



ÜÇ DEĞİŞKENLİ BİR POLİNOM AİLESİ VE GENELLEŞTİRMELERİ

Zeynep ÖZAT

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

TEMMUZ 2020

Zeynep ÖZAT tarafından hazırlanan “ÜÇ DEĞİŞKENLİ BİR POLİNOM AİLESİ VE GENELLEŞTİRMELERİ” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Bayram ÇEKİM

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Başkan: Prof. Dr. Naim TUĞLU

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Doç. Dr. Can KIZILATEŞ

Matematik Ana Bilim Dalı, Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Tez Savunma Tarihi: 06/07/2020

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Zeynep ÖZAT

06/07/2020

ÜÇ DEĞİŞKENLİ BİR POLİNOM AİLESİ VE GENELLEŞTİRMELERİ
(Yüksek Lisans Tezi)

Zeynep ÖZAT

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2020

ÖZET

Bu tezde Fibonacci tipli polinom ailelerini içeren yeni doğurucu fonksiyonlara yer verilmiş ve bu polinom ailelerinin rekürans bağıntıları, kısmi türevli denklemleri ve multilineer ve multilateral doğurucu fonksiyonu elde edilmiştir. Aynı zamanda Apostol tipli polinom ailesinin özellikleri üretilmiştir.

Bilim Kodu : 20406
Anahtar Kelimeler : Doğurucu fonksiyon, Fibonacci polinomları, Lucas polinomları, Rekürans bağıntısı
Sayfa Adedi : 87
Danışman : Doç. Dr. Bayram ÇEKİM

A FAMILY OF THREE VARIABLE POLYNOMIALS AND THEIR
GENERALIZATIONS

(M. Sc. Thesis)

Zeynep ÖZAT

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

July 2020

ABSTRACT

In this thesis, new generating functions involving the families of Fibonacci-type polynomials are included and recurrence relations, partial differential equations and multilineer, multilateral generating functions of these families of the polynomials are obtained. Also, the properties of the families of Apostol- type polynomials have been derived.

Science Code : 20406
Key Words : Generating function, Fibonacci polynomials, Lucas polynomials,
Recurrence relation
Page Number : 87
Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Bayram ÇEKİM

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimimin her aşamasında görüş ve önerileriyle beni yönlendiren, bilgi ve birikimlerinden bana faydalanma fırsatı veren danışman hocam Sayın Doç. Dr. Bayram ÇEKİM'e ve bu süreçte hep yanımda olan maddi manevi desteğini esirgemeyen sevgili aileme, her daim destek olan dostlarıma en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ	x
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1. Ön Bilgiler.....	3
2.2. Bazı Temel Lemmalar	3
2.3. Fibonacci Sayıları	5
2.4. Fibonacci Polinomları	7
2.5. Lucas Sayıları	8
2.6. Lucas Polinomları.....	11
2.7. Tribonacci Sayıları.....	12
2.8. Tribonacci Polinomları	12
2.9. Tribonacci-Lucas Sayıları	13
2.10. Tribonacci-Lucas Polinomları	14
2.11. Pell Sayıları	14
2.12. Pell Polinomları	15
2.13. Pell-Lucas Sayıları.....	16
2.14. Pell-Lucas Polinomları.....	17
2.15. Jacobsthal Sayıları	19

	Sayfa
2.16. Jacobsthal Polinomları	20
2.17. İki Değişkenli Fibonacci Polinomları	21
2.18. İki Değişkenli Lucas Polinomları	22
2.19. Üç Değişkenli Fibonacci Polinomları	23
2.20. Üç Değişkenli Lucas Polinomları	24
2.21. Apostol-Bernoulli Polinomları	26
2.22. Apostol-Euler Polinomları	26
2.23. Humbert Polinomları.....	28
2.24. Legendre Polinomları.....	28
3. ÜÇ DEĞİŞKENLİ BİR POLİNOM AİLESİNİN ÖZELLİKLERİ.....	31
3.1. Polinom Ailesinin Tanımı ve Özellikleri	31
3.2. Kısmi Türevler.....	37
3.3. Doğurucu Fonksiyonun Bazı Uygulamaları.....	39
4. $S_j^{(h)}$ POLİNOM AİLESİ.....	49
4.1. $S_j^{(h)}$ Polinom Ailesinin Tanımı ve Özellikleri	49
4.2. Kısmi Türevler	55
4.3. Rekürans Bağıntıları	59
4.4. Multilineer ve Multilateral Doğurucu Fonksiyonları	62
5. T_j POLİNOM AİLESİ	69
5.1. T_j Polinom Ailesinin Tanımı.....	69
5.2. T_j Polinom Ailesinin Özel Durumları.....	75

Sayfa

6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	81
KAYNAKLAR.....	83
ÖZGEÇMİŞ.....	87

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 3.1. W_j ailesinin özel durumları	35
Çizelge 3.2. K_j ailesinin özel durumları	37

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
$B_j(x, \lambda)$	Apostol-Bernoulli Polinomları
$B_j^{(h)}(x)$	Yüksek Mertebeden Apostol-Bernoulli Polinomları
B_j	Bernoulli Sayıları
$E_j(x, \lambda)$	1. Tip Apostol-Euler Polinomları
$E_j(x)$	2. Tip Apostol-Euler Polinomları
$E_j^{(h)}(x)$	Yüksek Mertebeden Euler Polinomu
$\Pi_{j,m}^{\lambda}(x)$	Humbert Polinomları
F_j	j . Fibonacci Sayısı
$F_j(x)$	j . Fibonacci Polinomu
$F_j(x, y)$	j . İki Değişkenli Fibonacci Polinomu
J_j	j . Jacobsthal Sayısı
$J_j(x)$	j . Jacobsthal Polinomu
L_j	j . Lucas Sayısı
$L_j(x)$	j . Lucas Polinomu
$L_j(x, y)$	j . İki Değişkenli Lucas Polinomu
P_j	j . Pell Sayıları
$P_j(x)$	Legendre Polinomları
S_j	Üç Değişkenli Polinom Ailesi
$S_j^{(h)}$	Genelleştirilmiş Üç Değişkenli Polinom Ailesi
$(v)_r$	Pochhammer Sembolü

1. GİRİŞ

Pisalı Leonardo Fibonacci, orta çağın en önde gelen Avrupalı matematikçisi olup, Hindu-Arap sayı sistemini Avrupa'ya ilk tanıtan kişidir. Fibonacci 1170 yılında Pisa'da dünyaya gelmiştir ve daha sonra babasının Cezayir'e atanması ile burada matematik öğrenmek için dersler almaya başlar, ardından Hint-Arap sayı sistemini ve hesaplama tekniklerini öğrenir. Fibonacci, 1202 yılında tamamladığı *Liber Abacci* isimli hesaplama kitabı anlamına gelen kitabıyla tanınır. Bu kitap, orta çağın en etkili matematik kitaplarından biri olup bu kitabında Fibonacci sayıların nasıl okunacağını, yazılacağını açıklayarak kesirler ve tam sayılar ile dört işlemin nasıl yapıldığını göstermiştir. Fibonacci, *Liber Abacci* eserinden sonra *Flos*, *Liber Quadratorum*, *Practica Geometria*, adında üç kitap daha yazmıştır [1, 2].

Matematik dünyasına önemli katkılarda bulunan Fibonacci'nin en önemli katkılarından biri de kendi adını taşıyan “*Fibonacci Sayı Dizileri*” dir. Fibonacci sayı dizileri, F_j olarak gösterilmiş olup her terim kendisinden önce gelen iki terimin toplamı olarak ifade edilen bir dizidir. Bu dizinin kıymeti insanlar tarafından daha sonraları anlaşılmış ve dünyaya daha analitik olarak bakmaya başlamışlar ve bu sayı dizisinin üzerinde durarak önemli sonuçlar elde etmişlerdir [1, 2].

Fibonacci Sayı Dizisi Örnekleri:

- Ayçiçeğinin merkezinden dışarıya doğru sağdan sola ve soldan sağa doğru taneler sayıldığında çıkan sayılar,
- Çam kozalağının altındaki sabit noktadan tanelerin sayılmasıyla ortaya çıkan sayılar,
- Pascal üçgenindeki katsayıların yazılarak çapraz toplamalarıyla elde edilen sayılar.

Fibonacci sayıları için açık gösterimini veren Édouard Lucas, Fibonacci dizisini tanımlamış ve bu dizilerle ilişkili olan yeni bir sayı dizisini literatüre kazandırmıştır. Bu dizi daha sonra kendi ismiyle yani Lucas dizisi olarak adlandırılmıştır [1].

Fibonacci polinomları önce Alman matematikçi E. Jacobsthal ve Belçikalı matematikçi Eugène Charles Catalan ve tarafından çalışılmıştır. Daha sonra Hint matematikçi M. N. S Swamy tarafından çalışılmıştır. 1963 yılında Fibonacci polinomlarının bir yenisini olan Pell polinomları P. F. Byrd tarafından tanımlanmıştır. Fibonacci polinomu olarak kabul edilen

polinom ise Catalan tarafından tanımlanmış olan polinomdur. Daha sonra Fibonacci polinomları üzerinde literatürde farklı tanımlamalar ve genellemeler yapılmıştır bunlarda Fibonacci tipli polinomlar olarak adlandırılır [1-6].

Bu tezin amacı üçüncü bölümde tanıtılan çalışmada verilen polinom ailesini içeren daha genel bir polinom ailesi tanımlayarak özelliklerini incelemektir.

Bu tezin birinci bölümü temel tanımlamalara ayrılmış olup tez aşağıdaki bölümlerden oluşmaktadır:

- ❖ *İkinci bölüm:* Bu bölümde; bazı tanım, lemmalar ve bazı bilinen sayı dizileri, polinom aileleri ile özelliklerine yer verilmiştir.
- ❖ *Üçüncü bölüm:* Üç değişkenli bazı polinom aileleri üzerinde durulmuştur.
- ❖ *Dördüncü ve beşinci bölüm:* Bu bölümde yüksek basamaktan bazı polinom aileleri tanımlanarak bu polinom ailelerinin kısmi türevleri, rekürans bağıntısı ve diğer polinom aileleriyle ilgili özellikleri incelenmiştir. Ayrıca Apostol tipli bazı polinom ailelerine de değinilmiştir.
- ❖ *Altıncı bölüm:* Bu bölümde elde edilen sonuçlar üzerinde durulmuştur.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Ön Bilgiler

2.1.1. Tanım

ν reel ya da kompleks bir sayı olmak üzere,

$$(\nu)_0 = 1, \quad \nu \neq 0$$

$$(\nu)_r = \nu(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+r-1), \quad r = 1, 2, \dots$$

biçiminde tanımlanan $(\nu)_r$ ifadesine *Pochhammer sembolü* denir [7].

2.1.2. Tanım

İki değişkenli bir $F(x, t)$ fonksiyonu t nin kuvvetleri cinsinden

$$F(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n(x) t^n$$

biçiminde seriye açılabilirse $F(x, t)$ fonksiyonuna $\{f_n(x)\}$ *fonksiyonlar ailesinin bir doğurucu fonksiyonu* denir. Burada c_n ler x ve t den bağımsız n nin bir fonksiyonu olup, farklı parametreler içerebilir [8, 9].

2.2. Bazı Temel Lemmalar

Bu çalışmada $\mathbb{N}$ sembolü $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ kümesini belirtmektedir.

2.2.1. Lemma

$A(r, t)$, r ve t ye bağılı bir dizi olsun. $p \in \mathbb{N} - \{0\}$ olmak üzere,

$$\text{a) } \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} A(r, t) = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\lfloor t/p \rfloor} A(r, t - pr)$$

$$\text{b) } \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\lfloor t/p \rfloor} A(r, t) = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} A(r, t + pr)$$

eşitlikleri sağlanır [10].

2.2.2. Lemma

$A(r, t)$, r ve t ye bağılı bir dizi olsun. Bu durumda $p \in \mathbb{N} - \{0\}$ olmak üzere,

$$\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{r=0}^t A(r, t) = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\lfloor t/p \rfloor} A(r, t - (p-1)r)$$

eşitliği sağlanır [10].

2.2.3. Lemma

n bir doğal sayı ve r reel ya da kompleks bir sayı olmak üzere,

$$\binom{-r}{n} = \frac{(-1)^n (r)_n}{n!}$$

eşitliği sağlanır [9].

2.2.4. Lemma

α, β, γ reel ya da kompleks sabitler olmak üzere $F(\alpha, \beta; \gamma; x)$ hipergeometrik seri olup,

$$F(\alpha, \beta; \gamma; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{x^n}{n!}, \quad |x| < 1, \quad \gamma \notin \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$$

olarak gösterilmektedir. Buna göre

$$(1-x)^{-\alpha} = F(\alpha, 1; 1; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n x^n}{n!}, \quad |x| < 1$$

eşitliği sağlanır [9].

2.3. Fibonacci Sayıları

2.3.1. Tanım

$F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ koşulları olmak üzere

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

rekürans bağıntısıyla tanımlı sayılara Fibonacci sayıları denir [1]. Burada F_n , n . Fibonacci sayısıdır. Bu bağıntıya göre Fibonacci sayıları

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

şeklindedir [1]. Fibonacci sayıları ile ilgili bilinen bazı özellikler aşağıdaki gibidir [1, 11].

$n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$a) \sum_{s=0}^{n-1} F_s^2 = F_n F_{n-1}$$

$$b) \sum_{s=0}^{n-1} F_s F_{s-1} = \begin{cases} F_{n-1}^2, & n \text{ tek ise} \\ F_{n-1}^2 - 1, & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

$$c) \sum_{s=0}^{n-1} F_{s-1}^2 = F_{n-2} F_{n-1} + 1$$

$$d) F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$$

dır. O halde yukarıdaki son özellik dikkate alınırsa $n \geq 0$ için, F_{-n} 'ler

0,1,-1,2,-3,5,-8,...

olarak elde edilir [11].

F_n Fibonacci sayılarının rekürans bağıntısı aracılığıyla karakteristik denklem

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

olarak bulunmuştur. Bu denklemin kökleri $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olup Fibonacci sayıları için

$$F_n = \frac{a^n - b^n}{a - b} \tag{2.2}$$

eşitliği *Binet formülü* olarak adlandırılır [1, 12].

F_n Fibonacci sayıları için elde edilen doğurucu fonksiyon

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n t^n = \frac{t}{1-t-t^2} \quad (2.3)$$

ile ifade edilir [1, 12].

2.4. Fibonacci Polinomları

2.4.1. Tanım

$F_n(x)$, n . Fibonacci polinomu olmak üzere

$$F_0(x) = 0, \quad F_1(x) = 1$$

koşulları ile bu polinomlar $n = 0, 1, 2, \dots$ için

$$F_{n+2}(x) = xF_{n+1}(x) + F_n(x) \quad (2.4)$$

rekürans özelliği ile tanımlanır [13, 14]. $F_n(x)$ Fibonacci polinomlarının rekürans

bağıntısına karşılık gelen karakteristik denklemin kökleri $a(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}$ ve

$b(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{2}$ olup, Fibonacci polinomları için

$$F_n(x) = \frac{a^n(x) - b^n(x)}{a(x) - b(x)} \quad (2.5)$$

eşitliği *Binet formülü* olarak adlandırılır [1, 14].

$F_n(x)$ Fibonacci polinomları için rekürans bağıntısı yardımıyla elde edilen doğurucu fonksiyon

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n(x) t^n = \frac{t}{1 - xt - t^2} \quad (2.6)$$

şeklinde ifade edilir [1].

$$F_n(x) = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-j-1}{j} x^{n-2j-1} \quad (2.7)$$

ifadesi Fibonacci polinomlarının açık gösterimidir [15].

