



**MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ MATEMATİKSEL
DÜŞÜNME SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ**

Ayşe Yiğit

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

AĞUSTOS, 2019

TELİF HAKKI VE TEZ FOTOKOPİ İZİN FORMU

Bu tezin tüm hakları saklıdır. Kaynak göstermek koşuluyla tezin teslim tarihinden itibaren 12 (on iki) ay sonra tezden fotokopi çekilebilir.

YAZARIN

Adı : Ayşe
Soyadı : Yiğit
Bölümü : Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi
İmza :
Teslim tarihi :

TEZİN

Türkçe Adı : Matematik Öğretmen Adaylarının Matematiksel Düşünme Süreçlerinin İncelenmesi

İngilizce Adı : Investigation of Mathematical Thinking Processes of Pre-Service Mathematics Teachers

ETİK İLKELERE UYGUNLUK BEYANI

Tez yazma sürecinde bilimsel ve etik ilkelere uyduğumu, yararlandığım tüm kaynakları kaynak gösterme ilkelerine uygun olarak kaynakçada belirttiğimi ve bu bölümler dışındaki tüm ifadelerin şahsıma ait olduğunu beyan ederim.

Yazar Adı Soyadı: Ayşe Yiğit

İmza:

JÜRİ ONAY SAYFASI

Ayşe Yiğit tarafından hazırlanan “Matematik Öğretmen Adaylarının Matematiksel Düşünme Süreçlerinin İncelenmesi” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Gazi Üniversitesi Matematik Eğitimi Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Ayşe UYAR

.....

Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Üye: Doç. Dr. Selami ERCAN

.....

Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Nurullah ŞİMŞEK

.....

Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 28/08/2019

Bu tezin Matematik Eğitimi Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans tezi olması için şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

Prof. Dr. Selma YEL

Eğitim Bilimleri Enstitü Müdürü

.....

Aileme

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca tez danışmanlığımı üstlenen, araştırma sürecinde bana rehberlik eden, görüş ve önerileri ile bana yardımcı olan değerli hocam Prof. Dr. Ayşe UYAR'a çok teşekkür ederim.

Lisans eğitimime adım attığım ilk günden itibaren gerek akademik kimliği gerekse kişiliğinden ötürü her daim saygı duyduğum ve kendime örnek aldığım, tez çalışmamda da ihtiyacım olduğu her an görüş ve önerileriyle bana yardımcı olan çok kıymetli hocam Prof. Dr. Ahmet ARIKAN'a teşekkür ederim.

Çalışmamın her aşamasında bana her daim ayıracak vakit bulan, başım her sıkıştığında hiçbir zaman yardım ve desteğini esirgemeyen, bana yol gösteren, güler yüzü ve olumlu tavrı ile beni motive eden çok sevdiğim hocam Dr. Gönül YAZGAN SAĞ'a ne kadar teşekkür etsem azdır.

Lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca yanımda olan, sadece tez sürecimde değil hayatımda da her an desteğini hissettiğim arkadaşım Esra KULOĞLU'na sonsuz teşekkür ederim.

Hayatım boyunca her zaman yanımda olan, maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen, emeklerinin karşılığını asla ödeyemeyeceğim annem Fatma YİĞİT'e, babam Osman YİĞİT'e, abim Ali Sinan YİĞİT'e ve bu zorlu süreçte beni güldürmeyi kendine görev edinmiş sevgili kardeşim Selçuk Bayram YİĞİT'e teşekkürü borç bilirim.

**MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ MATEMATİKSEL
DÜŞÜNME SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ**
(Yüksek Lisans Tezi)

Ayşe Yiğit
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Ağustos 2019

ÖZ

Bu çalışmada matematik öğretmen adaylarının problem çözme süreci boyunca matematiksel düşünme süreçlerini özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve ispatlama boyutları bağlamında incelemek amaçlanmıştır. Bu çalışma nitel araştırma desenlerinden durum çalışması esas alınarak tasarlanmıştır. Araştırmanın katılımcıları 2018-2019 eğitim ve öğretim yılı bahar döneminde Ankara'daki bir üniversitenin Eğitim Fakültesi Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalında öğrenim gören 4 matematik öğretmen adayından oluşmaktadır. Araştırmanın verileri, matematiksel düşünmenin özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma, ispatlama boyutlarının her birini kapsayacak dört adet problemden oluşan veri toplama aracı yardımı ile yarı yapılandırılmış görüşmeler, araştırmacının gözlemleri ve yazılı dokümanlar yoluyla toplanmış, yapılan görüşmeler video kamera ile kayıt altına alınmıştır. Elde edilen verilerin analizinde betimsel analiz kullanılmıştır. Verilerin analizi sonucunda öğretmen adaylarının matematiksel düşünmenin özelleştirme boyutunda zorlanmadıkları ama özellikle ispatlama boyutunda oldukça zorlandıkları gözlemlenmiştir. Bunun yanı sıra öğretmen adaylarının genelleme yapabilme durumlarının problem durumuna göre değiştiği tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının varsayımlarını problem durumuna bağlı olarak sözel veya cebirsel olarak ifade ettikleri görülmüştür. Araştırmada elde edilen sonuçlar ışığında matematik öğretmenlerine, araştırmacılara ve matematik öğretmeni yetiştirenlere yönelik çeşitli öneriler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler :Matematiksel düşünme, özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma, ispatlama
Sayfa Adedi :109
Danışman : Prof. Dr. Ayşe UYAR

**INVESTIGATION OF MATHEMATICAL THINKING PROCESSES
OF PRESERVICE MATHEMATICS TEACHERS
(M.S. Thesis)**

Ayşe Yiğit

GAZI UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF EDUCATIONAL SCIENCES

August 2019

ABSTRACT

In this study, it is aimed to investigate mathematical thinking processes of preservice mathematics teachers in the context of specializing, generalizing, conjecturing and proving during problem solving process. This study was designed on the basis of case study, one of the qualitative research designs. The participants of the study consisted of 4 preservice mathematics teachers in the Mathematics Education Department of the Faculty of Education, Department of Mathematics and Science Education of a university in Ankara in the spring term of 2018-2019 academic year. The data of the research were collected through the data collection tool, which consists of four problems including each of the dimensions of specializing, generalization, conjecturing and proving of mathematical thinking, semi-structured interviews, researcher's observations and written documents. Descriptive analysis was used in the analysis of the obtained data. As a result of the analysis of the data, it was observed that preservice teachers did not have difficulty in the specializing dimension of mathematical thinking, but they especially were forced in the proving dimension. In addition, it has been determined that the status of generalization of preservice teacher varies depending on the problems. It was seen that preservice teachers expressed their conjecturings verbally or algebraically depending on the problem situation. In the light of the results of the study, several suggestions were made to mathematics teachers, researchers and the educators of mathematics teachers.

Key Words :Mathematical thinking, specializing, generalizing, conjecturing, proving

Page Number :109

Supervisor : Prof. Dr. Ayşe UYAR

İÇİNDEKİLER

TELİF HAKKI VE TEZ FOTOKOPİ İZİN FORMU	i
ETİK İLKELERE UYGUNLUK BEYANI.....	ii
JÜRİ ONAY SAYFASI	iii
TEŞEKKÜR	v
ÖZ.....	vi
ABSTRACT.....	vii
İÇİNDEKİLER	viii
TABLolar LİSTESİ.....	xi
ŞEKİLLER LİSTESİ	xii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	xvii
BÖLÜM I.....	1
GİRİŞ	1
1.1 Problem Durumu.....	1
1.2 Araştırmanın Amacı	3
1.3 Araştırmanın Problem Cümlesi ve Alt Problemler	3
1.4 Araştırmanın Önemi	3
1.5 Araştırmanın Sınırlılıkları	4
1.6 Araştırmanın Varsayımları.....	4
1.7 Tanımlar.....	5
BÖLÜM II	6
KAVRAMSAL ÇERÇEVE.....	6
2.1 Matematik.....	6
2.2 Düşünme.....	7
2.3 Matematiksel Düşünme	7
2.3.1 Özelleştirme.....	9
2.3.2 Genelleme	10
2.3.3 Varsayımda Bulunma.....	10

2.3.4 İspatlama	11
2.4 İlgili Araştırmalar	12
BÖLÜM III.....	23
YÖNTEM.....	23
3.1 Araştırmanın Modeli	23
3.2 Katılımcılar	24
3.3 Veri Toplama Araçları.....	26
3.3.1 Görüşme	26
3.3.2 Gözlem	27
3.3.3 Doküman İncelemesi	27
3.3.4 Matematiksel Düşünme Problemlerinin Hazırlanması.....	27
3.4 Verilerin Toplanması	28
3.5 Verilerin Analizi ve Yorumlanması.....	29
3.6 Araştırmanın Geçerlik ve Güvenirliği	31
BÖLÜM IV	33
BULGULAR.....	33
4.1 Özelleştirme Boyutuna İlişkin Bulgular ve Yorumları.....	34
4.1.1 Özelleştirme Boyutunu Gerçekleştirme.....	35
4.1.2 Özelleştirme Boyutunu Atlama	53
4.2 Genelleme Boyutuna İlişkin Bulgular ve Yorumları	55
4.2.1 Genelleme Boyutunu Tamamlama.....	55
4.2.2 Genelleme Boyutunu Tamamlayamama	66
4.3 Varsayımda Bulunma Boyutuna İlişkin Bulgular ve Yorumları	69
4.3.1 Varsayımda Bulunma Boyutunu Sözel Olarak İfade Etme.....	70
4.3.2 Varsayımda Bulunma Boyutunu Cebirsel Olarak İfade Etme	72
4.3.3 Varsayımda Bulunma Boyutunu Sözel ve Cebirsel Olarak İfade Etme.....	74
4.3.4 Varsayımda Bulunma Boyutunu Tamamlayamama	76
4.4 İspatlama Boyutuna İlişkin Bulgular ve Yorumları	76
4.4.1 İspatlama Boyutunu Tamamlama	77
4.4.2 İspatlama Boyutunu Tamamlayamama	85
4.4.3 İspatlama Boyutuna Başlayamama	87
BÖLÜM V.....	90
SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER	90
5.1 Sonuç ve Tartışma	90

5.2 Öneriler	94
KAYNAKLAR	96
EKLER.....	105
EK 1. Öğrenci Görüşme Bilgilendirme Metni.....	106
EK 2. Görüşmede Kullanılan Problemler	107

TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 1. <i>Katılımcı Bilgileri</i>	25
Tablo 2. <i>Görüşme Verilerini Toplama Süreci</i>	29
Tablo 3. <i>Özelleştirme Kategorisine Ait Kodları Oluşturma Örneği</i>	31

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1. Varsayımda bulunma döngüsü	11
Şekil 2. Öğretmen adaylarının matematiksel düşünme süreci	34
Şekil 3. ÖA1'in 1. probleme ait çözümünden bir bölüm	35
Şekil 4. ÖA2'nin 1. probleme ait çözümünden bir bölüm	36
Şekil 5. ÖA2'nin 1. probleme ait çözümünden bir bölüm	36
Şekil 6. ÖA2'nin 1. probleme ait çözümünden bir bölüm	36
Şekil 7. ÖA4'ün 1. probleme ait çözümünden bir bölüm	37
Şekil 8. ÖA1'in 2. probleme ait çözümünden bir bölüm	37
Şekil 9. ÖA1'in 2. probleme ait çözümünden bir bölüm	38
Şekil 10. ÖA1'in 2. probleme ait çözümünden bir bölüm	38
Şekil 11. ÖA2'nin 2. probleme ait çözümünden bir bölüm	39
Şekil 12. ÖA2'nin 2. probleme ait çözümünden bir bölüm	39
Şekil 13. ÖA2'nin 2. probleme ait çözümünden bir bölüm	40
Şekil 14. ÖA2'nin 2. probleme ait çözümünden bir bölüm	40
Şekil 15. ÖA2'nin 2. probleme ait çözümünden bir bölüm	40
Şekil 16. ÖA3'ün 2. probleme ait çözümünden bir bölüm	41
Şekil 17. ÖA3'ün 2. probleme ait çözümünden bir bölüm	42
Şekil 18. ÖA3'ün 2. probleme ait çözümünden bir bölüm	42
Şekil 19. ÖA3'ün 2. probleme ait çözümünden bir bölüm	43
Şekil 20. ÖA4'ün 2. probleme ait çözümünden bir bölüm	43
Şekil 21. ÖA4'ün 2. probleme ait çözümünden bir bölüm	44

Şekil 22. ÖA4'ün 2. probleme ait çözümünden bir bölüm	44
Şekil 23. ÖA1'in 3. probleme ait çözümünden bir bölüm	45
Şekil 24. ÖA1'in 3. probleme ait çözümünden bir bölüm	45
Şekil 25. ÖA1'in 3. probleme ait çözümünden bir bölüm	45
Şekil 26. ÖA2'nin 3. probleme ait çözümünden bir bölüm	46
Şekil 27. ÖA2'nin 3. probleme ait çözümünden bir bölüm	46
Şekil 28. ÖA3'ün 3. probleme ait çözümünden bir bölüm	47
Şekil 29. ÖA3'ün 3. probleme ait çözümünden bir bölüm	47
Şekil 30. ÖA3'ün 3. probleme ait çözümünden bir bölüm	47
Şekil 31. ÖA3'ün 3. probleme ait çözümünden bir bölüm	48
Şekil 32. ÖA3'ün 3. probleme ait çözümünden bir bölüm	48
Şekil 33. ÖA4'ün 3. probleme ait çözümünden bir bölüm	48
Şekil 34. ÖA4'ün 3. probleme ait çözümünden bir bölüm	49
Şekil 35. ÖA1'in 4. probleme ait çözümünden bir bölüm	49
Şekil 36. ÖA1'in 4. probleme ait çözümünden bir bölüm	50
Şekil 37. ÖA2'nin 4. probleme ait çözümünden bir bölüm	50
Şekil 38. ÖA3'ün 4. probleme ait çözümünden bir bölüm	51
Şekil 39. ÖA3'ün 4. probleme ait çözümünden bir bölüm	51
Şekil 40. ÖA3'ün 4. probleme ait çözümünden bir bölüm	52
Şekil 41. ÖA4'ün 4. probleme ait çözümünden bir bölüm	53
Şekil 42. ÖA4'ün 4. probleme ait çözümünden bir bölüm	53
Şekil 43. ÖA3'ün 1. probleme ait çözümünden bir bölüm	54
Şekil 44. ÖA3'ün 1. probleme ait çözümünden bir bölüm	54
Şekil 45. ÖA2'nin 1. probleme ait çözümünden bir bölüm	56
Şekil 46. ÖA2'nin 1. probleme ait çözümünden bir bölüm	56
Şekil 47. ÖA3'ün 1. probleme ait çözümünden bir bölüm	57

