(-2)$,...’de tanımsız olduğuna dikkat edilmelidir (Bkz. Şekil 2.1).



Şekil 2.1. Gamma fonksiyonunun grafiği

6. (2) nolu özellikten

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) &= \Gamma\left(1 + \left(m - \frac{1}{2}\right)\right) = \left(m - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(m - \frac{1}{2}\right) \\
&= \left(m - \frac{1}{2}\right) \left(m - \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(m - \frac{3}{2}\right) \\
&= \left(m - \frac{1}{2}\right) \left(m - \frac{3}{2}\right) \dots \frac{3}{2} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{(2m-1)!}{2^m} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2m)!}{m 2^{m+1}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \tag{2.22}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$7. \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(q+1)\Gamma(p-q+1)} = \binom{p}{q} \text{ sağlanır.}$$

8. Hesaplamalar için kullanılan $\Gamma(x)$ fonksiyonunun bazı özel değerleri aşağıdaki tablolarda verilmiştir.

Çizelge 2.1. $\Gamma(x)$ fonksiyonunun bazı özel değerleri

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$ $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$ $\cdot$ $\cdot$ $\cdot$ $\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2m)!}{m! 2^m} \sqrt{\pi}$	$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = 2.678938$ $\cdot$ $\cdot$ $\Gamma\left(m + \frac{1}{3}\right) = \frac{14 \dots (3m-2)}{3^m} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$	$\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = 1.354118$ $\cdot$ $\cdot$ $\Gamma\left(m + \frac{2}{3}\right) = \frac{25 \dots (3m-1)}{3^m} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)$
	$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = 3.625600$ $\cdot$ $\cdot$ $\Gamma\left(m + \frac{1}{4}\right) = \frac{15 \dots (4m-3)}{4^m} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$	$\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = 1.225417$ $\cdot$ $\cdot$ $\Gamma\left(m + \frac{3}{4}\right) = \frac{37 \dots (4m-1)}{4^m} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$

2.3. Riemann-Liouville Kesirli Türev ve İntegralinin İnşası

Bu alt bölümde öncelikle $\mathbb{R}$ 'de türev ve integral kavramları hatırlatılacak sonrasında adım adım Riemann-Liouville kesirli türev ve integralinin inşası gerçekleştirilecektir.

2.3.4 Tanım ($\mathbb{R}$ 'de Türev)

$A \subset \mathbb{R}$ ve $B \subset \mathbb{R}$ olsun. $f : A \rightarrow B$ bir fonksiyon olmak üzere $x \in A$ için eğer

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (2.23)$$

limiti mevcut ise $f(x)$ fonksiyonu x noktasında türevlenebilirdir denir. Bu türev

$$f'(x), \frac{df(x)}{dx} \text{ veya } Df(x) \quad (2.24)$$

sembollerinden biri ile gösterilir.

$$F'(x) = f(x) \implies F(x) = \int f(x)dx \quad (2.25)$$

olmak üzere $F(x)$ fonksiyonuna $f(x)$ fonksiyonunun anti/ters türev ve $\int$ sembolüne ters türev operatörü denilmektedir. Örneğin; $F(x) = x^2$ fonksiyonunun türevi $f(x) = 2x$ iken $f(x) = 2x$ fonksiyonunun ters türevi $F(x) = x^2$ fonksiyonudur.

2.3.5 Tanım ($\mathbb{R}$ 'de Belirsiz İntegral)

$f(x)$ fonksiyonu, $[a, b]$ aralığında sürekli ve (a, b) aralığında türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $f(x)$ fonksiyonunun tüm anti türevlerinin sınıfına $f(x)$ fonksiyonunun belirsiz integrali denir.

$$\int f(x)dx, \frac{d^{-1}}{dx^{-1}}f(x), D^{-1}f(x) \text{ ve } \frac{1}{D}f(x)$$

sembollerinden biri ile gösterilir. $\int$ simgesine integral işareti, $f(x)$ ifadesine integrant, x değişkenine de integrasyon değişkeni adı verilir.

Çizelge 2.2. Türev-Ters Türev İlişkisi

...	D^{-2}	D^{-1}	D^0	D^1	D^2	...
...	$\int \int f$	$\int f$	f	f'	f''	...

2.3.6 Tanım ($\mathbb{R}$ 'de Belirli İntegral)

$A \subset \mathbb{R}$ ve $B \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $a \in A$ ve $b \in B$ seçilsin. Özel olarak; $f(x)$ fonksiyonu, $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı ve bu aralık üzerinde anti türevi $F(x)$ ise $f(x)$ fonksiyonunun a 'dan b 'ye belirli (Riemann) integrali

$$\int_a^b f(s)ds = F(b) - F(a) \quad (2.26)$$

olarak tanımlanır.

Şimdi türev ile belirli integral (belirli ters türev) arasındaki ilişkilerden bahsedelim.

$$\int_a^x Df(s)ds = f(x) - f(a) \quad (2.27)$$

olduğu bilinmektedir. $f(x)$ fonksiyonunun a 'dan x 'e integrali

$$D_a^{-1}f(x) = \int_a^x f(s)ds \quad (2.28)$$

şeklinde tanımlansın. Böylece $f(x)$ fonksiyonunun a 'dan x 'e belirli integralinin türevi

$$DD_a^{-1}f(x) = f(x) \quad (2.29)$$

ve türevin a 'dan x 'e belirli integrali

$$D_a^{-1}Df(x) = f(x) - f(a) \quad (2.30)$$

elde edilir. Eş. (2.29) ve Eş. (2.30)'un bir sabit farkı ile birbirinden farklı olduğuna dikkat edilmelidir. Diğer yandan; $f(x)$ fonksiyonunun a 'dan x 'e iki kez ve üç kez belirli integrali sırasıyla

$$D_a^{-2}f(x) = \int_a^x \int_a^s f(u) du ds \quad (2.31)$$

ve

$$D_a^{-3}f(x) = \int_a^x \int_a^s \int_a^u f(v) dv du ds \quad (2.32)$$

şeklinde ifade edilir. Kolaylık sağlaması açısından bundan sonra tez boyunca $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere D_a^{-m} operatörü (notasyonu) yerine D^{-m} kullanılacaktır. Türev ile belirli ters türev arasındaki ilişkiyi veren bazı örnekler

$$D^{-1}D^3f = D^2f - f''(a) = f''(x) - f''(a)$$

$$D^{-1}D^2f = Df - f'(a) = f'(x) - f'(a)$$

$$D^{-1}Df = D^0f - f(a) = f(x) - f(a) \quad (2.33)$$

$$D^{-2}D^3f = Df - f''(a)(x-a) - f'(a) = f'(x) - f''(a)(x-a) - f'(a)$$

$$D^{-2}D^2f = D^0f - f'(a)(x-a) - f(a) = f(x) - f'(a)(x-a) - f(a)$$

$$D^{-2}Df = D^{-1}f - f(a)(x-a) = \int_a^x f(s) ds - f(a)(x-a) \quad (2.34)$$

$$D^{-3}D^3f = D^0f - f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} - f'(a)(x-a) - f(a)$$

$$= f(x) - f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} - f'(a)(x-a) - f(a)$$

$$D^{-3}D^2f = D^{-1}f - f'(a)\frac{(x-a)^2}{2} - f(a)(x-a)$$

$$= \int_a^x f(s)ds - f'(a)\frac{(x-a)^2}{2} - f(a)(x-a)$$

$$D^{-3}Df = D^{-2}f - f(a)\frac{(x-a)^2}{2} = \int_a^x \int_a^s f(u)duds - f(a)\frac{(x-a)^2}{2} \quad (2.35)$$

şeklinde verilebilir. Örneğin, $p \in \mathbb{Z}$ için $f(x) = x^p$ kuvvet fonksiyonunun m kez ardışık türevleri

$$Dx^p = px^{p-1}$$

$$D^2x^p = p(p-1)x^{p-2}$$

.

.

.

$$D^m x^p = p(p-1)\dots(p-m+1)x^{p-m} \quad (2.36)$$

ve $\Gamma(x)$ fonksiyonu, Eş. (2.3)'de tanımlandığı gibi olmak üzere

$$p(p-1)\dots(p-m+1) = \frac{p!}{(p-m)!} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-m+1)} \quad (2.37)$$

olduğundan

$$D^m x^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-m+1)} x^{p-m} \quad (2.38)$$

elde edilir. Ayrıca, $m > p$ için

$$D^m x^p = 0 \quad (2.39)$$

olduğu kolaylıkla görülür.

Diğer yandan; $p \in \mathbb{Z}$ için $f(x) = x^p$ kuvvet fonksiyonunun n kez belirli ters türevleri (0'dan x 'e n kez belirli integralleri) alınırsa

$$D^{-1}x^p = D_0^{-1}x^p = \int_0^x s^p ds = \frac{x^{p+1}}{p+1}$$

$$D^{-2}x^p = \frac{x^{p+2}}{(p+2)(p+1)}$$

.

.

.

$$D^{-n}x^p = \frac{x^{p+n}}{(p+n)\dots(p+2)(p+1)} = \frac{p!}{(p+n)!}x^{p+n} \quad (2.40)$$

veya

$$D^{-n}x^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+n+1)}x^{p+n} \quad (2.41)$$

elde edilir. $\Gamma(0)$, $\Gamma(-1)$, $\Gamma(-2)$,...’de ($\Gamma(x)$ fonksiyonunun negatif tam sayılardaki değerlerinin) tanımsız olduğuna dikkat edilmelidir (Bkz. Şekil 2.1).

$f(x) = x^p$ fonksiyonunun önce D^{-n} operatörü sonra D^m operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned} D^m D^{-n} x^p &= \frac{\Gamma(p+n+1)}{\Gamma(p+n-m+1)} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+n+1)} x^{p+n-m} \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-(m-n)+1)} x^{p-(m-n)} \\ &= D^{m-n} x^p \end{aligned} \quad (2.42)$$

elde edilir.

$f(x) = x^0 = 1$ ve $g(x) = x$ fonksiyonunun yarı türevleri hesaplanırsa

$$D^{\frac{1}{2}}x^0 = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{1}{2})}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{\pi x}} \quad (2.43)$$

ve

$$D^{\frac{1}{2}}x = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})}x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}} \quad (2.44)$$

elde edilir.

Şimdi, $f(x) = \cos p(x-a)$ ve $g(x) = \sin p(x-a)$ trigonometrik fonksiyonlarının m -kez ardışık türevleri alınırsa

$$D \cos p(x-a) = -p \sin p(x-a) = p \cos \left[p(x-a) + \frac{\pi}{2} \right]$$

$$D^2 \cos p(x-a) = -p^2 \cos p(x-a) = -p^2 \cos \left[p(x-a) + \pi \right]$$

.

.

.

$$D^m \cos p(x-a) = (-1)^m p^m \cos \left[p(x-a) + \frac{m\pi}{2} \right] \quad (2.45)$$

ve

$$D \sin p(x-a) = p \cos p(x-a) = -p \sin \left[p(x-a) - \frac{\pi}{2} \right]$$

$$D^2 \sin p(x-a) = -p^2 \sin p(x-a) = p^2 \sin \left[p(x-a) - \pi \right]$$

.

.

.

$$D^m \sin p(x-a) = (-1)^m p^m \sin \left[p(x-a) - \frac{m\pi}{2} \right] \quad (2.46)$$

elde edilir.

Tanım 2.1.2 (Leibnitz Formülün)'den

$$\frac{d}{dx} \int_a^x w(x,s) f(s) ds = w(x,x) f(x) + \int_a^x \frac{\partial w(x,s)}{\partial x} f(s) ds \quad (2.47)$$

olduğu bilinmektedir. $w(x,x) = 0$ ve $\frac{\partial w(x,s)}{\partial x} = 1$ alınırsa $w(x,s) = x - s$ bulunur. Böylece

$$\frac{d}{dx} \int_a^x (x-s) f(s) ds = \int_a^x f(s) ds \quad (2.48)$$

elde edilir. Benzer şekilde devam edilirse

$$\frac{d^2}{dx^2} \int_a^x (x-a)^2 f(s) ds = \frac{d}{dx} \int_a^x 2(x-s) f(s) ds = 2 \int_a^x f(s) ds$$

.

.

.

$$n = 0, 1, \dots \text{ için } \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-a)^n f(s) ds = n! \int_a^x f(s) ds \quad (2.49)$$

elde edilir. Diğer yandan, kısmi integrasyonlar uygulanarak

$$\int_a^x \int_a^s f(v) dv ds = s \int_a^s f(v) dv \Big|_a^x - \int_a^x s f(s) ds \left(\int_a^s f(v) dv = u \text{ ve } ds = dv \right)$$

$$= x \underbrace{\int_a^x f(v) dv}_\int_a^x f(s) ds - \int_a^x s f(s) ds$$

$$= \int_a^x (x-s) f(s) ds \quad (2.50)$$

bulunur. Bu şekilde devam edilerek

$$\int_a^x \int_a^s \int_a^u f(v) dv du ds = \int_a^x \frac{(x-s)^2}{2!} f(s) ds$$

.

.

.

$$\underbrace{\int_a^x \int_a^{s_n} \int_a^{s_{n-1}} \dots \int_a^{s_1} f(s) ds ds_1 \dots ds_{n-1} ds_n}_{n \text{ defa}} = \int_a^x \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} f(s) ds \quad (2.51)$$

elde edilir. Yukarıdaki genellemelerin ispatları tümevarım yöntemiyle kolaylıkla gösterilir.

$f(x)$ fonksiyonunun a 'dan x 'e n kez integrali olan Eş. (2.51)

$$D^{-n} f(x) = \int_a^x \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} f(s) ds = \int_a^x \frac{(x-s)^{n-1}}{\Gamma(n)} f(s) ds \quad (2.52)$$

şeklinde yazılır. $n \in \mathbb{N}$ yerine herhangi bir ξ sayısı alındığında

$$D^{-\xi} f(x) = \int_a^x \frac{(x-s)^{\xi-1}}{\Gamma(\xi)} f(s) ds \quad (2.53)$$

şeklinde yazılabilir. Burada paydayı tanımsız yapan $\Gamma(\xi)$ değerlerine dikkat edilmelidir.

Aslında; yukarıdaki Cauchy integral formülü, ilk defa başlangıç noktası karmaşık değerli analitik fonksiyonlar için kesirli analizin temellerinden kabul edilen bir makalede 1884 yılında Laurent tarafından elde edilmiştir [6].

$$D^{m-\xi} f(x) = D^m D^{-\xi} f(x) \quad (2.54)$$

olduğundan

$$D^{\frac{1}{3}} f(x) = D D^{-\frac{2}{3}} f(x) \quad (2.55)$$

ve

$$D^{\frac{4}{3}} f(x) = D^2 D^{-\frac{2}{3}} f(x) \quad (2.56)$$

elde edilir. Örneğin, yarı türev

$$\begin{aligned} D^{\frac{1}{2}} f(x) &= DD^{-\frac{1}{2}} f(x) \\ &= \frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_a^x \frac{1}{\sqrt{x-s}} f(s) ds \end{aligned} \quad (2.57)$$

şeklinde hesaplanabilir. Eş. (2.57) eşitliğinde $f(x) = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} D^{\frac{1}{2}} 1 &= \frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_a^x \frac{ds}{\sqrt{x-s}} \\ &= \frac{d}{dx} \frac{2\sqrt{x-a}}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi(x-a)}} \end{aligned} \quad (2.58)$$

bulunur.

Yukarıda yapılan ayrıntılı açıklamalar doğrultusunda kesirli integral ve türev aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

2.3.7 Tanım (ξ -yinci Basamaktan Kesirli İntegral [7])

$\xi > 0$ ve $f(x)$ lokal integrallenebilir olsun. $-\infty \leq a < x < \infty$ için ξ -yinci basamaktan sağ kesirli integral

$$D_a^{-\xi} f(x) = \int_a^x \frac{(x-s)^{\xi-1}}{\Gamma(\xi)} f(s) ds \quad (2.59)$$

ve benzer şekilde $-\infty < x < b \leq \infty$ için ξ -yinci basamaktan sol kesirli integral

$$D_b^{-\xi} f(x) = \int_x^b \frac{(s-x)^{\xi-1}}{\Gamma(\xi)} f(s) ds \quad (2.60)$$

şeklinde tanımlanır. Özel olarak, $a = 0$ ve $b = +\infty$ iken Riemann kesirli integrali ve $a = -\infty$ ve $b = 0$ iken Liouville kesirli integrali olarak bilinmektedir.

2.3.8 Tanım (ξ -yinci Basamaktan Riemann-Liouville Kesirli Türev [7])

Her ξ için $n = \lceil \xi \rceil$, ξ 'ye eşit veya ξ 'den büyük en küçük tam sayı olmak üzere ξ -yinci basamaktan Riemann-Liouville kesirli türevi

$$D^\xi f(x) = \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x \frac{(x-s)^{n-\xi-1}}{\Gamma(n-\xi)} f(s) ds \quad (2.61)$$

şeklinde tanımlanır.

2.3.9 Tanım (ξ -yinci Basamaktan Caputo Kesirli Türev [7])

Her ξ için $n = \lceil \xi \rceil$ olsun. ξ -yinci basamaktan Caputo kesirli türevi

$${}^C D^\xi f(x) = \int_a^x \frac{(x-s)^{n-\xi-1}}{\Gamma(n-\xi)} \left(\frac{d}{ds} \right)^n f(s) ds \quad (2.62)$$

şeklinde tanımlanır.

Uygulamalarda temel teşkil eden kesirli türev ve integrale ilişkin bir kaç örnek verilsin.