Eş. 2.7’den Fibonacci polinomlarının ilk birkaçı

$$F_1(x) = 1,$$

$$F_2(x) = x,$$

$$F_3(x) = x^2 + 1,$$

$$F_4(x) = x^3 + 2x,$$

$$F_5(x) = x^4 + 3x^2 + 1$$

şeklindedir [16].

2.5. Lucas Sayıları

François Édouard Anatole Lucas, 1842’de Fransa’nın Amiens kentinde doğmuştur. Lucas, Ecole Normale Superieure de eğitim görmüştür. Daha sonra Paris Gözlemevinde asistan olarak çalışmıştır. Ardından Lycee Saint-Louis’de ve Lycee Charlemagne’de matematik Profesörü olmuştur [1]. Sayılar teorisine yaptığı katkıların yanı sıra, oyun matematiği üzerine dört ciltlik Recreations Mathematiques (1882-1894) adında klasığı ile de tanınmaktadır. Geliştirdiği problemler arasında en çok bilinen Brahma Kulesidir [1]. Ancak

Lucas, özellikle Fibonacci sayı dizileri olmak üzere en iyi sayı teorisindeki sonuçlarıyla tanınır.

2.5.1. Tanım

$L_0 = 2$, $L_1 = 1$ koşulları olmak üzere

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

bağıntısıyla tanımlanan sayılara Lucas sayıları denir [1] ve burada L_n , n . Lucas sayısının gösterimidir. Bu bağıntıya göre Lucas sayıları

2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, ...

şeklindedir [1]. Lucas sayılarının rekürans bağıntısı yardımıyla elde edilen karakteristik denklem

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

şeklindedir ve bunun kökleri $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olup, Lucas sayıları için

$$L_n = a^n + b^n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.9)$$

eşitliği *Binet formülü* olarak adlandırılır [1]. Lucas sayılarının doğurucu fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n t^n = \frac{2-t}{1-t-t^2}$$

olarak elde edilir [1]. Lucas sayıları için bazı özellikler aşağıdaki gibidir [1, 11].

$n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\text{a) } \sum_{s=0}^{n-1} L_{s-1}^2 = L_n L_{n-1} + 2 ,$$

$$\text{b) } \sum_{s=0}^{n-1} L_s L_{s-1} = \begin{cases} L_{n-1}^2 - 6, & n \text{ tek ise} \\ L_{n-1}^2 - 1, & n \text{ çift ise} \end{cases} ,$$

$$\text{c) } \sum_{s=0}^{n-1} L_{s-1}^2 = L_{n-1} L_{n-2} + 3 ,$$

$$\text{d) } L_{-n} = (-1)^n L_n$$

eşitlikleri sağlanır. $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ olmak üzere, n . Fibonacci ve Lucas sayıları sırasıyla F_n ve L_n olsun. Buna göre Fibonacci ve Lucas sayıları için

$$\text{i) } F_{n+1} + F_{n-1} = L_n, \quad \text{ii) } L_{n+1} + L_{n-1} = 5F_n, \quad \text{iii) } F_n L_n = F_{2n},$$

$$\text{iv) } L_n^2 + L_{n+1}^2 = 5F_{2n+1}, \quad \text{v) } L_{2n} = 5F_n^2 + 2(-1)^n, \quad \text{vi) } L_{n+1}^2 + L_n^2 = 5F_{2n+1},$$

$$\text{vii) } L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^n, \quad \text{viii) } L_n^2 - F_n^2 = 4F_{n+1}F_{n-1}, \quad \text{ix) } L_n + F_n = 2F_{n+1},$$

$$\text{x) } L_n - F_n = 2F_{n-1}$$

eşitlikleri sağlanır [1, 17].

2.6. Lucas Polinomları

2.6.1. Tanım

Başlangıç koşulları $L_0(x) = 2$ ve $L_1(x) = x$ olmak üzere Lucas polinomları

$$L_{n+1}(x) = xL_n(x) + L_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.10)$$

rekürans bağıntısıyla tanımlanır [15]. Burada Lucas polinomlarının doğurucu fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n = \frac{2-xt}{1-xt-t^2} \quad (2.11)$$

olup, açık gösterimi ise

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} x^{n-2k}, \quad n \neq 0 \quad (2.12)$$

olarak elde edilir. [15]. Eş. 2.12'den ilk birkaç Lucas polinomunun ilk birkaçı,

$$L_0(x) = 2,$$

$$L_1(x) = x,$$

$$L_2(x) = x^2 + 2,$$

$$L_3(x) = x^3 + 3x,$$

$$L_4(x) = x^4 + 4x^2 + 2,$$

$$L_5(x) = x^5 + 5x^3 + 5x$$

olarak elde edilir [15].

2.7. Tribonacci Sayıları

2.7.1. Tanım

Fibonacci sayılarının bir genellemesi olarak bilinen tribonacci sayıları 1963 yılında M. Feinberg tarafından $T_0 = 0$, $T_1 = 1$ ve $T_2 = 1$ başlangıç koşulları olmak üzere

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}, \quad n = 3, 4, \dots \quad (2.13)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır [18]. Tribonacci sayılarının doğurucu fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n t^n = \frac{t}{1-t-t^2-t^3} \quad (2.14)$$

olarak elde edilir [14].

2.8. Tribonacci Polinomları

2.8.1. Tanım

Tribonacci polinomları, $t_0(x) = 0$, $t_1(x) = 1$ ve $t_2(x) = x^2$ başlangıç koşulları olmak üzere

$$t_{n+3}(x) = x^2 t_{n+2}(x) + x t_{n+1}(x) + t_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.15)$$

rekürans bağıntısıyla tanımlanır [16].

Eş. 2.15' de $x=1$ alındığında Eş. 2.13' de tanımlanan Tribonacci sayıları için rekürans bağıntısının elde edileceği görülmektedir.

Tribonacci polinomlarının doğurucu fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} t_n(x) z^n = \frac{z}{1 - x^2 z - x z^2 - z^3} \quad (2.16)$$

olarak elde edilir [1]. Hoggatt ve Bicknell tarafından Tribonacci polinomlarının birkaçı

$$t_1(x) = 1,$$

$$t_2(x) = x^2,$$

$$t_3(x) = x^4 + x,$$

$$t_4(x) = x^6 + 2x^3 + 1,$$

$$t_5(x) = x^8 + 3x^5 + 3x^2$$

olarak verilmiştir [16].

2.9. Tribonacci-Lucas Sayıları

2.9.1. Tanım

$K_0 = 3$, $K_1 = 1$ ve $K_2 = 3$ başlangıç koşulları olmak üzere,

$$K_n = K_{n-1} + K_{n-2} + K_{n-3}, \quad n = 3, 4, \dots \quad (2.17)$$

rekürans bağıntısıyla tanımlı sayılara Tribonacci-Lucas sayıları denir ve K_n ile n . Tribonacci-Lucas sayıları gösterilir. Tribonacci-Lucas sayılarının sayılarının doğurucu fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} K_n t^n = \frac{3 - 2t - t^2}{1 - t - t^2 - t^3} \quad (2.18)$$

olarak elde edilir [19].

2.10. Tribonacci-Lucas Polinomları

2.10.1. Tanım

$k_n(x)$, n . Tribonacci-Lucas polinomunu göstermek üzere, $k_0(x) = 3$, $k_1(x) = x^2$ ve $k_3(x) = x^4 + 2x$ başlangıç koşulları olmak üzere

$$k_{n+3}(x) = x^2 k_{n+2}(x) + x k_{n+1}(x) + k_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Tribonacci-Lucas polinomlarının doğurucu fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} k_n(x) t^n = \frac{3 - 2x^2 t - x t^2}{1 - x^2 t - x t^2 - t^3} \quad (2.19)$$

olarak elde edilir [19].

2.11. Pell Sayıları

2.11.1. Tanım

$P_0 = 0$, $P_1 = 1$ başlangıç koşulları olmak üzere Pell sayıları,

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (2.20)$$

rekürans bağıntısıyla tanımlanır [1, 20]. Pell sayılarından oluşan $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ sayı dizisine Pell sayıları dizisi denir. Pell sayılarının ilk birkaçı

$$P_0 = 0, \quad P_1 = 1, \quad P_2 = 2, \quad P_3 = 5, \quad P_4 = 12, \quad P_5 = 29$$

şeklinde [20]. P_n , Pell sayılarının rekürans bağıntısı yardımıyla elde edilen karakteristik denklemin kökleri $\gamma = 1 + \sqrt{2}$ ve $\delta = 1 - \sqrt{2}$ olup Pell sayıları için

$$P_n = \frac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma - \delta} \quad (2.21)$$

eşitliği *Binet Formülü* olarak adlandırılır [20]. P_n Pell sayıları için doğurucu fonksiyon

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n t^n = \frac{t}{1-2t-t^2} \quad (2.22)$$

ile ifade edilir [20]. P_n , Pell sayılarının açık gösterimi

$$P_n = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2k+1} 2^k \quad (2.23)$$

şeklindedir [20].

2.12. Pell Polinomları

2.12.1. Tanım

$P_n(x)$, n . Pell polinomu olmak üzere, $P_0(x) = 0$ ve $P_1(x) = 1$ başlangıç koşulları ile verilen Pell polinomlarının rekürans bağıntısı

$$P_{n+2}(x) = 2xP_{n+1}(x) + P_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.24)$$

ile verilir [21].

$P_n(x)$, Pell polinomlarının rekürans bağıntısından elde edilen karakteristik denklem

$$\lambda^2 - 2x\lambda - 1 = 0$$

olmak üzere, karakteristik denklemin kökleri $\alpha(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$ ve $\beta(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$

değerleridir. Pell polinomları için

$$P_n(x) = \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \quad (2.25)$$

eşitliği *Binet formülü* olarak adlandırılır [21].

$P_n(x)$, Pell polinomları için doğurucu fonksiyon

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = \frac{t}{1-2xt-t^2} \quad (2.26)$$

ile ifade edilir ve

$$P_n(x) = \sum_{s=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-s-1}{s} (2x)^{n-2s-1} \quad (2.27)$$

olup Pell polinomlarının açık gösterimidir [21]. Eş. 2.27'den Pell polinomlarının ilk birkaçı

$$P_0(x) = 0, P_1(x) = 1, P_2(x) = 2x, P_3(x) = 4x^2 + 1, P_4(x) = 8x^3 + 4x, P_5(x) = 16x^4 + 12x^2 + 1$$

şeklindedir [20].

2.13. Pell-Lucas Sayıları

2.13.1. Tanım

$Q_0 = Q_1 = 2$ olmak üzere

$$Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}, \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (2.28)$$

ile tanımlanan bağıntı Pell-Lucas sayılarının rekürans bağıntısıdır ve burada Q_n , n . Pell-Lucas sayısının gösterimidir [20]. $Q_n(x)$, Pell-Lucas sayılarının rekürans bağıntısından elde edilen karakteristik polinom

$$\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$$

olmak üzere, karakteristik polinomun kökleri $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ ve $\beta = 1 - \sqrt{2}$ olup Pell-Lucas sayıları için

$$Q_n = \alpha^n + \beta^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.29)$$

eşitliği *Binet formülü* olarak adlandırılır [20].

$$Q_n = 2 \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2k} 2^k \quad (2.30)$$

ifadesi Pell-Lucas sayılarının açık gösterimidir [20].

2.14. Pell-Lucas Polinomları

2.14.1. Tanım

$Q_n(x)$, n . Pell-Lucas polinomu olmak üzere, $Q_0(x) = 2$ ve $Q_1(x) = 2x$ başlangıç koşulları ile verilen Pell-Lucas polinomlarının rekürans bağıntısı

$$Q_{n+2}(x) = 2xQ_{n+1}(x) + Q_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.31)$$

olarak verilir [21].

$Q_n(x)$, Pell-Lucas polinomlarının rekürans bağıntısından elde edilen karakteristik denklem

$$\lambda^2 - 2x\lambda - 1 = 0$$

olup karakteristik denklemin kökleri $\alpha(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$ ve $\beta(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$ değerleridir.

Bu değerler için

$$Q_n(x) = \alpha^n(x) + \beta^n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.32)$$

ifadesine Pell-Lucas polinomları için *Binet formülü* denir [21].

$Q_n(x)$, Pell-Lucas polinomları için doğurucu fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x) t^n = \frac{2 - 2xt}{1 - 2xt - t^2} \quad (2.33)$$

ile ifade edilir ve

$$Q_n(x) = \sum_{s=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \frac{n}{n-s} \binom{n-s}{s} (2x)^{n-2s}, \quad n \neq 0 \quad (2.34)$$

olup Pell-Lucas polinomlarının açık gösterimidir [21]. Eş. 2.34'den Pell-Lucas polinomlarının ilk birkaçı

$$Q_0(x) = 2,$$

$$Q_1(x) = 2x,$$

$$Q_2(x) = 4x^2 + 2,$$

$$Q_3(x) = 8x^3 + 6x,$$

$$Q_4(x) = 16x^4 + 16x^2 + 2,$$

$$Q_5(x) = 32x^5 + 40x^3 + 10x$$

şeklindedir [20].

2.15. Jacobsthal Sayıları

2.15.1. Tanım

J_n , n . Jacobsthal sayısını göstermek üzere, $J_0 = 0$, $J_1 = 1$ başlangıç koşulları ile verilen Jacobsthal sayıları için rekürans bağıntısı

$$J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (2.35)$$

olarak tanımlanır [22]. J_n , Jacobsthal sayılarının rekürans bağıntısından elde edilen karakteristik denklem

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

olmak üzere, buradan elde edilen $\alpha = 2$ ve $\beta = -1$ olup Jacobsthal sayıları için

$$J_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{3} = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n) \quad (2.36)$$

eşitliği *Binet formülü* olarak adlandırılır [22].

Jacobsthal sayılarının doğurucu fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} J_n t^n = \frac{t}{1-t-2t^2} \quad (2.37)$$

olarak elde edilir [23]. Jacobsthal sayılarının açık gösterimi ise

$$J_n = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-1-k}{k} 2^k \quad (2.38)$$

olarak elde edilir [22].

2.16. Jacobsthal Polinomları

2.16.1. Tanım

$J_0(x) = 0$, $J_1(x) = 1$ başlangıç koşulları olmak üzere $J_n(x)$, n . Jacobsthal polinomu

$$J_n(x) = J_{n-1}(x) + 2xJ_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots \quad (2.39)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır [24-26].

$J_n(x)$, Jacobsthal polinomlarının rekürans bağıntısı yardımıyla elde edilen karakteristik denklemin kökleri

$$\alpha(x) = \frac{1 + \sqrt{1 + 4x}}{2} \quad \text{ve} \quad \beta(x) = \frac{1 - \sqrt{1 + 4x}}{2} \quad \text{olup Jacobsthal polinomları için}$$

$$J_n(x) = \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.40)$$

eşitliği *Binet formülü* olarak adlandırılır [24-26]. $J_n(x)$, Jacobsthal polinomları için doğurucu fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} J_n(x) t^n = \frac{t}{1 - t - 2xt^2} \quad (2.41)$$

olarak ifade edilir [24-26]. Jacobsthal polinomlarının ilk birkaçı

$$J_1(x) = 0,$$

$$J_2(x) = 1,$$

$$J_3(x) = 1,$$

$$J_4(x) = x + 1,$$

$$J_5(x) = x^2 + 3x + 1$$

şeklindedir [23].

2.17. İki Değişkenli Fibonacci Polinomları

2.17.1. Tanım

$F_0(x, y) = 0$, $F_1(x, y) = 1$ başlangıç koşulları olmak üzere $F_n(x, y)$ iki değişkenli Fibonacci polinomları,

$$F_n(x, y) = xF_{n-1}(x, y) + yF_{n-2}(x, y), \quad n = 2, 3, \dots \quad (2.42)$$

şeklinde rekürans bağıntısı ile tanımlanır [27-29]. Burada $x \neq 0$, $y \neq 0$ ve $x^2 + 4y \neq 0$ dır.