Şekil 48. ÖA4'ün 1. probleme ait çözümünden bir bölüm	57
Şekil 49. ÖA2'nin 2. probleme ait çözümünden bir bölüm	57
Şekil 50. ÖA2'nin 2. probleme ait çözümünden bir bölüm	58
Şekil 51. ÖA2'nin 2. probleme ait çözümünden bir bölüm	59
Şekil 52. ÖA3'ün 2. probleme ait çözümünden bir bölüm	59
Şekil 53. ÖA3'ün 2. probleme ait çözümünden bir bölüm	60
Şekil 54. ÖA1'in 3. probleme ait çözümünden bir bölüm	60
Şekil 55. ÖA1'in 3. probleme ait çözümünden bir bölüm	60
Şekil 56. ÖA2'nin 3. probleme ait çözümünden bir bölüm	61
Şekil 57. ÖA3'ün 3. probleme ait çözümünden bir bölüm	61
Şekil 58. ÖA3'ün 3. probleme ait çözümünden bir bölüm	62
Şekil 59. ÖA4'ün 3. probleme ait çözümünden bir bölüm	62
Şekil 60. ÖA4'ün 3. probleme ait çözümünden bir bölüm	62
Şekil 61. ÖA1'in 4. probleme ait çözümünden bir bölüm	63
Şekil 62. ÖA2'nin 4. probleme ait çözümünden bir bölüm	64
Şekil 63. ÖA4'ün 4. probleme ait çözümünden bir bölüm	65
Şekil 64. ÖA1'in 1. probleme ait çözümünden bir bölüm	66
Şekil 65. ÖA1'in 2. probleme ait çözümünden bir bölüm	67
Şekil 66. ÖA1'in 2. probleme ait çözümünden bir bölüm	67
Şekil 67. ÖA1'in 2. probleme ait çözümünden bir bölüm	68
Şekil 68. ÖA4'ün 2. probleme ait çözümünden bir bölüm	68
Şekil 69. ÖA4'ün 2. probleme ait çözümünden bir bölüm	69
Şekil 70. ÖA1'in 4. probleme ait çözümünden bir bölüm	71
Şekil 71. ÖA2'nin 1. probleme ait çözümünden bir bölüm	72
Şekil 72. ÖA3'ün 1. probleme ait çözümünden bir bölüm	72
Şekil 73. ÖA2'nin 2. probleme ait çözümünden bir bölüm	72

Şekil 74. ÖA3'ün 2. probleme ait çözümünden bir bölüm	73
Şekil 75. ÖA1'in 3. probleme ait çözümünden bir bölüm	73
Şekil 76. ÖA2'nin 3. probleme ait çözümünden bir bölüm	73
Şekil 77. ÖA3'ün 3. probleme ait çözümünden bir bölüm	74
Şekil 78. ÖA4'ün 3. probleme ait çözümünden bir bölüm	74
Şekil 79. ÖA4'ün 1. probleme ait çözümünden bir bölüm	74
Şekil 80. ÖA1'in 2. probleme ait çözümünden bir bölüm	75
Şekil 81. ÖA2'nin 2. probleme ait çözümünden bir bölüm	75
Şekil 82. ÖA2'nin 2. probleme ait çözümünden bir bölüm	75
Şekil 83. ÖA4'ün 2. probleme ait çözümünden bir bölüm	76
Şekil 84. ÖA3'ün 3. probleme ait çözümünden bir bölüm	76
Şekil 85. ÖA2'nin 1. probleme ait çözümünden bir bölüm	78
Şekil 86. ÖA2'nin 1. probleme ait çözümünden bir bölüm	78
Şekil 87. ÖA3'ün 1. probleme ait çözümünden bir bölüm	79
Şekil 88. ÖA4'ün 1. probleme ait çözümünden bir bölüm	80
Şekil 89. ÖA2'nin 3. probleme ait çözümünden bir bölüm	81
Şekil 90. ÖA3'ün 3. probleme ait çözümünden bir bölüm	81
Şekil 91. ÖA3'ün 3. probleme ait çözümünden bir bölüm	82
Şekil 92. ÖA4'ün 3. probleme ait çözümünden bir bölüm	82
Şekil 93. ÖA1'in 4. probleme ait çözümünden bir bölüm	83
Şekil 94. ÖA2'nin 4. probleme ait çözümünden bir bölüm	83
Şekil 95. ÖA2'nin 4. probleme ait çözümünden bir bölüm	84
Şekil 96. ÖA2'nin 4. probleme ait çözümünden bir bölüm	84
Şekil 97. ÖA3'ün 4. probleme ait çözümünden bir bölüm	84
Şekil 98. ÖA3'ün 4. probleme ait çözümünden bir bölüm	85
Şekil 99. ÖA1'in 3. probleme ait çözümünden bir bölüm	86

<i>Şekil 100.</i> ÖA4'ün 4. probleme ait çözümünden bir bölüm	86
<i>Şekil 101.</i> ÖA4'ün 4. probleme ait çözümünden bir bölüm	87

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

MEB	Milli Eğitim Bakanlığı
TDK	Türk Dil Kurumu

BÖLÜM I

GİRİŞ

Bu bölümde; araştırmanın problem durumuna, problem cümlesine, alt problemlere, araştırmanın amacına, araştırmanın önemine, araştırmanın sayıltılarına ve sınırlılıklarına yer verilmiştir.

1.1 Problem Durumu

İnsanlığın var oluşundan itibaren insan ve düşünme birlikte anılmış ve insan düşünebilme yeteneği ile ön plana çıkarılmıştır. Düşünme, insanın doğasında olan ve onu diğer canlılardan ayıran bir yetidir (Fisher, 1990, s.4). Türk Dil Kurumu'na (TDK, 2018) göre düşünme, zihnin bir konuyla ilgili bilgileri karşılaştırarak, aralarındaki bağlantıları inceleyerek bir yargıya ya da karara varma etkinliği; zihinden geçirme ya da zihin yoluyla arayıp bulmadır. Günümüzde en çok kabul gören tarifi ile düşünme; bir sonuca varmak amacıyla bilgileri, kavramları incelemek, karşılaştırmak ve aralarında ilişkiler kurarak başka düşünceler üretme işlemidir. Bu işlemlerin neticesinde ortaya çıkan zihinsel ürüne de düşünce denmektedir (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2007).

Matematik, düşünmeyi geliştirdiği bilinen en önemli araçlardan biridir. Matematik, sayıları, işlemleri öğretmekten, günlük yaşamın vazgeçilmez bir parçası olan hesaplama becerilerini kazandırmaktan öte bir işlev üslenmekte, her geçen gün biraz daha karmaşılaşan yaşam savaşında ayakta kalmamızı sağlayan düşünme, olaylar arasında bağ kurma, akıl yürütme, tahminlerde bulunma, problem çözme gibi önemli destekler sağlamaktadır (Umay, 2003).

İnsanlar yaşamlarının her aşamasında, karşılaştıkları durumları çözmede farkında olarak veya olmayarak matematiksel düşünmeyi kullanırlar. Yani matematiksel düşünme yalnızca

matematikçilerin değil, günümüzde bütün insanların yaşam boyu kullandıkları bir düşünme biçimidir (Bilitzer, 2003, s.7). Gerçek hayat problemlerinin çözümünde, kaçınılmaz olarak kullanılan matematiksel düşünme, matematik eğitiminde önemli bir yere sahiptir, bundan dolayı matematik eğitiminin önemli amaçları arasında yer almaktadır (Stacey, 2006).

Schoenfeld'e göre (1992) matematiksel düşünme, matematiksel bakış açısının gelişimi ile dünyaya bir matematikçi gözüyle bakmak anlamındadır (s.19). Henderson vd. (2002) matematiksel düşünmeyi, problemlerin çözümünde açık olarak veya olmayarak matematiksel tekniklerin, kavramların ve süreçlerin uygulanması olarak tanımlamaktadır. Matematiksel düşünme bizim anlamamızı genişleten, karmaşık fikirlerin üstesinden gelme becerimizi arttıran dinamik bir süreçtir (Keith, 2000). Cai'ye (2002) göre matematiksel düşünme; düşünceleri anlama, aralarındaki ilişkileri keşfetme, ilişkilerin temellerini belirleme veya destekleme ve bu düşünceleri içeren problemleri çözme becerisidir.

Matematiksel düşünme, problemlerin dikkatli bir şekilde çözülmesi, elde edilenlerin deneyimlere aktarılması, düşünülenlerle uygulamalar arasında bağlantı kurulması, problem çözme süreçleri üzerinde uygulamalar yapılması ve matematikle gerçek hayat arasındaki ilişkinin anlaşılmasıyla geliştirilebilir (Keith, 2000). Problem çözme uygulamalarıyla, öğrencilerin matematiksel bilgiyi kullanma, hipotez oluşturma, test etme, bulunan sonuçların doğruluğunu kontrol etme, farklı çözüm yolları bulma, soyutlama ve ikna etme gibi becerileri gelişir (MEB, 2009). Dolayısıyla problem çözmenin var olduğu her durumda matematiksel düşünme de gerçekleşmektedir (Yeşildere, 2006, s.11). Matematiksel düşünme, problem çözme sürecinde problemin cevabının ne olduğundan öte, problemin çeşitli boyutlarıyla ele alınıp incelenmesiyle geliştirilebilir (Ferri, 2003). Bu bakımdan, problem çözme sürecindeki matematiksel düşünme becerilerinin incelenmesi önemlidir. Bundan dolayı bu çalışmada bir problemin çözüm sürecinde matematik öğretmen adaylarının matematiksel düşünme süreçlerinin özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve ispatlama boyutları bağlamında incelenmesine karar verilmiştir. Yapılan araştırmalar incelendiğinde matematiksel düşünme süreçlerine yönelik çalışmaların çoğunlukla ortaokul ve ortaöğretim düzeyindeki öğrencilere odaklanmış olduğu (Arslan & Yıldız, 2010; Göl, 2017; Keskin, Akbaba Dağ & Altun, 2013; Kükey, 2018; Yağdır, 2018; Yıldırım, 2015) ve üniversite düzeyindeki araştırmaların sayısında eksiklik olduğu görülmüştür. Literatürdeki bu boşluğu doldurmak amacıyla bu çalışmada matematik öğretmen adaylarının matematiksel düşünme süreçlerine odaklanılmıştır.

1.2 Araştırmanın Amacı

Bu çalışmanın amacı matematik öğretmen adaylarının problem çözme süreci boyunca matematiksel düşünme süreçlerini özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve ispatlama boyutları bağlamında incelemektir.

1.3 Araştırmanın Problem Cümlesi ve Alt Problemler

Bu çalışmada “Matematik öğretmen adaylarının problem çözerken matematiksel düşünme süreçleri nasıldır?” sorusuna cevap aranması planlanmaktadır. Ayrıca bu çalışmanın alt problemleri şu şekildedir:

1. Matematik öğretmen adaylarının problem çözerken özelleştirme süreçleri nasıldır?
2. Matematik öğretmen adaylarının problem çözerken genelleme süreçleri nasıldır?
3. Matematik öğretmen adaylarının problem çözerken varsayımda bulunma süreçleri nasıldır?
4. Matematik öğretmen adaylarının problem çözerken ispatlama süreçleri nasıldır?

1.4 Araştırmanın Önemi

Matematiksel düşünme, matematik eğitiminin temelini oluşturmaktadır (Stacey, 2006). Matematiksel düşünmenin; var olan fikirleri anlama, düşünceler arasındaki ilişkileri keşfetme ve ilişkilerin dayandıkları temelleri ifade etme (Lutfiyya, 1998) olduğu göz önüne alındığında, öğrencilerin matematiksel düşüncelerinin geliştirilmesi ve değerlendirilmesi anahtar bir konuma gelmektedir (Kükey, 2018, s.7).

Matematik eğitimi üzerine yurt içinde ve yurt dışında yapılan araştırmalar matematiksel düşünmenin önemini vurgulamaktadır (Alkan & Bukova Güzel, 2005; Arslan & Yıldız, 2010; Keskin, Akbaba Dağ & Altun, 2013; Stacey, 2006). Arslan ve Yıldız (2010) yaptıkları çalışma sonucunda ilköğretimden üniversite düzeyine kadar öğrencilerde matematiksel düşünmenin daha derinlemesine araştırılması gerektiğini ifade etmiştir. Tuncay (2015) ise öğrenciler ve öğretmen adayları ile matematiksel düşünmenin özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve ispat boyutlarına yönelik çalışmalar yapılması gerektiğini vurgulamıştır (s.174). Yapılacak olan bu çalışma, matematik öğretmen adaylarının matematiksel düşünme süreçlerini incelenmesini amaçlaması açısından oldukça önemli bir

yere sahiptir. Bu çalışma matematik öğretmen adaylarının matematiksel düşünme süreçlerini; özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve ispatlama boyutları bağlamında detaylı bir şekilde incelemeyi amaçlaması açısından bu konuda verimli veriler elde ederek literatüre katkı sağlayabilir. Bu çalışma matematiksel düşünmenin ne olduğu, matematiksel düşünmenin boyutlarının neler olduğu hakkında bilgi vermesi açısından önem taşımaktadır. Ayrıca bu çalışmanın bulgularının öğrencilerine matematiksel düşünme becerisi kazandırmak ya da öğrencilerinin var olan matematiksel düşünme becerilerini geliştirmek isteyen öğretmenlere katkı sağlamayı amaçlaması bakımından önemlidir. Matematiksel düşünmenin özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve ispatlama boyutlarına yönelik çalışmalar incelendiğinde katılımcıları öğretmen adayları olan sınırlı sayıda çalışmaya rastlanmıştır. Bu çalışmanın bu alandaki eksikliği gidermeyi amaçlaması bir diğer önemli noktadır.

1.5 Araştırmanın Sınırlılıkları

Bu araştırmanın sınırlılıkları şu şekildedir:

1. Araştırma, İç Anadolu Bölgesinin bir ili olan Ankara ilinde bulunan bir üniversitenin Matematik Eğitimi Anabilim Dalında öğrenim gören öğretmen adayları ile sınırlıdır.
2. Bu çalışmada matematik öğretmen adaylarının matematiksel düşünme süreçlerinin incelenmesi, çalışmada kullanılan problemler ile sınırlıdır.
3. Araştırmanın sonuçları bu çalışmaya katılan öğretmen adaylarının verileri ile sınırlıdır.

1.6 Araştırmanın Varsayımları

Bu araştırmanın varsayımları şu şekildedir:

1. Araştırmanın katılımcıları olan matematik öğretmen adaylarının veri toplama araçları ile kendilerine yöneltilen sorulara dürüst ve samimi bir şekilde cevap verecekleri düşünülmektedir.
2. Araştırmacının araştırma sürecinde objektif ve önyargılı davranmayacağı düşünülmektedir.

3. Araştırmanın kavramsal çerçevesini oluşturmak için taranacak kaynakların güvenilir ve yeterli bilgi vereceği varsayılmıştır.
4. Görüşme soruları için başvuru uzman kişiler, görüşlerini objektif ve samimi bir şekilde ifade edeceği varsayılmıştır.