1. $\xi \in \mathbb{R}$ ve $\beta > -1$ için

$$\begin{aligned} D^{-\xi} (x-a)^\beta &= \int_a^x \frac{(x-s)^{\xi-1}}{\Gamma(\xi)} (s-a)^\beta ds \begin{pmatrix} \frac{s-a}{x-a} = u \Rightarrow ds = (x-a) du \\ s = a \Rightarrow u = 0 \\ s = x \Rightarrow u = 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{(x-a)^{\beta+\xi}}{\Gamma(\xi)} \int_0^1 (1-s)^{\xi-1} s^\beta ds \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\xi+\beta+1)} (x-a)^{\beta+\xi} \end{aligned} \quad (2.63)$$

sağlanır.

2. $\xi \in \mathbb{R}$ ve $\beta > -1$ için

$$\begin{aligned}
 D^\xi (x-a)^\beta &= \frac{d^n}{dx^n} D^{-(n-\xi)} (x-a)^\beta \\
 &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\xi+1)} \frac{d^n}{dx^n} (x-a)^{\beta+n-\xi} \\
 &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\xi+1)} (x-a)^{\beta-\xi}
 \end{aligned} \tag{2.64}$$

sağlanır.

$$\begin{aligned}
 3. {}^C D^\xi (x-a)^\beta &= D^{-(n_c-a)} \frac{d^{n_c}}{dx^{n_c}} (x-a)^\beta \\
 &= \beta(\beta-1) \dots (\beta-n_c+1) D^{-(n_c-a)} (x-a)^{\beta-n_c} \\
 &= \begin{cases} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\xi+1)} (x-a)^{\beta-\xi} & ; \beta > n_c - 1 \\ 0 & ; \beta \in 0, 1, \dots, n_c - 1 \\ \text{tanımsız} & ; \text{diğer} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.65}$$

sağlanır.

$$4. D^\xi f(x) = \underbrace{\frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \dots \frac{d}{dx}}_{n \text{ defa}} D^{-(n-\xi)} f(x) = \underbrace{\frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \dots \frac{d}{dx}}_{n-1 \text{ defa}} D^{\xi-n+1} f(x) \text{ sağlanır.}$$

$$5. {}^C D^\xi f(x) = D^{-(n-\xi)} \underbrace{\frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \dots \frac{d}{dx}}_{n=n_c} f(x) \text{ sağlanır.}$$

$$6. \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ ve } \xi \in \mathbb{R}^+ \text{ için } D^\xi (\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda D^\xi f(x) + \mu D^\xi g(x) \text{ sağlanır.}$$

$$7. m, n \in \mathbb{N}, \xi \in \mathbb{R}^+ \text{ ve } n-1 < \xi < n \text{ için } D^\xi D^m f(x) = D^{\xi+m} f(x) \neq D^m D^\xi f(x) \text{ sağlanır.}$$

$$8. \xi \in \mathbb{R} \text{ ve } \xi, \beta > 0 \text{ için } D^{-\xi} \left(D^{-\beta} f(x) \right) = D^{-(\xi+\beta)} f(x) \text{ sağlanır.}$$

$$9. a, b \in \mathbb{R} \text{ ve } \xi \in \mathbb{R}^+ \text{ için } D^{-\xi} (af(x) + bg(x)) = aD^{-\xi} f(x) + bD^{-\xi} g(x) \text{ sağlanır.}$$

10. $\xi, \beta \in \mathbb{R}^+$ için $D^\xi \left(D^\beta f(x) \right) = D^{\xi+\beta} (f(x))$ sağlanır.

11. $D^{-1} D f(x) = \int_0^x f'(s) ds = f(x) - f(0)$

$$D^{-2} D^2 f(x) = \int_0^x \int_0^s f''(u) du ds = f(x) - f(0) - x f'(0)$$

$$D^{-3} D^3 f(x) = f(x) - f(0) - x f'(0) - \frac{x^2}{2} f''(0)$$

.

.

.

$$D^{-k} D^k f(x) = f(x) - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$$

.

.

.

$$D^\xi f(x) = f(0) \frac{x^{-\xi}}{\Gamma(1-\xi)} + f'(0) \frac{x^{1-\xi}}{\Gamma(2-\xi)} + \dots + f^{(n)}(0) \frac{x^{n-\xi}}{\Gamma(n+1-\xi)} + \dots$$

$$D^\xi u(x) = f(x, u(x)) \Rightarrow u(x) = D^{-\xi} \left(D^\xi u(x) \right) = \frac{1}{\Gamma(\xi)} \int_0^t \frac{1}{(x-s)^{1-\xi}} D^\xi u(s) ds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\xi)} \int_0^t \frac{1}{(x-s)^{1-\xi}} f(s, u(s)) ds \quad (2.66)$$

elde edilir.

Kesirli integral tanımı Eş. (2.53) bir kaç yoldan elde edilebilir [2, s. 6]. Bu yollardan biride n -inci basamaktan lineer başlangıç değer problemi için elde edilen tek noktalı (yönlü, taraflı, yanlı) Green fonksiyonu yardımıyla tanımlamaktadır.

2.4. Tek Noktalı ve İki Noktalı Green Fonksiyonlarının İnşası

Kolaylık açısından $n = 2$ durumu göz önüne alınsın. Kapalı ve sonlu bir $[a, b]$ aralığında $a_0(x)$, $a_1(x)$ ve $a_2(x)$ katsayıları sürekli ve bu aralıkta $a_2(x) > 0$ olmak üzere ikinci

basamaktan

$$Ly(x) = a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0 \quad (2.67)$$

lineer bir adi diferensiyel denklem göz önüne alınsın. Şimdi $f(x)$, $[a, b]$ aralığında sürekli olmak üzere

$$\begin{cases} Ly(x) = f(x) \\ y(a) = y'(a) = 0 \end{cases} \quad (2.68)$$

başlangıç değer probleminin bir $y(x)$ çözümü aransın. Bunun için homogen olmayan diferensiyel denklemlerin özel çözümünü bulmada kullanılan yöntemlerden biri olan parametrelerin değişimi yöntemi (PDY) kullanılsın. Bu yöntem uygulandığında önemli bir kavram Green fonksiyonu karşımıza çıkmaktadır. PDY'de $\phi_1(x)$ ve $\phi_2(x)$, $Ly(x) = 0$ diferensiyel denkleminin herhangi iki lineer bağımsız çözümü olsun. $v_1(x)$ ve $v_2(x)$ belirlenecek fonksiyonlar olmak üzere

$$y(x) = v_1(x)\phi_1(x) + v_2(x)\phi_2(x) \quad (2.69)$$

bir özel çözüm olsun. Bu özel çözüm Eş. (2.68)'deki diferensiyel denklemde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılsa

$$\begin{cases} v_1'(x)\phi_1(x) + v_2'(x)\phi_2(x) = 0 \\ v_1'(x)\phi_1'(x) + v_2'(x)\phi_2'(x) = \frac{f(x)}{a_2(x)} \end{cases} \quad (2.70)$$

sistemi elde edilir. Böylece $v_1(x)$ ve $v_2(x)$,

$$v_1(x) = - \int_a^x \frac{f(s)\phi_2(s)}{a_2(s) \begin{vmatrix} \phi_1(s) & \phi_2(s) \\ \phi_1'(s) & \phi_2'(s) \end{vmatrix}} ds + A \quad (2.71)$$

ve

$$v_2(x) = \int_a^x \frac{f(s) \phi_1(s)}{a_2(s) \begin{vmatrix} \phi_1(s) & \phi_2(s) \\ \phi_1'(s) & \phi_2'(s) \end{vmatrix}} ds + B \quad (2.72)$$

şeklinde kolaylıkla bulunur. Böylece $y(x)$ genel çözümü, Wronskiye

$$W(\phi_1(x), \phi_2(x)) = W(\phi_1, \phi_2)(x) = W(x) = \begin{vmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) \\ \phi_1'(x) & \phi_2'(x) \end{vmatrix} \quad (2.73)$$

olmak üzere

$$y(x) = -\phi_1(x) \int_a^x \frac{f(s) \phi_2(s)}{a_2(s) W(s)} ds + \phi_2(x) \int_a^x \frac{f(s) \phi_1(s)}{a_2(s) W(s)} ds + A\phi_1(x) + B\phi_2(x) \quad (2.74)$$

elde edilir. Eş. (2.74)'deki iki integrali birleştirirsek, tek noktalı Green fonksiyonu

$$H(x, s) = -\frac{1}{a_2(s)} \frac{\begin{vmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) \\ \phi_1(s) & \phi_2(s) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \phi_1(s) & \phi_2(s) \\ \phi_1'(s) & \phi_2'(s) \end{vmatrix}}, \quad (2.75)$$

$y_p(x)$ homogen olmayan kısmın çözümü ve $y_h(x)$ homogen kısmın çözümü olmak üzere genel çözüm

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x)$$

$$= \int_a^x H(x, s) f(s) ds + A\phi_1(x) + B\phi_2(x) \quad (2.76)$$

şeklinde yeniden yazılır. Eş. (2.75) ile tanımlanan fonksiyon, $Ly(x) = f(x)$ diferensiyel denklemini sağlar. Şimdi Eş. (2.76) genel çözümünün $y(a) = y'(a) = 0$ başlangıç şartlarını

sağladığını kullanarak A ve B sabitleri bulunsun.

$$\begin{aligned}
 y(a) &= 0 \Rightarrow y(a) = \int_a^a H(x,s) f(s) ds + A\phi_1(a) + B\phi_2(a) \\
 &= 0 + A\phi_1(a) + B\phi_2(a) \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{2.77}$$

elde edilir. Tanım 2.1.2 (Leibnitz Formülü)'den

$$y'(x) = H(x,x) f(x) + \int_a^x \frac{\partial H(x,s)}{\partial x} f(s) ds + A\phi_1'(x) + B\phi_2'(x) \tag{2.78}$$

bulunur. Eş. (2.75)'den $H(x,x) = 0$ ve böylece Eş. (2.78)'den

$$y'(a) = A\phi_1'(a) + B\phi_2'(a) = 0 \tag{2.79}$$

olur. Eş. (2.77) ve Eş. (2.79) denklemlerinden oluşan sistemlerde katsayılar determinantı sıfırdan farklı Wronskiyene karşılık geldiğinden tek çözüm aşikar çözümdür. Yani, $A = B = 0$ bulunur. Sonuç olarak; $y(x)$ çözümü, $H(x,s)$ tek noktalı Green fonksiyonu olmak üzere

$$y(x) = \int_a^x H(x,s) f(s) ds \tag{2.80}$$

şeklinde ifade edilir.

Şimdi tek noktalı $H(x,s)$ Green fonksiyonunun n -inci basamaktan lineer başlangıç değer problemi için tanımı verilsin [4].

2.4.10 Tanım (Tek Noktalı Green Fonksiyonu)

Kapalı ve sonlu bir $I = [a, b]$ aralığındaki her x için $a_n(x) \neq 0$, $f(x)$ ve her $k = 0, 1, \dots, n$ için

$a_k(x)$ sürekli reel fonksiyonlar olmak üzere

$$\begin{cases} Ly(x) = a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0(x)y(x) = f(x) \\ k = 0, 1, \dots, n \text{ için } y^{(k)}(a) = 0 \end{cases} \quad (2.81)$$

başlangıç değer problemi için $H(x, s)$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa tek noktalı Green fonksiyonu denir.

(H_1) $H, I \times I$ dikdörtgensel bölgesinde tanımlı

(H_2) $k = 0, 1, \dots, n$ için $\frac{\partial^k H}{\partial x^k}$ kısmi türevleri var ve $I \times I$ bölgesinde sürekli

(H_3) $0 \leq k \leq n-2$ için $\frac{\partial^k}{\partial x^k} H(x, s) \Big|_{x=s} = 0$

(H_4) $\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} H(x, s) \Big|_{x=s} = \frac{1}{a_n(s)}$

(H_5) $L_x H(x, s) = 0$ (L_x, L operatörü üzerinde x 'e göre türevi göstermektedir).

2.4.2. Teorem

I aralığında $a_n(x) > 0$ ve $Ly(x) = 0$ diferensiyel denkleminin n tane lineer bağımsız çözümü

$\{\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)\}$ olsun. Tek noktalı Green fonksiyonu $H(x, s)$ (Cauchy fonksiyonu)

$$H(x, s) = \frac{(-1)^{n-1}}{a_n(s)} \begin{vmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) & \dots & \phi_n(x) \\ \phi_1(s) & \phi_2(s) & \dots & \phi_n(s) \\ \phi_1'(s) & \phi_2'(s) & \dots & \phi_n'(s) \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \phi_1^{(n-2)}(s) & \phi_2^{(n-2)}(s) & \dots & \phi_n^{(n-2)}(s) \\ \phi_1(s) & \phi_2(s) & \dots & \phi_n(s) \\ \phi_1'(s) & \phi_2'(s) & \dots & \phi_n'(s) \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \phi_1^{(n-1)}(s) & \phi_2^{(n-1)}(s) & \dots & \phi_n^{(n-1)}(s) \end{vmatrix} \quad (2.82)$$

şeklinde tanımlansın. Böylece

$$y(x) = \int_a^x H(x, s) f(s) ds = \int_a^x H(x, s) Ly(s) ds \quad (2.83)$$

fonksiyonu $k = 0, 1, \dots, n-1$ için Eş. (2.81) başlangıç değer problemini sağlar.

İspat

Kolaylık sağlaması açısından $0 \leq j \leq n$ için

$$H_j(x, s) = \frac{\partial^j H(x, s)}{\partial x^j} \quad (2.84)$$

tanımlansın.

$$y'(x) = \underbrace{H(x,x)}_{=0} f(x) + \int_a^x H_1(x,s) f(s) ds = \int_a^x H_1(x,s) f(s) ds$$

$$y''(x) = \underbrace{H_1(x,x)}_{=0} f(x) + \int_a^x H_2(x,s) f(s) ds = \int_a^x H_2(x,s) f(s) ds$$

.

.

.

$$k = 0, 1, \dots, n-1 \quad \text{için} \quad y^{(k)}(x) = \underbrace{H_{k-1}(x,x)}_{=0} + \int_a^x H_k(x,s) f(s) ds \quad (2.85)$$

.

.

.

$$\begin{aligned} y^n(x) &= H_{n-1}(x,x) f(x) + \int_a^x H_n(x,s) f(s) ds \\ &= \frac{f(x)}{a_n(x)} + \int_a^x H_n(x,s) f(s) ds \end{aligned} \quad (2.86)$$

$y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)$ türevleri Eş. (2.81) probleminin diferensiyel denkleminde yerine yazılırsa $a_{n-k}(x)$ ile $y^{(n)}(x)$ çarpılıp $0 \leq k \leq n$ için k üzerinden integral alınırsa

$$Ly(x) = f(x) + \int_a^x \underbrace{L_x H(x,s)}_{=0} f(s) ds = f(x) \quad (2.87)$$

elde edilir. Ek olarak, Eş. (2.86)'den $0 \leq k \leq n-1$ için $y^{(k)}(a) = 0$ olduğundan $y(x)$ 'in (2.81) başlangıç değer probleminin çözümü olduğu gösterilmiş olup ispat tamamlanır.

Şimdi tek noktalı Green fonksiyonu $H(x,s)$ yardımıyla Eş. (2.59) tanımının nasıl elde edildiği gösterilsin. $L = D^n = \frac{d^n}{dx^n}$ olmak üzere

$$Ly(x) = D^n y(x) = 0 \quad (2.88)$$

diferensiyel denklemin n tane lineer bağımsız çözümü $1, x, \dots, x^{n-1}$ fonksiyonlarıdır. Bir başka ifade ile temel çözümler kümesi $\{1, x, \dots, x^{n-1}\}$ şeklindedir. $(n-1)!! = \prod_{k=0}^{n-1} k!$ olmak

üzere Eş. (2.82)'den

$$\begin{aligned}
 H(x, s) &= \frac{(-1)^{n-1}}{1} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ 1 & s & s^2 & \dots & s^{n-1} \\ 0 & 1 & 2s & \dots & (n-1)s^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (n-1)! \end{vmatrix} \\
 &= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!!} \begin{vmatrix} 1 & s & s^2 & \dots & s^{n-1} \\ 0 & 1 & 2s & \dots & (n-1)s^{n-2} \\ 0 & 0 & 2 & \dots & (n-1)(n-2)s^{n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (n-1)! \end{vmatrix} \\
 &= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!!} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ 1 & s & s^2 & \dots & s^{n-1} \\ 0 & 1 & 2s & \dots & (n-1)s^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (n-1)! \end{vmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.89}$$

ifadesi $\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!!} [(-1)^{n+1} (n-2)!!] = \frac{1}{(n-1)!}$ katsayısına sahip x 'in $(n-1)$ -inci dereceden bir polinomudur. Fakat,

$$0 \leq k \leq n-2 \text{ için } \left. \frac{\partial^k}{\partial x^k} H(x, s) \right|_{x=s} = 0 \tag{2.90}$$

olduğu bilinmektedir. Sonuç olarak; $s, n - 1$ 'in bir köküdür ve tek noktalı Green fonksiyonu

$$H(x, s) = \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} \quad (2.91)$$

şeklinde elde edilir. Böylece

$$y(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-s)^{n-1} f(s) ds = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-s)^{n-1} f(s) ds \quad (2.92)$$

fonksiyonu

$$\begin{cases} \frac{d^n y}{dx^n} = f(x) \\ k = 0, 1, \dots, n-1 \text{ için } y^{(k)}(a) = 0 \end{cases} \quad (2.93)$$

başlangıç değer probleminin bir tek çözümüdür. Eş. (2.92) eşitliği

$$D^{-n} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-s)^{n-1} f(s) ds \quad (2.94)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Sonuç olarak; n doğal sayısı, $\text{Re } \xi > 0$ olmak üzere ξ ile yer değiştirilirse ξ -yinci basamaktan sağ kesirli integral Eş. (2.59) tanımını n -inci basamaktan lineer başlangıç değer problemi için tek noktalı Green fonksiyonu yardımıyla yeniden elde edilir.

Şimdi Lyapunov tipi eşitsizliklerde en iyi sayı elde edilmesine yardımcı olan iki noktalı Green fonksiyonunun tek noktalı Green fonksiyonu aracılığı ile nasıl elde edildiği gösterilsin.