İki değişkenli Fibonacci polinomların rekürans bağıntısından elde edilen karakteristik denklem

$$\lambda^2 - x\lambda - y = 0 \quad (2.43)$$

olup, bu denklemin köklerinden elde edilen

$$\alpha(x, y) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4y}}{2} \text{ ve } \beta(x, y) = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4y}}{2} \text{ değerleri yardımıyla iki değişkenli}$$

Fibonacci polinomları için

$$F_n(x, y) = \frac{\alpha^n(x, y) - \beta^n(x, y)}{\alpha(x, y) - \beta(x, y)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.44)$$

eşitliği *Binet formülü* olarak adlandırılır [27-29].

İki değişkenli Fibonacci polinomları için doğurucu fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n(x, y) t^n = \frac{t}{1 - xt - yt^2} \quad (2.45)$$

ile ifade edilir [30].

Uyarı

Eş. 2.45’de $y=1$ yazılırsa, Eş. 2.6’dan dolayı $F_n(x, 1) = F_n(x)$ Fibonacci polinomuna dönüşür.

2.18. İki Değişkenli Lucas Polinomları

2.18.1. Tanım

$L_0(x, y) = 2$, $L_1(x, y) = x$ başlangıç koşulları olmak üzere $L_n(x, y)$ iki değişkenli Lucas polinomları

$$L_n(x, y) = xL_{n-1}(x, y) + yL_{n-2}(x, y), \quad n = 2, 3, \dots \quad (2.46)$$

şeklinde rekürans bağıntısı ile tanımlanır [27-29]. Burada $x \neq 0$, $y \neq 0$ ve $x^2 + 4y \neq 0$ dır.

İki değişkenli Lucas polinomlarının rekürans bağıntısından elde edilen karakteristik denklem

$$\lambda^2 - x\lambda - y = 0 \quad (2.47)$$

olup $\alpha(x, y) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4y}}{2}$ ve $\beta(x, y) = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4y}}{2}$ değerleri yardımıyla iki değişkenli

Lucas polinomları için

$$L_n(x, y) = \alpha^n(x, y) + \beta^n(x, y), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.48)$$

eşitliği *Binet formülü* olarak adlandırılır [27-29].

İki değişkenli Lucas polinomları için doğurucu fonksiyon

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x, y) t^n = \frac{2 - xt}{1 - xt - yt^2} \quad (2.49)$$

ile ifade edilir [14-30].

Uyarı

Eş. 2.48'de $y = 1$ değeri yazılırsa, Eş. 2.11'den dolayı $L_n(x, 1) = L_n(x)$ Lucas polinomuna dönüşür.

2.19. Üç Değişkenli Fibonacci Polinomları

2.19.1. Tanım

$H_0(x, y, z) = 0$, $H_1(x, y, z) = 1$ ve $H_2(x, y, z) = x$ başlangıç koşulları olmak üzere $H_n(x, y, z)$, n . üç değişkenli Fibonacci polinomu

$$H_n(x, y, z) = xH_{n-1}(x, y, z) + yH_{n-2}(x, y, z) + zH_{n-3}(x, y, z), \quad n = 3, 4, \dots \quad (2.50)$$

şeklinde rekürans bağıntısı ile tanımlanır [31].

Üç değişkenli Fibonacci polinomlarının rekürans bağıntısından elde edilen karakteristik denklem

$$\lambda^3 - x\lambda^2 - y\lambda - z = 0$$

olmak üzere bu denklemi sağlayan α, β, γ değerleri için

$$H_n(x, y, z) = \frac{\alpha^{n+1}}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + \frac{\beta^{n+1}}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)} + \frac{\gamma^{n+1}}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)} \quad (2.51)$$

ifadesine üç değişkenli Fibonacci polinomları için *Binet formülü* denir [31].

Üç değişkenli Fibonacci polinomlarının doğurucu fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x, y, z) t^n = \frac{t}{1 - xt - yt^2 - zt^3} \quad (2.52)$$

olarak verilir [31]. Üç değişkenli Fibonacci polinomlarının ilk birkaçı

$$H_0(x, y, z) = 0,$$

$$H_1(x, y, z) = 1,$$

$$H_2(x, y, z) = x,$$

$$H_3(x, y, z) = x^2 + y,$$

$$H_4(x, y, z) = x^3 + 2xy + z,$$

$$H_5(x, y, z) = x^4 + 3x^2y + 2xz + y^2$$

şeklindedir [31].

2.20. Üç Değişkenli Lucas Polinomları

2.20.1. Tanım

$K_n(x, y, z)$, n . üç değişkenli Lucas polinomu, $K_0(x, y, z) = 3$, $K_1(x, y, z) = x$ ve

$K_2(x, y, z) = x^2 + 2y$ başlangıç koşulları olmak üzere

$$K_n(x, y, z) = xK_{n-1}(x, y, z) + yK_{n-2}(x, y, z) + zK_{n-3}(x, y, z), \quad n = 3, 4, \dots \quad (2.53)$$

şeklinde rekürans bağıntısıyla tanımlanır [31].

Üç değişkenli Lucas polinomlarının rekürans bağıntısından elde edilen karakteristik denklem

$$\lambda^3 - x\lambda^2 - y\lambda - z = 0$$

olmak üzere bu denklemi sağlayan α, β, γ değerleri için

$$K_n(x, y, z) = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n \quad (2.54)$$

ifadesine üç değişkenli Lucas polinomları için *Binet formülü* denir [31].

Üç değişkenli Lucas polinomlarının doğurucu fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} K_n(x, y, z) t^n = \frac{3 - 2xt - yt^2}{1 - xt - yt^2 - zt^3} \quad (2.55)$$

olarak elde edilir [31]. Üç değişkenli Lucas polinomlarının ilk birkaçı

$$K_0(x, y, z) = 3,$$

$$K_1(x, y, z) = x,$$

$$K_2(x, y, z) = x^2 + 2y,$$

$$K_3(x, y, z) = x^3 + 3xy + 3z,$$

$$K_4(x, y, z) = x^4 + 4x^2y + 4xz + 2y^2,$$

$$K_5(x, y, z) = x^5 + 5x^3y + 5xy^2 + 5x^2z + 5yz$$

şeklindedir [31].

2.21. Apostol-Bernoulli Polinomları

2.21.1. Tanım

$|z + \log \lambda| < 2\pi$ ve $\lambda > 0$ olmak üzere, $B_j(x; \lambda)$ Apostol-Bernoulli polinomları için doğurucu fonksiyonu

$$G(x, z; \lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} B_j(x, \lambda) \frac{z^j}{j!} = \frac{ze^{xz}}{\lambda e^z - 1} \quad (2.56)$$

olarak tanımlanır [32].

Eş. 2.56'da $\lambda = 1$ olması durumunda Apostol-Bernoulli polinomları $B_j(x) = B_j(x, 1)$ Bernoulli polinomlarına dönüşür [32].

2.21.2. Tanım

$|z + \ln \lambda| < 2\pi$ koşulu olmak üzere Apostol-Bernoulli sayıları $B_j(\lambda) := B_j(0, \lambda)$ için doğurucu fonksiyon

$$\sum_{j=0}^{\infty} B_j(\lambda) \frac{z^j}{j!} = \frac{z}{\lambda e^z - 1} \quad (2.57)$$

ile ifade edilir [32].

2.22. Apostol-Euler Polinomları

2.22.1. Tanım

$|2z + \log \lambda| < \pi$ ve $\lambda > 0$ olmak üzere $E_j(x, \lambda)$ ile verilen 1. tip Apostol-Euler Polinomları olmak üzere doğurucu fonksiyonu

$$U(x, z; \lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} E_j(x, \lambda) \frac{z^j}{j!} = \frac{2e^{xz}}{\lambda e^z + 1} \quad (2.58)$$

ile verilir. Eş. 2.58'de $\lambda \neq 1$ olmak üzere $x = \frac{1}{2}$ alınırsa Apostol-Euler sayıları

$$E_j(\lambda) = 2^j E_j\left(\frac{1}{2}, \lambda\right) \text{ elde edilir [33-35].}$$

$\lambda = 1$ alındığında 1 .tip Euler Polinomları $E_j(x) = E_j(x, 1)$ elde edilir. $E_j^{(h)}(x)$, yüksek mertebeden Euler polinomu olmak üzere doğurucu fonksiyonu

$$U_{E^{(h)}}(x, z; h) = \sum_{j=0}^{\infty} E_j^{(h)}(x) \frac{z^j}{j!} = \left(\frac{2e^{xz}}{e^z + 1} \right)^h \quad (2.59)$$

ile tanımlanır [33]. Burada $h=1$ alındığında $E_j^{(1)}(x) = E_j(x)$ ile verilen 1.tip Euler Polinomları elde edilir.

$|2z + \log \lambda| < \pi$ olmak üzere $E_j^*(x, \lambda)$ 2.tip Apostol-Euler Polinomları olmak üzere doğurucu fonksiyonu

$$U^*(x, z; \lambda) = \frac{2e^{xz}}{\lambda e^z + \lambda^{-1} e^{-z}} = \sum_{j=0}^{\infty} E_j^*(x, \lambda) \frac{z^j}{j!} \quad (2.60)$$

ile tanımlanır [36].

Eş. 2.60' da $\lambda = 1$ alındığında 2. tip Euler polinomları $E_j^*(x, 1) = E_j^*(x)$ elde edilir. Bu eşitlikte $x=0$ alındığında 2. tip Euler sayıları $E_j^*(x) = E_j^*(x, 1)$ elde edilir [30, 31].

Eş. 2.60' da $x=0$ alındığında 1. tip Apostol-Euler polinomları ve 2. tip Apostol-Euler polinomları arasındaki ilişki

$$E_j^*(0, \lambda) = \frac{2}{\lambda e^z + \lambda^{-1} e^{-z}} = \frac{2\lambda e^z}{\lambda^2 e^{2z} + 1} = 2^j \lambda E_j\left(\frac{1}{2}, \lambda^2\right) \quad (2.61)$$

olarak elde edilir [36].

2.23. Humbert Polinomları

2.23.1. Tanım

$\prod_{j,n}^{\lambda}(x)$ gösterimi ile 1921 yılında Humbert tarafından verilen Humbert polinomlarının rekürans bağıntısı

$$(j+1) \prod_{j+1,n}^{\lambda}(x) - nx(j+\lambda) \prod_{j,n}^{\lambda}(x) - (j+n\lambda-n+1) \prod_{j-n+1,n}^{\lambda}(x) = 0 \quad (2.62)$$

olarak tanımlanır [37, 38]. Humbert polinomları için doğurucu fonksiyonu

$$\sum_{j=0}^{\infty} \prod_{j,n}^{\lambda}(x) t^j = \frac{1}{(1 - nxt + t^n)^{\lambda}} \quad (2.63)$$

ile ifade edilir [37, 38].

2.24. Legendre Polinomları

2.24.1. Tanım

$P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$ başlangıç koşulları olmak üzere $P_n(x)$, Legendre polinomları için rekürans bağıntısı

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad n=1, 2, \dots \quad (2.64)$$

olarak verilir [39].

$P_n(x)$, Legendre polinomlarının doğurucu fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} \quad (2.65)$$

olarak tanımlanır [39].

$P_n(x)$ Legendre polinomlarının açık gösterimi

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k (2n-2k)! x^{n-2k}}{2^n k! (n-k)! (n-2k)!} \quad (2.66)$$

olarak verilir [39]. Legendre polinomlarının ilk birkaçı

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

şeklindedir [39].

3. ÜÇ DEĞİŞKENLİ BAZI POLİNOM AİLELERİNİN ÖZELLİKLERİ

Fibonacci tipli polinom ailelerini kapsayan birçok çalışma yapılmış ve çeşitli özellikleri incelenmiştir. Bu konuda yapılan çalışmalar için [40-43] kaynakları incelenebilir. Bu bölümde Kızılateş ve diğerleri [44] tarafından tanıtılan üç değişkenli yeni polinom ailelerinin tanımına, doğurucu fonksiyonlarına yer verilecektir. Tanımlanan temel yeni polinom ailesinin [44]'de elde edilen açık gösterimine, rekürans bağıntılarına, kısmi türevlerine yer verilerek ve bu polinom ailesi aracılığıyla elde edilen bazı özel durumlar incelenecektir.

3.1. S_j Polinom Ailesinin Tanımı ve Özellikleri

3.1.1. Tanım

Üç değişkenli yeni polinom ailesi olan $S_j := S_j(x, y, z; k, m, n, c)$ polinom ailesi $x, y, z \in \mathbb{R}$, $k, m, n, c \in \mathbb{N} - \{0\}$ ve $|x^k t + y^m t^{m+n} + z^c t^{m+n+c}| < 1$ olmak üzere

$$M := M(t; x, y, z; k, m, n, c) = \sum_{j=0}^{\infty} S_j t^j = \frac{1}{1 - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c}} \quad (3.1)$$

tanımlanır [44]. Eş. 3.1' de sağ tarafta tanımlanan doğurucu fonksiyon M ile gösterilip, Taylor serisi yardımıyla

$$M = \sum_{j=0}^{\infty} S_j t^j = \sum_{j=0}^{\infty} (x^k t + y^m t^{m+n} + z^c t^{m+n+c})^j$$

olarak yazılabilir. Daha sonra burada binom açılımı ve Lemma 2.2.1 kullanılırsa ($p = 1$ durumu)

$$M = \sum_{j=0}^{\infty} S_j t^j$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{\infty} (x^k t + y^m t^{m+n} + z^c t^{m+n+c})^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^j \binom{j}{s} (x^k t)^{j-s} (y^m t^{m+n} + z^c t^{m+n+c})^s \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^j \binom{j}{s} (x^k t)^{j-s} (t^{m+n})^s (y^m + z^c t^c)^s \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{j+s}{s} (x^k t)^j (t^{m+n})^s (y^m + z^c t^c)^s \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{j+s}{s} (x^k t)^j (t^{m+n})^s \sum_{u=0}^s \binom{s}{u} (y^m)^{s-u} (z^c t^c)^u \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{u=0}^{\infty} \binom{j+s+u}{s+u} \binom{s+u}{u} (x^k t)^j (t^{m+s})^{s+u} (y^m)^s (z^c t^c)^u \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^j \sum_{u=0}^{\left\lfloor \frac{j}{n+m+c} \right\rfloor} \binom{j-(m+n+c-1)u+s}{s+u} \binom{s+u}{u} (x^k t)^{j-(m+n+c)u} y^{ms} z^{cu} t^{cu} (t^{m+n})^{s+u} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\left\lfloor \frac{j}{n+m} \right\rfloor} \sum_{u=0}^{\left\lfloor \frac{j-(m+n)s}{m+n+c} \right\rfloor} \binom{j-(m+n+c-1)u-(m+n-1)s}{u+s} \binom{s+u}{u} (x^k)^{j-(m+n)(s+u)-cu} y^{ms} z^{cu} t^j
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Daha sonra bu eşitlikte t^j lerin katsayıları eşitlenerek

$$S_j = \sum_{s=0}^{\left\lfloor \frac{j}{n+m} \right\rfloor} \sum_{u=0}^{\left\lfloor \frac{j-(m+n)s}{m+n+c} \right\rfloor} \binom{j-(n+m-1)s-(n+m+c-1)u}{s+u} \binom{s+u}{u} (x^k)^{j-(n+m)(s+u)-cu} z^{cu} y^{ms} \quad (3.2)$$

açık gösterimi elde edilmiş olur [44].