1.7 Tanımlar

Matematiksel Düşünme: Problemlerin çözümünde matematiksel tekniklerin, kavramların ve süreçlerin doğrudan ya da dolaylı olarak uygulanmasıdır (Henderson vd., 2002).

Özelleştirme: Bir genellemeye ulaşmayı sağlayacak kanıtları bir araya getirme işlemidir. Başka bir deyişle özelleştirme örnekleri problem durumunu anlamak için rastgele, genellemeye zemin oluşturmak için sistematik bir şekilde ve genellemeyi test etmek için ustaca seçmek anlamındadır (Mason, Burton & Stacey, 2010, s.4).

Genelleme: Bireylerin matematiksel düşünme ve problem çözme ile elde ettikleri verileri, veriler arasındaki ilişkilere dayalı olarak birkaç örnekten hareketle daha genel ve kapsamlı olarak uygulanması amacıyla yeniden ifade edilmesi, genişletilmesidir (Mason, Burton & Stacey, 2010, s.8).

Varsayımda Bulunma: Belirli bir yargıda bulunmadan önce gerekli örnekler incelenip, bu örnekler arasındaki bağıntı ve ilişkilerin keşfedilerek, mevcut bağıntılar ve ilişkilerden sonuca varma sürecidir (Burton, 1984).

İspatlama: Bir yargı, sav ya da sonucun doğruluğunu yeterli kanıt göstererek kabul ettirme çabasıdır (Yıldırım, 2018, s.102).

BÖLÜM II

KAVRAMSAL ÇERÇEVE

Bu bölümde, araştırma ile ilgili kavramsal çerçeveye ait bilgilere, matematiksel düşünme ile ilgili yurt içinde ve yurt dışında yapılmış olan çalışmalara yer verilmiştir.

2.1 Matematik

Körlerin dokunarak tanımlamaya çalıştıkları fil gibi: matematik, kimisine göre kuralları belli satranç türünden bir zeka oyunu; kimisine göre sayı türünden soyut nesneleri konu alan bir bilim; kimisine göre bilim ve pratik yaşam için yararlı bir hesaplama tekniği. Matematik sayı, nokta, küme, fonksiyon türünden soyut nesnelere özgü özellikleri ortaya çıkarma, belirleme ve mantıksal olarak kanıtlama bilimidir (Yıldırım, 2018, s.13). Matematik sadece sayıları, işlemleri öğretmekten, hesaplama becerilerini kazandırmaktan ziyade her geçen gün biraz daha zorlaşan yaşamda düşünme, olaylar arasında ilişki kurma, tahminde bulunma, akıl yürütme, problem çözme gibi önemli becerileri kazandırarak bireye destek olmaktadır (Umay, 2003).

TDK'de (2018) matematik; biçim, sayı ve çoklukların yapılarını, özelliklerini ve aralarındaki bağıntıları mantık yoluyla inceleyen, aritmetik, cebir, geometri gibi dallara ayrılan bilim kolu olarak tanımlanır. Matematik; sayı, nicelik, geometrik şekil, anlatım, işlem vb. soyut varlıkların özelliklerini ve aralarındaki bağıntıları mantık yöntemleriyle inceleyen bilim dalıdır (Tuncer, 1995, s.52).

Baykul (2002) matematiği, günlük yaşamdaki problemleri çözmede başvurulmuş sayma, hesaplama, ölçme ve çizme işlemleri; bazı sembolleri kullanan bir dil; insanda mantıklı düşünmeyi geliştiren mantıksal bir sistem; dünyayı anlamada ve yaşanan çevreyi

geliştirmede kullanılan bir araç olarak tanımlamıştır (s.19). Matematik, insanoğlunun karşılaştığı problemleri çözmek amacıyla kullandığı düşünceler sistemidir (Ardahan, 1990).

Yapılan tanımlar göz önüne alındığında matematik kendine özgü bir dili olan evrensel bir düşünme aracıdır.

2.2 Düşünme

TDK'de (2018) düşünme; duyum ve izlenimlerden, tasarımlardan ayrı olarak aklın bağımsız ve kendine özgü eylemi; karşılaştırmalar yapma, ayırma, birleştirme, bağlantıları ve biçimleri kavrama yetisi olarak tanımlanmıştır. Yıldırım (2018) düşünmeyi, hangi konuda ya da düzeyde olursa olsun bir sorun ya da problem çözme etkinliği olarak ifade etmiştir (s.43). Özden (2011) ise düşünmeyi eldeki bilgilerden farklı bilgilere ulaşma veya eldeki bilgilerin ötesine geçme olarak tanımlamıştır (s.139). Kazancı (1989) düşünmeyi; bireyi iç ya da dış etmenler bakımından rahatsız eden, bireyin dengesini bozan olayların giderilmesi için girişilen kasıtlı zihinsel davranışlar olarak tanımlamaktadır (s.12). Cevizci (2000) ise düşünmeyi; kişinin öğrenme süreci içinde kazandığı kavramlar, kullandığı imgeler, düşünce ve hareketler, sözcük ve terimler gibi simgeler aracılığıyla gerçekleştirilen zihinsel faaliyet olarak tanımlamıştır (s.104).

Solso, Maclin ve Maclin (2007) düşünmeyi bilginin işlendiği içsel bir süreç olarak görmektedirler (s.13). Düşünme süreci, bireylerin kişisel gözlem, deneyim ve duyularıyla ulaştıkları bilgileri kavramsallaştırması, analiz etmesi, değerlendirmesi ve farklı durumlara uygulaması için gerçekleştirdiği zihinsel bir etkinlik olarak da görülmektedir (Saban, 2004, s.159).

Yapılan tanımlar göz önüne alındığında düşünmenin, süreç sonunda elde edilen verilerden ziyade verilerin nasıl elde edildiği ve süreç boyunca nelerin kullanıldığı vurgulanmaktadır.

2.3 Matematiksel Düşünme

Bir sorun veya problemi çözme aşamasında doğruya ulaşma çabası olarak tanımlanan matematiksel düşünme (Yıldırım, 2018, s.54); yalnızca matematikçilere özgü olan bir düşünme biçimi değil, her alandaki bireylerin kullanabileceği düşünme biçimidir (Alkan & Bukova Güzel, 2005). Dolayısıyla bireyler, yaşamlarının her aşamasında karşılaştıkları olay

ve olguları çözümlemede, farkında olarak ya da olmayarak, matematiksel düşünmeyi kullanırlar (Arslan & Yıldız, 2010).

Polya (1973) matematiksel düşünmeyi; olay ve olguları araştırma, onlarla denemeler yapma, tahminlerde bulunma, hipotezler kurma ve bunları test etme, veri toplama, verileri analiz etme süreci olarak tanımlar (s.17). Schoenfeld'e (1992) göre matematiksel düşünme, matematiksel bakış açısının gelişimi ile dünyaya bir matematikçi gözüyle bakmaktır (s.19). Keith (2000) ise matematiksel düşünmeyi bireyin düşünce dünyasını genişleten, karmaşık fikirler arasındaki ilişkileri görme becerilerini arttıran dinamik bir süreç olarak tanımlar. Cai'ye (2002) göre matematiksel düşünme; düşünceleri anlama, aralarındaki ilişkileri keşfetme, ilişkilerin temellerini belirleme veya destekleme ve bu düşünceleri içeren problemleri çözme becerisidir. Henderson vd. (2002) ise matematiksel düşünmeyi, problemlerin çözümünde açık olarak veya olmayarak matematiksel tekniklerin, kavramların ve süreçlerin uygulanması olarak tanımlamaktadır. Alkan ve Bukova Güzel'e (2005) göre matematiksel düşünme gereksinimlerin karşılanmasında kullanımı ve problemlerin çözümünde üretken olması ile yarar sağlayan nitelikteki düşünmedir. Liu ve Niess (2006) matematiksel düşünmeyi; tahmin etme, tümevarım, tümdengelim, özele indirgeme, genelleme, analogi, muhakeme etme ve doğrulamayı içeren karmaşık süreçlerin bir birleşimi şeklinde tanımlamaktadır. Mason, Burton ve Stacey'e (2010) göre matematiksel düşünme, üstesinden geldiğimiz düşüncelerimizi birleştirerek karmaşık yapıları anlamamızı kolaylaştıran dinamik bir süreçtir (s.144).

Matematiksel düşünme verileri, durumları, nesneleri matematiksel mantıkla yargılayabilme becerisidir. Matematiksel düşünme bir süreç işidir. Bu sürecin girdilerine baktığımızda; düşünen kişi, sorun, sorun ile ilgili veriler ve verileri yorumlama yöntemi (düşünme tekniği) vardır. Bu girdiler niteliksel olarak ne kadar yeterli ise matematiksel düşünme o düzeyde nitelikli olur. Matematiksel düşünme kuralları belli salt dedüktif çıkarımlardan ibaret değildir; her aşamada kişinin deneyim, sezgi, yaratıcı imgelem ve zeka gücünü gerektirir (Yıldırım, 2018, s.54).

Yapılan tanımlar göz önüne alındığında, matematiksel düşünmenin bir süreç olduğu vurgulanmaktadır. Matematiksel düşünme sürecinin bileşenleri; bilginin özüne ulaşmayı, matematiksel bakış açısına sahip olmayı, problem çözme stratejilerini kullanmayı, bireyin kendi bilgisini etkili kullanmasını, matematiksel etkinliklerle uğraşmayı hedef olarak belirlenmektedir (Schoenfeld, 1992, s.19).

Literatür incelendiğinde, farklı araştırmacıların matematiksel düşünmenin bileşenlerini ortaya koymaya çalıştıkları görülmektedir. Mason, Burton ve Stacey (2010) matematiksel düşünmeyi; özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma, doğrulama ve ikna etme olarak dört boyutta ele almaktadır (s.135). Tall (2002) matematiksel düşünmenin; soyutlama, sentezleme, genelleme, modelleme, problem çözme ve ispat olmak üzere altı boyuttan oluştuğunu belirtmektedir (s.11-19). Liu (2003) matematiksel düşünmenin bileşenleri; tahmin edebilme, tümevarım, tümdengelim, örnekleme, genelleme, analoji, formal ve informal olmayan usa vurma, doğrulamadır. Mubark (2005) matematiksel düşünmenin altı boyuttan oluştuğunu belirtmektedir. Bu boyutlar genelleme, tümevarım, tümdengelim, mantıksal düşünme, sembolleri kullanma, soyut düşünme şeklindedir (s.49).

Yukarıda bahsedilen çalışmalar incelendiğinde, matematiksel düşünmenin aynı bileşeni için farklı araştırmacıların eşanlamli kelimeler (doğrulama ve ikna etme / doğrulama ve inandırma / ispatlama gibi) kullandıkları ve matematiksel düşünmede daha çok özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve ispatlama bileşenlerin ön plana çıktığı görülmektedir. (Arslan & Yıldız, 2010). Bu nedenle bu çalışmada matematiksel düşünme süreci; özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve ispatlama boyutları bağlamında incelenecektir.

2.3.1 Özelleştirme

Özelleştirme, bir genellemeye ulaşmayı sağlayacak kanıtları bir araya getirme işlemidir. Başka bir deyişle özelleştirme örnekleri; problem durumunu anlamak için rastgele, genellemeye zemin oluşturmak için sistematik bir şekilde ve genellemeyi test etmek için ustaca seçmek anlamındadır (Mason, Burton & Stacey, 2010, s.4). Rastgele değer vererek özel durumları bulmak, problemin ne anlama geldiğini ya da verilen durumun doğru olup olmadığını belirlemek için faydalı olurken, sistematik değer vermek ise veriler arasındaki ilişkiyi görmede etkilidir (Mason, Burton & Stacey, 2010, s.4).

Özelleştirmede bir veya daha fazla örnek verme, bir örneği tanımlama, gösterme, anlatma, seçme, çizme veya bulma gibi eylemler söz konusudur. Ayrıca özelleştirmede verilen herhangi bir durum için karşıt veya ilgili örnek bulma, istenilenleri doğru bularak sonucu farklı şekillerde yazma gibi eylemler söz konusudur (Arslan & Yıldız, 2010).

2.3.2 Genelleme

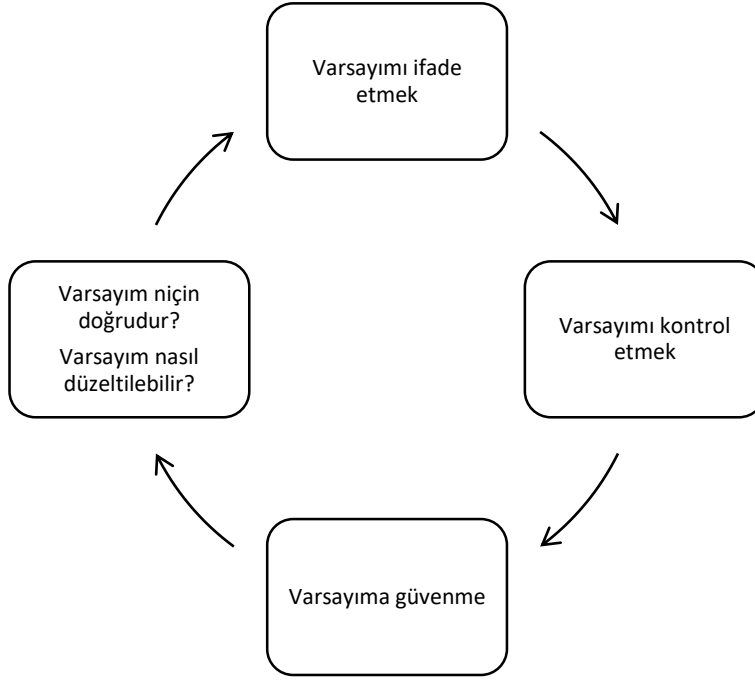
TDK'ye (2018) göre genelleme, zihnin birtakım gözlem ya da örneklerle dayanarak genel düşüncelere ulaşması ya da özelden genele geçişi olarak tanımlanır. Genelleme, bireylerin matematiksel düşünme ve problem çözme ile elde ettikleri verileri, veriler arasındaki ilişkilere dayalı olarak birkaç örnekten hareketle daha genel ve kapsamlı olarak uygulanması amacıyla yeniden ifade edilmesi, genişletilmesidir (Mason, Burton & Stacey, 2010, s.8). Yıldırım'a (2018) göre genelleme (hangi alanda olursa olsun) inceleme konusu bir ya da daha fazla nesne veya ilişkinin gözlemine dayanarak o nesne veya ilişkinin dahil olduğu tüm sınıf hakkında doğruluk savı taşıyan bir yargıdır (s.49). Carraher, Martinez ve Schliemann (2008) matematiksel genellemeyi, bazı özellik ya da tekniklerin, matematiksel kavramların ya da durumların genişletilmiş kümesi için de geçerli olması şeklinde ifade eder.