Öncelikle Eş. (2.62) tanımının tek noktalı Green fonksiyonu yardımıyla elde edilişi verilsin.

2.4.11 Tanım

$I = [a, b]$ kapalı aralığında $a_n(x) > 0$ ve $0 \leq k \leq n$ için $a_k(x)$ katsayıları C^∞ sınıfından ve L^* ,

L 'nin adjointi olsun.

$$\begin{cases} L^*y(x) = f(x) \\ k = 0, 1, \dots, n-1 \text{ için } y^{(k)}(b) = 0 \end{cases} \quad (2.95)$$

başlangıç değer problemi göz önüne alınsın. L 'nin tek noktalı Green fonksiyonu $H(x, s)$ olmak üzere L^* 'in tek noktalı Green fonksiyonu $H^*(x, s) = -H(s, x)$ şeklinde tanımlansın [1, s. 37]. Böylece

$$y(x) = \int_x^b H(s, x) f(s) ds \quad (2.96)$$

fonksiyonu Eş. (2.95) başlangıç değer probleminin bir çözümüdür. Özel olarak; $L = \frac{d^n}{dx^n}$ ise $L^* = (-1)^n L$ olduğundan L , self-adjointtir. L 'nin bu özel değeri için

$$H(x, s) = \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} \quad (2.97)$$

elde edilir. Böylece, adjoint

$$\begin{cases} (-1)^n \frac{d^n y(x)}{dx^n} = f(x) \\ k = 0, 1, \dots, n-1 \text{ için } y^{(k)}(b) = 0 \end{cases} \quad (2.98)$$

başlangıç değer probleminin bir tek çözümü

$$y(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_x^b (s-x)^{n-1} f(s) ds \quad (2.99)$$

şeklindedir. Eş. (2.99) eşitliği

$$D^{-n}f(x) := D_b^{-n}f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_x^b (s-x)^{n-1} f(s) ds \quad (2.100)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Sonuç olarak n doğal sayısı $\text{Re } \xi > 0$ olmak üzere ξ ile yer değiştirilirse ξ -yinci basamaktan sol kesirli integral Eş. (2.60) tanımı n -inci basamaktan kısmi lineer başlangıç değer problemi için tek noktalı Green fonksiyonu yardımıyla yeniden elde edilir.

Şimdi bu iki sonuç, kolaylık açısından $n = 2$ alınarak birleştirilirse, tek noktalı Green fonksiyonu $H(x, s)$ yardımıyla iki noktalı Green fonksiyonu $G(x, s)$ elde edilir. Bunun için iki noktalı

$$\begin{cases} Ly(x) = f(x) \\ y(a) + y(b) = 0 \\ y'(a) + y'(b) = 0 \end{cases} \quad (2.101)$$

sınır değer problemi göz önüne alınsın. Eş. (2.59) ve Eş. (2.60)'dan Green fonksiyonunun $x = a$ noktası komşuluğunda $\frac{H(x, s)}{2}$ gibi $x = b$ noktası komşuluğunda $-\frac{H(x, s)}{2}$ gibi davranması beklenilmesi açıktır. Daha açık bir ifade ile

$$s < x \text{ için } g(x, s) = \frac{H(x, s)}{2} \quad (2.102)$$

ve

$$s > x \text{ için } g(x, s) = -\frac{H(x, s)}{2} \quad (2.103)$$

yazılır.

$$y(x) = \int_a^b g(x, s) f(s) ds \quad (2.104)$$

fonksiyonunun Eş. (2.101) anti-periyodik sınır değer problemini sağladığı iddia edilmektedir. Yani; Eş. (2.104), Eş. (2.101)'nin bir çözümüdür. Bu iddiayı doğrulamak için Eş. (2.104)'den $Ly(x) = 0$ hesaplınsın ($g(x, s)$ ve onun türevleri $x = s$ noktasında süreksiz olabileceğinden $x = s$ noktası dikkate alınmalıdır).

Şimdi $u(x) = \int_a^x g(x, s) f(s) ds + \int_x^b g(x, s) f(s) ds$ olmak üzere $u'(x)$ ve $u''(x)$ türevleri hesaplınsın.

$$u'(x) = \lim_{\substack{s \rightarrow x \\ s < x}} \underbrace{g(x, s) f(s)}_{=0} - \lim_{\substack{s \rightarrow x \\ s > x}} \underbrace{g(x, s) f(s)}_{=0} + \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} [g(x, s) f(s)] ds \quad (2.105)$$

elde edilir. $g(x, s)$ fonksiyonunun tanımından yukarıdaki limitlerin her ikisi de sıfırdır. Şimdi

$$u''(x) = \left[\lim_{\substack{s \rightarrow x \\ s < x}} \frac{\partial g(x, s)}{\partial x} - \lim_{\substack{s \rightarrow x \\ s > x}} \frac{\partial g(x, s)}{\partial x} \right] f(x) + \int_a^b \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x, s) f(s) ds \quad (2.106)$$

bulunur.

$$s < x \text{ için } \frac{\partial}{\partial x} g(x, s) = -\frac{1}{2a_2} \begin{vmatrix} \phi_1'(x) & \phi_2'(x) \\ \phi_1(s) & \phi_2(s) \end{vmatrix} \frac{1}{W(s)} \quad (2.107)$$

olduğundan

$$\lim_{\substack{s \rightarrow x \\ s < x}} \frac{\partial}{\partial x} g(x, s) = \frac{1}{2a_2(x)} \quad (2.108)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\lim_{\substack{s \rightarrow x \\ s > x}} \frac{\partial}{\partial x} g(x, s) = -\frac{1}{2a_2(x)} \quad (2.109)$$

bulunur. Buradan

$$y''(x) = \frac{f(x)}{a_2(x)} + \int_a^b \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x, s) f(s) ds \quad (2.110)$$

ve böylece yerlerine yazılırsa

$$Ly(x) = f(x) \quad (2.111)$$

elde edilir. Buradan $y(x)$ fonksiyonunun denklemi sağladığı görülür. Şimdi, $y(x)$ fonksiyonunun sınır şartlarını sağladığı gösterilsin.

$$y(x) = \int_a^b g(x, s) f(s) ds = \int_a^x H(x, s) f(s) ds - \int_x^b \frac{H(x, s)}{2} ds \quad (2.112)$$

olmak üzere

$$y(a) = \int_a^a H(a,s) f(s) ds - \int_a^b \frac{H(a,s)}{2} ds = - \int_a^b \frac{H(a,s)}{2} ds \quad (2.113)$$

ve

$$y(b) = \int_a^b H(b,s) f(s) ds - \int_b^b \frac{H(b,s)}{2} ds = \int_a^b H(b,s) ds \quad (2.114)$$

elde edilir. Böylece $y(a) + y(b) = 0$ bulunur. Benzer şekilde $y'(a) + y'(b) = 0$ olur.

İnşa edilen $g(x,s)$ fonksiyonu iki noktalı bir Green fonksiyonudur. Burada, iki noktalı sınır şartlarının sadece özel bir durumu için Green fonksiyonu elde edildi. Şimdi aynı diferensiyel operatör için genel iki noktalı sınır şartları altında $G(x,s)$ Green fonksiyonunun nasıl oluşturulduğu gösterilsin. Yani; $Ly(x) = a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x)$ ve en genel iki nokta sınır şartları için Green elde edilsin. Yukarıda yapılan açıklamalardan

$$G(x,s) = g(x,s) + \Psi_1(s) \phi_1(x) + \Psi_2(s) \phi_2(x) \quad (2.115)$$

ile $\Psi_1(s)$ ve $\Psi_2(s)$ belirlenecek fonksiyonlar olmak üzere

$$y(x) = \int_a^b G(x,s) f(s) ds \quad (2.116)$$

fonksiyonu

$$Ly(x) = f(x) \quad (2.117)$$

diferensiyel denklemini sağlar. Şimdi $U_1(G)$ ve $U_2(G)$ sıfır olacak şekilde $\Psi_1(s)$ ve $\Psi_2(s)$ fonksiyonları belirlensin. Eğer bu yapılırsa $i = 1, 2$ için

$$U_i(y) = \int_a^b U_i[G(x,s)] f(s) ds \quad (2.118)$$

elde edilir. Böylece $y(x)$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} U_1(y) &= A_1 y(a) + A_2 y'(a) + A_3 y(b) + A_4 y'(b) \\ U_2(y) &= B_1 y(a) + B_2 y'(a) + B_3 y(b) + B_4 y'(b) \end{aligned} \quad (2.119)$$

sınır şartlarını sağlar. Eş. (2.115)'dan $i = 1, 2$ için

$$U_i(G) = U_i(g) + \Psi_1(s) U_i(\phi_1) + \Psi_2(s) U_i(\phi_2) \quad (2.120)$$

sağlanır. Bu iki denklem sıfıra eşitlenirse Ψ_1 ve Ψ_2 çözülebilir. Yani,

$$\begin{aligned} i &= 1 \text{ ise } -U_1(g) = \Psi_1(s) U_1(\phi_1) + \Psi_2(s) U_1(\phi_2) \\ i &= 2 \text{ ise } -U_2(g) = \Psi_1(s) U_2(\phi_1) + \Psi_2(s) U_2(\phi_2) \end{aligned} \quad (2.121)$$

sisteminden Cramer yöntemi ile çözümünden

$$\Psi_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} -U_1(g) & U_1(\phi_2) \\ -U_2(g) & U_2(\phi_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} U_1(\phi_1) & U_1(\phi_2) \\ U_2(\phi_1) & U_2(\phi_2) \end{vmatrix}} \text{ ve } \Psi_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} U_1(\phi_1) & -U_1(g) \\ U_2(\phi_1) & -U_2(g) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} U_1(\phi_1) & U_1(\phi_2) \\ U_2(\phi_1) & U_2(\phi_2) \end{vmatrix}} \quad (2.122)$$

bulunur. Sınır şartları üzerine kısıtlamalar konulur. Yani,

$$D(U) = \begin{vmatrix} U_1(\phi_1) & U_1(\phi_2) \\ U_2(\phi_1) & U_2(\phi_2) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2.123)$$

kısıtlaması $D(U) \neq 0$ olması

$$\begin{cases} Ly(x) = 0 \\ U_1(y) = 0 \\ U_2(y) = 0 \end{cases} \quad (2.124)$$

sınır değer probleminin tutarsız ya da problemin sadece aşıkâr çözüme sahip olduğunu söyler. Yani, $y(x) \equiv 0$ 'dır. Eş. (2.115)'nin kapalı bir formu

$$G(x, s) = \frac{1}{D(U)} \begin{vmatrix} g(x, s) & \phi_1(x) & \phi_2(x) \\ U_1(g) & U_1(\phi_1) & U_1(\phi_2) \\ U_2(g) & U_2(\phi_1) & U_2(\phi_2) \end{vmatrix} \quad (2.125)$$

şeklindedir.

$G(x, s)$ Green fonksiyonunun n -inci basamaktan iki noktalı lineer sınır değer problemi için elde edilişi verilmeden doğrudan tanımını verilecektir.

2.4.12 Tanım

Her $x \in I = [a, b]$ için $a_n(x) \neq 0$, her $k = 0, 1, \dots, n$ için $a_k(x)$ reel değerli sürekli fonksiyonlar, her $i = 1, 2, \dots, m$ ve $j = 0, 1, \dots, n-1$ için η_j^i, β_j^i ve γ_j reel sabitler olmak üzere iki noktalı n -inci basamaktan lineer

$$\begin{cases} Ly(x) = a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0 \\ U_i(y) = \sum_{j=0}^{n-1} (\eta_j^i y^{(j)}(a) + \beta_j^i y^{(j)}(b)) = 0 \end{cases} \quad (2.126)$$

sınır değer problemi göz önüne alınsın.

2.4.13 Tanım

Eş. (2.126) sınır değer problemi için $G(x, s)$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyor ise $G(x, s)$ fonksiyonuna Green fonksiyonu denir.

G1) $G, I \times I$ karesel bölgesinde tanımlıdır.

G2) $k = 0, 1, \dots, n-2$ için $\frac{\partial^k G}{\partial x^k}, I \times I$ karesel bölgesinde kısmi türevleri var ve bu kısmi türevleri süreklidir.

G3) $\frac{\partial^{n-1} G}{\partial x^{n-1}}$ ve $\frac{\partial^n G}{\partial x^n}, a \leq s < x \leq b$ ve $a \leq x < s \leq b$ üçgensel bölgelerinde var ve süreklidir.

G4) Her bir $x \in (a, b)$ için $\frac{\partial^{n-1} G}{\partial x^{n-1}}(x, x^+)$ ve $\frac{\partial^{n-1} G}{\partial x^{n-1}}(x, x^-)$ sağ ve sol limitleri vardır. Yani, $s > x$ veya $s < x$ olmak üzere $(x, s) \rightarrow (x, x)$ limitleri vardır. Ayrıca,

$$\frac{\partial^{n-1} G}{\partial x^{n-1}}(x, x^+) - \frac{\partial^{n-1} G}{\partial x^{n-1}}(x, x^-) = -\frac{1}{a_2(x)} \quad (2.127)$$

vardır.

G5) Her bir $s \in (a, b)$ için $x \in [a, s]$ ve $x \in (s, b]$ üzerinde $Ly(x) = 0$ diferensiyel denkleminin bir çözümü $x \rightarrow G(x, s)$ fonksiyonudur. Yani, her iki aralıkta denklemleri sağlar.

$$a_n(x) \frac{\partial^n G(x, s)}{\partial x^n} + \dots + a_0(x) G(x, s) = 0 \quad (2.128)$$

sağlanır.

G6) Her bir $s \in (a, b)$ ve $i = 1, 2, \dots, m$ için $x \rightarrow G(x, s)$ fonksiyonu sınır şartlarını $U_i(G(\cdot, s)) = 0$ sağlar. Yani,

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left(\eta_j^i \frac{\partial^j G}{\partial x^j}(a, s) + \beta_j^i \frac{\partial^j G}{\partial x^j}(b, s) \right) = 0 \quad (2.129)$$

sağlanır.

Green fonksiyonunun elde edilmesine ilişkin bir kaç metottan sadece literatürde yaygın olarak kullanılan bir metodu verelim.

Eş. (1.5) sınır değer problemindeki $y''(x) + q(x)y(x) = 0$ diferensiyel denkleminin a 'dan

x 'e iki kez integral alınırsa

$$y(x) = d_0 + d_1(x-a) - \int_a^x (x-s)q(s)y(s)ds \quad (2.130)$$

genel çözümü elde edilir. d_0 ve d_1 keyfi sabitlerini bulmak için $y(a) = 0$ ve $y(b) = 0$ sınır şartları kullanılırsa $y(a) = 0$ şartından $d_0 = 0$ bulunur. Diğer yandan, $y(b) = 0$ şartından $d_1 = \frac{1}{b-a} \int_a^b (b-s)q(s)y(s)ds$ elde edilir. Bulunan d_0 ve d_1 değerleri $y''(x) + q(x)y(x) = 0$ diferensiyel denkleminde yerine yazılırsa

$$y(x) = \int_a^b \frac{(x-a)(b-s)}{b-a} q(s)y(s)ds - \int_a^x (x-s)q(s)y(s)ds \quad (2.131)$$

veya

$$y(x) = \int_a^x \left[\frac{(x-a)(b-s)}{b-a} - (x-s) \right] q(s)y(s)ds + \int_x^b \frac{(x-a)(b-s)}{b-a} q(s)y(s)ds \quad (2.132)$$

elde edilir. Sonuç olarak, Green fonksiyonu $G(x,s)$

$$G(x,s) = \begin{cases} \frac{(x-a)(b-s)}{b-a} + s - x & , \quad a \leq s \leq x \\ \frac{(x-a)(b-s)}{b-a} & , \quad x \leq s \leq b \end{cases} \quad (2.133)$$

olmak üzere aşıkâr olmayan $y(x)$ çözümü

$$y(x) = \int_a^b G(x,s)q(s)y(s)ds \quad (2.134)$$

şeklinde integral denklemini sağlar.

3. LİTERATÜRDEKİ KESİRLİ SINIR DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN LYAPUNOV TİPİ EŞİTSİZLİKLER

Literatürde, Eş. (1.6) Lyapunov eşitsizliğinin bir çok genellemesi ve ispatı mevcuttur.

1951'de Hartman ve Winter [9], Green fonksiyonunu kullanarak Eş. (1.6) Lyapunov eşitsizliğinin doğal bir genellemesi olan bir eşitsizlik elde ettiler. Eş. (1.5) adi Dirichlet sınır değer probleminin aşikar olmayan çözümü $y(x)$, $q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve

$$q^+(x) = \max\{q(x), 0\} \text{ ve } q^-(x) = \max\{-q(x), 0\} \quad (3.1)$$

olmak üzere

$$\int_a^b (s-a)(b-s)q^+(s)ds > b-a \quad (3.2)$$

eşitsizliğini elde ettiler. Burada $q^+(x)$ ve $q^-(x)$, sırasıyla $q(x)$ fonksiyonunun pozitif ve negatif kısımlarıdır.

Klasik Lyapunov eşitsizliği ve genellemelerinin ortaya çıkışından sonra kesirli sınır değer problemleri için elde edilen Lyapunov tipi eşitsizliklerde oldukça geniş bir literatür meydana gelmiştir. Şimdi kesirli sınır değer problemleri için elde edilen Lyapunov tipi eşitsizlikler tarihsel süreç içerisinde verilsin.