Uyarı

$P_r(x)$ Legendre polinomu olmak üzere, Eş. 3.1’de x yerine $2x$, y yerine -1 , z yerine 0 ve $k, m, n = 1$ alınırsa ve Eş.2.65 ile Lemma 2.2.1 ($p = 1$ durumu) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=0}^{\infty} S_j(2x, -1, 0; 1, 1, 1, c) t^j \\
 &= \frac{1}{1 - 2xt + t^2} \\
 &= \frac{1}{(1 - 2xt + t^2)^{1/2}} \cdot \frac{1}{(1 - 2xt + t^2)^{1/2}} \\
 &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} P_j(x) t^j \right) \left(\sum_{r=0}^{\infty} P_r(x) t^r \right) \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{r=0}^j P_{j-r}(x) P_r(x) t^j
 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada t^j ’lerin katsayıları eşitlendiğinde

$$S_j(2x, -1, 0; 1, 1, 1, c) = \sum_{r=0}^j P_{j-r}(x) P_r(x)$$

Legendre polinomunu içeren eşitlik elde edilmiştir [44].

İyi bilinen polinom ailelerinin diğer geniş ailelerin elde edilmesi için ikinci bir doğurucu fonksiyon olarak $W_j := W_j(x, y, z; k, m, n, c)$ polinom ailesi yardımıyla [44] ile verilen

$k, m, n, c \in \mathbb{N} - \{0\}$ ve $\left| x^k t + y^m t^{m+n} + z^c t^{m+n+c} \right| < 1$ koşulu ile aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$R(t; x, y, z; k, m, n, c)$$

$$= M(t; x, y, z; k, m, n, c) t^n$$

$$= \frac{t^n}{1 - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c}}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} W_j t^j. \quad (3.3)$$

Aşağıda Eş. 3.3' de x, y, z ve k, m, n, c ifadelerine farklı değerler verilerek bazı bilinen polinom aileleri elde edilmiştir.

Örnek

Eş. 3.3' de $k = m = n = c = 1$ değerleri verilerek

$$\frac{t}{1 - xt - yt^2 - zt^3} = \sum_{j=0}^{\infty} W_j(x, y, z; 1, 1, 1, 1) t^j$$

elde edilmiştir. Burada Eş. 2.52'den dolayı $H_j(x, y, z)$ üç değişkenli Fibonacci polinomları olmak üzere $W_j(x, y, z; 1, 1, 1, 1) = H_j(x, y, z)$ dir [44].

Örnek

Eş. 3.3'de $k = m = n = c = 1$ ve x yerine x^2 , y yerine x , z yerine 1 alınırsa

$$\frac{t}{1-x^2t-xt^2-t^3} = \sum_{j=0}^{\infty} W_j(x^2, x, 1; 1, 1, 1, 1) t^j$$

elde edilir. Burada Eş. 2.16'dan dolayı $t_j(x)$ tribonacci polinomları olmak üzere $W_j(x^2, x, 1; 1, 1, 1, 1) = t_j(x)$ elde edilmiş olur. Burada $x=1$ değeri verildiğinde tribonacci sayılarının doğurucu fonksiyonu elde edilmektedir [44].

W_j ailesi bazı iyi bilinen polinom ailelerini ve bilinen sayı dizilerini oluşturmaktadır. Aşağıdaki çizelgede değişkenlere farklı değerler verilerek bazı polinom aileleri elde edilmiştir:

Çizelge 3.1. W_j ailesinin özel durumları [44]

x	y	z	k	m	n	c	Özel Durumlar
x	y	z	1	1	1	1	Üç Değişkenli Fibonacci Polinomları
x^2	x	1	1	1	1	1	Tribonacci Polinomları
x	y	0	1	1	1	c	İki Değişkenli Fibonacci Polinomları
x	1	0	1	1	1	c	Fibonacci Polinomları
$2x$	1	0	1	1	1	c	Pell Polinomları
1	$2y$	0	k	1	1	c	Jacobsthal Polinomları
1	1	0	k	1	1	c	Fibonacci Sayıları
2	1	0	1	1	1	c	Pell Sayıları
1	2	0	k	1	1	c	Jacobsthal Sayıları

Doğurucu fonksiyonlar aracılığıyla $K_j := K_j(x, y, z; k, m, n, c)$ olarak ifade edilen polinomların yeni bir ailesi [44]'de $k, m, n, c \in \mathbb{N} - \{0\}$ ve $\left| x^k t + y^m t^{m+n} + z^c t^{m+n+c} \right| < 1$ koşulu sağlanmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\sum_{j=0}^{\infty} K_j t^j = \frac{\alpha(t; x, y) - \beta(t; x, y) t^n}{1 - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c}}. \quad (3.4)$$

Burada $\alpha(t; x, y)$ ve $\beta(t; x, y)$, t , x ve y ye bağılı herhangi fonksiyonlardan oluşmaktadır.

Sonuç

$$3M(t; x, y, z; 1, 1, 1, 1) - 2xR(t; x, y, z; 1, 1, 1, 1) - yR(t; x, y, z; 1, 1, 1, 1)$$

$$= \frac{3 - 2xt - yt^2}{1 - xt - yt^2 - zt^3}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} K_j t^j$$

olup Eş. 2.55'den dolayı $K_j(x, y, z)$ üç değişkenli Lucas polinomları elde edilmiş olur. Bu eşitliğin sol tarafında Eş. 3.1 ve Eş. 3.3 kullanılırsa

$$3S_j(x, y, z; 1, 1, 1, 1) - 2xW_j(x, y, z; 1, 1, 1, 1) - yW_{j-1}(x, y, z; 1, 1, 1, 1) = K_j(x) \quad (3.5)$$

eşitliği yazılabilir. Eş. 3.5'de x yerine x^2 , y yerine x ve z yerine 1 değerleri yazılarak

$$3S_j(x^2, x, 1; 1, 1, 1, 1) - 2x^2W_j(x^2, x, 1; 1, 1, 1, 1) - xW_{j-1}(x^2, x, 1; 1, 1, 1, 1) = k_j(x) \quad (3.6)$$

olup Eş. 3.6'daki $k_j(x)$ Tribonacci-Lucas polinomları elde edilmiş olur. Eş. (3.6)'da $x=1$ değeri yazılırsa Tribonacci-Lucas sayıları elde edilmiş olur [44].

Aşağıdaki çizelgede K_j polinom ailesinde farklı değişkenler yazılarak elde edilen polinomlara örnekler verilmiştir.

Çizelge 3.2. K_j ailesinin özel durumları [44]

α	β	x	y	z	k	m	n	c	Özel Durumlar
3	$2x + yt$	x	y	z	1	1	1	1	Üç Değişkenli Lucas Polinomları
3	$2x + \sqrt{xt}$	x^2	x	1	1	1	1	1	Tribonacci-Lucas Polinomları
2	x	x	y	0	1	1	1	c	İki Değişkenli Lucas Polinomları
2	x	x	1	0	1	1	1	c	Lucas Polinomları
2	x	$2x$	1	0	1	1	1	c	Pell-Lucas Polinomları
2	1	1	$2y$	0	k	1	1	c	Jacobsthal-Lucas Polinomları
2	2	2	1	0	1	1	1	c	Pell-Lucas Sayıları
2	1	1	1	0	k	1	1	c	Lucas Sayıları
2	1	1	2	0	k	1	1	c	Jacobsthal-Lucas Sayıları

3.2. Kısmi Türevler

Eş. 3.1 ile tanımlanan M doğurucu fonksiyonun x , y , z ve t değişkenlerine göre kısmi türevleri aşağıda gösterilmiştir.

x 'e göre kısmi türev aşağıdaki şekilde bulunmaktadır.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} M \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{1 - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c}} \right) \\
&= - \frac{-kx^{k-1}t}{(1 - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c})^2} \\
&= kx^{k-1}t \left(\frac{1}{1 - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c}} \right)^2
\end{aligned}$$

$$= kx^{k-1}tM^2 \quad (3.7)$$

olup, x değişkenine göre kısmi türevi elde edilmiştir [44].

y 'ye göre kısmi türev aşağıdaki şekilde bulunmaktadır.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y} M \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{1-x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c}} \right) \\ &= - \frac{-my^{m-1}t^{m+n}}{(1-x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c})^2} \\ &= my^{m-1}t^{m+n} \left(\frac{1}{1-x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c}} \right)^2 \\ &= my^{m-1}t^{m+n} M^2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

olup, y değişkenine göre kısmi türev elde edilmiştir [44].

z 'ye göre kısmi türev aşağıdaki şekilde bulunmaktadır.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} M \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{1-x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c}} \right) \\ &= - \frac{-cz^{c-1}t^{m+n+c}}{(1-x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c})^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c z^{c-1} t^{m+n+c} \left(\frac{1}{1 - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c}} \right)^2 \\
&= c y^{c-1} t^{m+n+c} M^2
\end{aligned} \tag{3.9}$$

olarak elde edilmiştir [44].

t ' ye göre kısmi türev aşağıdaki şekilde bulunmaktadır.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} M \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{1 - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c}} \right) \\
&= - \frac{-x^k - (m+n)y^m t^{m+n-1} - (m+n+c)z^c t^{m+n+c-1}}{(1 - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c})^2} \\
&= (x^k + (m+n)y^m t^{m+n-1} + (m+n+c)z^c t^{m+n+c-1}) \left(\frac{1}{1 - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c}} \right)^2 \\
&= (x^k + (m+n)y^m t^{m+n-1} + (m+n+c)z^c t^{m+n+c-1}) M^2
\end{aligned} \tag{3.10}$$

olup, t değişkenine göre kısmi türev elde edilmiştir [44].

3.3. Doğurucu Fonksiyonların Bazı Uygulamaları

Bu bölümde, Eş. 3.3 ve Eş. 3.4 ile tanıtilan fonksiyonlar aracılığıyla $k=m=n=c=1$ değerleri yazılarak bazı polinom aileleri ve özel sayıların elde edildiği durumlar gösterilmiştir.

1.Durum: $|a| > 1$ için Eş. 3.2’de $t = \frac{1}{a}$ değeri verilerek

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{W_j}{a^j} = \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^n}{1 - \frac{x^k}{a} - y^m \frac{1}{a^{m+n}} - z^c \frac{1}{a^{m+n+c}}} = \frac{a^{m+c}}{a^{m+n+c} - x^k a^{m+n+c-1} - y^m a^c - z^c} \quad (3.11)$$

elde edilmıştır [44]. Aşağıdaki (i)-(viii) özelliklerini elde etmek için Eş. 3.11’de $k = m = n = c = 1$ alınmıştır.

i) Eş. 3.11’ de x yerine x^2 , y yerine x , z yerine 1 ve a yerine 2 alınırsa, Tribonacci polinomları için Eş. 2.16’da $t = \frac{1}{2}$ durumu olan

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{t_j(x)}{2^j} = \frac{4}{7 - 4x^2 - 2x}$$

eşitliği elde edilmiştir [40]. Daha sonra x yerine 1 değeri verilerek, Tribonacci sayıları için

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{T_j}{2^j} = 4$$

eşitliği elde edilmiştir [44].

(ii) Eş. 3.11’de x yerine x^2 , y yerine x , z yerine 1 ve a yerine 10 alınırsa, Tribonacci polinomları için Eş. 2.16’da $t = \frac{1}{10}$ durumu olan

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{T_j(x)}{10^{j+2}} = \frac{1}{999 - 100x^2 - 10x} \quad (3.12)$$

eşitliği elde edilmiştir [44]. Daha sonra x yerine 1 değeri verilerek, Tribonacci sayıları için

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{T_j}{10^{j+2}} = \frac{1}{889}$$

eşitliği elde edilmiştir [44].

iii) Eş. 3.11'de y yerine 1, z yerine 0 ve a yerine 2 alınır, Fibonacci polinomları için

Eş. 2.6'da $t = \frac{1}{2}$ durumu olan

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{F_j(x)}{2^j} = \frac{2}{3-2x} \quad (3.13)$$

eşitliği elde edilmiştir [44, 45]. Daha sonra Eş. 3.13' de x yerine 1 değeri verilerek, Fibonacci sayıları için

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{F_j}{2^j} = 2 = F_3$$

eşitliği elde edilmiştir [44, 45].

(iv) Eş. 3.11'de x değişkeni aynı olmak üzere y yerine 1, z yerine 0 ve a yerine 3 alınır, Fibonacci polinomları için Eş. 2.6'da $t = \frac{1}{3}$ durumu olan

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{F_j(x)}{3^{j+1}} = \frac{1}{8-3x} \quad (3.14)$$

eşitliği elde edilmiştir [1, 44]. Daha sonra Eş. 3.14' de x yerine 1 değeri verilerek, Fibonacci sayıları için

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{F_j}{3^{j+1}} = \frac{1}{5} = \frac{1}{F_5}$$

eşitliği elde edilmiştir [1, 44].

(v) Eş. 3.11’de y yerine 1 z yerine 0 ve a yerine 8 alınrsa, Fibonacci polinomları için

Eş. 2.6 ‘da $t = \frac{1}{8}$ durumu olan

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{F_j(x)}{8^{j+1}} = \frac{1}{63-8x} \quad (3.15)$$

eşitliği elde edilmiştir [44]. Daha sonra x yerine 1 değeri verilerek, Fibonacci sayıları için

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{F_j}{8^{j+1}} = \frac{1}{55} = \frac{1}{F_{10}}$$

eşitliği elde edilmiştir [1, 44].

(vi) Eş. 3.11’de y yerine 1, z yerine 0 ve a yerine -10 alınrsa, Fibonacci polinomları

için Eş. 2.6’da $t = -\frac{1}{10}$ durumu olan

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{F_j(x)}{(-10)^{j+1}} = \frac{1}{99+10x} \quad (3.16)$$

eşitliği elde edilmiştir [1, 44]. Daha sonra Eş. 3.16’da x yerine 1 değeri verilerek, Fibonacci sayıları için

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{F_j}{(-10)^{j+1}} = \frac{1}{109}$$

eşitliği elde edilmiştir [1, 44].

(vii) Eş. 3.11’de x yerine $2x$, y yerine 1 , z yerine 0 ve a yerine 3 alınır, Pell polinomları için Eş. 2.26’da $t = \frac{1}{3}$ durumu olan

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{P_j(x)}{3^{j+1}} = \frac{1}{8-6x} \quad (3.17)$$

eşitliği elde edilmiştir [40]. Daha sonra Eş. 3.17’de x yerine 1 değeri verilerek, Pell sayıları için

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{P_j}{3^{j+1}} = \frac{1}{2}$$

eşitliği elde edilmiştir [44].

(viii) Eş. 3.11’de x yerine 1 , y yerine $2y$, z yerine 0 ve a yerine 3 alınır, Jacobsthal polinomları için Eş. 2.41’de $t = \frac{1}{3}$ durumu olan

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{J_s(y)}{3^{s+1}} = \frac{1}{6-2y} \quad (3.18)$$

eşitliği elde edilmiştir [44]. Daha sonra Eş. 3.18’de $y = 1$ değeri alınarak, Jacobsthal sayıları için

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{J_s}{3^{s+1}} = \frac{1}{4}$$

eşitliği elde edilmiştir [44].