Matematiksel genellemelerde belli sayıdaki adımlardan yola çıkarak iddia hakkında karar verilmeye çalışılır. Bu durum, genelleme sırasında özelleştirme işleminin de yapıldığını göstermektedir (Arslan & Yıldız, 2010).

2.3.3 Varsayımda Bulunma

Varsayım, mantıklı görünen ancak doğruluğu henüz kanıtlanmamış bir durumdur. TDK'de (2018) varsayım, deneylerle henüz yeter derecede doğrulanmamış ancak doğrulanacağı umulan teorik düşünce, faraziye, hipotez olarak tanımlanır. Varsayımda bulunma ise belirli bir yargıda bulunmadan önce gerekli örnekler incelenip, örnekler arasındaki bağıntı ve ilişkiler keşfedilerek, mevcut bağıntılardan sonuca varma süreci olarak ifade edilmektedir (Burton, 1984). Arslan ve Yıldız'a (2010) göre özelleştirme ve genelleme süreçlerinde kendiliğinden ortaya çıkan varsayımda bulunma bir önermenin doğru olabileceğini tahmin ederek doğruluğunu araştırma sürecidir. Varsayımda bulunma sırasında sözel veya matematiksel olarak tahminde bulunma, matematiksel iddiaları formüle etme, önermelerden sonuç çıkarma, hipotez kurma ve test etme gibi eylemler söz konusudur (Arslan & Yıldız, 2010).

Mason, Burton ve Stacey (2010); varsayımları ifade etme ve test etmenin, gerektiğinde değiştirmenin matematiksel düşünmenin bel kemiğini oluşturduğunu belirtmiş ve varsayımda bulunma sürecini döngüsel olarak açıklamıştır (s.59). Varsayımda bulunma döngüsü Şekil 1'de gösterilmiştir.



Şekil 1. Varsayım bulunma döngüsü

Bir varsayım ortaya atıldığında, öncelikle ustaca örneklerin seçimi yapılarak varsayımın doğru olup olmadığı incelenir. Ardından varsayım doğru ise süreç doğruluğunun gösterilmesi ile devam eder. Varsayım yanlış ise varsayım yeniden düzenlenir veya yeni bir varsayım ortaya atılarak döngü tekrarlanır.

2.3.4 İspatlama

İspat; bir yargı, sav ya da sonucun doğruluğunu yeterli kanıt göstererek kabul ettirme çabasıdır (Yıldırım, 2018, s.102). TDK'ye (2018) göre ispat, tanıt ve kanıt göstererek bir şeyin gerçek yönünü ortaya çıkarma, kanıtlama, tanıtılma, tanıt olarak tanımlanır. Edwards (1997) ispatı, sezgileri ve genellemeleri kesin iddialara dönüştüren, açık ve kesin bir dil ile ifade edilen ve bir matematik topluluğu tarafından kabul edilen süreçlerin bir kümesi olarak tanımlamıştır. Harel ve Sowder'a (1998) göre ispat, bireyin bir gözlemin doğruluğu hakkında şüphelerini ortaya çıkarmak veya ortadan kaldırmak için ortaya koyduğu süreçtir (s.241). Dede ve Karakuş'a (2014) göre matematiksel ispat, bir ifadenin ve önermenin doğruluğunun önceden bilinen bir veya birden fazla önermeyle ilişkilendirilmiş mantıksal birtakım çıkarımlar yardımıyla gösterilmesidir.

Bütün ispatların amacı iddia edilenin doğruluğunu ya da yanlışlığını kanıtlamaktır. Bu her durumda ve her koşulda iddianın doğru olduğunun gösterilmesi şeklinde olur. Başka bir deyişle iddianın, örüntünün bütün şartlarda genellenebilirliği gösterildiğinde ispat tamamlanmış olur (Baki, 2015, s.37). İspatlama süreci, bir genellemenin kişiselden evrensele geçişi anlamına gelmektedir (Burton, 1984).

Baki (2015) ispatların doğrulama, açıklama ve soyutlama aşamalarından oluştuğunu ifade etmiştir. Doğrulama aşamasında öne sürülen iddianın doğruluğu araştırılır. Açıklama aşamasında, iddianın neden doğru olduğunun açıklaması yapılır. Soyutlama aşamasında ise matematiksel bir dil kullanılarak ve genelleme koşulları kontrol edilerek en kısa yoldan soyutlama yapılır (s.38). Benzer şekilde Lee (2002), ispat sürecinde üç farklı ve birbiri ile yakından ilişkili süreçlerin olduğunu ifade etmiştir. Bu süreçler; ispatı yapılacak şeyin araştırılması, ispatın düzenlenmesi ve ispatın diğer kişilere açıklanması olarak sıralanabilir. İspatı yapmak için bir matematikçi, önce eldeki problem ya da ifadeyi analiz eder, daha önce yapılmış ispata da bakarak ifadenin doğru olup olmadığını araştırır ve daha önceden ispatlanmış teoremlerden hareketle nasıl türetilebileceğini inceler. Bu süreç ispatın yapılması ya da ifadenin yanlış olduğunun gösterilmesiyle biter (Lee, 2002). Furinghetti ve Morselli (2009) ispatlama sürecinin problem çözmenin özel bir durumu olduğunu ifade etmiş ve ispat yapma sürecinde Polya'nın (1973, s.5) problemi anlama, bir plan geliştirme, planı uygulama ve kontrol adımlarının izlenilebileceğini belirtmiştir.

2.4 İlgili Araştırmalar

Umay (1992) çalışmasında, matematikte problemlerini çözmede izleme testleri ile doğrudan sonucun yoklandığı testleri karşılaştırarak sürecin ölçülmesinin sonucun ölçülmesinden farklı davranışlar ortaya çıkarıp çıkarmayacağını incelemiştir. 81 lise öğrencisi ile yürütülen çalışmada, biri bir problemi süreç aşamasında diğeri aynı problemi sonuç aşamasında yoklayan iki test kullanılmıştır. Elde edilen verilerin analizi sonucunda, süreç aşamasını yoklayan ölçme aracının öğrencilere daha zor geldiği belirlenmiştir. Ayrıca problem çözmede sürecin yoklanması, sonucun yoklanmasına göre farklı davranışlar ortaya çıkarmadığı görülmüştür.

Lutfiyya (1998) çalışmasında, lise öğrencilerinin matematiksel düşünme düzeylerinin sınıf ile cinsiyet açısından nasıl değiştiğini incelemiştir. 239 lise öğrencisi ile yürütülen çalışmada elde edilen verilerin analizi sonucunda sınıf düzeyi arttıkça öğrencilerin matematiksel

düşünme seviyelerinin arttığı belirlenmiştir, ancak 11. sınıf öğrencilerin 12. sınıf öğrencilerine göre daha yüksek oranda matematiksel düşünme düzeyine sahip olduğu belirlenmiştir. Ayrıca, matematiksel düşünme ile cinsiyet değişkeni arasında herhangi bir ilişkinin olmadığı görülmüştür.

Cai (2000) çalışmasında, Amerika ve Çin'deki 6. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme ve akıl yürütme becerilerini incelemiştir. Öğrencilerin 6 açık uçlu ve 6 kapalı uçlu problemlere vermiş oldukları cevapların analizi sonucunda, kapalı uçlu problemlerde Çin öğrencilerinin Amerika'daki öğrencilere göre daha yüksek puan aldıkları, açık uçlu problemlerde ise Amerika'daki öğrencilerin daha yüksek düzeyde çözdükleri belirlenmiştir. Veriler nitel olarak analiz edildiğinde Çinli öğrencilerin rutin algoritmaları ve sembolik temsilleri kullanmayı Amerikalı öğrencilerin ise somut görsel ifadeleri kullanmayı tercih ettikleri belirlenmiştir.

Cai (2003) çalışmasında, Singapurlu 4, 5 ve 6. sınıf öğrencilerin problem çözme süreçlerindeki matematiksel düşüncelerini incelemiştir. Elde edilen verilerin analizi sonucunda bütün sınıf düzeyindeki öğrencilerin uygun çözüm stratejileriyle problemleri çözdükleri belirlenmiştir. Ayrıca sınıf seviyesi arttıkça problemleri doğru cevaplama oranının da arttığı görülmüştür. Sınıflar arasındaki istatistiksel farklılık incelendiğinde ise dört ve beşinci sınıflar arasında anlamlı farklılık görülürken, beş ve altıncı sınıflar arasında anlamlı bir farklılık tespit edilmemiştir.

Pape, Bell ve Yetkin (2003) tarafından yapılan çalışmada, ortaokul matematik sınıfında öğrencilerin matematiksel düşünme ve öz denetimlerinin gelişimini destekleyen bağlamları tanımlayabilme amaçlanmıştır. Bu amaçla yedinci sınıf matematik sınıflarında bir matematik öğretmeni, üniversitede bir akademisyen ve bir ortaokul sınıfındaki öğrencilerin matematiksel düşüncelerini ve öz denetimlerini geliştirmek amacıyla işbirliği yapılmıştır. Bu gelişimde; çoklu ifade etme ve zengin matematik ödevleri, sınıf içi söylemler, stratejik davranış platformu ve anlaşılabilirlik ve destek ihtiyacı gibi bazı faktörlerin büyük öneme sahip olduğu belirlenmiştir.

Alkan ve Bukova Güzel (2005) tarafından yapılan çalışmada, matematik öğretmen adaylarının matematiksel düşünme gelişimini ölçmek amaçlanmıştır. 64 birinci sınıf öğretmen adayı ile yürütülen çalışmada elde edilen verilerin analizi sonucunda, öğretmen adaylarının matematiksel düşünme düzeylerinin düşük olduğu belirlenmiştir.

Mubark (2005) çalışmasında, matematiksel düşünmenin önemli yönlerini tanımlamayı ve matematiksel düşünme ve matematik başarısı arasındaki ilişkileri ortaya koymayı amaçlamıştır. Ek olarak farklı sosyo-kültürel durumlarla matematiksel düşünme ve matematik başarısı arasındaki ilişkiyi belirlemeyi amaçlamıştır. Araştırmada veriler araştırmacı tarafından geliştirilen bir matematiksel düşünme ve başarı testi aracılığı ile 500 11. sınıf öğrencisinden elde edilmiştir. Çalışmada matematiksel düşünmenin altı boyutu; genelleme, tümevarım, tümdengelim, sembollerin kullanımı, mantıksal düşünme ve matematiksel ispat şeklinde tanımlanmıştır. Elde edilen verilerin analizi sonucunda, öğrencileri en çok zorlayan boyutun matematiksel ispat; ulaşılması en kolay olan boyutun mantıksal düşünme olduğu kanısına varılmıştır. Ayrıca kız öğrenciler 6 boyutun üçünde ve testlerin genelinde daha yüksek puanlar elde ederken şehirden uzak yerlerdeki başarı oranları kentlerdeki ve kırsal alanlardaki okullarda 4 boyutta ve test genelinde daha yüksek olduğu gözlemlenmiştir. Buna ek olarak, matematiksel ispat ve genelleme boyutlarında bulunan sorulara cevap veren öğrenci sayısı az iken sembollerin kullanımı ile mantıksal düşünme boyutlarında bulunan soruları cevaplayan öğrenci sayısı ise daha fazla olduğu saptanmıştır.

Yeşildere (2006) çalışmasında, farklı matematiksel güce sahip ilköğretim altı, yedi ve sekizinci sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme ve bilgi oluşturma süreçlerini incelemiştir. 798 ortaokul öğrencisi ile yürütülen çalışmada elde edilen verilerin analizi sonucunda, öğrencilerin matematiksel güçlerinin düşük olduğu belirlenmiştir. Bu duruma neden olan faktörler öğrencilerin verilerden hareketle değil öznel görüşlerine dayanarak akıl yürütmeleri, düşüncelerini kanıtlar sunarak ve açıklamalar yaparak ifade edememeleri ve verilenler arasında ilişkilendirme yaparak problemleri çözememeleri olarak özetlenmiştir. Farklı matematiksel güce sahip öğrencilerin matematiksel düşünme ve bilgi oluşturma süreçlerinde izledikleri yollarda farklılıkların olduğu tespit edilmiş. Düşük matematiksel güce sahip öğrencilerin bilgi oluşturmada yavaş ve sorunlu bir süreçten geçerken; yüksek matematiksel güce sahip öğrencilerin önceden oluşturulan bilgileri tanımda, kullanmada ve oluşturmada daha başarılı olduğu görülmüştür.

Yeşildere ve Türnüklü (2007) tarafından yapılan çalışmada, ilköğretim sekizinci sınıftan mezun öğrencilerin matematiksel düşünme ve akıl yürütme süreçleri incelenmiştir. 262 öğrencinin verileri nicel ve nitel veri çözümleme teknikleri kullanılarak incelenmiştir. Açık uçlu problemlerin analizi ile elde edilen veriler doğrultusunda öğrencilerin problem çözmede matematiksel bilgilerle ilişkilendirme yapmada ve mantıksal akıl yürütmede sorun

yaşadıkları belirlenmiştir. Bu duruma neden olan faktörler ise öğrencilerin verilenlerden hareketle değil öznel görüşlerine dayanarak akıl yürütmeleri, düşüncelerini kanıtlar sunarak ve açıklamalar yaparak ifade edememeleri ve verilenler arasında ilişkilendirme yaparak problemleri çözmemeleri olarak özetlenmiştir.

Bukova Güzel (2008) çalışmasında, yapılandırmacı öğrenme yaklaşımının matematik öğretmen adaylarının matematiksel düşünme süreçlerine olan etkisini incelemiştir. Araştırma kontrol gruplu ön test-son test modeline dayalı yarı deneysel bir çalışma olarak yürütülen bu çalışmada öğretmen adaylarının matematiksel düşüncelerinin karşılaştırılmasında açık uçlu problemler kullanılmıştır. Elde edilen verilerin analizi sonucunda yapılandırmacı öğrenme yaklaşımının matematiksel düşünme sürecine olumlu etkide bulunduğu görülmüştür. Genelleme, tahmin etme, hipotezleri doğrulamak için matematiksel modeller oluşturma ve bunlar arasında ilişki kurma yönünden deney grubunun kontrol grubuna göre daha başarılı olduğu tespit edilmiştir.