2013 yılında Ferreira [10], $q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli olmak üzere

$$\begin{cases} (D^\xi y)(x) + q(x)y(x) = 0, a < x < b, 1 < \xi \leq 2 \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

kesirli sınır değer problemi üzerine çalıştı. Elde ettiği sonuçta Eş. (3.3) problemine karşılık gelen

$$G(x, s) = \frac{1}{\Gamma(\xi)} \begin{cases} \left(\frac{(x-a)(b-s)}{(b-a)} \right)^{\xi-1} - (x-s)^{\xi-1} & , a \leq s \leq x \leq b \\ \left(\frac{(x-a)(b-s)}{(b-a)} \right)^{\xi-1} & , a \leq x \leq s \leq b \end{cases} \quad (3.4)$$

Green fonksiyonunu kullanmıştır. $y(x)$ fonksiyonu, Eş. (3.3) probleminin aşıkâr olmayan çözümü olmak üzere

$$y(x) = \int_a^b G(x,s) q(s) y(s) ds \quad (3.5)$$

integral denklemini sağladığını ispatladı. Daha sonra, Eş. (3.4) Green fonksiyonunu kullanarak Eş. (3.3) problemi için

$$\int_a^b |q(s)| ds > \Gamma(\xi) \left(\frac{4}{b-a} \right)^{\xi-1} \quad (3.6)$$

Lyapunov tipi eşitsizliği elde etti.

2014 yılında Ferreira [11], Eş. (2.61) Riemann-Liouville kesirli türevine sahip Eş. (3.3) kesirli sınır değer problemi için Eş. (3.6) Lyapunov tipi eşitsizliği elde ettikten sonra Eş. (2.62) Caputo kesirli türevine sahip

$$({}^C D^\xi y)(x) + q(x)y(x) = 0 \quad a < x < b, \quad 1 < \xi \leq 2 \quad (3.7)$$

$$y(a) = y(b) = 0 \quad (3.8)$$

kesirli sınır değer problemi için aşağıdaki Lyapunov tipi eşitsizliği elde etti. Elde edilen sonucu vermeden önce Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türev arasındaki ilişkiden bahsedelim.

$$({}^C D^\xi y)(x) = \left(D^\xi y \right)(x) - \frac{y(a)}{\Gamma(1-\xi)} (x-a)^{-\xi} - \frac{y'(a)}{\Gamma(2-\xi)} (x-a)^{1-\xi} \quad (3.9)$$

olduğundan Eş. (3.8) sınır şartlarına sahip Eş. (3.7) denkleminin Eş. (3.3) problemine denk olmadığına dikkat edilmelidir. $y(a) = 0$, Eş. (3.9)'da yerine yazılırsa $\left({}^C D^\xi y \right)(x) = \left(D^\xi y \right)(x)$ olması için $y'(a) = 0$ olmalıdır. Bu tür bir durumda ise hem Eş. (3.3) hem de Eş. (3.8) sınır şartlarına sahip Eş. (3.7) denklemi sadece aşıkâr çözüme sahiptir [12, Bölüm 3.5.1]. Aşıkâr olmayan çözümler ile ilgilenildiğinden $y'(a) = 0$ olamaz. Sonuç olarak, Eş.

(3.3) ve Eş. (3.8) sınır şartlarına sahip Eş. (3.7) denkleminin birbirinden farklı olduğuna dikkat edilmelidir [12, s. 91’de (2.4.6)].

Ferreira [11], $y(x)$ Eş. (3.8) sınır şartlarına sahip Eş. (3.7) denkleminin aşikar olmayan bir çözümü ve Green fonksiyonu $G(x, s)$,

$$G(x, s) = \frac{1}{\Gamma(\xi)} \begin{cases} \frac{(x-a)(b-s)^{\xi-1}}{b-a} - (x-s)^{\xi-1} & , \quad a \leq s \leq x \leq b \\ \frac{(x-a)(b-s)^{\xi-1}}{b-a} & , \quad a \leq x \leq s \leq b \end{cases} \quad (3.10)$$

olmak üzere

$$y(x) = \int_a^b G(x, s) q(s) y(s) ds \quad (3.11)$$

integral denkleminin sağlandığını gösterdi. Daha sonra, $q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere Eş. (3.8) sınır şartlarına sahip Eş. (3.7) denkleminin aşikar olmayan bir çözümü $y(x)$ için

$$\int_a^b |q(s)| ds > \frac{\Gamma(\xi) \xi^\xi}{[(\xi-1)(b-a)]^{\xi-1}} \quad (3.12)$$

eşitsizliğini elde etti.

2015 yılında Jleli ve Samet [13], $q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli olmak üzere aşikar olmayan bir $y(x)$ çözümüne sahip (3.7) Caputo kesirli diferensiyel denklemi için

$$y(a) = y'(b) = 0 \quad (3.13)$$

veya

$$y'(a) = y(b) = 0 \quad (3.14)$$

karmaşık sınır koşullarını kullanarak sırasıyla

$$\int_a^b (b-s)^{\xi-2} |q(s)| ds \geq \frac{\Gamma(\xi)}{\max\{\xi-1, 2-\xi\} (b-a)} \quad (3.15)$$

ve

$$\int_a^b (b-s)^{\xi-1} |q(s)| ds \geq \Gamma(\xi) \quad (3.16)$$

Lyapunov tipi eşitsizlikleri elde ettiler. Burada $t = a + b - x$ dönüşümüyle (3.13) ve (3.14) sınır şartlarının aslında aynı olduğuna dikkat edilmelidir.

2015 yılında, O'Regan ve Samet [14] $q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$\begin{cases} (D^\xi y)(x) + q(x)y(x) = 0, a < x < b, 3 < \xi \leq 4 \\ y(a) = y'(a) = y''(a) = y''(b) = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

kesirli sınır değer problemi üzerine çalıştılar. Eş. (3.17) kesirli sınır değer probleminin aşikar olmayan bir çözümü $y(x)$ ve Green fonksiyonu $G(x, s)$,

$$G(x, s) = \frac{1}{\Gamma(\xi)} \begin{cases} \frac{(x-a)^{\xi-1} (b-s)^{\xi-3}}{(b-a)^{\xi-3}} - (x-s)^{\xi-1} & , \quad a \leq s \leq x \leq b \\ \frac{(x-a)^{\xi-1} (b-s)^{\xi-3}}{(b-a)^{\xi-3}} & , \quad a \leq x \leq s \leq b \end{cases} \quad (3.18)$$

olmak üzere

$$y(x) = \int_a^b G(x, s) q(s) y(s) ds \quad (3.19)$$

integral denklemi sağlanır. Eş. (3.18) Green fonksiyonunu ve Eş. (3.19) integral denklemini kullanarak aşağıdaki sonucu elde ettiler.

$q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere Eş. (3.17) kesirli sınır değer problemi aşikar olmayan bir $y(x)$ çözümüne sahipse

$$\int_a^b (s-a)(b-s)^{\xi-3} (2b-a-s) |q(s)| ds > \Gamma(\xi) \quad (3.20)$$

eşitsizliği sağlanır.

2015 yılında Rong ve Bai [15], ${}^C D^\xi$ ξ -yinci basamaktan, ${}^C D^\beta$ β -yinci basamaktan Caputo

kesirli türevi ve $q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon olmak üzere

$$\begin{cases} {}^C D^\xi y(x) + q(x)y(x) = 0, a < x < b, 1 < \xi \leq 2, 0 < \beta \leq 1 \\ y(a) = {}^C D^\beta y(b) = 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

kesirli sınır değer problemi üzerine çalıştılar. Öncelikle Eş. (3.21) kesirli sınır değer problemine eşdeğer aşağıdaki gibi bir integral denklemi yazdılar.

Eş. (3.21) kesirli sınır değer probleminin aşikar olmayan bir çözümü $y(x)$, Green fonksiyonu $G(x, s)$,

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{\Gamma(2-\beta)(x-a)(b-s)^{\xi-\beta-1}}{\Gamma(\xi-\beta)(b-a)^{1-\beta}} - \frac{1}{\Gamma(\xi)}(x-s)^{\xi-1}, & a \leq s \leq x \leq b \\ \frac{\Gamma(2-\beta)(x-a)(b-s)^{\xi-\beta-1}}{\Gamma(\xi-\beta)(b-a)^{1-\beta}}, & a \leq x \leq s \leq b \end{cases} \quad (3.22)$$

olmak üzere

$$y(x) = \int_a^b G(x, s) q(s) y(s) ds \quad (3.23)$$

integral denklemini sağlar. Daha sonra, $1 < \xi \leq \beta + 1$ olmak üzere Eş. (3.21) problemine karşılık gelen Lyapunov tipi

$$\int_a^b (b-s)^{\xi-\beta-1} |q(s)| ds \geq \frac{(b-a)^{-\beta}}{\max \left\{ \frac{1}{\Gamma(\xi)} - \frac{\Gamma(2-\beta)}{\Gamma(\xi-\beta)}, \frac{\Gamma(2-\beta)}{\Gamma(\xi-\beta)}, \frac{2-\xi}{\xi-1} \frac{\Gamma(2-\beta)}{\Gamma(\xi-\beta)} \right\}} \quad (3.24)$$

eşitsizliğini elde etiler.

2015 yılında Jleli ve diğerleri [16], $q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$\begin{cases} ({}^C D y)(x) + q(x)y(x) = 0, a < x < b, 1 < \xi \leq 2 \\ y(a) - y'(a) = y(b) + y'(b) = 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

kesirli sınır değer problemini ele aldılar. Daha sonra Eş. (3.25) kesirli sınır değer problemi

için aşikar olmayan bir çözüm $y(x)$, Green fonksiyonu $G(x, s)$,

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{(1+x-a)(b-a)^{\xi-2}(b-s+\xi-1)}{(b-a+2)\Gamma(\xi)} - \frac{(b-a+2)(x-s)^{\xi-1}(b-a)^{\xi-2}(b-s+\xi-1)}{(b-s)^{\xi-1}+(\xi-1)(b-s)^{\xi-2}(b-a+2)\Gamma(\xi)} & , \quad a \leq s \leq x \leq b \\ \frac{(1+x-a)(b-a)^{\xi-2}(b-s+\xi-1)}{(b-a+2)\Gamma(\xi)} & , \quad a \leq x \leq s \leq b \end{cases} \quad (3.26)$$

olmak üzere

$$y(x) = \int_a^b G(x, s) q(s) y(s) ds \quad (3.27)$$

integral denklemini sağladığını gösterdiler. Böylece, Eş. (3.25) sınır değer probleminin aşikar olmayan çözümü $y(x)$ için Lyapunov tipi

$$\int_a^b (b-s)^{\xi-2}(b-s+\xi-1)|q(s)|ds \geq \frac{(b-a+2)\Gamma(\xi)}{\max\{b-a+1, ((2-\xi)/(\xi-1)(b-a)-1)\}} \quad (3.28)$$

eşitsizliğini elde ettiler.

2015 yılında Jleli ve Samet [17], $q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon, $p > 0$ ve $r \geq 0$ olmak üzere

$$\begin{cases} \left({}^C D^\xi y \right) (x) + q(x)y(x) = 0, a < x < b, 1 < \xi < 2 \\ py(a) - ry'(a) = y(b) = 0 \end{cases} \quad (3.29)$$

kesirli sınır değer problemi için aşağıdaki gibi eşdeğer bir integral denklemi elde ettikten sonra Lyapunov tipi eşitsizlikler elde ettiler.

Eş. (3.29) kesirli sınır değer probleminin aşikar olmayan bir $y(x)$ çözümü, Green fonksiyonu

$G(x, s),$

$$G(x, s) = \frac{1}{\Gamma(\xi)} \begin{cases} \frac{\left(\frac{r}{p} + x - a\right)(b-s)^{\xi-1}}{\frac{r}{p} + b - a} - (x-s)^{\xi-1} & , \quad a \leq s \leq x \leq b \\ \frac{\left(\frac{r}{p} + b - a\right)(b-s)^{\xi-1}}{\frac{r}{p} + b - a} & , \quad a \leq x \leq s \leq b \end{cases} \quad (3.30)$$

olmak üzere

$$y(x) = \int_a^b G(x, s) q(s) y(s) ds \quad (3.31)$$

integral denklemini sağlar. Eş. (3.29) probleminin aşıkâr olmayan çözümü $y(x)$ için $p > 0$ ve $\frac{r}{p} > \frac{b-a}{\xi-1}$ olmak üzere Lyapunov tipi

$$\int_a^b |q(s)| ds \geq \left(1 + \frac{p}{r}(b-a)\right) \frac{\Gamma(\xi)}{(b-a)^{\xi-1}} \quad (3.32)$$

eşitsizliğini elde ettiler. Ayrıca, Eş. (3.29) probleminin aşıkâr olmayan bir $y(x)$ çözümü için $p > 0, 0 \leq \frac{r}{p} \leq \frac{b-a}{\xi-1}$ ve

$$A\left(\xi, \frac{r}{p}\right) = \frac{(b-a)^{\xi-1}}{\left(\frac{r}{p} + b - a\right)} \left(\left(\frac{(b-a)^{\xi-1}}{\left(\frac{r}{p} + b - a\right) (\xi-1)^{\xi-1}} \right)^{\frac{1}{\xi-2}} (2-\xi) - \frac{r}{p} \right) \quad (3.33)$$

$$B\left(\xi, \frac{r}{p}\right) = \left(\frac{r}{p} + b - a\right)^{\xi-1} \frac{(\xi-1)^{\xi-1}}{\xi^\xi} \quad (3.34)$$

olmak üzere Lyapunov tipi

$$\int_a^b |q(s)| ds \geq \frac{\Gamma(\xi)}{\max \left\{ A\left(\xi, \frac{r}{p}\right), B\left(\xi, \frac{r}{p}\right) \right\}} \quad (3.35)$$

eşitsizliği sağlanır.

2016 yılında Ferreira [18], Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türevlerini kullanarak Lyapunov tipi eşitsizlikler elde etti.

$q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere Riemann-Liouville kesirli türeve sahip toplamsal sınır değer problemi

$$\begin{cases} \left(D^\xi D^\beta y \right) (x) + q(x)y(x) = 0, a < x < b, 1 < \xi + \beta \leq 2 \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases} \quad (3.36)$$

için aşikar olmayan bir $y(x)$ çözümü var ise

$$\int_a^b |q(s)| ds > \Gamma(\xi + \beta) \left(\frac{4}{b-a} \right)^{\xi+\beta-1} \quad (3.37)$$

eşitsizliği sağlanır.

$q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere Caputo toplamsal kesirli türeve sahip sınır değer problemi

$$\begin{cases} \left({}^C D^\xi {}^C D^\beta y \right) (x) + q(x)y(x) = 0, a < x < b, 1 < \xi + \beta \leq 2 \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases} \quad (3.38)$$

aşikar olmayan bir $y(x)$ çözümüne sahip ve Green fonksiyonu $G(x, s)$;

$$G(x, s) = \frac{1}{\Gamma(\xi + \beta)} \begin{cases} \frac{(x-a)^\beta (b-s)^{\xi+\beta-1}}{(b-a)^\beta} - (x-s)^{\xi+\beta-1} & , \quad a \leq s \leq x \leq b \\ \frac{(x-a)^\beta (b-s)^{\xi+\beta-1}}{(b-a)^\beta} & , \quad a \leq x \leq s \leq b \end{cases} \quad (3.39)$$

olmak üzere

$$y(x) = \int_a^b G(x, s) q(s) y(s) ds \quad (3.40)$$

integral denklemini sağladığını gösterdi. Eş. (3.38) kesirli toplamsal sınır değer probleminin

aşkar olmayan bir $y(x)$ çözümü var ise Lyapunov tipi

$$\int_a^b |q(s)| ds > \frac{\Gamma(\xi + \beta)}{(b-a)^{\xi+\beta-1}} \frac{(\xi + 2\beta - 1)^{\xi+2\beta-1}}{(\xi + \beta - 1)^{\xi+\beta-1} \beta^\beta} \quad (3.41)$$

eşitsizlik sağlanır.

2016 yılında Dhar ve diğerleri [19] Eş. (3.3) sınır değer problemi için Eş. (3.6) eşitsizliğinde için $|q(x)|$ değiştirilerek Eş. (3.1)'deki gibi tanımlanan $q^+(x)$ ile geliştirebileceğini belirttiler ve

$$\int_a^b q^+(s) ds > \Gamma(\xi) \left(\frac{4}{b-a} \right)^{\xi-1} \quad (3.42)$$

eşitsizliğini elde ettiler.

2016 yılında Agarwal ve Özbekler [20], $p, q, f \in C[x_0, \infty)$ reel değerli fonksiyonlar ve $0 < \gamma < 1 < \mu < 2$ olmak üzere Eş. (3.8) Dirichlet sınır koşuluna sahip Riemann-Liouville kesirli lineer olmayan diferensiyel denklemi

$$\left(D^\xi y \right) (x) + p(x) |y(x)|^{\mu-1} y(x) + q(x) |y(x)|^{\gamma-1} y(x) = f(x), a < x < b, 1 < \xi \leq 2 \quad (3.43)$$

üzerine çalıştılar. İlk olarak, Eş. (3.8) Dirichlet sınır şartına sahip Eş. (3.43) denkleminin aşkar olmayan bir $y(x)$ çözümü ve $G(x, s)$,

$$G(x, s) = \frac{1}{\Gamma(\xi)} \begin{cases} \left(\frac{(x-a)(b-s)}{b-a} \right)^{\xi-1} - (x-s)^{\xi-1} & , \quad a \leq s \leq x \leq b \\ \left(\frac{(x-a)(b-s)}{b-a} \right)^{\xi-1} & , \quad a \leq x \leq s \leq b \end{cases} \quad (3.44)$$

olmak üzere

$$y(x) = \int_a^b G(x, s) q(s) y(s) ds \quad (3.45)$$

integral denklemini elde ettiler. Daha sonra; ilk olarak, Eş. (3.8) Dirichlet sınır şartına sahip

Eş. (3.43) kesirli sınır değer problemi için

$$\begin{aligned}\mu_0 &= (2 - \mu) \mu^{\mu/(2-\mu)} 2^{2/(\mu-2)} > 0 \\ \gamma_0 &= (2 - \gamma) \gamma^{\gamma/(2-\gamma)} 2^{2/(\gamma-2)} > 0\end{aligned}\tag{3.46}$$

Eş. (3.1)'deki gibi tanımlanan $q^\pm(x)$ ve (a, b) aralığında $y(x) > 0$ olmak üzere Lyapunov tipi

$$\begin{aligned}& \int_a^b [(s-a)(b-s)]^{\xi-1} [p^+(s) + q^+(s)] ds \times \\& \int_a^b [(s-a)(b-s)]^{\xi-1} [\mu_0 p^+(s) + \gamma_0 q^+(s) + f^-(s)] ds \\& > \frac{\Gamma^2(\xi)}{4} (b-a)^{2\xi-2}\end{aligned}\tag{3.47}$$

eşitsizliğini elde ettiler.