2.Durum: Eş. 3.4' de $|a| > 1$ koşulu olmak üzere $t = \frac{1}{a}$ değeri verilerek

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{K_j}{a^j} = \frac{a^{m+n+c} \alpha\left(\frac{1}{a}; x, y\right) - a^{m+c} \beta\left(\frac{1}{a}; x, y\right)}{a^{m+n+c} - x^k a^{m+n+c-1} - y^m a^c - z^c} \quad (3.19)$$

eşitliği elde edilmiştir [44]. Aşağıdaki (i)-(viii) özelliklerini elde etmek için Eş. 3.19'da $k = m = n = c = 1$ alınmıştır.

i) Eş. 3.19'da x yerine x^2 , y yerine x , z yerine 1 , a yerine 2 ve $\alpha(t; x, y) = 3$, $\beta(t; x, y) = 2x + \sqrt{xt}$ alınırsa, Tribonacci-Lucas polinomları için Eş. 2.19'da $t = \frac{1}{2}$ durumu olan

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{k_j(x)}{2^j} = \frac{24 - 8x^2 - 2x}{7 - 4x^2 - 2x} \quad (3.20)$$

eşitliği elde edilmiştir [44]. Daha sonra Eş. 3.20'de x yerine 1 değeri alınarak Tribonacci-Lucas sayıları için

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{k_j}{2^{j+1}} = 7$$

eşitliği elde edilmiştir [44].

ii) Eş. 3.19'da y yerine 1 , z yerine 0 , a yerine 2 ve $\alpha(t; x, y) = 2$, $\beta(t; x, y) = x$ alınırsa, Lucas polinomları için Eş. 2.11'de $t = \frac{1}{2}$ durumu olan

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{L_j(x)}{2^{j+1}} = \frac{4 - x}{3 - 2x} \quad (3.21)$$

eşitliği elde edilmiştir [44]. Daha sonra Eş. 3.21’de x yerine 1 değeri verilerek, Lucas sayıları için

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{L_j}{2^{j+1}} = 3$$

eşitliği elde edilmiştir [44].

iii) Eş. 3.19’da y yerine 1, z yerine 0, a yerine 10, $\alpha(t; x, y) = 2$ ve $\beta(t; x, y) = x$ alınır, Lucas polinomları için Eş. 2.11’de $t = \frac{1}{10}$ durumu olan

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{L_j(x)}{10^j} = \frac{200-10x}{99-10x} \quad (3.22)$$

eşitliği elde edilmiştir [1, 44]. Daha sonra Eş. 3.22’de x yerine 1 değeri verilerek, Lucas sayıları için

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{L_j}{10^{j+1}} = \frac{19}{89} = \frac{L_6 + L_1}{F_{11}}$$

eşitliği elde edilmiştir [1, 44].

iv) Eş. 3.19’de y yerine 1, z yerine 0, a yerine 3, $\alpha(t; x, y) = 2$ ve $\beta(t; x, y) = x$ alınır, Lucas polinomları için Eş. 2.11’de $t = \frac{1}{3}$ durumu olan

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{L_j(x)}{3^{j+1}} = \frac{6-x}{8-3x} \quad (3.23)$$

eşitliği elde edilmiştir [44]. Daha sonra Eş. 3.23’ de x yerine 1 değeri verilerek, Lucas sayıları için

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{L_j}{3^{j+1}} = 1$$

eşitliği elde edilmiştir [44].

v) Eş. 3.19'da y yerine 1, z yerine 0, a yerine 8, $\alpha(t; x, y) = 2$ ve $\beta(t; x, y) = x$ alınır,

Lucas polinomları için Eş. 2.11'de $t = \frac{1}{8}$ durumu olan

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{L_j(x)}{8^{j+1}} = \frac{16-x}{63-8x} \quad (3.24)$$

eşitliği elde edilmiştir [44]. Daha sonra Eş. 3.24' de x yerine 1 değeri verilerek, Lucas sayıları için

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{L_j}{8^{j+1}} = \frac{3}{11} = \frac{L_2}{L_5}$$

eşitliği elde edilmiştir [44].

vi) Eş. 3.19'da y yerine 1, z yerine 0, a yerine -10 , $\alpha(t; x, y) = 2$, ve $\beta(t; x, y) = x$

alınır, Lucas polinomları için Eş. 2.11'de $t = -\frac{1}{10}$ durumu olan

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{L_j(x)}{(-10)^j} = \frac{-20-x}{99+10x} \quad (3.25)$$

eşitliği elde edilmiştir [1, 44]. Daha sonra Eş. 3.25' de x yerine 1 değeri verilerek, Lucas sayıları için

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{L_j}{(-10)^{j+1}} = \frac{-21}{109}$$

eşitliği elde edilmiştir [1, 44].

vii) Eş. 3.19'da x yerine $2x$, y yerine 1 , z yerine 0 , a yerine 5 , $\alpha(t; x, y) = 2$ ve $\beta(t; x, y) = x$ alınırsa, Pell-Lucas polinomları için Eş. 2.33' de $t = \frac{1}{5}$ durumu olan

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{Q_j(x)}{5^{j+1}} = \frac{5-x}{12-5x} \quad (3.26)$$

eşitliği elde edilmiştir [44]. Daha sonra Eş. 3.26'da x yerine 1 değeri verilerek, Pell-Lucas sayıları için

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{Q_j}{5^{j+1}} = \frac{4}{7}$$

eşitliği elde edilmiştir [44].

viii) Eş. 3.19'da x ve y yerine 2 , z yerine -1 , a yerine 4 , $\alpha(t; x, y) = t$ ve $\beta(t; x, y) = t$ alınırsa, Fibonacci sayıları için

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{F_j^2}{4^j} = \frac{12}{25} \quad (3.27)$$

eşitliği elde edilir [1, 44].

4. $S_j^{(h)}$ POLİNOM AİLESİ

Bu bölümde [44]'de çalışılan ve üçüncü bölümde verilen S_j polinom ailesinin daha genel hali olan $S_j^{(h)} := S_j^{(h)}(x, y, z; k, m, n, c, d)$ polinom ailesi üzerinde çalışılmıştır. Bu bölümde verilen özellikler Özat ve Çekim [46] tarafından sunulmuştur.

4.1. $S_j^{(h)}$ Polinom Ailesinin Tanımı ve Özellikleri

4.1.1. Tanım

$S_j^{(h)}$ polinom ailesi başlangıç koşulları $x, y, z \in \mathbb{R}$, $k, m, n, c, h, d \in \mathbb{N} - \{0\}$ ve $|x^k t + y^m t^{m+n} + z^c t^{m+n+c}| < d$ olmak üzere

$$M^{(h)} := M^{(h)}(t; x, y, z; k, m, n, c) = \sum_{j=0}^{\infty} S_j^{(h)} t^j = \frac{1}{\left(d - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c}\right)^h} \quad (4.1)$$

olarak tanımlansın. Burada $h = d = 1$ değerleri yazılarak Eş. 3.1 ile verilen $S_j^{(1)} = S_j$ polinom ailesi elde edilir.

Sonuç

Eş. 4.1' de $h = h_1 + h_2$ ($h_1, h_2 \in \mathbb{N} - \{0\}$) olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{\infty} S_j^{(h_1+h_2)} t^j \\ &= \frac{1}{\left(d - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c}\right)^{h_1+h_2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\left(d - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c}\right)^{h_1}} \cdot \frac{1}{\left(d - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c}\right)^{h_2}} \\
&= \left(\sum_{j=0}^{\infty} S_j^{(h_1)} t^j \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} S_l^{(h_2)} t^l \right) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} S_j^{(h_1)} S_l^{(h_2)} t^{j+l}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Daha sonra burada Lemma 2.2.1 ($p = 1$ durumu) kullanıldığında

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{\infty} S_j^{(h_1+h_2)} t^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^j S_{j-l}^{(h_1)} S_l^{(h_2)} t^{j-l+l} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^j S_{j-l}^{(h_1)} S_l^{(h_2)} t^j
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Daha sonra t^j lerin katsayıları eşitlenirse

$$S_j^{(h_1+h_2)} = \sum_{l=0}^j S_{j-l}^{(h_1)} S_l^{(h_2)} \quad (4.2)$$

eşitliği elde edilir. Eş. 4.2' de $h_1 = h_2 = 1$ değerleri yazılırsa

$$S_j^{(2)}(x, y, z; k, m, n, c, d) = \sum_{l=0}^j S_{j-l} S_l$$

elde edilir. Aşağıda Eş. 4.1' de tanımlanan doğurucu fonksiyon $M^{(h)}$ 'ın seri açılımı incelenmiştir. Burada Lemma 2.2.4'ün ve binom açılımının kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
M^{(h)} &= \sum_{j=0}^{\infty} S_j^{(h)} t^j \\
&= \frac{1}{\left(d - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c}\right)^h} \\
&= \left(1 - \frac{x^k t + y^m t^{m+n} + z^c t^{m+n+c}}{d}\right)^{-h} d^{-h} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{h+j-1}{h-1} \left(\frac{x^k t + y^m t^{m+n} + z^c t^{m+n+c}}{d}\right)^j d^{-h} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{h+j-1}{h-1} \left(x^k t + y^m t^{m+n} + z^c t^{m+n+c}\right)^j d^{-(j+h)} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{h+j-1}{h-1} d^{-(h+j)} \sum_{s=0}^j \binom{j}{s} (x^k t)^{j-s} (y^m t^{m+n} + z^c t^{m+n+c})^s \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{h+j-1}{h-1} d^{-(h+j)} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{j}{s} (x^k t)^{j-s} (t^{m+n})^s (y^m + z^c t^c)^s
\end{aligned}$$

olup, sırasıyla $j \rightarrow j+s$ yazılırsa (Lemma 2.2.1 in $p=1$ durumu), $(y^m + z^c t^c)^s$ nin binom açılımı yazılıp, $s \rightarrow s+u$ yazılırsa

$$M^{(h)} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{h+j+s-1}{h-1} d^{-(h+j+s)} \binom{j+s}{s} (x^k t)^j (t^{m+n})^s (y^m + z^c t^c)^s$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{h+j+s+u-1}{h-1} d^{-(h+j+s+u)} \binom{j+s+u}{s+u} (x^k t)^j (t^{m+n})^{s+u} \sum_{u=0}^{\infty} (y^m)^s (z^c t^c)^u \binom{s+u}{u}$$

elde edilir. Burada sırasıyla j yerine $j-(m+n+c)u$, daha sonra j yerine $j-(m+n)s$ yazılırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{\infty} S_j^{(h)} t^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\left\lfloor \frac{j}{n+m} \right\rfloor} \sum_{u=0}^{\left\lfloor \frac{j-(m+n)s}{n+m+c} \right\rfloor} \binom{h+j-(m+n-1)s-(m+n+c-1)u-1}{h-1} \\ & \times \binom{j-(n+m-1)s-(n+m+c-1)u}{s+u} \binom{s+u}{u} d^{-(h+j-(m+n-1)s-(m+n+c-1)u)} (x^k)^{j-(n+m)(s+u)-cu} y^{ms} z^{cu} t^j \end{aligned}$$

elde edilir. Burada t^j lerin katsayıları eşitlenerek

$$\begin{aligned} & S_j^{(h)} \\ &= \sum_{s=0}^{\left\lfloor \frac{j}{n+m} \right\rfloor} \sum_{u=0}^{\left\lfloor \frac{j-(m+n)s}{n+m+c} \right\rfloor} \binom{h+j-(m+n-1)s-(m+n+c-1)u-1}{h-1} \binom{j-(n+m-1)s-(n+m+c-1)u}{s+u} \\ & \times \binom{s+u}{u} d^{-(h+j-(m+n-1)s-(m+n+c-1)u)} (x^k)^{j-(n+m)(s+u)-cu} y^{ms} z^{cu} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada $h=d=1$ alınmasıyla Eş. 3.2’de verilen S_j polinomunun açık gösterimi elde edilir [44].

Özel Durumlar

1) Eş. 4.1'de x yerine ax , y yerine -1 , d , k , m yerine 1 , n yerine $a-1$ ve z yerine 0 değerleri yazılırsa

$$\sum_{j=0}^{\infty} S_j^{(h)}(ax, -1, 0; 1, a-1, 1)t^j$$

$$= \frac{1}{(1-axt+t^a)^h}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{j,a}^h (x)t^j$$

ailesi elde edilir. Daha sonra t^j lerin katsayıları eşitlenerek

$$S_j^{(h)}(ax, -1, 0; 1, a-1, 1) = \prod_{j,a}^h (x)$$

ile Tanım 2.23 de verilen Humbert polinomları elde edilir.

2) Eş. 4.1'de x yerine $2x$, y yerine -1 , z yerine 0 , $h=d=k=m=n=c=1$ değerleri yazılırsa

$$\sum_{j=0}^{\infty} S_j(2x, -1, 0; 1, 1, 1, c, 1)t^j$$

$$= \frac{1}{1-2xt+t^2}$$

$$= \frac{1}{(1-2xt+t^2)^{1/2}} \cdot \frac{1}{(1-2xt+t^2)^{1/2}}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{j=0}^{\infty} P_j(x) t^j \right) \left(\sum_{r=0}^{\infty} P_r(x) t^r \right) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} P_j(x) P_r(x) t^{j+r}
\end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 2.2.1' den ($p = 1$ durumu) dolayı

$$\sum_{j=0}^{\infty} S_j(2x, -1, 0; 1, 1, 1, c, 1) t^j = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{r=0}^j P_{j-r}(x) P_r(x) t^j$$

eşitliği elde edilir. Daha sonra t^j lerin katsayıları eşitlenirse

$$S_j(2x, -1, 0; 1, 1, 1, c, 1) = \sum_{r=0}^j P_{j-r}(x) P_r(x)$$

elde edilir. Burada $P_r(x)$ polinomları Eş. 2.65 deki Legendre polinomudur.

4.1.2. Tanım

$k, m, n, c, d, h \in \mathbb{N} - \{0\}$ ve $\left| x^k t + y^m t^{m+n} + z^c t^{m+n+c} \right| < d$ şartları altında

$W_j^{(h)}(x, y, z; k, m, n, c, d)$ polinom ailesi

$$R^{(h)}(t; x, y, z; k, m, n, c, d)$$

$$= M^{(h)}(t; x, y, z; k, m, n, c, d) t^n$$

$$= \frac{t^n}{\left(d - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c} \right)^h}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} W_j^{(h)} t^j \quad (4.3)$$

doğurucu fonksiyonu yardımıyla tanımlansın.

Eş. 4.3' de tanımlanan polinom ailesinde $h = k = m = n = c = d = 1$ değerleri yazılarak

$$\sum_{j=0}^{\infty} W_j^{(1)}(x, y, z; 1, 1, 1, 1, 1) t^j = \frac{t}{1 - xt - yt^2 - zt^3}$$

eşitliği elde edilir. Bu ise Eş. 2.52'den dolayı $W_j^{(1)}(x, y, z; 1, 1, 1, 1, 1) = H_j(x, y, z)$ olduğunu yani üç değişkenli Fibonacci polinomlarının doğurucu fonksiyonunun elde edildiğini gösterir.

Yukarıdaki eşitlikte x yerine x^2 , y yerine x , z yerine 1 değerleri alınırsa

$$\sum_{j=0}^{\infty} W_j^{(1)}(x, x^2, 1; 1, 1, 1, 1, 1) t^j = \frac{t}{1 - x^2 t - x t^2 - t^3}$$

elde edilir. Burada Eş. 2.16'den dolayı ise $W_j^{(1)}(x, x^2, 1; 1, 1, 1, 1, 1) = t_j(x)$ eşitliği sağlanır.

Böylece Tribonacci polinomları için doğurucu fonksiyonu elde edilmiş olur.

4.2. Kısmi Türevler

Bu bölümde $M^{(h)}$ doğurucu fonksiyonunun x, y, z ve t değişkenlerine göre kısmi türevleri bulunmuştur.