Taşdemir (2008) çalışmasında, yapılandırmacı öğrenme temelli matematiksel düşünme etkinliklerini içeren öğretim ile yapılandırmacı öğrenme ve normal öğretimini devam ettiren grupların akademik başarı, tutum ve problem çözme becerileri üzerine etkilerini incelemiştir. Ayrıca matematiksel düşünme becerileri farklı düzeydeki öğrencilerin problem çözme yaklaşımları ve problem çözümlerindeki hata kaynakları belirlemeye çalışmıştır. Elde edilen verilerin analizi sonucunda, matematiksel düşünme etkinliklerini içeren yapılandırmacı temelli öğretimin öğrencilerin akademik başarılarını, tutumlarını ve problem çözme becerilerini geliştirmede ve bunun devamının sağlanmasında önemli bir etkisinin olduğu belirlenmiştir. Bunun yanında deney grubu öğrencilerinin kavramsal bilgi, işlemsel bilgi, akıl yürütme ve stratejileri ve iletişim becerilerini yüksek düzeyde kullandıkları ve bu becerilerinin birbirini destekler nitelikte olduğu tespit edilmiştir. Fen ve Teknoloji dersi problemlerinde matematiksel süreçleri yüksek düzeyde kullanan öğrenciler problem çözme süreçlerini etkin olarak kullanmışlardır. Problemlerde matematiksel süreçleri orta ve düşük düzeyde sergileyen öğrenciler, problemi kısmen tanıyıp belirlemişler, problemin çözümünde büyük kavram ve hesap hataları yapmışlar ve matematiksel akıl yürütme ve formülasyon kullanmadan sezgisel çözüm kullanarak sonuca ulaşmışlardır. Fen problemlerinde matematiksel süreçleri gösteremeyen öğrencilerin ise bilgiyi düzenleme ve matematik kavramları arasındaki ilişkiyi bulmaya yönelik belirgin çabalarının olmadığı görülmüştür.

Bulut (2009) çalışmasında, işbirliğine dayalı yapılandırmacı öğrenme ortamlarında kullanılan bilgisayar cebiri sistemlerinin, türev uygulamaları konusunun öğretiminde üniversite birinci sınıf öğrencilerinin akademik başarı, matematiksel düşünme, kavramsal anlama, işlemsel beceri, problem çözme becerileri ve cinsiyet farkı üzerindeki etkisini incelemiştir. Deney ve kontrol gruplarının oluşturulmasıyla elde edilen verilerin analizi sonucunda, deney grubu öğrencilerinin kontrol grubu öğrencilerine göre daha başarılı oldukları belirlenmiştir. Ayrıca grupların kavramsal anlama ve problem çözme becerisini gerektiren sorularda birbirine yakın ortalamalara ulaştıkları, işlemsel becerileri ölçen sorularda ise bilgisayar cebiri sistemleri desteğinden yararlanan deney grubu lehine anlamlı bir farklılık olduğu tespit edilmiştir. Öğrencilerin matematiğe yönelik tutumları incelendiğinde ise deney ve kontrol grubunun arasında az bir fark olsa da istatistiksel olarak matematiğe yönelik tutumlarının aynı kaldığı görülmüştür. Bilgisayar cebiri sistemleri desteğinin matematiğe yönelik tutuma anlamlı düzeyde olumlu bir etkisinin olmadığı belirlenmiştir. Sonuçlara bakıldığında, türev kavramının uygulamalarının öğretiminde bilgisayar cebiri sistemleri destekli öğretimin, öğrencilerin akademik başarılarını, işlemsel becerilerini ve matematiksel düşüncelerini pozitif yönde etkilediği saptanmıştır.

Arslan ve Yıldız (2010) tarafından yapılan çalışmada, nitel araştırma yaklaşımı kullanarak 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve ispatlama aşamalarıyla ilgili yaşantılarını ortaya çıkarmayı amaçlamıştır. 24 lise öğrencisi ile yürütülen bu çalışmada veri toplama aracı olarak kullanılan çalışma yapraklarından elde edilen verilerin analizi sonucunda, matematiksel düşünmenin aşamaları ilerledikçe öğrenci başarısının düştüğü belirlenmiştir. Bu bağlamda, öğrencilerin özelleştirmede iyi performans sergiledikleri, ispatlamada ise büyük sıkıntı çektikleri tespit edilmiştir. Buna ek olarak; genelleme ve varsayımda bulunma aşamalarında öğrencilerin cevaplarının sözel ve cebirsel, ispatlama aşamasında ise aritmetik, geometrik ve cebirsel kodları altında toplandıkları belirlenmiştir.

Başaran (2011) çalışmasında; üniversite öğrencilerinin çalışma alışkanlıklarını, öz yeterlik algılarını, problem çözme stratejilerini, demografik profillerini, matematiksel düşünme ve akıl yürütme yetkinliklerini incelemiştir. Bu bağlamda, hazırlanan ölçme araçlarının faktör yapısının cinsiyete, farklı bölgelere ve sınıf düzeyine göre farklılıkları araştırılmıştır. Elde edilen verilerin analizi sonucunda ise kızların erkeklere göre daha fazla anlamaya odaklı olduğu; üniversite üçüncü, dördüncü ve beşinci sınıf öğrencilerinin ikinci sınıf öğrencilerine

göre düzensiz çalışma alışkanlıklarını daha sık kullandığı saptanmıştır. Ayrıca, üniversite dördüncü ve beşinci sınıftaki öğrencilerin ikinci ve üçüncü sınıftaki öğrencilere göre matematiksel düşünme ve akıl yürütme becerileri açısından daha başarılı olduğu belirlenmiştir. Buna ek olarak birinci sınıf öğrencilerinin ileri düzey becerilerde ikinci sınıf öğrencilerine göre daha iyi performans gösterdikleri saptanmıştır. Aynı zamanda Ankara'daki öğrencilerin Kuzey Kıbrıs'taki öğrencilere göre matematiksel düşünme ve akıl yürütme becerileri açısından daha başarılı oldukları belirlenmiştir.

Coşkun (2012) çalışmasında, matematik öğretmen adaylarının üst düzey matematiksel düşünme süreçlerinin ne düzeyde gerçekleştiğini belirlemeyi amaçlamıştır. Araştırma hem nitel hem de nicel yöntemlerin bir arada kullanıldığı karma bir desene sahiptir. 42 matematik öğretmen adayıyla yürütülen çalışmada, veriler sorgulayıcı problem çözme ve öğrenme modeline göre hazırlanmış çalışma yaprakları aracılığıyla elde edilmiştir. Elde edilen verilerin analizi sonucunda, öğretmen adaylarının üst düzey matematiksel düşünme süreçlerini yüksek düzeyde gerçekleştirmede en başarılı oldukları sürecin genelleme süreci olduğu görülmüştür. Ayrıca sentezleme ve soyutlama süreçlerinin yüksek düzeyde gerçekleştirilmesinde ise sorun yaşadıkları gözlenmiştir. Buna ek olarak, sorgulayıcı problem çözme ve öğrenme modelinin üst düzey matematiksel düşünmeyi destekler nitelikte olduğu sonucu elde edilmiştir.

Tataroğlu Taşdan, Çelik ve Erduran (2012) tarafından yapılan çalışmada, matematik öğretmen adaylarının matematiksel düşünme ve öğrencilerin matematiksel düşünmelerinin geliştirilmesi hakkındaki görüşlerini incelenmiştir. 4 matematik öğretmen adayı ile yürütülen çalışmada veriler yarı yapılandırılmış görüşme formu aracılığı ile toplanmıştır. Elde edilen verilerin analizi sonucunda; öğretmen adaylarının matematiksel düşünmenin geliştirilmesi için günlük hayatla ilişkilendirme, problem çözme, etkili soru sorma gibi konulara özen göstermeleri gerektiği görüşünde oldukları belirlenmiştir.

Keskin, Akbaba Dağ ve Altun (2013) tarafından yapılan çalışmada, sekizinci ve on birinci sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve ispatlama aşamalarındaki yaşantı farklılıklarını incelenmiştir. 14 sekizinci sınıf ve 11 on birinci sınıf öğrencisi ile yürütülen çalışmada 2 çalışma yaprağı ile veriler toplanmıştır. Elde edilen verilerin analizi sonucunda, sekizinci sınıf öğrencilerinin daha fazla olmakla birlikte her iki grubun da ispat aşamasına doğru ilerledikçe kendilerini hem matematiksel olarak hem de sözel olarak ifade etmekte zorlandıkları belirlenmiştir.

Kılıç, Tunç Pekkan ve Karatoprak (2013) tarafından yapılan çalışmada, 6. sınıf öğretim programında yer alan bazı konuların materyal destekli etkinliklerle pekiştirilmesinin öğrencilerin matematiksel düşünme becerisine etkileri incelenmiştir. 20 öğrenci ile yürütülen bu çalışmada, öğretim programı paralelinde çeşitli etkinlikler ve etkinlik yapılarından elde edilen verilerin analizi sonucunda öğrencilerin matematiksel düşünme becerilerinde değişiklikler olduğunu belirlenmiştir.

Öztürk (2013) çalışmasında; matematiksel düşünme odaklı öğretim uygulamasının, öğretmen adaylarının matematik öğretimini planlama becerilerine etkisini ve uygulamaya katılan öğretmen adaylarının görüşlerini incelemiştir. 40 ortaöğretim matematik öğretmen adayı ile yürütülen bu çalışmada elde edilen verilerin analizi sonucunda, matematiksel düşünme odaklı öğretim uygulamasının öğretmen adaylarının öğrencilerin matematiksel düşünmelerini dikkate alan planlar yapma becerilerine olumlu etkisinin olduğu belirlenmiştir. Ayrıca, çalışmaya katılan öğretmen adaylarının matematiksel düşünme odaklı dersler planlamada önemli olan özellikleri vurgulayan görüşler belirttikleri ve öğretim uygulaması hakkındaki görüşlerinin olumlu olduğu saptanmıştır.

Ersoy ve Güner (2014) tarafından yapılan çalışmada, sınıf öğretmenliği üçüncü sınıf adaylarının problem çözme becerileri ve matematiksel düşünme düzeyleri incelenmiştir. 46 öğrenci ile yürütülen bu çalışmada elde edilen verilerin analizi sonucunda; öğretmen adaylarının problem çözme becerilerinin geliştiği ve uygun stratejiyi seçebilme, uygulayabilme becerilerinde olumlu yönde artış olduğunu ortaya çıkarmıştır. Buna ek olarak, öğrencilerin problem çözme becerilerinin matematiksel düşünme üzerinde etkili olduğu saptanmıştır.

Tataroğlu Taşdan (2014) çalışmasında, matematik öğretmenlerinin pedagojik alan bilgilerini matematiksel düşünmeyi destekleme bağlamında geliştirmeyi amaçlayan bir öğretim tasarımı oluşturmayı amaçlamıştır. Bu amaç doğrultusunda matematiksel düşünmenin bileşenleri belirlendikten sonra hazırlanan öğretim tasarımının öğretmenlere uygulama öncesi ve sonrasında öğretmenlerin matematiksel düşünmeyi destekleyen işlenişe ne ölçüde ve ne kapsamda yer verdikleri ve matematiksel düşünmeye yönelik görüşleri belirlenmeye çalışılmıştır. 6 matematik öğretmeni ile yürütülen çalışmada veri toplama aracı olarak gözlem, görüşme ve yazılı dokümanlar kullanılmıştır. Elde edilen verilerin analizi sonucunda, matematik öğretmenlerinin pedagojik alan bilgilerinde kayda değer bir gelişme sağlandığı görülmüştür.

Tuncay (2015) çalışmasında; matematik öğretmen adaylarının, farklı kıdemdeki ve öğretim seviyesindeki öğretmenlerin ve bir akademisyenin problem çözme süreci boyunca matematiksel düşünme süreçlerini incelemiştir. Elde edilen verilerin analizi sonucunda; akademisyen, öğretmen ve öğretmen adaylarının matematiksel düşünme süreçleri göz önüne alındığında genel olarak alınan eğitim ve matematiksel düşünmenin tüm boyutları düşünüldüğünde; önemli bir başarı, başarısızlık ve alınan eğitim seviyesi ile orantılı bir ilişki olmadığı belirlenmiştir. Düşünme sürecinde kimi boyutları, özellikle ispat tekniğini akademisyen daha sık kullanırken, kimi boyutlarda ise özellikle özelleştirmede öğretmen adaylarının daha fazla çözüm ürettikleri tespit edilmiştir.

Yıldırım (2015) çalışmasında, ortaokul sekizinci sınıf öğrencilerinin geometri problemlerine ait özelleştirme ve genelleme süreçlerini incelemiştir. Ayrıca genelleme yapabilmenin yanı sıra öğrencilerin genellemeye ulaşmalarını sağlayacak stratejilerine de dikkat edilmiştir. 8 öğrenci ile yürütülen çalışmada, beş geometri problemi kullanılmıştır. Elde edilen verilerin analizi sonucunda, farklı problem durumlarında öğrencilerin genelleme yapabilme durumlarının değiştiği belirlenmiştir. Ayrıca özelleştirme sürecinde yapılması gereken işlemleri başarılı bir şekilde gerçekleştiren ancak genelleme sürecinde zorluk yaşayan öğrencilerin genel olarak beklenen genellemeye ulaşabildikleri tespit edilmiştir. Buna ek olarak, sözel olarak genellemeyi ifade edebilen ya da problemlere geometrik olarak açıklama yapabilen öğrencilerden bazılarının ulaştıkları genellemeleri cebirsel olarak ifade etmekte zorlandıkları tespit edilmiştir. Aynı zamanda yüksek başarı düzeyine sahip öğrencilerin veriler arasında ilişki ararken birden fazla strateji üreterek farklı şekillerde beklenen genellemeye ulaşabildikleri saptanmıştır.

Yıldırım ve Yavuzsoy Köse (2017) tarafından yapılan çalışmada, ortaokul sekizinci sınıf öğrencilerinin çokgen ile ilgili problemlerdeki matematiksel düşünme süreçleri incelenmiştir. Sekiz öğrenci ile yürütülen bu çalışmanın verileri klinik görüşme yöntemi kullanılarak toplanmıştır. Elde edilen verilerin analizi sonucunda, özelleştirme sürecinin problemi anlama aşamasında öğrencilerin aşına oldukları problemleri anladıkları ancak farklı bir geometrik problem ile karşılaştıklarında zorlandıkları belirlenmiştir. Ayrıca yüksek başarı düzeyine sahip öğrencilerin tıkanma sürecine girseler dahi atak sayılarının diğer öğrencilere göre fazla olduğu ve farklı stratejilere yöneldikleri görülmüştür. Buna ek olarak beklenen genellemeye ulaşip bunu sözel olarak ifade edebilen öğrencilerin çoğu, genellemeyi cebirsel olarak ifade etmekte oldukça zorlanmışlardır. Bununla birlikte

geometrik yaklaşım kullanarak genellemeye ulaşan öğrencilerin ulaştıkları genellemelere ilişkin daha kolay açıklama yapabildikleri, sadece sayısal yaklaşım kullanan öğrencilerin ulaştıkları genellemelerin nedenlerini açıklamada zorlandıkları saptanmıştır.

Göl (2017) çalışmasında, 12. sınıf fen lisesi öğrencilerinin matematiksel düşünme becerilerini özelleştirme, tahmin, ispat ve genelleme basamakları bağlamında incelemiştir. 9 öğrenci ile yürütülen bu çalışmada elde edilen verilerin analizi sonucunda, soruların zorluk dereceleri arttıkça öğrencilerin özelleştirme eğilimlerinin arttığı, özellikle genelleme ve ispat basamaklarında başarılarının düştüğü belirlenmiştir. Ayrıca öğrencilerin gerçekleştirdiği matematiksel düşünme basamakları en çoktan en aza sırasıyla özelleştirme, tahmin, genelleme ve ispat şeklinde olduğu tespit edilmiştir.