İkinci olarak, Eş. (3.8) Dirichlet sınır şartına sahip Eş. (3.43) kesirli sınır değer problemi için Eş. (3.1)'deki gibi tanımlanan $q^+(x)$, Eş. (3.46)'da tanımlanan μ_0 , γ_0 ve (a, b) aralığında $y(x) < 0$ olmak üzere Lyapunov tipi

$$\begin{aligned}& \int_a^b [(s-a)(b-s)]^{\xi-1} [p^+(s) + q^+(s)] ds \times \\& \int_a^b [(s-a)(b-s)]^{\xi-1} [\mu_0 p^+(s) + \gamma_0 q^+(s) + f^+(s)] ds \\& > \frac{\Gamma^2(\xi)}{4} (b-a)^{2\xi-2}\end{aligned}\tag{3.48}$$

eşitsizliğini elde ettiler.

Son olarak, Eş. (3.8) Dirichlet sınır şartına sahip (3.43) kesirli sınır değer probleminin aşikar olmayan bir çözümünü $y(x)$ için Eş. (3.1)'deki gibi tanımlanan $q^+(x)$ ve Eş. (3.46)'da tanımlanan μ_0, γ_0 olmak üzere

$$\begin{aligned} & \int_a^b [(s-a)(b-s)]^{\xi-1} [p^+(s) + q^+(s)] ds \times \\ & \int_a^b [(s-a)(b-s)]^{\xi-1} [\mu_0 p^+(s) + \gamma_0 q^+(s) + |f(s)|] ds \\ & > \frac{\Gamma^2(\xi)}{4} (b-a)^{2\xi-2} \end{aligned} \quad (3.49)$$

eşitsizliği sağlanır.

2017 yılında Zhang ve Zheng [21], $p, q, f \in C[x_0, \infty)$, $n \geq 3$, $0 < \gamma < 1 < \mu < n$ olmak üzere ξ -yinci basamaktan Riemann-Liouville kesirli diferansiyel denklemi

$$\left(D_a^\xi y\right)(x) + p(x)|y(x)|^{\mu-1}y(x) + q(x)|y(x)|^{\gamma-1}y(x) = f(x), \quad a < x < b, \quad n-1 < \xi \leq n \quad (3.50)$$

için sırasıyla iki farklı

$$y(a) = y'(a) = y''(a) = \dots = y^{(n-2)}(a) = y(b) = 0 \quad (3.51)$$

ve

$$y(a) = y'(a) = y''(a) = \dots = y^{(n-2)}(a) = y'(b) = 0 \quad (3.52)$$

sınır koşulu ile çalıştılar. Öncelikle aşağıdaki integral denklemlerinin var olduğunu gösterdiler.

Eş. (3.51) sınır koşullarına sahip $n \geq 3$ için ξ -yinci basamaktan

$$\left(D_a^\xi y\right)(x) + q(x)y(x) = 0, \quad a < x < b, \quad n-1 < \xi \leq n \quad (3.53)$$

denkleminin bir çözümü $y(x)$ fonksiyonu ve Green fonksiyonu $G(x, s)$,

$$G(x, s) = \frac{1}{\Gamma(\xi)} \begin{cases} \left(\frac{(x-a)(b-s)}{(b-a)} \right)^{\xi-1} - (x-s)^{\xi-1} & , \quad a \leq s \leq x \leq b \\ \left(\frac{(x-a)(b-s)}{(b-a)} \right)^{\xi-1} & , \quad a \leq x \leq s \leq b \end{cases} \quad (3.54)$$

olmak üzere

$$y(x) = \int_a^b G(x, s) q(s) y(s) ds \quad (3.55)$$

integral denklemi sağlanır.

Eş. (3.52) sınır koşullarına sahip Eş. (3.53) denkleminin bir çözümü $y(x)$ ve Green fonksiyonu $G(x, s)$,

$$G(x, s) = \frac{1}{\Gamma(\xi)} \begin{cases} \frac{(x-a)^{\xi-1} (b-s)^{\xi-2}}{(b-a)^{\xi-2}} - (x-s)^{\xi-1} & , \quad a \leq s \leq x \leq b \\ \frac{(x-a)^{\xi-1} (b-s)^{\xi-2}}{(b-a)^{\xi-2}} & , \quad a \leq x \leq s \leq b \end{cases} \quad (3.56)$$

olmak üzere

$$y(x) = \int_a^b G(x, s) q(s) y(s) ds \quad (3.57)$$

integral denklemi sağlanır.

Böylece Eş. (3.55) ve (3.57) integral denklemleri yardımıyla aşağıdaki Lyapunov tipi eşitsizlikleri elde ettiler.

Eş. (3.51) sınır koşullarına sahip Eş. (3.50) denkleminin pozitif çözümü $y(x)$, $q^\pm(x)$, Eş.

(3.1)'de tanımlandığı gibi ve

$$\begin{aligned}\mu_0 &= (n - \mu) \mu^{\frac{\mu}{n-\mu}} n^{\frac{n}{\mu-n}} \\ \gamma_0 &= (n - \gamma) \gamma^{\frac{\gamma}{n-\gamma}} n^{\frac{n}{\gamma-n}}\end{aligned}\tag{3.58}$$

olmak üzere Lyapunov tipi

$$\begin{aligned}& \int_a^b [(s-a)(b-s)]^{\xi-1} \left[1 - \left(\frac{b-s}{b-a} \right)^{\frac{\xi-1}{\xi-2}} \right]^{2-\xi} [\mu_0 p^+(s) + \gamma_0 q^+(s) + f^-(s)] ds \times \\& \int_a^b [(s-a)(b-s)]^{\xi-1} \left[1 - \left(\frac{b-s}{b-a} \right)^{\frac{\xi-1}{\xi-2}} \right]^{2-\xi} [p^+(s) + q^+(s)] ds]^{\frac{1}{n-1}} \\& > \left(\Gamma(\xi) (b-a)^{\xi-1} \right)^{\frac{n}{n-1}} (n-1) n^{\frac{n}{1-n}}\end{aligned}\tag{3.59}$$

eşitsizliği sağlanır.

Ayrıca, Eş. (3.52) sınır koşullarına sahip Eş. (3.50) denkleminin pozitif bir çözümü $y(x)$ fonksiyonu, μ_0 ve γ_0 Eş. (3.58)'de tanımlandığı gibi olmak üzere Lyapunov eşitsizliği

$$\begin{aligned}& \int_a^b [(s-a)(b-s)]^{\xi-2} [\mu_0 p^+(s) + \gamma_0 q^+(s) + f^-(s)] ds \times \\& \left(\int_a^b [(s-a)(b-s)]^{\xi-2} [p^+(s) + q^+(s)] ds \right)^{\frac{1}{n-1}} \\& > \Gamma(\xi)^{\frac{n}{n-1}} (n-1)^{\frac{n}{1-n}}\end{aligned}\tag{3.60}$$

eşitsizliği sağlanır.

2017 yılında Chidouh ve Torres [22], lineer $q(x)y(x)$ terimini lineer olmayan bir $q(x)f(y(x))$ terimine genişlettiler.

$q(x)$ aşık olmayan Lebesgue integrallenebilir bir fonksiyon, $f \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ 'da konkav ve

azalmayan bir fonksiyon olmak üzere, kesirli sınır değer problemi Eş. (3.7) aşıkâr olmayan bir $y(x)$ çözümüne sahip ise $\eta = \max_{x \in [a,b]} y(x)$ için

$$\int_a^b |q(s)| ds > \frac{4^{\xi-1} \Gamma(\xi) \eta}{(b-a)^{\xi-1} f(\eta)} \quad (3.61)$$

eşitsizliği sağlanır.

Ancak, yukarıdaki Lyapunov tipi eşitsizliği η değişkeninden dolayı kontrol edilemeyeceği açıktır. Bir başka ifade ile Eş. (3.61) eşitsizliğinin yazılabilmesi için çözümün bilinmesi gerekir.

2017 yılında Liu ve diğerleri [23], $p > 1$ için $\phi_p(x) = |x|^{p-2}x$, $3 < \xi + \beta \leq 4$, $q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve Riemann-Liouville ve Caputo türevleri aynı anda içeren

$$\begin{cases} D^\beta \left(\phi_p \left({}^C D^\xi (y(x)) \right) \right) - q(x) f(y(x)) = 0, a < x < b, 1 < \xi, \beta \leq 2 \\ y'(a) = {}^C D^\xi y(a) = y(b) = {}^C D^\xi y(b) = 0 \end{cases} \quad (3.62)$$

toplamsal kesirli problemi üzerine çalıştılar.

$y(x)$, Eş. (3.62) toplamsal kesirli probleminin aşıkâr olmayan çözümü, $1 < \xi, \beta \leq 2$, Green fonksiyonu $G(x, s)$,

$$G(x, s) = \frac{1}{\Gamma(\xi)} \begin{cases} (b-s)^{\xi-1} - (x-s)^{\xi-1} & , \quad a \leq s \leq x \leq b \\ (b-s)^{\xi-1} & , \quad a \leq x \leq s \leq b \end{cases} \quad (3.63)$$

ve $H(s, \tau)$;

$$H(s, \tau) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \begin{cases} \left(\frac{(s-a)(b-\tau)}{b-a} \right)^{\beta-1} - (s-\tau)^{\beta-1} & , \quad a \leq \tau \leq s \leq b \\ \left(\frac{(s-a)(b-\tau)}{b-a} \right)^{\beta-1} & , \quad a \leq s \leq \tau \leq b \end{cases} \quad (3.64)$$

olmak üzere

$$y(x) = \int_a^b G(x,s) \phi_p \left(\int_a^b H(s,\tau) q(\tau) f(y(\tau)) d\tau \right) ds \quad (3.65)$$

integral denklemini sağlar.

Herhangi bir $x \in \mathbb{R}^+$ ve $0 \leq f(x) \leq M\phi_p(x)$ eşitsizliğini sağlayan pozitif bir M sabiti olsun.

Eş. (3.62) toplamsal probleminin aşikar olmayan bir $y(x)$ çözümü için Lyapunov tipi

$$\int_a^b q(s) ds > \frac{4^{\beta-1} \Gamma(\beta)}{M(b-a)^{\beta-1}} \phi_p \left(\frac{\Gamma(\xi+1)}{(b-a)^\xi} \right) \quad (3.66)$$

eşitsizliğini elde ettiler.

Ayrıca, $f \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ konkav ve azalmayan bir fonksiyon ve $\eta = \max_{x \in [a,b]} y(x)$ olmak üzere

Eş. (3.62) toplamsal probleminin aşikar olmayan bir çözümü $y(x)$ için Lyapunov tipi

$$\int_a^b q(s) ds > \frac{4^{\beta-1} \Gamma(\beta) \phi_p(\Gamma(\xi+1)) \phi_p(\eta)}{(b-a)^{\xi p + \beta - \xi - 1} f(\eta)} \quad (3.67)$$

eşitsizliğini elde ettiler.

2017 yılında Wang ve diğerleri [24], $q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$\begin{cases} (D^\xi y)(x) + q(x)y(x) = 0, & a < x < b, \quad 2 \leq n-1 < \xi \leq n \\ y(a) = y'(a) = \dots = y^{(n-2)}(a) = y^{(n-2)}(b) = 0 \end{cases} \quad (3.68)$$

kesirli sınır değer probleminin aşikar olmayan bir çözümü $y(x)$ ve Green fonksiyonu $G(x,s)$,

$$G(x,s) = \frac{1}{\Gamma(\xi)} \begin{cases} \frac{(x-a)^{\xi-1} (b-s)^{\xi-n+1}}{(b-a)^{\xi-n+1}} - (x-s)^{\xi-1} & , \quad a \leq s \leq x \leq b \\ \frac{(x-a)^{\xi-1} (b-s)^{\xi-n+1}}{(b-a)^{\xi-n+1}} & , \quad a \leq x \leq s \leq b \end{cases} \quad (3.69)$$

olmak üzere

$$y(x) = \int_a^b G(x,s) q(s) y(s) ds \quad (3.70)$$

integral denklemini sağladığını gösterdiler. Eş. (3.68) kesirli sınır değer problemi için C_{n-2}^i binom katsayısı olmak üzere

$$\int_a^b (b-s)^{\xi-n+1} (s-a) \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^{i-1} C_{n-2}^i (b-a)^{n-2-i} (s-a)^{i-1} |q(s)| ds \geq \Gamma(\xi) \quad (3.71)$$

eşitsizliğini elde ettiler.

2018 yılında Guezane-Lakoud ve diğerleri [25], $q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $1 < \xi + \beta \leq 2$ olmak üzere D^β Riemann-Liouville ve ${}^C D^\xi$ sağ Caputo kesirli türevleri aynı anda içeren

$$\begin{cases} {}^C D^\xi D^\beta y(x) + q(x) y(x) = 0, a < x < b, 0 < \xi, \beta \leq 1 \\ y(a) = D^\beta y(b) = 0 \end{cases} \quad (3.72)$$

toplamsal kesirli sınır değer problemine karşılık gelen eşdeğer bir integral denklemi elde ederek Lyapunov tipi eşitsizliği elde ettiler.

Eş. (3.72) toplamsal kesirli sınır değer probleminin aşıkâr olmayan bir çözümü $y(x)$ ve Green fonksiyonu $G(x,s)$;

$$G(x,s) = \frac{1}{\Gamma(\xi)\Gamma(\beta)} \begin{cases} \int_a^s (x-r)^{\beta-1} (s-r)^{\xi-1} dr, & a \leq s \leq x \leq b \\ \int_a^x (x-r)^{\beta-1} (s-r)^{\xi-1} dr, & a \leq x \leq s \leq b \end{cases} \quad (3.73)$$

olmak üzere

$$y(x) = \int_a^b G(x,s) q(s) y(s) ds \quad (3.74)$$

integral denklemini sağladığını buldular. Eş. (3.73) Green fonksiyonunu kullanarak

$$\int_a^b |q(s)| ds \geq \frac{(\xi + \beta - 1) \Gamma(\xi) \Gamma(\beta)}{(b-a)^{\xi+\beta-1}} \quad (3.75)$$

Lyapunov tipi eşitsizliği elde ettiler. Dahası bu eşitsizliğin kesin olduğunu dile getirip, ispatını yaptılar.

2019 yılında Khaldi ve Guezane-Lakoud [26], Lyapunov eşitsizliği elde etmek için $q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon $1 < \xi + \beta \leq 2$ olmak üzere D^β Riemann-Liouville ve ${}^C D^\xi$ sağ Caputo kesirli türevleri aynı anda içeren

$$\begin{cases} {}^C D^\xi D^\beta y(x) + q(x) y(x) = 0, a < x < b, 0 < \beta \leq \xi \leq 1 \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases} \quad (3.76)$$

toplamsal kesirli sınır değer problemine eşdeğer aşağıdaki gibi bir integral denklemi elde ettiler.

Eş. (3.76) toplamsal kesirli sınır değer probleminin aşıkâr olmayan bir çözümü $y(x)$, $0 < \xi, \beta \leq 1$ ve Green fonksiyonu $G(x, s)$,

$$G(x, s) = \frac{1}{\Gamma(\xi) \Gamma(\beta)} \left(\int_a^{\inf\{x, s\}} (s-r)^{\xi-1} (x-s)^{\beta-1} dr - \frac{(x-a)^\beta}{(b-a)^\beta} \int_a^s (s-r)^{\xi-1} (b-r)^{\beta-1} dr \right) \quad (3.77)$$

olmak üzere

$$y(x) = \int_a^b G(x, s) q(s) y(s) ds \quad (3.78)$$

integral denklemi sağlanır. Eş. (3.76) toplamsal kesirli sınır değer problemi için

$$\int_a^b |q(s)| ds \geq \frac{\Gamma(\xi) \Gamma(\beta) (\xi + \beta - 1) (\xi + \beta)^{\xi+\beta}}{(\xi (b-a))^{\xi+\beta-1}} \quad (3.79)$$

Lyapunov tipi eşitsizliği elde ettiler.

2019 yılında Khaldi [27], yaptığı çalışmada $0 < \xi < \frac{1}{b-a}$, ${}^C D^\xi$, $1 < \xi \leq 2$ için ξ -yinci basamaktan Caputo kesirli türevi ve $q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon olmak üzere

$$y(a) = 0, y'(a) = \xi y(b) \quad (3.80)$$

sınır koşullarına sahip kesirli diferensiyel denklem

$${}^C D^\xi y(x) + q(x)y(x) = 0, a < x < b, 1 < \xi \leq 2 \quad (3.81)$$

için Lyapunov tipi eşitsizlik elde etti. Bunun için öncelikle Eş. (3.80) sınır şartlarına sahip Eş. (3.81) kesirli sınır değer denklemine eşdeğer bir integral denklemi yazdı. Bu sınır değer probleminin aşıkâr olmayan bir çözümü $y(x)$ ve Green fonksiyonu $G(x, s)$,

$$G(x, s) = \frac{1}{\Gamma(\xi)} \begin{cases} \frac{\xi (x-a)(b-s)^{\xi-1}}{(1-\xi)(b-a)} + (x-s)^{\xi-1} & , \quad a \leq s \leq x \leq b \\ \frac{\xi (x-a)(b-s)^{\xi-1}}{(1-\xi)(b-a)} & , \quad a \leq x \leq s \leq b \end{cases} \quad (3.82)$$

olmak üzere

$$y(x) = \int_a^b G(x, s) q(s) y(s) ds \quad (3.83)$$

integral denklemi sağlanır. Yukarıdaki sınır değer problemi aşıkâr olmayan bir $y(x)$ çözümüne sahip ise Lyapunov tipi

$$\int_a^b |q(s)| ds > \frac{\Gamma(\xi)(1-\xi)(b-a)}{(b-a)^{\xi-1} \max \left\{ 1, \frac{\xi(\xi-1)^{\xi-1}}{\xi^\xi} (b-a) \right\}} \quad (3.84)$$

eşitsizlik sağlanır.