$M^{(h)}$ doğurucu fonksiyonunun x 'e göre kısmi türevinin alınmasıyla

$$\frac{\partial}{\partial x} M^{(h)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\left(d - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c}\right)^h} \\
&= (-h) \frac{\left(d - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c}\right)^{h-1} (-k) x^{k-1} t}{\left(d - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c}\right)^{2h}} \\
&= h k x^{k-1} t \frac{1}{\left(d - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c}\right)^{h+1}} \\
&= h k x^{k-1} t \frac{1}{\left(d - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c}\right)} \cdot \frac{1}{\left(d - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c}\right)^h} \\
&= h k x^{k-1} t M^{(1)} M^{(h)}
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$\frac{\partial}{\partial x} M^{(h)} = h k x^{k-1} t M^{(1)} M^{(h)}$$

x değişkenine göre kısmi türevi elde edilir.

$M^{(h)}$ doğurucu fonksiyonunun y 'ye göre kısmi türevinin alınmasıyla

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial y} M^{(h)} \\
&= \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\left(d - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c}\right)^h} \\
&= (-h) \frac{\left(d - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c}\right)^{h-1} (-m) y^{m-1} t^{m+n}}{\left(d - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c}\right)^{2h}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= hmy^{m-1} \frac{t^{m+n}}{\left(d - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c}\right)^{h+1}} \\
&= hmy^{m-1} t^{m+n} \frac{1}{\left(d - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c}\right)} \cdot \frac{1}{\left(d - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c}\right)^h} \\
&= hmy^{m-1} t^{m+n} M^{(h+1)}
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$\frac{\partial}{\partial y} M^{(h)} = hmy^{m-1} t^{m+n} M^{(1)} M^{(h)}$$

y değişkenine göre kısmi türevi elde edilmiş olur.

$M^{(h)}$ doğurucu fonksiyonun z 'ye göre kısmi türevinin alınmasıyla

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z} M^{(h)} \\
&= \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\left(d - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c}\right)^h} \\
&= (-h)(-cz^{c-1} t^{m+n+c}) \frac{\left(d - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c}\right)^{h-1}}{\left(d - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c}\right)^{2h}} \\
&= hcz^{c-1} t^{m+n+c} \frac{1}{\left(d - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c}\right)^{2h-h+1}} \\
&= hcz^{c-1} t^{m+n+c} \frac{1}{\left(d - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c}\right)} \cdot \frac{1}{\left(d - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c}\right)^h}
\end{aligned}$$

$$= hcz^{c-1}t^{m+n+c}M^{(1)}M^{(h)}$$

elde edilir. O halde z değişkenine göre kısmi türev

$$\frac{\partial}{\partial z}M^{(h)} = hcz^{c-1}t^{m+n+c}M^{(1)}M^{(h)}$$

olarak bulunur.

$M^{(h)}$ doğurucu fonksiyonun t 'ye göre kısmi türevinin alınmasıyla

$$\frac{\partial}{\partial t}M^{(h)}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{(d - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c})^h}$$

$$= (-h) \frac{(d - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c})^{h-1}}{(d - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c})^{2h}} \left(-x^k - (m+n)y^m t^{m+n-1} - (m+n+c)z^c t^{m+n+c-1} \right)$$

$$= h \left[x^k + (m+n)y^m t^{m+n-1} + (m+n+c)z^c t^{m+n+c-1} \right]$$

$$\times \frac{1}{(d - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c})} \cdot \frac{1}{(d - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c})^h}$$

$$= h \left[x^k + (m+n)y^m t^{m+n-1} + (m+n+c)z^c t^{m+n+c-1} \right] M^{(1)}M^{(h)}$$

olarak elde edilir.

4.3. Rekürans Bağntıları

4.3.1. Teorem

$j \geq 1$ için

$$\frac{\partial}{\partial x} S_j^{(h)} = hkx^{k-1} \sum_{l=0}^{j-1} S_{j-l-1}^{(h)} S_l$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} S_j^{(h)} t^j \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\left(d - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c}\right)^h} \\ &= hkx^{k-1} \frac{t}{\left(d - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c}\right)^h} \cdot \frac{1}{\left(d - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c}\right)} \\ &= hkx^{k-1} \left(\sum_{j=0}^{\infty} S_j^{(h)} t^{j+1} \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} S_l t^l \right) \\ &= hkx^{k-1} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} S_j^{(h)} S_l t^{j+l+1} \\ &= hkx^{k-1} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{j-1} S_{j-l-1}^{(h)} S_l t^j \end{aligned}$$

dır. Burada $j < 1$ için $S_j^{(h)}$ polinomu x terimini içermediğinden $\frac{\partial}{\partial x} S_0^{(h)} = 0$ olup $j \geq 1$

durumu için t^j lerin katsayıları eşitlenirse

$$\frac{\partial}{\partial x} S_j^{(h)} = h k x^{k-1} \sum_{l=0}^{j-1} S_{j-l-1}^{(h)} S_l$$

elde edilir.

4.3.2. Teorem

$j \geq m+n$ için

$$\frac{\partial}{\partial y} S_j^{(h)} = h m y^{m-1} \sum_{l=0}^{j-m-n} S_{j-m-n-l}^{(h)} S_l$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} S_j^{(h)} t^j$$

$$= \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\left(d - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c}\right)^h}$$

$$= h m y^{m-1} \frac{t^{m+n}}{\left(d - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c}\right)^h} \cdot \frac{1}{\left(d - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c}\right)}$$

$$= h m y^{m-1} \left(\sum_{j=0}^{\infty} S_j^{(h)} t^{j+m+n} \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} S_l t^l \right)$$

$$= hmy^{m-1} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} S_j^{(h)} S_l t^{j+m+n+l}$$

$$= hmy^{m-1} \sum_{j=m+n}^{\infty} \sum_{l=0}^{j-m-n} S_{j-l-1}^{(h)} S_l t^j$$

dır. Burada $j < m+n$ için $S_j^{(h)}$ polinomu y terimini içermediğinden $\frac{\partial}{\partial y} S_j^{(h)} = 0$ olup,

$j \geq m+n$ durumu için t^j lerin katsayıları eşitlenirse

$$\frac{\partial}{\partial y} S_j^{(h)} = hmy^{m-1} \sum_{l=0}^{j-m-n} S_{j-m-n-l}^{(h)} S_l$$

bağıntısı elde edilir.

4.3.3. Teorem

$j \geq m+n+c$ için

$$\frac{\partial}{\partial z} S_j^{(h)} = hcz^{c-1} \sum_{l=0}^{j-m-n-c} S_{j-m-n-c-l}^{(h)} S_l$$

bağıntısı elde edilir.

İspat

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} S_j^{(h)} t^j$$

$$= \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\left(d - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c}\right)^h}$$

$$\begin{aligned}
&= hcz^{c-1} \frac{t^{m+n+c}}{\left(d - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c}\right)^h} \cdot \frac{1}{\left(d - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c}\right)} \\
&= hcz^{c-1} \left(\sum_{j=0}^{\infty} S_j^{(h)} t^{j+m+n+c} \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} S_l t^l \right) \\
&= hcz^{c-1} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} S_j^{(h)} S_l t^{j+m+n+c+l} \\
&= hcz^{c-1} \sum_{j=m+n+c}^{\infty} \sum_{l=0}^{j-m-n-c} S_{j-m-n-c-l}^{(h)} S_l t^j
\end{aligned}$$

dır. Burada $j < m+n+c$ durumu için $S_j^{(h)}$ polinomu z terimini içermediğinden $\frac{\partial}{\partial z} S_j^{(h)} = 0$

olup, $j \geq m+n+c$ durumu için t^j lerin katsayıları eşitlenirse

$$\frac{\partial}{\partial z} S_j^{(h)} = hcz^{c-1} \sum_{l=0}^{j-m-n-c} S_{j-m-n-c-l}^{(h)} S_l$$

elde edilir.

4.4. Multilineer ve Multilateral Doğurucu Fonksiyon

Bu bölümde $S_j^{(h)}$ polinomları için multilineer ve multilateral doğurucu fonksiyonlar bulunmuştur.

4.4.1. Teorem

$u_1, u_2, \dots, u_s$ ($s \in \mathbb{N} - \{0\}$) s -tane kompleks değişken ve μ kompleks indis olmak üzere $\Omega_\mu(u_1, \dots, u_s)$ sıfıra eşit olmayan

$$\Lambda_{\mu,\nu}(u_1, \dots, u_s; \zeta) := \sum_{l=0}^{\infty} a_l \Omega_{\mu+\nu l}(u_1, \dots, u_s) \zeta^l \quad (a_l \neq 0, \mu, \nu \in \mathbb{C}) \quad (4.4)$$

doğurucu fonksiyonuna sahip olsun ve $\theta_{j,p,\mu,\nu}(x, y, z; u_1, \dots, u_s; \tau)$ fonksiyonu

$$\theta_{j,p,\mu,\nu}(x, y, z; u_1, \dots, u_s; \tau) := \sum_{l=0}^{\lfloor j/p \rfloor} a_l S_{j-pl}^{(h)} \Omega_{\mu+\nu l}(u_1, \dots, u_s) \tau^l \quad (4.5)$$

şeklinde gösterilsin. Burada $j \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N} - \{0\}$ dır. Bu durumda

$$\sum_{j=0}^{\infty} \theta_{j,p,\mu,\nu} \left(x, y, z; u_1, \dots, u_s; \frac{\eta}{t^p} \right) t^n = \frac{1}{(d - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c})^h} \Lambda_{\mu,\nu}(u_1, \dots, u_s; \eta) \quad (4.6)$$

özellliği sağlanır.

İspat

Eş. 4.5 ile tanımlanan $\theta_{j,p,\mu,\nu} \left(x, y, z; u_1, \dots, u_s; \frac{\eta}{t^p} \right)$ fonksiyonunu Eş. 4.6'nın sol yanında yerine yazalım ve S ile gösterelim.

$$S = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\lfloor j/p \rfloor} a_l S_{j-pl}^{(h)} \Omega_{\mu+\nu l}(u_1, \dots, u_s) \eta^l t^{j-pl} \quad (4.7)$$

Eş. 4.7'de j yerine $j + pl$ alınıp Eş. 4.4'ün kullanılmasıyla

$$S = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_l S_j^{(h)} \Omega_{\mu+\nu l}(u_1, \dots, u_s) \eta^l t^j$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{j=0}^{\infty} S_j^{(h)} t^j \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} a_l \Omega_{\mu+vl}(u_1, \dots, u_s) \eta^l \right) \\
&= \frac{1}{(d - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c})^h} \Lambda_{\mu, v}(u_1, \dots, u_s; \eta)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Burada $S_j^{(h)}$ polinomları için a_l 'nin farklı seçimlerinde $\Omega_{\mu+vl}(u_1, \dots, u_s)$ fonksiyonu seçilen fonksiyonların çarpımı olarak yazıldığında multilineer ve multilateral doğurucu fonksiyonlar bulunabilir.

Özel olarak $\Omega_{\mu+vl}(u_1, \dots, u_s)$ ($l \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{N} - \{0\}$) fonksiyonun bazı özel seçimlerinde uygulamaları aşağıda verilmiştir.

Örnek

$s=1$ için $\Omega_{\mu+vl}(u) = F_{\mu+vl}(u)$ seçilsin. Burada $F_n(x)$ Fibonacci polinomu olup

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n(x) t^n = \frac{t}{1 - xt - t^2}$$

doğurucu fonksiyonuna sahiptir. Bu durumda $a_l \neq 0$, $\mu, v \in \mathbb{N}$ için Fibonacci polinomlarının

$$\Lambda_{\mu, v}(u, \zeta) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l F_{\mu+vl}(u) \zeta^l \quad (4.8)$$

doğurucu fonksiyonu olsun.

$$\theta_{j,p,\mu,\nu}(x,y,z;u;\tau) := \sum_{l=0}^{[j/p]} a_l S_{j-pl}^{(h)} F_{\mu+\nu l}(u) \tau^l \quad (4.9)$$

ile gösterilsin. $\theta_{j,p,\mu,\nu}(x,y,z;u;\tau)$ fonksiyonu

$$\sum_{j=0}^{\infty} \theta_{j,p,\mu,\nu} \left(x, y, z; u; \frac{\eta}{t^p} \right) t^j = \frac{1}{(d - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c})^h} \Lambda_{\mu,\nu}(u; \eta) \quad (4.10)$$

özelliğine sahiptir.

İspat

Eş. 4.9 ile tanımlanan $\theta_{j,p,\mu,\nu} \left(x, y, z; u; \frac{\eta}{t^p} \right)$ fonksiyonu Eş. 4.10'un sol tarafında yazılırsa

$$S = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{[j/p]} a_l S_{j-pl}^{(h)} F_{\mu+\nu l}(u) \eta^l t^{j-pl}$$

elde edilir. Burada j yerine $j + pl$ yazılırsa ve Eş. 4.8'in kullanılması ile

$$\begin{aligned} S &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_l S_j^{(h)} F_{\mu+\nu l}(u) \eta^l t^j \\ &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} S_j^{(h)} t^j \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} a_l F_{\mu+\nu l}(u) \eta^l \right) \\ &= \frac{1}{(d - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c})^h} \Lambda_{\mu,\nu}(u; \eta) \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

Örnek

Teorem 4.4.1’de $a_l = 1$, $\mu = 0$, $v = 1$ seçilmesi ve Fibonacci polinomlarının doğurucu fonksiyonunun kullanılması ile Fibonacci polinomları ve $S_j^{(h)}$ polinom ailesi için

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{[j/p]} S_{j-pl}^{(h)} F_l(u) \eta^l t^{j-pl}$$

$$= \frac{1}{(d - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c})^h} \cdot \frac{\eta}{1 - \eta u - \eta^2}$$

bilateral doğurucu fonksiyon elde edilmiş olur.

Örnek

$s = 3$ değeri için $\Omega_{\mu+vl}(u_1, u_2, u_3) = S_{\mu+vl}^{(h)}(u_1, u_2, u_3; k, m, n, c, d)$ seçilsin. Burada $S_{\mu+vl}^{(h)}(u_1, u_2, u_3; k, m, n, c, d)$ üç değişkenli polinom ailesi olup

$$\sum_{j=0}^{\infty} S_j^{(h)} t^j = \frac{1}{(1 - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c})^h}$$

doğurucu fonksiyonuna sahiptir. $a_l \neq 0$, $\mu, v \in \mathbb{N}$ için $S_j^{(h)}$ polinomlarının doğurucu fonksiyonu

$$\Lambda_{\mu,v}(u_1, u_2, u_3, \zeta) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l S_{\mu+vl}^{(h)}(u_1, u_2, u_3; k, m, n, c, d) \zeta^l$$

doğurucu fonksiyonu olsun.

$$\theta_{j,p,\mu,\nu}(x,y,z;u_1,u_2,u_3;\tau) = \sum_{l=0}^{[j/p]} a_l S_{j-pl}^{(h)} S_{\mu+\nu l}^{(h)} \tau^l$$

olup, $\theta_{j,p,\mu,\nu}(x,y,z;u_1,u_2,u_3;\tau)$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{\infty} \theta_{j,p,\mu,\nu} \left(x, y, z; u_1, u_2, u_3; \frac{\eta}{t^p} \right) t^j \\ &= \frac{1}{(d - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c})^h} \Lambda_{\mu,\nu}(u_1, u_2, u_3; \eta) \end{aligned}$$

özelliğini sağlar. $a_l = 1$, $\mu = 0$, $\nu = 1$ seçilmesi ile

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{[j/p]} S_{j-pl}^{(h)} S_l^{(h)} \eta^l t^{j-pl} \\ &= \frac{1}{(d - x^k t - y^m t^{m+n} - z^c t^{m+n+c})^h} \cdot \frac{1}{(d - u_1^k \eta - u_2^m \eta^{m+n} - u_3^c \eta^{m+m+c})^h} \end{aligned}$$

üç değişkenli polinom ailesi için bilineer doğurucu fonksiyon elde edilir.