Kocaman (2017) çalışmasında, onbirinci sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme becerilerini belirlemeyi ve matematiksel düşünme becerileri ile matematiğe yönelik tutumları ve başarıları arasındaki ilişkiyi araştırmayı amaçlamıştır. 278 öğrenci ile yürütülen bu çalışmada veri toplama aracı olarak açık uçlu sorular ve matematik tutum ölçeği kullanılmıştır. Elde edilen verilerin analizi sonucunda, matematiksel düşünme puanları cinsiyete göre anlamlı bir farklılık göstermediği belirlenmiştir. Ayrıca matematiksel düşünme puanları öğrencilerin devam ettikleri okullara göre farklılaşırken öğrencilerin yaş gruplarına göre farklılık göstermediği tespit edilmiştir. Buna ek olarak, öğrencilerde matematiksel düşünmenin geliştirilmesinde matematiğe yönelik olumlu tutumların önemli olabileceği sonucuna ulaşılmıştır.

Kükey (2018) çalışmasında, ortaokul öğrencilerinin matematiksel düşünme biçimleri ile matematik öğretmen ve öğretmen adaylarının ortaokul öğrencilerinin matematiksel düşünmelerini tahmin etmeye yönelik görüşlerini incelemeyi amaçlamıştır. 96 ortaokul öğrencisi ile çalışma yürütülmüş, daha sonra ilköğretim matematik öğretmenliği programının 1, 2, 3 ve 4. sınıflarında okuyan 6'şar matematik öğretmen adayı ve 6 ortaokul matematik öğretmeni ile çalışma gerçekleştirilmiştir. Rutin olmayan problem ile elde edilen verilerin analizi sonucunda, matematiksel düşünmenin varsayımda bulunma bileşeni kapsamında ortaokul öğrencilerinin, bütün olasılıklara ulaşmadan sadece birkaç örnek vererek problemin çözümünü tamamladıkları görülmüştür. Benzer şekilde özelleştirme probleminde de öğrencilerin genel olarak belirli değerler verip problemin çözümüne ulaşmaya çalıştıkları tespit edilmiştir. Varsayımda bulunma ve özelleştirme problemleri kapsamında öğretmen ve öğretmen adaylarının, öğrencilerin kullandıkları stratejileri yeterli

düzeyde tahmin edemedikleri belirlenmiştir. Doğrulama ve ikna etme bileşeni kapsamındaki problemde, öğrencilerin az bir bölümünün farklı durumları uygulamaya çalıştığı görülse de büyük çoğunluğunun daha önce öğrenmiş oldukları formülleri uygulamaya çalıştıkları sonucu elde edilmiştir. Öğretmen ve öğretmen adaylarının doğrulama ve ikna etme bileşenine yönelik tahminleri incelendiğinde, öğretmen adaylarının öğrencilerin belirtmiş oldukları çözüm biçimlerini öğretmenlere göre fazla olarak ifade ettikleri sonucuna ulaşılmıştır. Genelleme problemine yönelik olarak ise öğrencilerin 5 çözüm stratejisini kullandıkları belirlenmiştir. Öğretmen ve öğretmen adaylarının tahminleri araştırıldığında öğretmenlerin en az, 1. sınıf öğretmen adaylarının ise en fazla yorumda bulundukları sonucuna ulaşılmıştır. Öğretmen adaylarının teorik bilgilerinin, öğretmenlere göre yeterli düzeyde olduğu görülürken uygulamada ise öğretmenlerin daha başarılı olduğu tespit edilmiştir.

Koyuncu (2018) çalışmasında matematik felsefesi etkinliklerinin öğrencilerin; matematiğe yönelik tutum, inanç ve matematiksel düşünme değişkenleri üzerindeki etkililiğini incelemiştir. Deney ve kontrol gruplarının oluşturulmasıyla elde edilen verilerin analizi sonucunda; matematik felsefesi etkinliklerinin öğrencilerin matematiğe yönelik tutumlarını ve inançlarını pozitif yönde artırdığı, matematiksel düşünme becerileri üzerinde ise istatistiksel olarak herhangi bir anlamlı farklılığa sebep olmadığı görülmüştür.

Demirtaş (2018) çalışmasında, sınıf öğretmenlerinin yaratıcılık fenomenine duyarlılığı ile matematiksel düşünme düzeyleri arasında bir ilişki olup olmadığını incelemiştir. 509 sınıf öğretmeni ile yürütülen bu çalışmada elde edilen verilerin analizi sonucunda, sınıf öğretmenlerinin yaratıcılığa karşı duyarlılığı ile matematiksel düşünme düzeyleri arasında pozitif yönde anlamlı bir ilişki olduğu tespit edilmiştir.

Yağdıran (2018) çalışmasında, teknoloji destekli ortamlarda 11. Sınıf öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerinin incelemiştir. 12 öğrenci ile yürütülen bu çalışmada öğrencilere tablet kullanabilecekleri ve matematiksel düşünme süreçlerini gerçekleştirebilecekleri etkinlikler yöneltmiştir. Elde edilen verilerin analizi sonucunda matematiksel düşünme evrelerinden özelleştirme evresinde teknoloji kullanımında zorluk yaşanmadığı, fakat ilerleyen evrelerde tablet kullanmakta zorlanıldığı belirlenmiştir. Ayrıca matematiksel düşünme evrelerine göre teknoloji kullanıma amacının değiştiği gözlemlenmiştir. Özelleştirme ve genelleme evrelerinde düzgün şekiller çizme, örnek sayısını çoğaltmak, zaman kazanmak ve problemi daha iyi anlamak için kullanılırken; iddia

etme ve ispat yapma aşamasında ise hatırlayamadıkları konuları internetten araştırmalar yaptıkları tespit edilmiştir. İddia etme ve ispat yapma evrelerinde aktif bir şekilde teknoloji kullanılmadığı tespit edilmiştir.

BÖLÜM III

YÖNTEM

Bu bölümde; araştırmada kullanılan araştırmanın modeline, araştırmanın katılımcılarına, araştırmada kullanılması düşünülen veri toplama araçlarına ve verilerin analizine yer verilmiştir.

3.1 Araştırmanın Modeli

Bu araştırmanın amacı; matematik öğretmen adaylarının problem çözme süreci boyunca matematiksel düşünme süreçlerini özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve ispatlama boyutları bağlamında incelemek olduğundan, amacı gereği nitel bir araştırma olarak tasarlanmıştır. Nicel araştırmalar tanımlanan değişkenler arasındaki ilişkileri inceleyip sayısal veriler ile uğraşırken; nitel araştırmalar ise hipotez ya da varsayımları test etmek yerine sürece odaklanarak var olan olgunun detaylı bir şekilde açıklanabilmesini sağlamaktadır (Arıkan, 2013, s.21-27).

Nitel araştırma, yapılandırılmamış gözlem, yapılandırılmamış görüşme ve doküman inceleme gibi nitel veri toplama tekniklerinin kullanıldığı, olgu ve olayların kendi doğal ortamları içinde gerçekçi ve bütüncül bir şekilde ortaya konmasına yönelik nitel bir sürecin izlendiği araştırmadır (Yıldırım & Şimşek, 2016, s.41). Nitel araştırma geçmişte ya da halen var olan bir durumu var olduğu şekliyle tespit etmeyi amaçlar. Araştırmaya konu olan olay, birey ya da nesne, kendi koşulları içinde ve olduğu gibi tanımlanmaya çalışılır. Onları herhangi bir şekilde değiştirme, etkileme çabası gösterilmez. Bilinmek istenen şey vardır ve oradadır. Önemli olan onu uygun bir biçimde gözleyip belgeleyebilmektir (Karasar, 2016, s.109).

Nitel araştırma yöntemi; araştırmaya dahil edilen bireylerin algılarının ve deneyimlerinin, içinde bulundukları doğal ortamda kendi bütünlüğü içinde, sürece dayalı olarak derinlemesine bir incelemeye olanak sağlamaktadır (Yıldırım & Şimşek, 2016, s.49). Bu çalışmada da matematik öğretmen adaylarının problem çözme süreci boyunca matematiksel düşünme süreçleri derinlemesine ve detaylı olarak analiz edileceğinden bu modelin bu araştırma için uygun olduğu düşünülmektedir.

Nitel araştırma desenlerini eylem araştırması, fenomenoloji, gömülü teori, etnografi ve durum çalışması olmak üzere beş farklı kategoride ele alınmaktadır (Yıldırım & Şimşek, 2016, s.70-78). Bunların arasında yer alan durum çalışması deseni, bir olay ya da olgunun bütüncül bir analizine olanak sağlamakla birlikte, detaylı bir şekilde betimleme imkanı da sağlamaktadır ve özellikle süreçleri anlamaya yönelik çalışmalarda kullanılması uygun görülmektedir (Merriam, 1998, s.19).

Yin (1984) durum çalışmasını, güncel bir olguyu kendi gerçek yaşam çerçevesi içinde çalışan, olgu ve içinde bulunduğu içerik arasındaki sınırların kesin hatlarıyla belirgin olmadığı ve birden fazla kanıt veya veri kaynağının mevcut olduğu durumlarda kullanılan, görgül bir araştırma yöntemi olarak tanımlamaktadır (s.23).

Bu sebeple araştırma problemi göz önüne alındığında matematik öğretmen adaylarının matematiksel düşünme boyutlarına göre sergiledikleri davranışları ortaya çıkarmak için araştırma durum çalışması deseninde tasarlanmıştır.

3.2 Katılımcılar

Araştırmanın pilot ve asıl uygulama aşamalarında farklı katılımcılar araştırmaya dahil edilmiştir. Her iki uygulama 2018-2019 eğitim ve öğretim yılı bahar döneminde Ankara'daki bir üniversitenin Eğitim Fakültesi Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalında öğrenim gören matematik öğretmen adayları ile yürütülmüştür. Pilot çalışma ve asıl çalışma dört matematik öğretmen adayı ile yapılmıştır.

Bu çalışmada katılımcıların matematik derslerine ilgili olmaları daha kaliteli veri elde ederek araştırmaya daha iyi katkı sağlayacağı için öğretim elemanları ile görüşülerek, derslere ilgili olan öğretmen adayları gönüllülük esasına göre katılımcı olarak seçilmiştir.

Pilot çalışmaya katılan öğretmen adayları PÖA1, PÖA2, PÖA3 ve PÖA4 şeklinde; asıl çalışmaya katılan öğretmen adayları ÖA1, ÖA2, ÖA3 ve ÖA4 şeklinde isimlendirilmiş olup katılımcıların cinsiyet ve sınıfları hakkındaki bilgiler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 1

Katılımcı Bilgileri

Öğretmen Adayları	Sınıfı	Cinsiyeti
PÖA1	1	Kadın
PÖA2	2	Kadın
PÖA3	3	Kadın
PÖA4	4	Kadın
ÖA1	2	Kadın
ÖA2	2	Erkek
ÖA3	3	Kadın
ÖA4	3	Kadın

Araştırmanın katılımcılarının 2. sınıf ve 3. sınıf öğretmen adaylarından seçilmiş olmasının sebebi gönüllü 4. sınıf öğretmen adayı bulunamaması ve pilot çalışmada 1. sınıf öğretmen adaylarından uygun veri elde edilememesidir.

2. sınıf öğretmen adayları alan derslerinden Soyut Matematik, Analitik Geometri, Tek Değişkenli Analiz, Çok Değişkenli Analiz, Lineer Cebir, Diferansiyel Denklemler, Diskret Matematik derslerini almışlardır; herhangi bir seçmeli ders almamışlardır. 3. sınıf öğretmen adayları alan derslerden Soyut Matematik, Analitik Geometri, Tek Değişkenli Analiz, Çok Değişkenli Analiz, Lineer Cebir, Diferansiyel Denklemler, Diskret Matematik, Cebire Giriş, Elementer Geometri, Topoloji, Diferansiyel Geometri derslerini ve seçmeli derslerden Mantık dersini almışlardır. Dolayısıyla katılımcıların gerekli alan bilgisine sahip oldukları varsayılarak matematiksel düşünme süreçlerini ortaya çıkarmak için onlara sunulan problem çözme durumlarını gerçekleştirebilecek donanımda oldukları düşünülmektedir.

3.3 Veri Toplama Araçları

Nitel araştırmada en yaygın olarak kullanılan veri toplama yöntemlerinin başında görüşme, odak grup görüşmesi ve gözlem gelmektedir. Bunların yanında çeşitli türdeki dokümanlar da (belgeler, yazışmalar, fotoğraflar gibi), nitel araştırmada kullanılan verilere temel oluşturabilir (Yıldırım & Şimşek, 2016, s.85-86). Bu araştırmada da veri toplamak için konu hakkındaki yapıyı derinlemesine incelemek amacıyla gözlem, doküman analizi ve görüşme olmak üzere üç araç kullanılmıştır. Farklı veri toplama araçları kullanılarak herhangi birindeki eksiklik ortadan kaldırılmış ve zengin bir veri tabanı oluşturulmuştur.

3.3.1 Görüşme

Görüşme, önceden belirlenmiş ve ciddi bir amaç için yapılan, soru sorma ve yanıtlama tarzına dayalı karşılıklı ve etkileşimli bir iletişim sürecidir (Stewart & Cash, 1985, s.7). Görüşme, sosyal bilimlerde yapılan araştırmalarda kullanılan en yaygın veri toplama yöntemidir ve bu durum görüşme yönteminin; bireylerin deneyimlerine, tutumlarına, görüşlerine, şikayetlerine duygularına, inançlarına ilişkin bilgi elde etmede oldukça etkili bir yöntem olmasından kaynaklanmaktadır (Briggs'den aktaran Yıldırım & Şimşek, 2016, s.129). Görüşmenin amacı, bir bireyin iç dünyasına girmek ve onun bakış açısını anlamaktır (Patton'dan aktaran Yıldırım & Şimşek, 2016, s.130). Bu sebeple, matematik öğretmen adaylarının matematiksel düşünme süreçlerini incelemek amacıyla bu çalışmada görüşmeler yapılmıştır. Eğitim alanında yapılan çalışmalarda genelde görüşme tekniğinin; yapılandırılmamış görüşme, yapılandırılmış görüşme ve yarı yapılandırılmış görüşme olmak üzere üç türü kullanılmaktadır (Gall, Borg & Gall; 1996, s.310; Holstein & Gubrium, 1997, s.113; Patton, 1990, s.109; Robson, 1993, s.230). Yarı yapılandırılmış görüşmede araştırmacı önceden hazırladığı konu ve alanlara sadık kalarak, hem önceden hazırlanmış soruları sorma hem de bu sorular konusunda daha ayrıntılı bilgi almak amacıyla ek sorular sorma özgürlüğüne sahiptir. Yarı yapılandırılmış görüşmede amaç araştırma problemi ile ilgili tüm boyutların ve soruların kapsanmasını güvence altına almaktır (Yıldırım & Şimşek, 2016, s.132). Bu nedenle bu araştırmada araştırmanın amacına yönelik matematik öğretmen adayları ile yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır.