2020 yılında Ma ve Yang [28]; $q(x) \in L(0, 1)$, $(0, 1)$ 'in herhangi bir kompakt alt aralığında

özdeş olarak sıfırdan farklı bir fonksiyon, δ ve γ reel sayılar olmak üzere

$$\begin{cases} {}^C D^\xi y(x) + q(x)y(x) = 0, 0 < x < 1, 1 < \xi \leq 2 \\ y(0) = \delta y(1), y'(0) = \gamma y'(1) \end{cases} \quad (3.85)$$

kesirli sınır değer problemi üzerine çalıştılar. Lyapunov tipi eşitsizlik oluşturmak için Green fonksiyonundan yararlanarak Eş. (3.85) problemine denk bir integral denklemi elde ettiler. Eş. (3.85) probleminin aşikar olmayan bir çözümü $y(x)$ ve Green fonksiyonu $G(x, s)$,

$$G(x, s) = \frac{1}{\Gamma(\xi)} \begin{cases} \frac{(1-\xi)[\delta\gamma(1-x)+\gamma x](1-s)^{\xi-2}}{(1-\gamma)(1-\delta)} - \frac{\delta}{1-\delta} (1-s)^{\xi-1} - (x-s)^{\xi-1} & , 0 \leq s \leq x \leq 1 \\ \frac{(1-\xi)[\delta\gamma(1-x)+\gamma x](1-s)^{\xi-2}}{(1-\gamma)(1-\delta)} - \frac{\delta}{1-\delta} (1-s)^{\xi-1} & , 0 \leq x \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (3.86)$$

olmak üzere

$$y(x) = \int_0^1 G(x, s) q(s) y(s) ds \quad (3.87)$$

integral denklemi sağlanır. Eş. (3.85) sınır değer probleminin aşikar olmayan bir $y(x)$ çözümü için aşağıdaki sonuçları elde ettiler.

(i) $\delta \in (0, 1)$ ve $\gamma \in (0, 1)$ olmak üzere

$$\int_0^1 (1-s)^{\xi-2} [\gamma(\xi-1) + (1-\gamma)(1-s)] |q(s)| ds > \Gamma(\xi)(1-\delta)(1-\gamma) \quad (3.88)$$

(ii) $\delta \in (1, +\infty)$ ve $\gamma \in (0, 1)$ olmak üzere

$$\int_0^1 (1-s)^{\xi-2} [\gamma(\xi-1) + (1-\gamma)(1-s)] |q(s)| ds > \frac{\Gamma(\xi)(\delta-1)(1-\gamma)}{\delta} \quad (3.89)$$

(iii) $\delta \in (0, 1)$ ve $\gamma \in \left(1, 1 + \frac{(\xi-1)\delta}{2-\xi}\right]$ olmak üzere

$$\int_0^1 (1-s)^{\xi-2} [\gamma(\xi-1) - (\gamma-1)(1-s)] |q(s)| ds > \Gamma(\xi)(1-\delta)(\gamma-1) \quad (3.90)$$

(iv) $\delta \in (1, +\infty)$ ve $\gamma \in \left(1, \frac{1}{2-\xi}\right]$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (1-s)^{\xi-2} \{ \delta \gamma (\xi-1) \\ & - \left[\delta (\gamma-1) - \gamma (2-\xi) (\delta-1) \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right)^{\frac{1}{2-\xi}} \right] (1-s) \} |q(s)| ds \\ & > \Gamma(\xi) (\delta-1) (\gamma-1) \end{aligned} \quad (3.91)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

2020 yılında Bachar ve Eltayeb [29], $q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$\begin{cases} D^\xi y(x) + q(x) y(x) = 0, & a < x < b, & 3 < \xi \leq 4 \\ y(a) = D^{\xi-3} y(a) = D^{\xi-2} y(a) = y''(b) = 0 \end{cases} \quad (3.92)$$

kesirli sınır değer problemi üzerine çalıştılar. Eş. (3.92) problemine karşılık gelen Green fonksiyonu $G(x, s)$,

$$G(x, s) = \frac{1}{\Gamma(\xi)} \begin{cases} \frac{(x-a)^{\xi-1} (b-s)^{\xi-3}}{(b-a)^{\xi-3}} - (x-s)^{\xi-1}, & a \leq s \leq x \leq b \\ \frac{(x-a)^{\xi-1} (b-s)^{\xi-3}}{(b-a)^{\xi-3}}, & a \leq x \leq s \leq b \end{cases} \quad (3.93)$$

kullanarak Eş. (3.92) kesirli sınır değer probleminin aşıkâr olmayan bir çözümü $y(x)$ olmak üzere

$$y(x) = \int_a^b G(x, s) q(s) y(s) ds \quad (3.94)$$

integral denklemini sağladığını gösterdiler. Eş. (3.92) problemi için $q^+(x)$, Eş. (3.1)'de tanımlandığı gibi olmak üzere Lyapunov tipi

$$\int_a^b (s-a) (b-s)^{\xi-3} (2b-a-s) q^+(s) ds \geq \Gamma(\xi) \quad (3.95)$$

eşitsizliğini elde ettiler.

4. KESİRLİ SINIR DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN YENİ LYAPUNOV TİPİ EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde $1 < \xi \leq 2$, $3 < \xi \leq 4$ ve $n < \xi \leq n-1$ olmak üzere ξ -yinci basamaktan kesirli sınır değer problemi için elde ettiğimiz yeni ve orijinal Lyapunov tipi eşitsizlikler verilecektir.

Öncelikle bulduğumuz sonuçları ispatlarken kullanacağımız temel teşkil eden bazı sonuçlar verilsin.

4.0.1 Lemma ([30, Lemma 2.2])

$y \in C(0, 1) \cap L(0, 1)$, $\xi > 0$ için ξ -yinci basamaktan bir kesirli türevli, $[\xi] = n$, ξ 'ya eşit veya ξ 'dan büyük en küçük tamsayı ve $i = 1, 2, \dots, n$ için $c_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$D^{-\xi} D^{\xi} y(x) = y(x) + c_1 x^{\xi-1} + c_2 x^{\xi-2} + \dots + c_n x^{\xi-n} \quad (4.1)$$

eşitliği sağlanır.

4.1. $1 < \xi \leq 2$ Olmak Üzere ξ -yinci Basamaktan Yeni Lyapunov Tipi Eşitsizlikler

Aşağıdaki lemmada 2012 yılında Xu ve diğerlerinin [31] elde ettiği Green fonksiyonu verilsin.

4.1.2 Lemma ([31, Lemma 2.3])

$q : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $0 < \beta, \eta < 1$ olmak üzere

$$D^{\xi} y(x) + q(x) y(x) = 0 \quad 0 < x < 1, \quad 1 < \xi < 2 \quad (4.2)$$

$$y(0) = 0, y(1) = \beta y(\eta) \quad (4.3)$$

kesirli sınır değer probleminin aşikar olmayan bir çözümü $y(x)$ ve Green fonksiyonu $G(x, s)$,

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{[x(1-s)]^{\xi-1} - \beta x^{\xi-1} (\eta-s)^{\xi-1} - (x-s)^{\xi-1} (1-\beta \eta^{\xi-1})}{(1-\beta \eta^{\xi-1}) \Gamma(\xi)} & , \quad 0 \leq s \leq x \leq 1 \text{ ve } s \leq \eta \\ \frac{[x(1-s)]^{\xi-1} - (x-s)^{\xi-1} (1-\beta \eta^{\xi-1})}{(1-\beta \eta^{\xi-1}) \Gamma(\xi)} & , \quad 0 < \eta \leq s \leq x \leq 1 \\ \frac{[x(1-s)]^{\xi-1} - \beta x^{\xi-1} (\eta-s)^{\xi-1}}{(1-\beta \eta^{\xi-1}) \Gamma(\xi)} & , \quad 0 \leq x \leq s \leq \eta < 1 \\ \frac{[x(1-s)]^{\xi-1}}{(1-\beta \eta^{\xi-1}) \Gamma(\xi)} & , \quad 0 \leq x \leq s \leq 1 \text{ ve } \eta \leq s \end{cases} \quad (4.4)$$

olmak üzere

$$y(x) = \int_0^1 G(x, s) q(s) y(s) ds \quad (4.5)$$

integral denklemi sağlanır.

İspat

Lemma 4.0.1'den Eş. (4.2) denklemine eşdeğer integral denklemi, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$y(x) = -D^{-\xi} q(x) y(x) + c_1 x^{\xi-1} + c_2 x^{\xi-2} \quad (4.6)$$

yazılabilir. Eş. (4.2) denkleminin genel çözümü

$$y(x) = -\frac{1}{\Gamma(\xi)} \int_0^x (x-s)^{\xi-1} q(s) y(s) ds + c_1 x^{\xi-1} + c_2 x^{\xi-2} \quad (4.7)$$

elde edilir. Eş. (4.3) sınır şartlarından, $c_2 = 0$ ve

$$c_1 = \frac{1}{(1-\beta \eta^{\xi-1}) \Gamma(\xi)} \left[\int_0^1 (1-s)^{\xi-1} q(s) y(s) ds - \int_0^\eta \beta (\eta-s)^{\xi-1} q(s) y(s) ds \right] \quad (4.8)$$

bulunur. Bulunan değerler Eş. (4.7) eşitliğinde yerine yazıldığında

$$y(x) = -\frac{1}{\Gamma(\xi)} \int_0^x (x-s)^{\xi-1} q(s) y(s) ds +$$

$$\frac{x^{\xi-1}}{(1-\beta\eta^{\xi-1})\Gamma(\xi)} \left[\int_0^1 (1-s)^{\xi-1} q(s)y(s) ds - \int_0^\eta \beta(\eta-s)^{\xi-1} q(s)y(s) ds \right]$$

elde edilir.

$x \leq \eta$ için

$$\begin{aligned} & \int_0^x \frac{[x(1-s)]^{\xi-1} - \beta x^{\xi-1}(\eta-s)^{\xi-1} - (x-s)^{\xi-1}(1-\beta\eta^{\xi-1})}{\Gamma(\xi)(1-\beta\eta^{\xi-1})} q(s)y(s) ds + \\ & \int_x^\eta \frac{[x(1-s)]^{\xi-1} - \beta x^{\xi-1}(\eta-s)^{\xi-1}}{\Gamma(\xi)(1-\beta\eta^{\xi-1})} q(s)y(s) ds + \int_\eta^1 \frac{[x(1-s)]^{\xi-1}}{\Gamma(\xi)(1-\beta\eta^{\xi-1})} q(s)y(s) ds \\ & = \int_0^1 G(x,s) q(s)y(s) ds \end{aligned}$$

ve $x \geq \eta$ için

$$\begin{aligned} & \int_0^\eta \frac{[x(1-s)]^{\xi-1} - \beta x^{\xi-1}(\eta-s)^{\xi-1} - (x-s)^{\xi-1}(1-\beta\eta^{\xi-1})}{\Gamma(\xi)(1-\beta\eta^{\xi-1})} q(s)y(s) ds + \\ & \int_\eta^x \frac{[x(1-s)]^{\xi-1} - (x-s)^{\xi-1}(1-\beta\eta^{\xi-1})}{\Gamma(\xi)(1-\beta\eta^{\xi-1})} q(s)y(s) ds + \int_x^1 \frac{[x(1-s)]^{\xi-1}}{\Gamma(\xi)(1-\beta\eta^{\xi-1})} q(s)y(s) ds \\ & = \int_0^1 G(x,s) q(s)y(s) ds \end{aligned}$$

elde edilir. İspat tamamlanır.

4.1.3 Lemma ([31, Teorem 2.1])

Eş. (4.4)'de tanımlanan $G(x,s)$ Green fonksiyonu $\beta\eta^{\xi-2} \leq 1$ olmak üzere

$$x, s \in [0, 1] \quad \text{için} \quad G(x,s) \leq G(s,s) \leq \frac{s^{\xi-1}(1-s)^{\xi-1}}{\Gamma(\xi)(1-\beta\eta^{\xi-1})} \quad (4.9)$$

özelliğini sağlar.

İspat

$(1 - \beta \eta^{\xi-1}) \Gamma(\xi) G(x, s)$ göz önüne alınsın. $0 \leq s < x \leq 1$ ve $s < \eta$ için

$$g_1(x, s) := [x(1-s)]^{\xi-1} - \beta x^{\xi-1} (\eta-s)^{\xi-1} - (x-s)^{\xi-1} (1 - \beta \eta^{\xi-1}) \quad (4.10)$$

ve $\beta \eta^{\xi-2} \leq 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1(x, s)}{\partial x} &= (\xi-1)x^{\xi-2}(1-s)^{\xi-1} - (\xi-1)\beta x^{\xi-2}(\eta-s)^{\xi-1} \\ &\quad - (\xi-1)(x-s)^{\xi-2}(1 - \beta \eta^{\xi-1}) \\ &= (\xi-1)x^{\xi-2} \left[(1-s)^{\xi-1} - \beta \eta^{\xi-1} \left(1 - \frac{s}{\eta}\right)^{\xi-2} \left(1 - \frac{s}{\eta}\right) - (1 - \frac{s}{x})^{\xi-2} (1 - \beta \eta^{\xi-1}) \right] \\ &\leq (\xi-1)x^{\xi-2} \left[(1-s)^{\xi-1} - \beta \eta^{\xi-1} (1-s)^{\xi-2} \left(1 - \frac{s}{\eta}\right) - (1-s)^{\xi-2} (1 - \beta \eta^{\xi-1}) \right] \\ &= (\xi-1)x^{\xi-2} (1-s)^{\xi-2} \left[(1-s) - \beta \eta^{\xi-1} \left(1 - \frac{s}{\eta}\right) - (1 - \beta \eta^{\xi-1}) \right] \\ &= (\xi-1)x^{\xi-2} (1-s)^{\xi-2} s (\beta \eta^{\xi-2} - 1) \\ &\leq 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

elde edilir. Buna göre $g_1(x, s)$, x 'e göre azalan fonksiyondur, böylece $s < x$ ve $s < \eta$ için

$$g_1(x, s) \leq g_1(s, s) = [s(1-s)]^{\xi-1} - \beta s^{\xi-1} (\eta-s)^{\xi-1} \leq s^{\xi-1} (1-s)^{\xi-1} \quad (4.12)$$

elde edilir.

$0 < \eta \leq s < x \leq 1$ için

$$g_2(x, s) = [x(1-s)]^{\xi-1} - (x-s)^{\xi-1} (1 - \beta \eta^{\xi-1}) \quad (4.13)$$

olsun. $\beta\eta^{\xi-2} \leq 1$ ve $\eta \leq s$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_2(x,s)}{\partial x} &= (\xi-1)x^{\xi-2}(1-s)^{\xi-1} - (\xi-1)(x-s)^{\xi-2}(1-\beta\eta^{\xi-1}) \\
&= (\xi-1)x^{\xi-2} \left[(1-s)^{\xi-1} - \left(1-\frac{s}{x}\right)^{\xi-2} (1-\beta\eta^{\xi-1}) \right] \\
&\leq (\xi-1)x^{\xi-2} \left[(1-s)^{\xi-1} - (1-s)^{\xi-2} (1-\beta\eta^{\xi-1}) \right] \\
&= (\xi-1)x^{\xi-2}(1-s)^{\xi-2} \left[(1-s) - (1-\beta\eta^{\xi-1}) \right] \\
&= (\xi-1)x^{\xi-2}(1-s)^{\xi-2} (\beta\eta^{\xi-1} - s) \\
&\leq (\xi-1)x^{\xi-2}(1-s)^{\xi-2} (\beta\eta^{\xi-1} - \eta) \\
&= (\xi-1)x^{\xi-2}(1-s)^{\xi-2} \eta (\beta\eta^{\xi-2} - 1) \\
&\leq 0
\end{aligned} \tag{4.14}$$

elde edilir. Sonuç olarak, $g_2(x,s)$ fonksiyonu x 'e göre azalan fonksiyondur. Böylece $0 < \eta \leq s < x \leq 1$ için

$$g_2(x,s) \leq g_2(s,s) = [s(1-s)]^{\xi-1} = s^{\xi-1}(1-s)^{\xi-1} \tag{4.15}$$

elde edilir.

$0 \leq x \leq s \leq \eta < 1$ için

$$g_3(x,s) := [x(1-s)]^{\xi-1} - \beta x^{\xi-1}(\eta-s)^{\xi-1} \tag{4.16}$$

olsun.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_3(x,s)}{\partial x} &= (\xi-1)x^{\xi-2}(1-s)^{\xi-1} - (\xi-1)\beta x^{\xi-2}\eta^{\xi-1} \left(1-\frac{s}{\eta}\right)^{\xi-1} \\
&= (\xi-1)x^{\xi-2} \left[(1-s)^{\xi-1} - \beta\eta^{\xi-1} \left(1-\frac{s}{\eta}\right)^{\xi-1} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq (\xi - 1) x^{\xi-2} (1-s)^{\xi-1} \left[1 - \beta \eta^{\xi-1} \right] \\
&\geq 0
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Böylece $g_3(x, s)$, x 'e göre artan fonksiyon olduğu görülür. $0 \leq x \leq s \leq \eta < 1$ için

$$\begin{aligned}
g_3(x, s) &\leq g_3(s, s) = [s(1-s)]^{\xi-1} - \beta x^{\xi-1} (\eta-s)^{\xi-1} \\
&\leq s^{\xi-1} (1-s)^{\xi-1}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

elde edilir. $0 \leq x \leq s \leq 1$ ve $\eta \leq s$ için

$$g_4(x, s) = [x(1-s)]^{\xi-1} \tag{4.19}$$

olsun.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_4(x, s)}{\partial x} &= (\xi - 1) x^{\xi-2} (1-s)^{\xi-1} \\
&\geq 0
\end{aligned} \tag{4.20}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\left(1 - \beta \eta^{\xi-1} \right) \Gamma(\xi) G(x, s) \leq [x(1-s)]^{\xi-1} \leq s^{\xi-1} (1-s)^{\xi-1} \tag{4.21}$$

elde edilir. Eş. (4.12), Eş. (4.15), Eş. (4.18), Eş. (4.20) ve Eş. (4.21)'den Eş. (4.9)'in ispatı tamamlanır.