4.4.2. Teorem

μ -yüncü basamaktan, s kompleks değişkenli ($s \in \mathbb{N} - \{0\}$), sıfıra eşit olmayan

$\Omega_{\mu}(\xi_1, \dots, \xi_s)$ fonksiyonu için, $h = h_1 + h_2$ ($h_1, h_2 \in \mathbb{N} - \{0\}$) olmak üzere

$$\Lambda_{\mu,\nu,h}^{j,p}(x,y,z;\xi_1,\dots,\xi_s;\tau) := \sum_{l=0}^{[j/p]} a_l S_{j-pl}^{(h_1+h_2)} \Omega_{\mu+\nu l}(\xi_1,\dots,\xi_s) \tau^l$$

olsun. Burada $a_l \neq 0$, $j \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N} - \{0\}$ dır. Bu durumda

$$\sum_{l=0}^j \sum_{r=0}^{\lfloor l/p \rfloor} a_r S_{j-l}^{(h_1)} S_{l-pr}^{(h_2)} \Omega_{\mu+vr}(\xi_1, \dots, \xi_s) \tau^r$$

$$= \Lambda_{\mu, \nu, h}^{j, p}(x, y, z; \xi_1, \dots, \xi_s; \tau)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$$\sum_{l=0}^j \sum_{r=0}^{\lfloor l/p \rfloor} a_r S_{j-l}^{(h_1)} S_{l-pr}^{(h_2)} \Omega_{\mu+vr}(\xi_1, \dots, \xi_s) \tau^r \quad \text{ifadesinde} \quad \sum_{l=0}^j \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{l}{p} \rfloor} A(l, r) = \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{j}{p} \rfloor} \sum_{l=0}^{j-pr} A(l+pr, r)$$

eşitliği [9] ve $S_j^{(h_1+h_2)} = \sum_{l=0}^j S_{j-l}^{(h_1)} S_l^{(h_2)}$ özelliği kullanılırsa

$$\sum_{r=0}^{\lfloor j/p \rfloor} \sum_{l=0}^{j-pr} a_r S_{j-l-pr}^{(h_1)} S_l^{(h_2)} \Omega_{\mu+vr}(\xi_1, \dots, \xi_s) \tau^r$$

$$= \sum_{r=0}^{\lfloor j/p \rfloor} a_r \left(\sum_{l=0}^{j-pr} S_{j-l-pr}^{(h_1)} S_l^{(h_2)} \right) \Omega_{\mu+vr}(\xi_1, \dots, \xi_s) \tau^r$$

$$= \sum_{r=0}^{\lfloor j/p \rfloor} a_r S_{j-pr}^{(h_1+h_2)} \Omega_{\mu+vr}(\xi_1, \dots, \xi_s) \tau^r$$

eşitliği yazılır. Buradan

$$\sum_{r=0}^{\lfloor j/p \rfloor} a_r S_{j-pr}^{(h_1+h_2)} \Omega_{\mu+vr}(\xi_1, \dots, \xi_s) \tau^r = \Lambda_{\mu, \nu, h}^{j, p}(x, y, z; \xi_1, \dots, \xi_s; \tau)$$

eşitliği elde edilir.

5. T_j POLİNOM AİLESİ

Bu bölümde $T_j := T_j(x, y, z; k, m, n, c)$ polinom ailesi doğurucu fonksiyon yardımıyla tanımlanmıştır. [47, 48] kaynaklarında verilen çalışmaya benzer olarak doğurucu fonksiyon yardımıyla bu polinom ailesinin çeşitli polinom aileleri ve sayılarıyla olan ilişkilerine değinilmiştir.

5.1. T_j Polinom Ailesinin Tanımı

5.1.1. Tanım

$T_j(x, y, z; k, m, n, c)$ polinomları $x, y, z \in \mathbb{R}$ ve $k, m, n, c \in \mathbb{N}$ için

$$F(\tau; x, y, z; k, m, n, c)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{T_j}{j!} \left(\frac{\tau}{1-x^k - y^m - z^c} \right)^j \\ &= \frac{1-x^k - y^m - z^c}{1-x^k e^{\tau} - y^m e^{\tau(m+n)} - z^c e^{\tau(m+n+c)}} \end{aligned} \quad (5.1)$$

doğurucu fonksiyonuyla tanımlansın.

T_j polinom ailesi için rekürans bağıntısı aşağıdaki teoremle verilmiştir.

5.1.2. Teorem

$T_0 = 1$ olmak üzere, $j > 0$ için rekürans bağıntısı

$$T_j = x^k \sum_{s=0}^j (1-x^k - y^m - z^c)^{j-s} \binom{j}{s} T_s$$

$$\begin{aligned}
& +y^m \sum_{s=0}^j (m+n)^{j-s} (1-x^k - y^m - z^c)^{j-s} \binom{j}{s} T_s \\
& +z^c \sum_{s=0}^j (m+n+c)^{j-s} (1-x^k - y^m - z^c)^{j-s} \binom{j}{s} T_s
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

İspat

Eş. 5.1 ve e^x fonksiyonunun Taylor serisi yardımıyla

$$\begin{aligned}
& 1-x^k - y^m - z^c \\
& = (1-x^k e^\tau - y^m e^{\tau(m+n)} - z^c e^{\tau(m+n+c)}) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{T_j}{j!} \left(\frac{\tau}{1-x^k - y^m - z^c} \right)^j \\
& = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{T_j}{j!} \left(\frac{\tau}{1-x^k - y^m - z^c} \right)^j \\
& \quad - x^k e^\tau \sum_{j=0}^{\infty} \frac{T_j}{j!} \left(\frac{\tau}{1-x^k - y^m - z^c} \right)^j \\
& \quad - y^m e^{\tau(m+n)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{T_j}{j!} \left(\frac{\tau}{1-x^k - y^m - z^c} \right)^j \\
& \quad - z^c e^{\tau(m+n+c)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{T_j}{j!} \left(\frac{\tau}{1-x^k - y^m - z^c} \right)^j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{T_j}{j!} \left(\frac{\tau}{1-x^k - y^m - z^c} \right)^j \\
&\quad - x^k \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{\tau^s}{s!} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{T_j}{j!} \left(\frac{\tau}{1-x^k - y^m - z^c} \right)^j \right) \\
&\quad - y^m \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\tau(m+n))^s}{s!} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{T_j}{j!} \left(\frac{\tau}{1-x^k - y^m - z^c} \right)^j \right) \\
&\quad - z^c \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\tau(m+n+c))^s}{s!} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{T_j}{j!} \left(\frac{\tau}{1-x^k - y^m - z^c} \right)^j \right)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada Lemma 2.2.1 kullanılırsa yukarıdaki eşitlik

$$\begin{aligned}
&1 - x^k - y^m - z^c \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{T_j}{j!} \left(\frac{\tau}{1-x^k - y^m - z^c} \right)^j \\
&\quad - x^k \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^j \frac{\tau^s}{s!} \frac{T_{j-s}}{(j-s)!} \left(\frac{\tau}{1-x^k - y^m - z^c} \right)^{j-s} \\
&\quad - y^m \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^j \frac{(\tau(m+n))^s}{s!} \frac{T_{j-s}}{(j-s)!} \left(\frac{\tau}{1-x^k - y^m - z^c} \right)^{j-s} \\
&\quad - z^c \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^j \frac{(\tau(m+n+c))^s}{s!} \frac{T_{j-s}}{(j-s)!} \left(\frac{\tau}{1-x^k - y^m - z^c} \right)^{j-s}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Bu durumda yukarıdaki ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^{\infty} \frac{T_j}{j!} \left(\frac{\tau}{1-x^k-y^m-z^c} \right)^j \\
&= x^k \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^j \frac{T_{j-s}}{s!(j-s)!} \left(\frac{1}{1-x^k-y^m-z^c} \right)^{j-s} \tau^j \\
&+ y^m \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^j \frac{(m+n)^s}{s!} \frac{T_{j-s}}{(j-s)!} \left(\frac{1}{1-x^k-y^m-z^c} \right)^{j-s} \tau^j \\
&+ z^c \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^j \frac{(m+n+c)^s}{s!} \frac{T_{j-s}}{(j-s)!} \left(\frac{1}{1-x^k-y^m-z^c} \right)^{j-s} \tau^j \\
&+ 1-x^k-y^m-z^c
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. τ^j lerin katsayıları eşitlenirse

$$\begin{aligned}
& \frac{T_j}{j!} \frac{1}{(1-x^k-y^m-z^c)^j} \\
&= x^k \sum_{s=0}^j \binom{j}{s} \frac{T_{j-s}}{j!} \frac{1}{(1-x^k-y^m-z^c)^{j-s}} \\
&+ y^m \sum_{s=0}^j \binom{j}{s} \frac{T_{j-s}}{j!} (m+n)^s \frac{1}{(1-x^k-y^m-z^c)^{j-s}} \\
&+ z^c \sum_{s=0}^j \binom{j}{s} \frac{T_{j-s}}{j!} (m+n+c)^s \frac{1}{(1-x^k-y^m-z^c)^{j-s}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada T_j ifadesi yalnız bırakılırsa

$$\begin{aligned}
T_j &= x^k \sum_{s=0}^j (1-x^k - y^m - z^c)^s \binom{j}{s} T_{j-s} \\
&+ y^m \sum_{s=0}^j (m+n)^s (1-x^k - y^m - z^c)^s \binom{j}{s} T_{j-s} \\
&+ z^c \sum_{s=0}^j (m+n+c)^s (1-x^k - y^m - z^c)^s \binom{j}{s} T_{j-s}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada s yerine $j-s$ alınır

$$\begin{aligned}
T_j &= x^k \sum_{s=0}^j (1-x^k - y^m - z^c)^{j-s} \binom{j}{s} T_s \\
&+ y^m \sum_{s=0}^j (m+n)^{j-s} (1-x^k - y^m - z^c)^{j-s} \binom{j}{s} T_s \\
&+ z^c \sum_{s=0}^j (m+n+c)^{j-s} (1-x^k - y^m - z^c)^{j-s} \binom{j}{s} T_s
\end{aligned}$$

istenilen sonuç elde edilir.

Şimdi Teorem 5.1.2 yardımıyla $j=1,2$ için T_j polinom ailesinin T_1 ve T_2 polinomları bulunacaktır.

$j=1$ için

$$T_1 = x^k \sum_{s=0}^1 (1-x^k - y^m - z^c)^{1-s} \binom{1}{s} T_s$$

$$+y^m \sum_{s=0}^1 (m+n)^{1-s} (1-x^k - y^m - z^c)^{1-s} \binom{1}{s} T_s$$

$$+z^c \sum_{s=0}^1 (m+n+c)^{1-s} (1-x^k - y^m - z^c)^{1-s} \binom{1}{s} T_s$$

olarak yazılır. Buradan $T_0 = 1$ olmak üzere

$$T_1 = x^k + (m+n)y^m + (m+n+c)z^c$$

elde edilir.

$j = 2$ için

$$T_2 = x^k \sum_{s=0}^2 (1-x^k - y^m - z^c)^{2-s} \binom{2}{s} T_s$$

$$+y^m \sum_{s=0}^2 (m+n)^{2-s} (1-x^k - y^m - z^c)^{1-s} \binom{2}{s} T_s$$

$$+z^c \sum_{s=0}^2 (m+n+c)^{2-s} (1-x^k - y^m - z^c)^{1-s} \binom{2}{s} T_s$$

olup, $T_0 = 1$ olduğu dikkate alınırsa

$$T_2 = (1-x^k - y^m - z^c)^2 \left[x^k + (m+n)^2 y^m + (m+n+c)^2 z^c \right]$$

$$+2(1-x^k - y^m - z^c)T_1 \left[x^k + (m+n)y^m + (m+n+c)z^c \right]$$

$$+(x^k + y^m + z^c)T_2$$

elde edilir. Burada T_2 yalnız bırakılırsa

$$T_2 = (1 - x^k - y^m - z^c) \left[x^k + (m+n)^2 y^m + (m+n+c)^2 z^c \right] + 2 \left[x^k + (m+n)y^m + (m+n+c)z^c \right]^2$$

polinomu elde edilir.

5.2. T_j Polinom Ailesinin Özel Durumları

Bu bölümde T_j polinom ailesinin bazı özel durumları incelenmiştir. [47, 48]'deki çalışmalara benzer olarak, Eş. 5.1 ile verilen doğurucu fonksiyon kullanılarak bazı özel sayılar ve polinomlar ile T_j ailesinin özel durumu arasındaki ilişkilere değinilmiştir.

5.2.1. Teorem

$j \geq 1$ için T_j ailesi ile $B_j(\lambda)$ Apostol-Bernoulli sayıları arasında

$$T_{j-1}(x, y, 0; k, 1, 0, c) = -\frac{(1 - x^k - y)^j}{j} B_j(x^k + y) \quad (5.2)$$

ilişkisi vardır.

İspat

Eş. 2.56'dan

$$G(0, \tau; x^k + y) = \frac{\tau}{(x^k + y)e^\tau - 1} = \frac{-\tau}{1 - x^k e^\tau - y e^\tau}$$

eşitliği yazılabilir. Eş. 5.1'de $z=0$, $n=0$, $m=1$ alınır ve yukarıdaki eşitlikten yararlanılırsa

$$F(\tau, x, y, 0; k, 1, 0, c) = \frac{1-x^k-y}{1-x^k e^\tau - y e^\tau} = \frac{1-x^k-y}{-(x^k+y)e^\tau - 1} = -\frac{1-x^k-y}{\tau} G(0, \tau; x^k+y)$$

eşitliği elde edilir. Burada tekrar Eş. 5.1 ve Eş. 2.56 dan dolayı

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{T_j(x, y, 0; k, 1, 0, c)}{j!} \frac{\tau^j}{(1-x^k-y)^j} = \frac{1-x^k-y}{1-x^k e^\tau - y e^\tau} = -\frac{1-x^k-y}{\tau} \sum_{j=0}^{\infty} B_j(x^k+y) \frac{\tau^j}{j!}$$

eşitliği bulunur. Buradan

$$\frac{\tau}{1-x^k-y} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{T_j(x, y, 0; k, 1, 0, c)}{j!} \frac{\tau^j}{(1-x^k-y)^j} = -\sum_{j=0}^{\infty} B_j(x^k+y) \frac{\tau^j}{j!}$$

olup,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(j-1)!} T_{j-1}(x, y, 0; k, 1, 0, c) \left(\frac{\tau}{1-x^k-y} \right)^j = -\sum_{j=0}^{\infty} B_j(x^k+y) \frac{\tau^j}{j!}$$

olarak yazılır. $\frac{\tau^j}{j!}$ katsayıları eşitlenirse

$$T_{j-1}(x, y, 0; k, 1, 0, c) = -\frac{(1-x^k-y)^j}{j} B_j(x^k+y)$$

eşitliği elde edilir.

Eş. 5.2’de $j = 1, 2, 3, 4, 5$ değerleri verilerek Apostol-Bernoulli sayıları yardımıyla

$j = 1$ için

$$T_0(x, y, 0; k, 1, 0, c) = -(1-x^k-y)B_1(x^k+y) = 1,$$

$j = 2$ için

$$T_1(x, y, 0; k, 1, 0, c) = -\frac{(1-x^k-y)^2}{2} B_2(x^k + y) = x^k + y,$$

$j = 3$ için

$$T_2(x, y, 0; k, 1, 0, c) = -\frac{(1-x^k-y)^3}{3} B_3(x^k + y) = x^{2k} + 2x^k y + x^k + y^2 + y,$$

$j = 4$ için

$$T_3(x, y, 0; k, 1, 0, c) = -\frac{(1-x^k-y)^4}{4} B_4(x^k + y) = (x^k + y)^3 + 4(x^k + y)^2 + x^k + y,$$

$j = 5$ için

$$T_4(x, y, 0; k, 1, 0, c) = -\frac{(1-x^k-y)^5}{5} B_5(x^k + y) = (x^k + y)^4 + 11(x^k + y)^3 + 11(x^k + y)^2 + x^k + y$$

elde edilir.