3.3.2 Gözlem

Nitel araştırmada kullanılan yaygın veri toplama yöntemlerinden biri olan gözlem, herhangi bir ortamda ya da kurumda oluşan davranışı ayrıntılı olarak tanımlamak amacıyla kullanılan bir yöntemdir. Ancak gözlem basit anlamda, sadece normal durumlarda sık olarak görülmeyen davranışları ortaya çıkarmak için kullanılmaz. Eğer bir araştırmacı, herhangi bir ortamda oluşan bir davranışa ilişkin ayrıntılı, kapsamlı ve zamana yayılmış bir resim elde etmek istiyorsa gözlem yöntemini kullanabilir (Bailey'den aktaran Yıldırım & şimşek, 2016, s.173). Gözlem ile elde edilen verileri daha ayrıntılı hale getirmek, gözlenen ortamda oluşan davranışları daha derinlemesine ve defalarca inceleyebilmek ve not almanın yarattığı sınırlılıkları ortadan kaldırmak amacıyla çeşitli yöntemlerle gözlemlerin kaydedilmesi mümkündür. Video kayıt cihazları gözlem çalışmalarında önemli bir yer tutar. Videoya çekilen görüntülerin defalarca izlenmesi ve ortamda yer alan olayların, süreçlerin ayrıntılı olarak tanımlanması mümkündür (Yıldırım & şimşek, 2016, s.184-185). Bu nedenle bu araştırmada araştırmanın amacına yönelik matematik öğretmen adayları ile yarı yapılandırılmış görüşmelerin video kaydı alınarak araştırma için veri sağlamıştır.

3.3.3 Doküman İncelemesi

Nitel araştırmada doğrudan gözlem ve görüşmenin olanaklı olmadığı durumlarda veya araştırmanın geçerliğini arttırmak amacıyla, görüşme ve gözlem yöntemlerinin yanı sıra, çalışılan araştırma problemi ile ilişkili yazılı ve görsel materyal ve malzemeler de araştırmaya dahil edilebilir. Doküman incelemesi, araştırılması hedeflenen olgu veya olgular hakkında bilgi içeren yazılı materyallerin analizini kapsar. Nitel araştırmada doküman incelemesi tek başına bir veri toplama yöntemi olabileceği gibi diğeri veri toplama yöntemleri ile birlikte de kullanılabilir (Yıldırım & şimşek, 2016, s.189). Bu araştırmada kullanılan veri toplama araçlarından biri de doküman incelemesidir. Araştırmada incelenen dokümanlar, görüşmeler yapılırken öğretmen adaylarının problem çözme sürecinde kağıt üzerine çizdikleri şekiller, yazdıkları kelimeler, sayılar ve kağıt üzerindeki her türlü işaretlerdir.

3.3.4 Matematiksel Düşünme Problemlerinin Hazırlanması

Araştırmada kullanılan matematiksel düşünme problemleri, ilgili literatür incelenip matematiksel düşünmenin özellikleri ve boyutları göz önünde bulundurularak matematik

öğretmen adaylarının düşünme süreçlerini yansıtacak şekilde hazırlanmıştır. Bu araştırmada matematik öğretmen adaylarının matematiksel düşünme süreçlerini özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve ispatlama boyutları bağlamında incelemek hedeflendiğinden matematiksel düşünmenin özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ispatlama boyutlarının her bir boyutunu kapsayacak 17 tane problem hazırlanmıştır. Bu problemler için 2 tane uzman görüşü alınmış ve bu görüşler doğrultusunda problemlerden 12 tanesi pilot çalışma için seçilmiştir ve seçilen problemlerde gerekli düzenlemeler yapılmıştır. Pilot çalışma ve pilot çalışma sonucundaki uzman görüşleri doğrultusunda problemlerden 4 tanesinin araştırmanın asıl çalışmasında kullanılmasına karar verilmiştir (EK 2). Bu problemler literatürdeki mevcut çalışmalarda (Mason, Burton & Stacey, 2010, s.62; Polya, 1973, s.57; Stylianides & Stylianides, 2009; Zazkis, Liljdahl & Chernoff, 2007) kullanılan problemlerden uyarlanmıştır.

3.4 Verilerin Toplanması

Araştırmanın hem pilot hem de asıl çalışması 2018-2019 eğitim ve öğretim yılının bahar döneminde gerçekleştirilmiştir. Asıl çalışmanın öncesinde araştırmada kullanılacak problemleri belirlemek için aynı zamanda süreç ile ilgili tecrübe edinmek için dört öğretmen adayı ile araştırmanın pilot çalışma yapılmıştır. Bir hafta süren pilot çalışmanın ardından uzman görüşü alınarak asıl çalışma için kullanılacak problemler belirlenmiştir. Bu aşamadan sonra araştırmanın asıl çalışması yapılmıştır. Asıl çalışmada öğretmen adayları ile gerçekleştirilen bireysel görüşmeler öğretmen adaylarının uygun oldukları zamanlarda okulun aktif olarak kullanılmayan bir sınıfında gerçekleştirilmiştir. Öğretmen adaylarıyla görüşmeler yapılmadan önce öğretmen adaylarına araştırma hakkında bilgi verilmiştir (EK 1). Araştırma kapsamında gerçekleştirilen görüşmeler öğretmen adaylarının izni dahilinde video kamera ile kayıt altına alınmıştır. Video kamera öğretmen adaylarının kağıt üzerinde problem çözümü için yaptıklarının rahatça görüntülenmesini sağlayacak biçimde araştırma ortamına yerleştirilmiştir. Ayrıca öğretmen adayları video kayıtlarının güvenli bir yerde tutulacağı aynı zamanda araştırmacıdan başka kimsenin izlemeyeceği konusunda bilgilendirilmiştir. Öğretmen adaylarının problem çözme süreci boyunca matematiksel düşünme süreçlerini incelemek amacıyla öğretmen adaylarıyla iki görüşme yapılmıştır. Araştırma süresince her bir görüşmede öğretmen adaylarına 2 problem ayrı kağıtlarda yazılı formda sunulmuştur. Görüşmelerde öğretmen adaylarının problemlere ilişkin çözümlerini

açıklarken sesli düşünmeleri ve düşüncelerini detaylı bir şekilde açıklamaları istenmiştir, uzun süre sessiz kaldıkları zamanlarda ne düşündükleri sorulmuştur. Ayrıca öğretmen adaylarının düşünme süreçlerini ortaya koymak için verilen problemi çözerken geçtikleri aşamalara nasıl ulaştıkları, niçin böyle bir yol izledikleri gibi sorular yöneltilmiştir ve bunun dışında araştırmacı uygulama sürecinde herhangi bir müdahalede bulunmamıştır. Öğretmen adayları ile yapılan görüşmelerde süre kısıtlaması yapılmamış, öğretmen adaylarını problem çözme sürecini sonlandırana kadar görüşmeye devam edilmiştir. Aşağıdaki tabloda öğretmen adayları ile gerçekleştirilen görüşmelerin veri toplama sürecine ait bilgiler yer almaktadır.

Tablo 2

Görüşme Verilerini Toplama Süreci

Öğretmen Adayları	1. Görüşmenin Süresi	2. Görüşmenin Süresi
ÖA1	54 dakika	40 dakika
ÖA2	55 dakika	54 dakika
ÖA3	39 dakika	40 dakika
ÖA4	52 dakika	50 dakika

3.5 Verilerin Analizi ve Yorumlanması

Matematik öğretmen adaylarının problem çözme süreci boyunca matematiksel düşünme süreçlerini incelemek amacıyla yürütülecek olan bu çalışmanın temel veri kaynaklarını matematik öğretmen adaylarının yazılı dokümanları, araştırmacının gözlemleri ve öğretmen adayları ile yapılan yarı yapılandırılmış görüşmeler oluşturacaktır. Bu çalışmada elde edilen verilerin analizinde nitel veri analiz yöntemi olan betimsel analiz kullanılmıştır.

Betimsel analizde; elde edilen veriler, daha önce belirlenen temalara göre özetlenir ve yorumlanır. Veriler araştırma sorularının ortaya koyduğu temalara göre organize edilebileceği gibi, görüşme ve gözlem süreçlerinde kullanılan sorular ya da boyutlar dikkate alınarak da sunulabilir. Betimsel analizde, görüşülen ya da gözlenen bireylerin görüşlerini çarpıcı bir biçimde yansıtmak amacıyla doğrudan alıntılara sık sık yer verilir. Betimsel analizde amaç, elde edilen bulguları düzenlenmiş ve yorumlanmış bir biçimde okuyucuya

sunmaktır. Bu amaçla elde edilen veriler, önce sistematik ve açık bir biçimde betimlenir. Daha sonra yapılan bu betimlemeler açıklanır ve yorumlanır, neden–sonuç ilişkileri irdelenir ve birtakım sonuçlara ulaşılır. Bu yaklaşımla okuyucu, elde edilen bilgilerle betimsel bir yaklaşımla tanıştırılmış olur. Ortaya çıkan temaların ilişkilendirilmesi, anlamlandırılması ve ileriye yönelik tahminlerde bulunulması da araştırmacının yapacağı yorumların boyutları arasında yer alabilir (Yıldırım & Şimşek, 2016, s.239-240). Özetle, betimsel analiz, araştırmanın kavramsal yapısının önceden açık biçimde belirlendiği araştırmalarda kullanılır.

Betimsel analizde; betimsel analiz için bir çerçeve oluşturma, tematik çerçeveye göre verilerin işlenmesi, bulguların tanımlanması, bulguların yorumlanması şeklinde dört aşama bulunmaktadır (Yıldırım & Şimşek, 2016, s.240).

Araştırmada elde veriler analiz edilmeden önce görüşme verileri bilgisayar ortamında yazıya dökülmüştür. Görüşmelerin yazıya aktarılması aşamasında konuşma metinleri olduğu gibi hiçbir düzeltme yapılmadan yazıya aktarılmıştır. Bu şekilde verilerin transkript aşaması tamamlanmış ve veriler analiz yapılmak üzere uygun hale getirilmiştir.

Betimsel analiz için bir çerçeve oluşturma aşamasında, araştırma sorularından, araştırmanın kavramsal çerçevesinden ya da görüşme ve/veya gözlemlerde yer alan boyutlardan yola çıkarak veri analizi için bir çerçeve oluşturulur. Bu çerçeveye göre verilerin hangi temalar altında düzenleneceği ve sunulacağı belirlenir (Yıldırım & Şimşek, 2016, s.240). Bu bağlamda öğretmen adaylarının matematiksel düşünme süreçleri; matematiksel düşünmenin özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve ispatlama boyutlarına göre analiz edilmiştir. Tematik çerçeveye göre verilerin işlenmesi aşamasında daha önce oluşturulan çerçeveye göre elde edilen veriler okunur ve düzenlenir. Bu aşamada, verilerin tanımlama amacıyla seçilmesi, anlamlı ve mantıklı bir biçimde bir araya getirilmesi söz konusudur. Ayrıca bu aşamada daha sonra sonuçlar yazılırken kullanılacak doğrudan alıntılar da seçilir (Yıldırım & Şimşek, 2016, s.240). Bu bağlamda araştırmanın kavramsal çerçevesi dikkate alınarak görüşme verileri farklı zamanlarda defalarca okunarak, tüm veri seti (görüşme, gözlem ve yazılı dokümanlar) incelenerek düzenleme işlemi gerçekleştirilmiştir. Bulguların tanımlanması aşamasında, son aşamada düzenlenen veriler tanımlanır ve gerekli yerlerde doğrudan alıntılarla desteklenir (Yıldırım & Şimşek, 2016, s.240). Bu bağlamda bulgular tanımlanır ve bu bölümde öğretmen adayları ile yapılan görüşmelerden doğrudan alıntılara aynı zamanda öğretmen adaylarının dokümanlarından örneklere yer verilmiştir. Tanımlanan

bulguların açıklanması, ilişkilendirilmesi ve anlamlandırılması bulguların yorumlanması aşamasında yapılır (Yıldırım & Şimşek, 2016, s.240). Bu bağlamda kavramsal çerçeveye göre oluşturulan temalar doğrultusunda elde edilen bulgular, araştırmacı tarafından yorumlanmıştır.

Bu araştırmada araştırmanın kavramsal çerçevesi dikkate alınarak öğretmen adaylarının matematiksel düşünme süreçleri özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve ispatlama kategorileri bağlamında analiz edilmiştir. Elde edilen veriler dikkate alınarak özelleştirme kategorisine ait kodlamanın nasıl olduğuna dair örnek Tablo 3'te verilmiştir.

Tablo 3

Özelleştirme Kategorisine Ait Kodları Oluşturma Örneği

Verilerin Transkripti	Belirlenen Kodlar
<i>Mesela burada 4'ün küpüne kadar toplamış 100'e eşit oldu. Bir sonrakinde 225, bir öncekinde kaç olur? 36.</i>	
<i>Hmm mesela kaç kaç olsun? 1'e 3 olsun diyelim. Burada köşegen 3 tanesinin içinden geçti. Örnekleri arttırsam işime yarar bir şey çıkar mı acaba? 3'e 7'lik; buna baktığımız zaman 9 taneden geçmiş oldu. 2'ye 3'lük alsam 4 taneden geçti.</i>	Özelleştirme boyutunu gerçekleştirme
<i>Bu şekilde verilen ardışık küp toplamını bulmaya yarayacak matematiksel bir formül, böyle bir formül vardı, n tane terimin küpünü alarak topladığımızda $\left(\frac{n.(n+1)}{2}\right)^2$ buydu.</i>	Özelleştirme boyutunu atlama
<i>En az iki ardışık sayının toplamı olarak yazılabilir mi? Aslında tek sayıları yazabiliriz. Tek tamsayılar ardışık iki tamsayının toplamı olarak yazılabilir.</i>	

3.6 Araştırmanın Geçerlik ve Güvenirliği

Genel anlamda araştırmalarda geçerlik, araştırma sonuçlarının doğruluğu; güvenirlilik ise araştırma sonuçlarının tekrar edilebilirliği ile ilgilenmektedir. Lincoln ve Guba (1985), nitel araştırmanın niteliğini artırabilecek birtakım stratejiler önermektedir. Bu stratejiler; inandırıcılık, aktarılabilirlik, tutarlık ve teyit edilebilirlik olarak sıralanabilir (Yıldırım & Şimşek, 2016, s.269-277).