Şimdi Eş. (4.4) Green fonksiyonuna karşılık gelen Eş. (4.3) sınır koşullarına sahip Eş. (4.2) kesirli sınır değer problemi için elde ettiğimiz Lyapunov tipi eşitsizlikler verilsin.

4.1.1. Teorem

Eş. (4.3) sınır koşullarına sahip Eş. (4.2) kesirli sınır değer problemi için $q : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon, $0 < \beta, \eta < 1$ olmak üzere Lyapunov tipi

$$\int_0^1 s^{\xi-1} (1-s)^{\xi-1} |q(s)| ds \geq \Gamma(\xi) (1 - \beta\eta^{\xi-1}) \quad (4.22)$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat

Eş. (4.3) sınır koşullarına sahip Eş. (4.2) kesirli sınır değer probleminin aşıkâr olmayan bir çözümü $y(x)$ olsun. Lemma 4.1.1'den Eş. (4.5) integral denklemi sağlanır. $|y(x_0)| = \max_{x \in [0,1]} |y(x)|$ olmak üzere Lemma 4.1.2 Eş. (4.9)'den

$$\begin{aligned} |y(x_0)| &\leq |y(x_0)| \max_{x \in [0,1]} \int_0^1 |G(x,s)| |q(s)| ds \\ 1 &\leq \int_0^1 \frac{s^{\xi-1} (1-s)^{\xi-1}}{\Gamma(\xi) (1 - \beta\eta^{\xi-1})} |q(s)| ds \end{aligned} \quad (4.23)$$

bulunur. İspat tamamlanır.

4.1.1 Sonuç

Eş. (4.3) sınır koşullarına sahip Eş. (4.2) kesirli sınır değer problemi için $q : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere Lyapunov tipi

$$\int_0^1 |q(s)| ds \geq 2^{2\xi-2} \Gamma(\xi) (1 - \beta\eta^{\xi-1}) \quad (4.24)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat

Eş. (4.3) sınır koşullarına sahip Eş. (4.2) kesirli sınır değer probleminin aşikar olmayan bir çözümü $y(x)$ olsun. Eş. (4.22) eşitsizliğinin sol tarafındaki integralin içerisinde yer alan polinomun, yani $x^{\xi-1}(1-x)^{\xi-1}$ maksimumu alınırsa Eş. (4.24) eşitsizliğinin kolaylıkla sağlandığı görülür.

4.2. $3 < \xi \leq 4$ Olmak Üzere ξ -yinci Basamaktan Yeni Lyapunov Tipi Eşitsizlikler

2009 yılında Xu ve diğerlerinin [32]; elde ettiği Green fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

4.2.4 Lemma ([32, Lemma 2.3])

$q : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$D^\xi y(x) = q(x)y(x) \quad 0 < x < 1, \quad 3 < \xi \leq 4 \quad (4.25)$$

$$y(0) = y(1) = y'(0) = y'(1) = 0 \quad (4.26)$$

kesirli sınır değer probleminin aşikar olmayan çözümü $y(x)$ ve $G(x, s)$,

$$G(x, s) = \frac{1}{\Gamma(\xi)} \begin{cases} x^{\xi-2}(1-s)^{\xi-2} [s-x+(\xi-2)(1-x)s] \\ + (x-s)^{\xi-1} & , \quad 0 \leq s \leq x \leq 1 \\ x^{\xi-2}(1-s)^{\xi-2} [s-x+(\xi-2)(1-x)s] & , \quad 0 \leq x \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (4.27)$$

olmak üzere

$$y(x) = \int_0^1 G(x, s) q(s) y(s) ds \quad (4.28)$$

integral denklemi sağlanır.

İspat

Lemma 4.0.1'den Eş. (4.25) denklemine eşdeğer integral denklemi, $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$y(x) = D^{-\xi} q(x) y(x) + c_1 x^{\xi-1} + c_2 x^{\xi-2} + c_3 x^{\xi-3} + c_4 x^{\xi-4} \quad (4.29)$$

yazılabilir. Eş. (4.25) denkleminin genel çözümü

$$y(x) = \frac{1}{\Gamma(\xi)} \int_0^x (x-s)^{\xi-1} q(s) y(s) ds + c_1 x^{\xi-1} + c_2 x^{\xi-2} + c_3 x^{\xi-3} + c_4 x^{\xi-4} \quad (4.30)$$

elde edilir. Eş. (4.26) sınır şartlarından, $c_3 = c_4 = 0$,

$$c_1 = \frac{1}{\Gamma(\xi)} \int_0^1 (1-s)^{\xi-2} (2s - \xi s - 1) q(s) y(s) ds \quad (4.31)$$

ve

$$c_2 = \frac{1}{\Gamma(\xi)} \int_0^1 (\xi - 1) (1-s)^{\xi-2} s q(s) y(s) ds \quad (4.32)$$

bulunur. Bulunan değerler Eş. (4.30)'de yerine yazıldığında

$$y(x) = \frac{1}{\Gamma(\xi)} \int_0^x (x-s)^{\xi-1} q(s) y(s) ds +$$

$$\frac{1}{\Gamma(\xi)} \int_0^1 (1-s)^{\xi-2} (2s - \xi s - 1) x^{\xi-1} q(s) y(s) ds +$$

$$\frac{1}{\Gamma(\xi)} \int_0^1 (\xi - 1) (1-s)^{\xi-2} s x^{\xi-2} q(s) y(s) ds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\xi)} \int_0^x \left\{ (x-s)^{\xi-1} + (1-s)^{\xi-2} (2s - \xi s - 1) x^{\xi-1} + \right.$$

$$\left. (\xi - 1) (1-s)^{\xi-2} s x^{\xi-2} \right\} q(s) y(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\xi)} \int_x^1 \left\{ (1-s)^{\xi-2} (2s - \xi s - 1) x^{\xi-1} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& (\xi - 1) (1 - s)^{\xi-2} s x^{\xi-2} \Big\} q(s) y(s) ds \\
& = \frac{1}{\Gamma(\xi)} \int_0^x \Big\{ (x-s)^{\xi-1} + (1-s)^{\xi-2} x^{\xi-2} \times \\
& \quad [(s-x) + (\xi-2)(1-x)s] \Big\} q(s) y(s) ds + \\
& \quad \frac{1}{\Gamma(\xi)} \int_x^1 (1-s)^{\xi-2} x^{\xi-2} \{ (s-x) + (\xi-2)(1-x)s \} q(s) y(s) ds \\
& = \int_0^1 G(x,s) q(s) y(s) ds \tag{4.33}
\end{aligned}$$

elde edilir. İspat tamamlanır.

4.2.5 Lemma ([32, Lemma 2.4])

Eş. (4.27)'de tanımlanan Green fonksiyonu, $M_0 = \max\{\xi - 1, (\xi - 2)^2\}$ olmak üzere

- (1) $x, s \in (0, 1)$ için $G(x, s) = G(1 - s, 1 - x)$
- (2) $x, s \in (0, 1)$ için $(\xi - 2) x^{\xi-2} (1 - x)^2 s^2 (1 - s)^{\xi-2} \leq \Gamma(\xi) G(x, s)$
 $\leq M_0 s^2 (1 - s)^{\xi-2}$
- (3) $x, s \in (0, 1)$ için $G(x, s) > 0$
- (4) $x, s \in (0, 1)$ için $(\xi - 2) s^2 (1 - s)^{\xi-2} x^{\xi-2} (1 - x)^2 \leq \Gamma(\xi) G(x, s)$
 $\leq M_0 x^{\xi-2} (1 - x)^2$

özelliklerini sağlar.

İspat

(1) $x, s \in (0, 1)$ için $G(x, s)$ incelendiğinde $G(x, s) = G(1 - s, 1 - x)$ olduğu açıktır.

(2) $\xi > 3$ ve $s \leq x$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\Gamma(\xi) G(x, s) &= (x-s)^{\xi-1} + (1-s)^{\xi-2} x^{\xi-2} [s-x + (\xi-2)(1-x)s] \\
&= (x-s) \left[(x-s)^{\xi-2} - (x-xs)^{\xi-2} \right] + (\xi-2)(1-x)s(x-xs)^{\xi-2} \\
&= -(x-s)(\xi-2) \int_{x-s}^{x-xs} u^{\xi-3} du + (\xi-2)(1-x)s(x-xs)^{\xi-2} \\
&\geq -(x-s)(\xi-2)(x-xs)^{\xi-3} s(1-x) + (\xi-2)(1-x)s(x-xs)^{\xi-2} \\
&= (\xi-2)x^{\xi-3}(1-s)^{\xi-3}s^2(1-x)^2 \\
&\geq (\xi-2)x^{\xi-2}(1-s)^{\xi-2}s^2(1-x)^2
\end{aligned} \tag{4.34}$$

elde edilir. Diğer yandan, $\xi > 3$, $1-x \leq 1-s$ ve $M_0 = \max\{\xi-1, (\xi-2)^2\}$ için

$$\begin{aligned}
\Gamma(\xi) G(x, s) &= (x-s)^{\xi-1} + (1-s)^{\xi-2} x^{\xi-2} [s-x + (\xi-2)(1-x)s] \\
&= (x-s) \left[(x-s)^{\xi-2} - (x-xs)^{\xi-2} \right] + (\xi-2)(1-x)s(x-xs)^{\xi-2} \\
&= -(x-s)(\xi-2) \int_{x-s}^{x-xs} u^{\xi-3} du + (\xi-2)(1-x)s(x-xs)^{\xi-2} \\
&\leq -(x-s)(\xi-2)(x-s)^{\xi-3} s(1-x) + (\xi-2)(1-x)s(x-xs)^{\xi-2} \\
&= (\xi-2)s(1-x) \left[(x-xs)^{\xi-2} - (x-s)^{\xi-2} \right] \\
&= (\xi-2)s(1-x)(\xi-2) \int_{x-s}^{x-xs} u^{\xi-3} du \\
&\leq (\xi-2)^2 s^2 (1-x)^2 x^{\xi-3} (1-s)^{\xi-3} \\
&\leq (\xi-2)^2 s^2 (1-s)^{\xi-2} \\
&\leq M_0 s^2 (1-s)^{\xi-2}
\end{aligned} \tag{4.35}$$

elde edilir. $s \geq x$ için

$$\begin{aligned}
\Gamma(\xi) G(x, s) &= (1-s)^{\xi-2} x^{\xi-2} [s-x+(\xi-2)(1-x)s] \\
&\geq (\xi-2) x^{\xi-2} (1-s)^{\xi-2} s(1-x) \\
&\geq (\xi-2) x^{\xi-2} (1-s)^{\xi-2} s^2 (1-x)^2
\end{aligned} \tag{4.36}$$

ve $\xi > 3$ için

$$\begin{aligned}
\Gamma(\xi) G(x, s) &= (1-s)^{\xi-2} x^{\xi-2} [s-x+(\xi-2)(1-x)s] \\
&\leq s^{\xi-2} (1-s)^{\xi-2} [s+(\xi-2)s] \\
&= s^{\xi-1} (1-s)^{\xi-2} (\xi-1) \\
&\leq M_0 s^2 (1-s)^{\xi-2}
\end{aligned} \tag{4.37}$$

elde edilir. Eş. (4.34)-Eş. (4.37)'den (2)'nin ispatı tamamlanır.

(3) (2) sağlandığından $x, s \in (0, 1)$ için $G(x, s) > 0$ olduğu açıktır.

(4) (1) ve (2) özelliklerinden (4) sağlanır.

Şimdi bu Green fonksiyonuna karşılık gelen elde ettiğimiz Lyapunov tipi eşitsizlikleri verelim.

4.2.2. Teorem

Eş. (4.26) sınır şartlarına sahip Eş. (4.25) kesirli sınır değer problemi için $q : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon, $M_0 = \max\{\xi-1, (\xi-2)^2\}$ ve $G(x, s)$, Eş. (4.27)'de tanımlandığı gibi olmak üzere Lyapunov tipi

$$\int_0^1 s^2 (1-s)^{\xi-2} |q(s)| ds \geq \frac{\Gamma(\xi)}{M_0} \tag{4.38}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat

Eş. (4.26) sınır şartlarına sahip Eş. (4.25) kesirli sınır değer probleminin aşikar olmayan bir çözümü $y(x)$, Lemma 4.2.1'den Eş. (4.28) integral denklemini sağlar. $|y(x_0)| = \max_{x \in (0,1)} |y(x)|$ olmak üzere

$$\begin{aligned} |y(x_0)| &\leq |y(x_0)| \max_{x \in [0,1]} \int_0^1 |G(x,s)| |q(s)| ds \\ 1 &\leq \int_0^1 \frac{M_0 s^2 (1-s)^{\xi-2}}{\Gamma(\xi)} |q(s)| ds \end{aligned} \quad (4.39)$$

elde edilir. İspat tamamlanır.

4.2.2 Sonuç

Eş. (4.26) sınır şartlarına sahip Eş. (4.25) kesirli sınır değer problemi için $q : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $M_0 = \max\{\xi - 1, (\xi - 2)^2\}$ olmak üzere Lyapunov tipi

$$\int_0^1 |q(s)| ds \geq \frac{\Gamma(\xi) \xi^\xi}{4M_0 (\xi - 2)^{\xi-2}} \quad (4.40)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat

Eş. (4.26) sınır şartlarına sahip Eş. (4.25) probleminin aşikar olmayan bir çözümü $y(x)$ olsun. Eş. (4.38)'in sol tarafın integralin içerisinde yer alan polinomun, yani $x^2(1-x)^{\xi-2}$ maksimumu alınırsa Eş. (4.40) eşitsizliğinin kolaylıkla sağlandığı görülür. İspat tamamlanır.

4.3. $n - 1 < \xi \leq n$ Olmak Üzere ξ -yinci Basamaktan Yeni Lyapunov Tipi Eşitsizlikler

2017 yılında Ma [33] tarafından elde edilen Green fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

4.3.6 Lemma ([33, Teorem 3.1])

$q(x) \in L[0, 1]$ negatif olmayan bir fonksiyon, $f : [0, 1] \times [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ sürekli bir fonksiyon, $n \geq 3$ ve $0 \leq \beta \leq n - 2$ olmak üzere

$$\begin{cases} -D^\xi y(x) = q(x) f(x, y(x)), 0 < x < 1, n - 1 < \xi \leq n \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = \dots = y^{(n-2)}(0) = D^\beta y(1) = 0 \end{cases} \quad (4.41)$$

kesirli sınır değer probleminin aşikar olmayan bir $y(x)$ çözümü ve Green fonksiyonu $G(x, s)$,

$$G(x, s) = \frac{1}{\Gamma(\xi)} \begin{cases} x^{\xi-1} (1-s)^{\xi-\beta-1} - (x-s)^{\xi-1}, & 0 \leq s \leq x \leq 1 \\ x^{\xi-1} (1-s)^{\xi-\beta-1}, & 0 \leq x \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (4.42)$$

olmak üzere

$$y(x) = \int_0^1 G(x, s) q(s) f(s, y(s)) ds \quad (4.43)$$

integral denklemini sağlar.

İspat

Lemma 4.0.1'den Eş. (4.41) kesirli sınır değer problemine eşdeğer integral denklemi $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$y(x) = -D^{-\xi} q(x) f(x, y(x)) + c_1 x^{\xi-1} + c_2 x^{\xi-2} + \dots + c_n x^{\xi-n} \quad (4.44)$$

yazılabilir. Eş. (4.41) probleminin genel çözümü

$$y(x) = -\frac{1}{\Gamma(\xi)} \int_0^x (x-s)^{\xi-1} q(s) f(s, y(s)) ds + c_1 x^{\xi-1} + c_2 x^{\xi-2} + \dots + c_n x^{\xi-n} \quad (4.45)$$

elde edilir. $y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-2)}(0) = 0$ sınır şartlarından $c_2, \dots, c_n = 0$ ve

$$c_1 = \frac{1}{\Gamma(\xi)} \int_0^1 (1-s)^{\xi-\beta-1} q(s) f(s, y(s)) ds \quad (4.46)$$

bulunur. Bulunan değerler Eş. (4.45) denkleminde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
 y(x) &= -\frac{1}{\Gamma(\xi)} \int_0^x (x-s)^{\xi-1} q(s) f(s, y(s)) ds + \frac{x^{\xi-1}}{\Gamma(\xi)} \int_0^1 (1-s)^{\xi-\beta-1} q(s) f(s, y(s)) ds \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\xi)} \int_0^x \left[x^{\xi-1} (1-s)^{\xi-\beta-1} - (x-s)^{\xi-1} \right] q(s) f(s, y(s)) ds + \\
 &\quad \frac{1}{\Gamma(\xi)} \int_x^1 x^{\xi-1} (1-s)^{\xi-\beta-1} q(s) f(s, y(s)) ds \\
 &= \int_0^1 G(x, s) q(s) f(s, y(s)) ds
 \end{aligned}$$

elde edilir. İspat tamamlanır.