5.2.2. Teorem

$j \geq 1$ için T_j polinom ailesi ve $B_j(x; \lambda)$ Apostol-Bernoulli polinomları arasında

$$B_j(x, x^k) = -j \sum_{s=0}^{j-1} \binom{j-1}{s} \frac{x^{j-1-s}}{(1-x^k)^{s+1}} T_s(x, 0, 0; k, m, n, c) \quad (5.3)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Eş. 5.1 ve Eş. 2.56'dan dolayı $m \neq 0$ olmak üzere

$$\tau e^{x\tau} F(\tau; x, 0, 0; k, m, n, c) = \tau e^{x\tau} \frac{1 - x^k}{1 - x^k e^\tau} = \frac{(x^k - 1)\tau e^{x\tau}}{x^k e^\tau - 1} = (x^k - 1)G(x, \tau; x^k) \quad (5.4)$$

eşitliği yazılır. Eş. 5.4'de e^τ fonksiyonunun Taylor serisi kullanılırsa ve Eş.5.1'den

$$F(\tau; x, 0, 0; k, m, n, c) \text{ ifadesinin yerine } \sum_{j=0}^{\infty} \frac{T_j(x, 0, 0; k, m, n, c)}{(1 - x^k)^j} \frac{\tau^j}{j!} \text{ serisel gösterimi}$$

yazılırsa

$$\tau \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(x\tau)^j}{j!} \right) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{T_s(x, 0, 0; k, m, n, c)}{(1 - x^k)^d} \frac{\tau^s}{s!} = - \sum_{j=0}^{\infty} B_j(x, x^k) \frac{\tau^j}{j!}$$

elde edilir. Burada Lemma 2.2.1 kullanılırsa

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^j \binom{j}{s} \frac{T_s(x, 0, 0; k, m, n, c)}{(1 - x^k)^{s+1}} \cdot \frac{x^{j-s} \tau^{j+1}}{j!} = - \sum_{j=0}^{\infty} B_j(x, x^k) \frac{\tau^j}{j!}$$

eşitliği yazılır. Buradan

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{j-1} \frac{T_s(x, 0, 0; k, m, n, c)}{(1 - x^k)^{s+1}} x^{j-s-1} \tau^j j \binom{j-1}{s} = - \sum_{j=0}^{\infty} B_j(x, x^k) \frac{\tau^j}{j!}$$

şeklinde yazılır. Burada $\frac{\tau^j}{j!}$ ifadesinin katsayıları eşitlenirse

$$B_j(x, x^k) = -j \sum_{d=0}^{j-1} \binom{j-1}{s} x^{j-s-1} \frac{T_s(x, 0, 0; k, m, n, c)}{(1 - x^k)^{s+1}}$$

eşitliği elde edilir.

5.2.3. Teorem

T_j polinom ailesi ile $E_j(x)$ Euler polinomu arasında

$$E_j(x) = \sum_{s=0}^j \binom{j}{s} x^{j-s} \frac{T_s(-1, 0, 0; 1, m, n, c)}{2^s}$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Eş. 2.59'da $h=1$ için Euler polinomunun doğurucu fonksiyonu

$$\sum_{j=0}^{\infty} E_j(x) \frac{\tau^j}{j!} = \frac{2e^{x\tau}}{e^{\tau} + 1}$$

olarak yazılabilir.

$$F(\tau; -1, 0, 0; 1, m, n, c) = \frac{1 - (-1)}{1 - (-1)e^{\tau} - 0} = \frac{2}{1 + e^{\tau}} = U(0, \tau; 1)$$

olup,

$$\frac{2e^{x\tau}}{e^{\tau} + 1} = e^{x\tau} F(\tau; -1, 0, 0; 1, m, n, c)$$

eşitliği elde edilir. Burada $e^{x\tau} F(\tau; -1, 0, 0; 1, m, n, c)$ ifadesinin seri açılımı yapılırsa

$$e^{x\tau} F(\tau; -1, 0, 0; 1, m, n, c)$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(x\tau)^j}{j!} \right) \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{T_s(-1, 0, 0; 1, m, n, c)}{2^s} \frac{\tau^s}{s!} \right)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^j \frac{T_s(-1, 0, 0; 1, m, n, c)}{2^s} \frac{x^{j-s}}{s!(j-s)!} \tau^j$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} E_j(x) \frac{\tau^j}{j!}$$

olarak elde edilir. $\frac{\tau^j}{j!}$ ifadesinin katsayıları eşitlenirse

$$E_j(x) = \sum_{s=0}^j \binom{j}{s} x^{j-s} \frac{T_s(-1, 0, 0; 1, m, n, c)}{2^s}$$

sonucu elde edilir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında öncelikle Fibonacci tipli polinom aileleri ve bazı özel sayı dizileri incelenmiştir. Fibonacci polinomlarını kapsayan çok sayıda çalışmalar yapılmıştır. Bu aileleri kapsayan iki değişkenli yeni polinom ailesi doğurucu fonksiyonlar aracılığıyla tanımlanmış ve çeşitli özellikleri [45, 47, 48] kaynaklarında verilmiştir. Bu aileleri kapsayan üç değişkenli yeni polinom ailesi doğurucu fonksiyon aracılığıyla tanımlanmıştır ve çeşitli özellikleri [44]'de verilen kaynakta çalışılmıştır. Bu polinom ailelerinden ve doğurucu fonksiyondan yola çıkarak bu aileleri kapsayan üç değişkenli polinom aileleri için daha genel doğurucu fonksiyon üzerinde çalışılmıştır. Bu polinom ailelerini içeren kısmi türevlere, bağıntı ve sonuçlara yer verilmiştir.

Birinci bölüm giriş bölümü olmak üzere ikinci bölümde bazı tanımlar ve bazı özel polinom aileleri ile bazı özel sayı dizilerine yer verilmiştir. Üçüncü bölümde [44] ile verilen çalışmada tanıtılan S_j ailesinden bahsedildikten sonra bu ailenin doğurucu fonksiyon yardımıyla yeni polinom ailesi elde edilmiştir ve çeşitli özellikleri üzerinde durulmuştur. Beşinci bölümde T_j polinom ailesi doğurucu fonksiyon yardımıyla tanımlanıp özellikleri elde edildikten sonra özel durumlarında çeşitli ailelerle ilişkilerine değinilmiştir.

Fibonacci tipli polinom aileleri için üç, dört ve beşinci bölümde bahsedildiği gibi doğurucu fonksiyonlar yardımıyla bazı polinom aileleri ile bazı sayı dizilerini içeren başka polinom aileleri tanımlanıp özellikleri üzerinde durulabilir.

KAYNAKLAR

1. Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*. Pure and Applied Mathematics, Canada: John Wiley and Sons, Interscience, 1-500.
2. Grigas, A. (2013). *The Fibonacci Sequence, Its history, significance and manifestations in Nature*. A Senior Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for Graduation in the Honors Program, Liberty University, 1-35.
3. Garth, D., Mills, D., Mitchell, P. (2007). Polynomials generated by the Fibonacci sequence. *Journal of Integer Sequences*, 10(2), 3.
4. Shattuck, M. A. and Wagner, C. G. (2007). Some generalized Fibonacci polynomials. *Journal of Integer Sequences*, 10(2), 3.
5. Prodinger, H. (2009). Sums of powers of Fibonacci polynomials. *Proceedings Mathematical Sciences*, 119(5), 567-570.
6. Amdeberhan, T. (2010). A note on Fibonacci-type polynomials. *Integers*, 10(1), 13-18.
7. Andrews, G.E. (1974). Applications of basic hypergeometric functions. *SIAM Review*, 16(4), 441-484.
8. Wilf, H.S. (1994). *Generatingfunctionology*. (Second Edition). New York: Academic Press, 1-32.
9. Srivastava, H.M. and Manocha, H.L. (1984). *A Treatise on Generating Functions*. New York, USA: Ellis Harwood Limited, 21-34, 78-79.
10. Rainville, E.D. (1960). *Special Functions*. New York: The Macmillan Company, 34-78.
11. Vajda, S. (1989). *Fibonacci and Lucas Numbers and The Golden Section. Theory and Applications*. Chichester, England: Ellis Horwood Limited, 10-73.
12. Posamentier, A.S. and I. Lehmann (2007). *The (fabulous) Fibonacci numbers*. Amherst, New York: Prometheus Books, 299-305.
13. Catalani, M. (2004). Some formula for bivariate Fibonacci and Lucas polynomials. ArXiv: Math/0406323v1 [Math. CO], 1-9.
14. Hoggatt, V.E. Jr. and Bicknell M. (1972). Convolution Triangles. *The Fibonacci Quarterly*, 10(6), 599-608.
15. Lupas, A. (1999). A guide of Fibonacci and Lucas polynomials. *Octagon Mathematics Magazine*, 7(1), 2-12.
16. Hoggatt, V.E. Jr. and M. Bicknell (1973). Generalized Fibonacci polynomials. *Fibonacci Quarterly*, 11(5), 457-465.

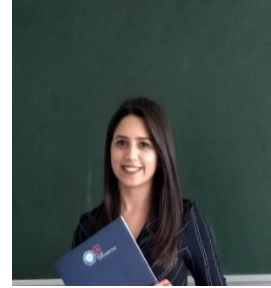
17. Hoggatt, V.E. Jr. (1969). *Fibonacci and Lucas Numbers*. Boston: Houghton-Mifflin, 56.
18. Feinberg, M. (1963). Fibonacci-Tribonacci. *The Fibonacci Quarterly*, (3), 70-74.
19. Elia, M. (2001). Derived sequences, the Tribonacci recurrence and cubic forms. *The Fibonacci Quarterly*, 39(2), 107-109.
20. Koshy, T. (2014). *Pell and Pell-Lucas Numbers with Applications*. New York: Springer, 115-120.
21. Horadam, A.F. (1985). Pell and Pell-Lucas polynomials. *The Fibonacci Quarterly*, 23(1), 7-20.
22. Horadam, A.F. (1994). Jacobsthal representation numbers. *University of New England, Australia*, 40-54.
23. Hoggatt, V.E. Jr. and Bicknell M. (1978). Convolution arrays for Jacobsthal and Fibonacci polynomials. *The Fibonacci Quarterly*, 16, 385-402.
24. Djordjevic, G.B. and Srivastava, H.M. (2006). Some generalizations of certain sequences associated with the Fibonacci numbers. *Journal of Indonesian Mathematical Society*, 12, 99-112.
25. Gupta, V.K. and Panwar, Y.K. (2012). Common factors of generalized Fibonacci, Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas numbers. *International Journal of Applied Mathematical Research*, 1(4), 377-382.
26. Cook, C.K. and Bacon, M.K., (2013). Some identities for Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas numbers satisfying higher order recurrence relations. *Annales Mathematicae et Informaticae*, 41, 27-39.
27. Djodjevic, G.B. (2001). Some properties of partial derivatives of generalized Fibonacci and Lucas polynomials. *Fibonacci Quarterly*, 39(2), 138-141.
28. Catalani, M. (2004). Generalized bivariate Fibonacci polynomials. ArXiv: math/0211366v2 [Math.CO], 1-11.
29. Swamy, M.N.S., (1999). Generalized Fibonacci and Lucas polynomials, and their associated diagonal polynomials. *Fibonacci Quarterly*, 37, 213-222.
30. Catalani, M. (2004). Identities for Fibonacci and Lucas polynomials derived from a book of Gould. Arxiv: Math/0407015v1 [Math.CO], 1-7.
31. Kocer, E. G. and Gedikce, H. (2016). Trivariate Fibonacci and Lucas polynomials. *Konuralp Journal of Mathematics*, 4(2), 247-254.
32. Luo, Q.M. (2004). On the Apostol-Bernoulli polynomials. *Central European Journal of Mathematics*, 2(4), 509-515.
33. Luo, Q.M., (2007). Apostol-Euler polynomials of higher order and Gaussian hypergeometric functions. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 10(4), 917-925.

34. Apostol, T.M. (1951). On the Lerch zeta function. *Pacific Journal of Mathematics*, 1(2), 161-167.
35. Şimşek, Y. (2017). Computation methods for combinatorial sums and Euler-type numbers related to new families of numbers. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 40(7), 2347-2361.
36. Wei, C.-F. and Qi, F. (2015). Several closed expressions for the Euler numbers. *Journal of Inequalities and Applications*, (1), 1-8.
37. Humbert, P. (1920). Some Extensions of Pincherle's Polynomials. *Proceedings of the Edinburg Mathematical Society*, 39, 21-24.
38. Milovanović, G.V. and Djordjevic, G.B. (1987). On some properties of Humbert's polynomials. *Fibonacci Quarterly*, 25, 356-360.
39. Bell, W.W. (1968). *Special Function for Scientist and Engineer*. Canada: David Van Nostrand Company, 42-80.
40. Erkuş-Duman, E. And Tuğlu, N. (2015). Generating functions for the generalized bivariate Fibonacci and Lucas polynomials. *Journal of Computational Analysis and Applications*, 18(5), 815-821.
41. Kızılateş, C. and Çekim, B. (2018). New families of generating functions for q-Fibonacci and the related polynomials. *Ars Combinatoria*, 136, 397-404.
42. Kızılateş, C. and Tuğlu, N. (2017). A new generalization of convolved (p, q)-Fibonacci and (p, q)- Lucas polynomials. *Journal of Mathematics and Computer Science*. 7(6), 995-1005.
43. Tuğlu, N., E.G., Koçer and Stakhov, A. (2011). Bivariate Fibonacci like p-polynomials. *Applied Mathematics and Computation*, 217(24), 10239-10246.
44. Kızılateş, C., Çekim, B., Tuğlu, Naim., Kim, T. (2019). New families of three-variable polynomials coupled with well-known polynomials and numbers. *Symmetry*, 11(2), 264.
45. Ozdemir, G. and Simsek, Y. (2016). Generating functions for two-variable polynomials related to a family of Fibonacci type polynomials and numbers. *Filomat*, 30(4), 969-975.
46. Özat, Z. and Çekim, B. (2019, 28-29 Haziran). *Üç değişkenli yüksek mertebeden polinom aileleri üzerine*. 14. Ankara Matematik Günleri'nde sunuldu, Ankara.
47. Ozdemir, G., Simsek, Y. and Milovanović, G. V. (2017). Generating functions for special polynomials and numbers including Apostol-type and Humbert-type polynomials. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 14(3), 117.
48. Ozdemir, G. (2017). Çok Değişkenli Fibonacci Tipli Polinomlar İçin Üreteç Fonksiyonları ve Uygulamaları, Doktora Tezi, Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Antalya, 52-73.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı :ÖZAT, Zeynep
 Uyruğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 14.08.1995, Eskişehir
 Medeni hali : Bekar
 Telefon : 0 (536) 966 0141
 e- mail : zeynepozat95@gmail.com



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi/Matematik Ana Bilim Dalı	Devam Ediyor
Lisans	Gazi Üniversitesi/Matematik Bölümü	2017
Lise	TOKİ Şehit Savaş Kubaş Anadolu Lisesi	2013

Yabancı Dil

İngilizce

Bildiriler

[1] Özat, Z. ve Çekim, B. (2019, 28-29 Haziran) *Üç Değişkenli Yüksek Mertebeden Polinom Aileleri Üzerine*. 14. Ankara Matematik Günleri'nde sunuldu, Ankara.

Hobiler

Kitap okumak, puzzle yapmak, maket yapmak, müzik dinlemek.



GAZİ GELECEKTİR..