4.3.7 Lemma ([33, Lemma 2.2])

$0 \leq \beta \leq n-2$ için Eş. (4.42) ile tanımlanan Green fonksiyonu $G(x, s)$,

(i) $I = [0, 1]$ olmak üzere $(x, s) \in I \times I$ için $G(x, s)$ süreklidir.

(ii) $(x, s) \in I \times I$ için $G(x, s) \geq 0$

özelliklerini sağlar.

İspat

Özelliklerin sağlandığı Eş. (4.42) ile açıktır.

4.3.8 Lemma ([33, Teorem 2.1])

$0 \leq \beta < 1$ ve $s \in (0, 1)$ için $x_0 = \frac{s}{1 - (1-s)^{\frac{\xi-\beta-1}{\xi-2}}}$ olmak üzere

$$\max_{x \in I} G(x, s) = G(x_0, s) = \frac{s^{\xi-1} (1-s)^{\xi-\beta-1}}{\Gamma(\xi) \left[1 - \left((1-s)^{\frac{\xi-\beta-1}{\xi-2}} \right) \right]^{\xi-2}} > 0 \quad (4.47)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat

Herhangi bir $s \in (0, 1)$ için $x \geq s$ ve $x_0 = \frac{s}{1 - (1-s)^{\frac{\xi-\beta-1}{\xi-2}}}$ olmak üzere

$$\Gamma(\xi) G_x(x, s) = (\xi - 1) x^{\xi-2} \left[(1-s)^{\xi-\beta-1} - \left(1 - \frac{s}{x} \right)^{\xi-2} \right] \begin{cases} \leq 0, x \geq x_0 \\ \geq 0, x \leq x_0 \end{cases} \quad (4.48)$$

elde edilir.

$0 \leq \beta < 1$ ve $\xi > 3$ olduğundan $\frac{\xi - \beta - 1}{\xi - 2} > 1$ elde edilir. Böylece

$$s < 1 - (1-s)^{\frac{\xi-\beta-1}{\xi-2}} < 1 \quad (4.49)$$

elde edilir. Bu ise $s < x_0 < 1$ olduğunu ifade eder. Böylece

$$\max_{x \in [s, 1]} G(x, s) = G(x_0, s) = \frac{s^{\xi-1} (1-s)^{\xi-\beta-1}}{\Gamma(\xi) \left[1 - (1-s)^{\frac{\xi-\beta-1}{\xi-2}} \right]^{\xi-2}} > 0 \quad (4.50)$$

elde edilir.

$x \leq s$ olduğunda $\left[1 - (1-s)^{\frac{\xi-\beta-1}{\xi-2}} \right]^{\xi-2} < 1$ olduğundan Eş. (4.42)'den

$$\begin{aligned}
\max_{x \in [0, s]} G(x, s) &= \frac{s^{\xi-1} (1-s)^{\xi-\beta-1}}{\Gamma(\xi)} \\
&< \frac{s^{\xi-1} (1-s)^{\xi-\beta-1}}{\Gamma(\xi) \left[1 - (1-s)^{\frac{\xi-\beta-1}{\xi-2}} \right]^{\xi-2}} \\
&= G(x_0, s)
\end{aligned} \tag{4.51}$$

bulunur. Eş. (4.50) ve Eş. (4.51)'dan ispat tamamlanır.

4.3.9 Lemma ([33, Teorem 2.2])

$1 \leq \beta \leq n-2$ olmak üzere herhangi bir $s \in (0, 1)$ için

$$\max_{x \in [0, 1]} G(x, s) = G(1, s) \tag{4.52}$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Herhangi bir $s \in (0, 1)$ için $x \geq s$ olduğunda Eş. (4.42)'den

$$\Gamma(\xi) G(x, s) = x^{\xi-1} (1-s)^{\xi-\beta-1} - (x-s)^{\xi-1} \tag{4.53}$$

ve dolayısıyla

$$\Gamma(\xi) G_x(x, s) = (\xi-1)x^{\xi-2} \left[(1-s)^{\xi-\beta-1} - \left(1 - \frac{s}{x}\right)^{\xi-2} \right] \tag{4.54}$$

elde edilir.

$1 \leq \beta \leq n-2$ yani, $0 \leq \xi - \beta - 1 \leq \xi - 2$ ve $(1-s) \geq \left(1 - \frac{s}{x}\right)$ için

$$(1-s)^{\xi-\beta-1} - \left(1 - \frac{s}{x}\right)^{\xi-2} \geq 0 \tag{4.55}$$

elde edilir. Dolayısıyla $G_x(x, s) \geq 0$ olduğu görülür. Böylece

$$\max_{x \in [s, 1]} G(x, s) = G(1, s) = \frac{(1-s)^{\xi-\beta-1} - (1-s)^{\xi-1}}{\Gamma(\xi)} > 0 \quad (4.56)$$

elde edilir.

$x \leq s$ olduğunda $\beta \geq 1$ ve $\xi \geq 3$ olduğundan $(1-s)^\beta + s^{\xi-1} \leq 1-s+s=1$ bulunur. Yani,

$$s^{\xi-1} \leq 1 - (1-s)^\beta \quad (4.57)$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafı $(1-s)^{\xi-\beta-1}$ ile çarpılırsa

$$s^{\xi-1} (1-s)^{\xi-\beta-1} \leq (1-s)^{\xi-\beta-1} - (1-s)^{\xi-1} \quad (4.58)$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$G(x, s) = \frac{x^{\xi-1} (1-s)^{\xi-\beta-1}}{\Gamma(\xi)} \leq \frac{s^{\xi-1} (1-s)^{\xi-\beta-1}}{\Gamma(\xi)} \quad (4.59)$$

bulunur. Eş. (4.58) ve Eş. (4.59)'den

$$\begin{aligned} \max_{x \in [0, s]} G(x, s) &\leq \frac{s^{\xi-1} (1-s)^{\xi-\beta-1}}{\Gamma(\xi)} \\ &\leq \frac{[(1-s)^{\xi-\beta-1} - (1-s)^{\xi-1}]}{\Gamma(\xi)} \\ &= G(1, s) \end{aligned} \quad (4.60)$$

elde edilir. Eş. (4.56) ve Eş. (4.60)'den ispat tamamlanır.

Lyapunov tipi eşitsizlik elde etmek için $q(x) \in L[0, 1]$, $n \geq 3$ ve $0 \leq \beta \leq n-2$ olmak üzere Eş. (4.41) kesirli sınır değer probleminde $f(x, y(x))$ fonksiyonu yerine $y(x)$ alınarak elde

edilen

$$\begin{cases} -D^\xi y(x) = q(x)y(x), 0 < x < 1, n-1 < \xi \leq n \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = \dots = y^{(n-2)}(0) = 0, D^\beta y(1) = 0 \end{cases} \quad (4.61)$$

kesirli sınır değer problemi göz önüne alınsın.

4.3.3. Teorem

Eş. (4.61) kesirli sınır değer problemi için $q(x) \in L[0, 1]$, $n \geq 3$ ve $0 \leq \beta \leq n-2$ olmak üzere Lyapunov tipi

$$\int_0^1 \frac{s^{\xi-1} (1-s)^{\xi-\beta-1}}{\left[1 - (1-s)^{\frac{\xi-\beta-1}{\xi-2}}\right]^{\xi-2}} |q(s)| ds \geq \Gamma(\xi) \quad (4.62)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat

Eş. (4.61) kesirli sınır değer probleminin aşıkâr olmayan bir çözümü $y(x)$ ve Green fonksiyonu $G(x, s)$, (4.42)'de tanımlandığı gibi olmak üzere

$$y(x) = \int_0^1 G(x, s) q(s) y(s) ds \quad (4.5)$$

integral denklemini sağlar. $|y(x_0)| = \max_{x \in [0,1]} |y(x)|$ olmak üzere Lemma 4.3.3'den

$$\begin{aligned} |y(x_0)| &\leq |y(x_0)| \max_{x \in [0,1]} \int_0^1 |G(x, s)| |q(s)| ds \\ 1 &\leq \int_0^1 \frac{s^{\xi-1} (1-s)^{\xi-\beta-1}}{\Gamma(\xi) \left(1 - (1-s)^{\frac{\xi-\beta-1}{\xi-2}}\right)^{\xi-2}} |q(s)| ds \end{aligned} \quad (4.63)$$

elde edilir. İspat tamamlanır.

4.3.4. Teorem

Eş. (4.61) kesirli sınır değer problemi için $q(x) \in L[0, 1]$, $n \geq 3$ ve $0 \leq \beta \leq n - 2$ olmak üzere Lyapunov tipi

$$\int_0^1 G(1, s) |q(s)| ds \geq 1 \quad (4.64)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat

Eş. (4.61) kesirli sınır değer probleminin aşıkâr olmayan bir çözümü $y(x)$, Green fonksiyonu $G(x, s)$, Eş. (4.42)'de tanımlandığı gibi olmak üzere

$$y(x) = \int_0^1 G(x, s) q(s) y(s) ds \quad (4.15)$$

integral denklemini sağlar. $|y(x_0)| = \max_{x \in [0, 1]} |y(x)|$ olmak üzere Lemma 4.0.1'den

$$\begin{aligned} |y(x_0)| &\leq |y(x_0)| \int_0^1 \max_{x \in [0, 1]} |G(x, s)| |q(s)| ds \\ 1 &\leq \int_0^1 G(1, s) |q(s)| ds \end{aligned} \quad (4.65)$$

elde edilir. İspat tamamlanır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, $1 < \xi \leq 2$, $3 < \xi \leq 4$ ve $n - 1 < \xi \leq n$ olmak üzere ξ -yinci basamaktan kesirli sınır değer problemleri için elde edilen Lyapunov tipi eşitsizlikler üzerinde durulmuştur. Giriş Bölümünde, kesirli türev, Green fonksiyonu ve Lyapunov eşitsizliğinin tarihçesinden kısaca bahsedilmiştir. İkinci Bölümde, konuyla ilgili temel tanımlar, teoremler, özellikler, sonuçlar ve örnekler açıklanmıştır. Üçüncü Bölümde ξ -yinci basamaktan kesirli sınır değer problemleri için literatürdeki bazı sonuçlara tarihsel süreç içerisinde atıflar yapılarak özetlenmiştir. Son Bölümde ise $1 < \xi \leq 2$, $3 < \xi \leq 4$ ve $n - 1 < \xi \leq n$ olmak üzere ξ -yinci basamaktan kesirli sınır değer problemleri için Green fonksiyonu yardımıyla elde edilen yeni ve orijinal Lyapunov tipi eşitsizlikler ispatları ile birlikte verilmiştir.

Diferensiyel, fark, zaman skalası ve q -analizde yer alan salınımlılık, diskonjuge, özdeğer problemleri, kararlılık, varlık-teklik ve diğer uygulamalarda Lyapunov tipi eşitsizliklerin kullanışlı bir araç olmasından dolayı tezimizin bu alanında çalışacak olan bilim insanlarını bilgilendireceği ve çalışmalarında yardımcı olabileceği düşüncesindeyiz. Bu tezimizde ξ -yinci basamaktan sadece kesirli sınır değer problemleri için Lyapunov tipi eşitsizlikler üzerine çalışmamıza rağmen farklı analizlerde farklı sınır değer problemleri için tezdeki yöntem kullanılarak en iyi olasılığa sahip yeni Lyapunov tipi eşitsizlikler elde edilip ve uygulamaları verilebilir. Bu konuya ilgi duyan okuyucular, önce ikinci ve daha sonra yüksek basamaktan adi sınır değer problemleri için Lyapunov tipi eşitsizlikler üzerine incelemeler yapabilirler. Dolayısıyla buradan elde ettiği bilgiler ışığında farklı sınır değer problemleri için yeni ve önemli sonuçlar elde edebilirler.

KAYNAKLAR

1. Miller, K. and Ross, B. (1993). *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, (1. Baskı), John Wiley & Sons. Inc., New York, 1-2.
2. Ross, B. (1975). *Fractional Calculus and Its Applications*, (1. Baskı), Proceedings of International Conference Held at the University of New Haven, June, Springer Verlag. 1-3.
3. Kythe, P.K. (2011). *Green's Functions and Linear Differential Equation*, (1. Baskı), Theory Applications and Computation, CRC Press, New York. 9-10.
4. Cabada, A., Cid, J.A. and Maquez-Villamarin, B. (2012). Computation of Green's functions for boundary value problems with mathematica. *Applied Mathematics Computation*, 219(4), 1919-1936.
5. Kelly, W.G. and Peterson, A.C. (2010). *The theory of differential equations*, Classical and Qualitative, Springer, 423(2), 267.
6. Laurent, H. (1884). Sur Le calcul des dérivées à indices quelconques, *Nouvelles Annales De Mathématiques*, 3(3), Gauthier-Villars. 240-252.
7. Milici, C., Dragonescu, G. and Tenreiro Machado, J.A. (2019). *Introduction to Fractional Differential Equations*, (1. Baskı), Nonlinear Systems and Complexity, Springer, International Publishing. 17-24.
8. Ishteva, M., Scherer and R., Boyadjiev, L. (2003). *On the Caputo operator of fractional calculus and C-Laguerre functions*, Technical report, Bulgarian Ministry of Education and Science, Grant M., 21(3), 1305.
9. Hartman, P. and Wintner, A. (1951). On an oscillation criterion of Liapunov, *American Journal of Mathematics and Sciences*, 73(4), 885-890.
10. Ferreira, R.A.C. (2013). A Lyapunov-type inequality for a fractional boundary value problem, *Fractional Calculus Application Analysis*, 16(4), 978-984.
11. Ferreira, R.A.C. (2014). On a Lyapunov-type inequality and the zeros of a certain Mittag-Leffler function, *Journal of Mathematics Analysis Application*, 412(2), 1058-1063.
12. Kilbas, A.A., Srivastava, H.M. and Trujilla, J.J. (2006). *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, (1. Baskı), *North-Holland Math. Stud.*, Elsevier.
13. Jleli, M. and Samet, B. (2015). Lyapunov-type inequalities for a fractional differential equation with mixed boundary conditions, *Mathematics Inequalities Application*, 18(2), 443-451.
14. O'Regan, D. and Samet, B. (2015). Lyapunov-type inequalities for a class of fractional differential equations, *Journal of Inequalities Application*, 247(5), 1-10.

15. Rong, J. and Bai, C. (2015). Lyapunov-type inequality for a fractional differential equation with fractional boundary conditions, *Advances in Difference Equations*, 82(3), 1-10.
16. Jleli, M., Ragoub, L. and Samet, B. (2015). A Lyapunov-type inequality for a fractional differential equation under a Robin boundary condition, *Journal of Functions Spaces*, 41(2), 1-5.
17. Jleli, M. and Samet, B. (2015). Lyapunov-type inequalities for fractional boundary value problems, *Electronic Journal of Differential Equations*, 88(4), 1-11.
18. Ferreira, R.A.C. (2016), Lyapunov-type inequalities for some sequential fractional boundary value problems, *Advances in Dynamical Systems and Applications*, 11(1), 33-43.
19. Dhar, S., Kong, Q. and McCabe, M. (2016), Fractional boundary value problems and Lyapunov-type inequalities with fractional integral boundary conditions, *Electronic Journal of Differential Equations*, 43(4), 1-16.
20. Agarwal, P.R. and Özbekler, A. (2016). Lyapunov-type inequalities for mixed nonlinear Riemann-Liouville fractional differential equations with a forcing term, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 314(3), 69-78.
21. Zhang, L. and Zheng, Z. (2017). Lyapunov type inequalities for the Riemann-Liouville fractional differential equations of higher order, *Advances in Difference Equations*, 270(5), 1-20.
22. Chidouh, A. and Torres, D.F.M. (2017), A generalized Lyapunov's inequality for a fractional boundary value problem, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 312(4), 192-197.
23. Liu, Y., Xie, D., Yong, D. and Bai, C. (2017). Two generalized Lyapunov-type inequalities for a fractional p -Laplacian equation with fractional boundary conditions, *Journal of Inequalities and Applications*, 98(2), 1-11.
24. Wang, X., Peng, Y. and Lu, W. (2017). Lyapunov-type inequalities for certain higher order fractional differential equations, *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 15(10), 5064-5071.
25. Guezane-Lakoud, A., Khaldi, R. and Torres, D.F.M. (2018), Lyapunov-type inequality for a fractional boundary value problem with natural conditions, *SeMA Journal*, 75(1), 157-162.
26. Khaldi, R. and Guezane-Lakoud, A. (2019). On a generalized Lyapunov inequality for a mixed fractional boundary value problem, *AIMS Mathematics*, 4(1), 506-515.
27. Khaldi, R. (2019). Novel Lyapunov-type inequality for fractional boundary value problem, *Journal of Multidisciplinary Modeling and Optimization*, 2(1), 65-70.

28. Ma, D. and Yang, Z. (2020). Lyapunov-type inequality and solution for a fractional differential equation, *Journal of Inequalities and Applications*, 181(3), 1-15.
29. Bachar, I. and Eltayeb, H. (2020). Hartman-type and Lyapunov-type inequalities for a fractional differential equation with fractional boundary conditions, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 92(4), 1-6.
30. Bai, Z. and Lü, H. (2005). Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 311(6), 495-505.
31. Xu, X., Jiang, D., Hu, W., O'Regan, D. and Agarwal, P. R. (2012). Positive properties of Green's function for three-point boundary value problems of nonlinear fractional differential equations and its applications, *Application Analysis*, 91(5), 323-343.
32. Xu, X., Jiang, D. and Yuan, C. (2009). Multiple positive solutions for the boundary value problem of a nonlinear fractional differential equation, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 71(10), 4676-4688.
33. Ma, D. (2017). Green function's new property and its application to the solution for a higher-order fractional boundary value problem, *Fractional Differential Calculus*, 7(1), 123-134.
34. Goodrich, C.S. (2010). Existence of a positive solution to a class of fractional differential equations, *Applied Mathematics Letters*, 23(9), 1050-1055.



GAZİ GELECEKTİR..