İnandırıcılık; araştırma sürecinin ve sonuçlarının açık, tutarlı ve başka araştırmacılar tarafından teyit edilebilir olması ile ilgilenir (Yıldırım & Şimşek, 2016, s.277). İnandırıcılığı arttırmak için araştırmanın verileri; katılımcı öğretmen adayları ile yapılan görüşmeler, görüşmeler sürecinde araştırmacının yaptığı gözlemler ve öğretmen adaylarının kağıt üzerindeki problem çözümlerini kapsayan doküman incelemesi ile toplanmıştır. Araştırmanın modeli, veri toplama araçları ve süreci için uzman görüşü alınmıştır.

Aktarılabirlik, elde edilen sonuçların benzer süreçlere ya da ortamlara aktarılabirlik değerini ortaya koymakla ilgilidir (Yıldırım & Şimşek, 2016, s.281). Araştırmacı, araştırmaya başlamadan öncesi süreçten başlayarak araştırmanın sonuna kadarki tüm süreci ayrıntılarıyla tanımlamıştır. Yani araştırmanın nerede yapıldığı, katılımcıların nasıl seçildiği, katılımcıların özellikleri, verilerin hangi veri toplama araçları ile toplandığı, verilerin analizinde hangi yöntemlerin kullanıldığı gibi detaylar ayrıntıları ile belirtilmiştir. Ayrıca katılımcılar araştırmanın amacına uygun olacak şekilde amaçlı örnekleme yöntemiyle seçilmiştir.

Tutarlık; verilerin benzer süreçlerde benzer şekilde toplanması ve sonuçların toplanan verilere uygun olmasını gerektirmektedir (Yıldırım & Şimşek, 2016, s.283). Araştırmacı, öğretmen adayları ile yapılan görüşmelerde benzer ortamları sağlayarak, ham verileri farklı zamanlarda yeniden kodlayarak ve verilerin sonuçlarla ilişkisinin kurulmasına dikkat ederek tutarlık çalışması yapmıştır.

Teyit edilebilirlik, araştırma sonuçlarının gerçeği yansıtmaması ve araştırmacının öznel yargılardan ve varsayımlardan uzak olması ile ilgilidir. Ayrıca teyit edilebilirliğin sağlanması için araştırmacının tüm veri toplama araçlarını, ham verilerini, analiz aşamasında yaptığı kodlamaları gerektiğinde tekrar ulaşabilmek adına saklamaması gerekir (Yıldırım & Şimşek, 2016, s.283). Araştırmanın teyit edilebilirliği için veri analizi detaylı bir şekilde açıklanmıştır. Ayrıca araştırmanın sonuçlarına temel oluşturan ve video kayıt ile kayıt altına alınan görüşmeler, görüşmeler esnasında katılımcıların kullandıkları dokümanlar gerektiğinde tekrar ulaşabilmek adına saklanmıştır.

BÖLÜM IV

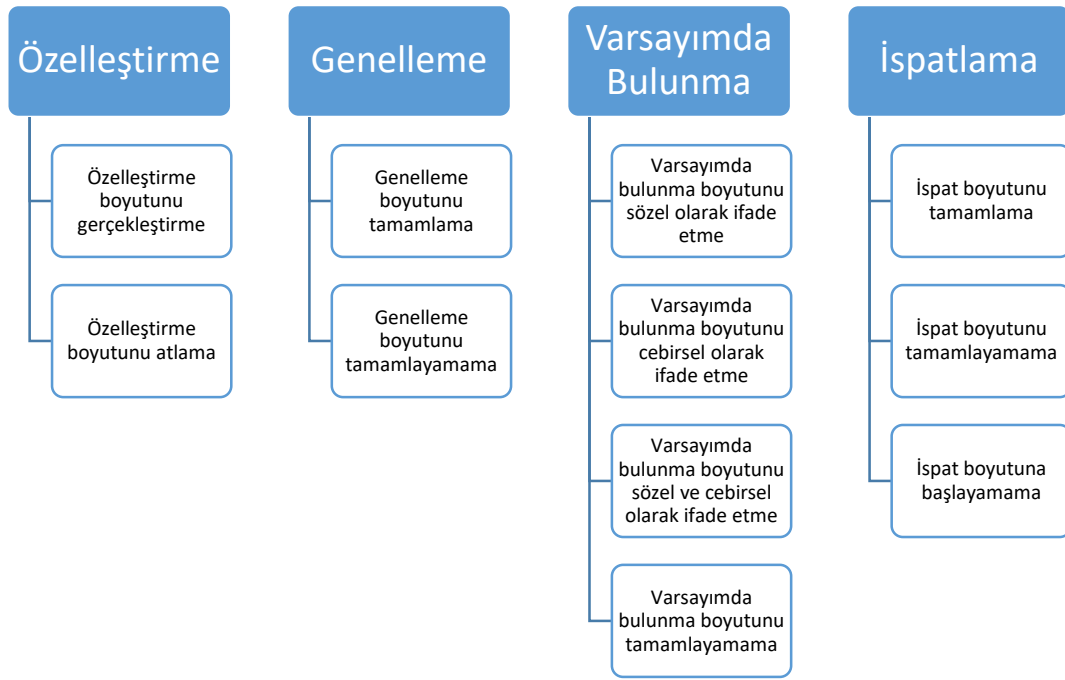
BULGULAR

Bu bölümde, matematik öğretmen adaylarının matematiksel düşünme süreçlerini incelemek amacıyla toplanan verilerin analizleri sonucunda ortaya çıkan bulgular ve yorumlara yer verilmiştir.

Matematik öğretmen adaylarının matematiksel düşünme süreçleri, araştırmanın kavramsal çerçevesi göz önünde bulundurularak temalar ortaya konmuş ve kodlar oluşturulmuş, yarı yapılandırılmış görüşmeler sırasındaki konuşmalardan doğrudan alıntılarla ve problemlerin çözümlerinden kesitlerle bulgular desteklenmiştir.

Bulgular sunulurken gizlilik ilkesi gereği araştırmaya katılan öğretmen adaylarının isimleri kullanılmamış; öğretmen adayları için sırasıyla ÖA1, ÖA2, ÖA3 ve ÖA4 şeklinde isimlendirme yapılmıştır.

Bulguların okuyucu tarafından rahat bir biçimde anlaşılabilmesinin önemli olduğu düşünüldüğünden, matematiksel düşünmenin her bir boyutu için literatür ve verilerin analizi ile şekillenen kodlara yer verilmiştir.



Şekil 2. Öğretmen adaylarının matematiksel düşünme süreci

Bu araştırmada matematik öğretmen adaylarının matematiksel düşünme süreçlerini incelemek amacıyla toplanan verilerin analizleri yukarıdaki temalar ve kodlar çerçevesinde değerlendirilmiştir.

4.1 Özelleştirme Boyutuna İlişkin Bulgular ve Yorumları

Bu bölümde öğretmen adaylarının matematiksel düşünme süreçlerini incelemek amacıyla toplanan verilerin analizleri sonucunda matematiksel düşünmenin özelleştirme boyutuna dair bulgular ve yorumları yer almaktadır.

Öğretmen adayları problem çözme süreci içerisinde özelleştirme boyutunda problemi anlayıp istenilen değerleri belirlemekte, ayrıca problem durumuna uygun rastgele ya da sistematik bir şekilde özel örnekler vermektedir. Bunlara ek olarak öğretmen adayları verilen matematiksel durum hakkındaki ön bilgilerine bağlı olarak bazı problemlerde özelleştirme aşamasını atlayarak varsayımda bulunma aşamasına geçmektedir. Bunlardan yola çıkarak özelleştirme boyutuna ilişkin kodlar oluşturulmuştur.

Özelleştirme boyutuna ilişkin kodlar,

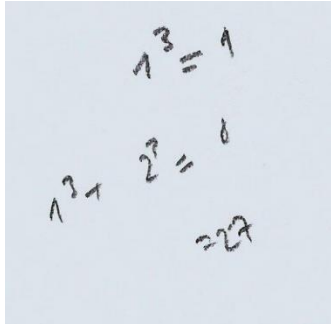
- Özelleştirme boyutunu gerçekleştirme

- Özelleştirme boyutunu atlama

olarak belirlenmiştir. Bu bölümde özelleştirme boyutuna ilişkin kodlar ayrı başlıklar ile ele alınmıştır.

4.1.1 Özelleştirme Boyutunu Gerçekleştirme

ÖA1, 1. problemde problemi okuduktan sonra problemi anlayıp istenilen değer için “*Şimdi zaten bunun toplamını herkes bulabilir, bunların toplamı 100 yapıyor.*” açıklamalarında bulunmuştur. ÖA1, ön bilgilerine dayalı olarak istenilen ilişkinin var olduğunu ama hatırlayamadığını belirtmiştir. Bu durumu “*Bu zaten oluşturulmuş bir formül hani toplam çarpım sembollerinde görmüştük ya. Kareler toplamını hatırlıyorum ama küp toplamında nasıldı ki?*” cümleleri ile dile getirmiştir. Bir süre daha düşündükten sonra formül aklına gelmeyince düşüncelerini “*Bunun nereden geldiğini de hiç araştırmamıştım, ezberleyip geçmiştim.*” şeklinde belirtmiştir. Ardından problem durumu için sistematik bir şekilde özel örnekler vererek bunları Şekil 3’teki gibi yazmıştır.



$$1^3 = 1$$

$$1^3 + 2^3 = 8$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 27$$

Şekil 3. ÖA1'in 1. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA1'in bu özel durumlar arasındaki ilişki için bir arayış içinde olduğu, varsayımda bulunmak için çabaladığı fakat problem durumu için istenilen varsayıma ulaşamadığı gözlemlenmiştir.

ÖA2, 1. problemde problemi okuduktan sonra problemi anlayıp istenilen değer için “*1 artı 8 artı 27 artı 64'ten 100, yanlış toplamamışsam, yoo yanlış toplamadım, 100*” açıklamalarında bulunmuştur. Problem durumu için bir formül hatırlamadığını “*Hmm küp toplamını hatırlamıyorum aslında.*” şeklinde ifade edip ön bilgilerine dayalı olarak hatırladığı formülleri Şekil 4’teki gibi yazmıştır.

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{a_n \cdot (a_n + 1)}{2}, \quad a_i \in \mathbb{N}^+, 1 \leq i \leq n$$

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = \frac{a_n \cdot (a_n + 1) \cdot (2a_n + 1)}{2 \cdot 3}$$

Şekil 4. ÖA2'nin 1. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA2, ön bilgilerine dayalı olarak yazdığı formüllerin onu sonuca götürmeyeceğine “Yok buradan bir şeye ulaşamayacağım.” cümleleri ile karar verip problem durumu için sistematik bir şekilde özel örnekler vermeye başlamış ve bunları Şekil 5’teki gibi yazmıştır.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36$$

$$1^3 + 2^3 = 1 + 8 = 9$$

$$1^3 = 1$$

Şekil 5. ÖA2'nin 1. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA2'nin bu özel durumlar arasındaki ilişkiye dayanarak bir varsayımda bulunduğu ve bu varsayımı Şekil 6’daki gibi yazdığı gözlemlenmiştir.

$$\left(\frac{a_n \cdot (a_n + 1)}{2} \right)^2 = (1 + 2 + \dots + a_n)^2 = 1^3 + 2^3 + \dots + a_n^3$$

Şekil 6. ÖA2'nin 1. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA4, 1. problemde problemi okuduktan sonra problemi anlayıp istenilen değer için “İşleminin sonucunu soruyor. 64 artı 27 artı 8 artı 1 kaç yapar? 72, 27 daha 99, 100 yaptı.” açıklamalarında bulunmuştur. Ardından problem durumu için özel örnek vererek çözüme devam edeceğini belirtmiştir. Bu durumu “Mesela burada 4’ün küpüne kadar toplamış 100’e eşit oldu. Bir sonrakinde 225, bir öncekinde kaç olur? 36” biçiminde dile getirmiştir. Daha sonra ÖA4, Şekil 7’deki gibi sistematik bir şekilde özel örnek vermeye devam etmiştir.

$$1^3 = 1 = 1^2$$

$$1^3 + 2^3 = 9 = 3^2$$

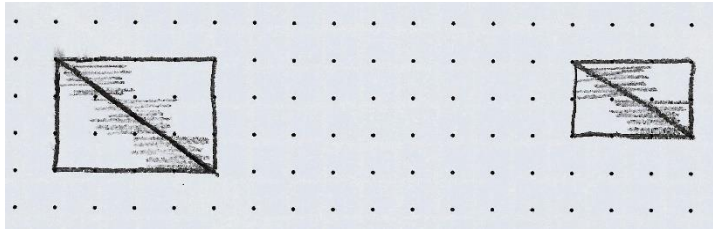
$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = 10^2$$

Şekil 7. ÖA4'ün 1. probleme ait çözümünden bir bölüm

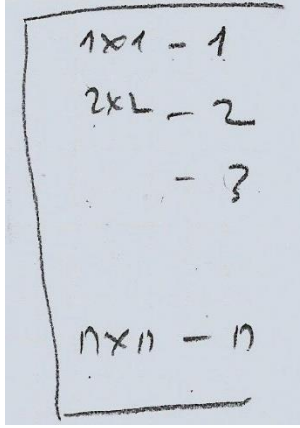
ÖA4'ün bu özel durumlar arasındaki ilişkiye dayanarak “Yani 1’den n’ye kadar olan sayıların küpleri toplamı 1’den n’ye kadar olan sayıların toplamının karesine eşittir.” varsayımında bulunduğu gözlemlenmiştir.

ÖA1, 2. problemde problemi okuduktan sonra problemi anlayıp istenilen değeri “7 taneden geçiyor.” şeklinde belirlemiştir. Ardından problem durumu hakkında genellemeye ulaşabilmek için özel örnek vererek problemi çözmeye başlayacağını belirtmiştir. Bu durumu “Daha küçük boyutta dikdörtgenler düşünüp onlar için de bakalım. Aralarında bir ilişki ya da bir şey bulabilecek miyim ki onu genelledebileyim $m \times n$ ’ye bir fikrim oluşsun.” biçiminde dile getirmiştir. Daha sonra ÖA1, özel örnekleri rastgele seçerek bunları Şekil 8’deki gibi çizmiştir ve köşegenin kaç kareden geçtiğini belirlemiştir.



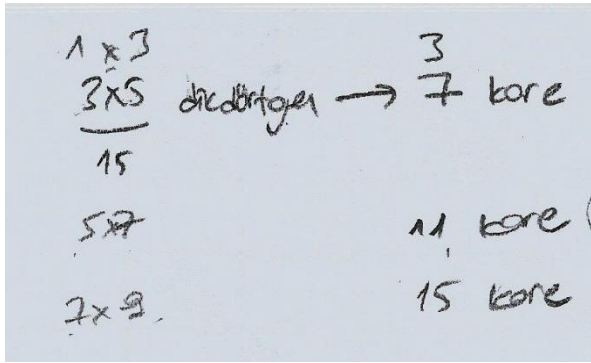
Şekil 8. ÖA1’in 2. probleme ait çözümünden bir bölüm

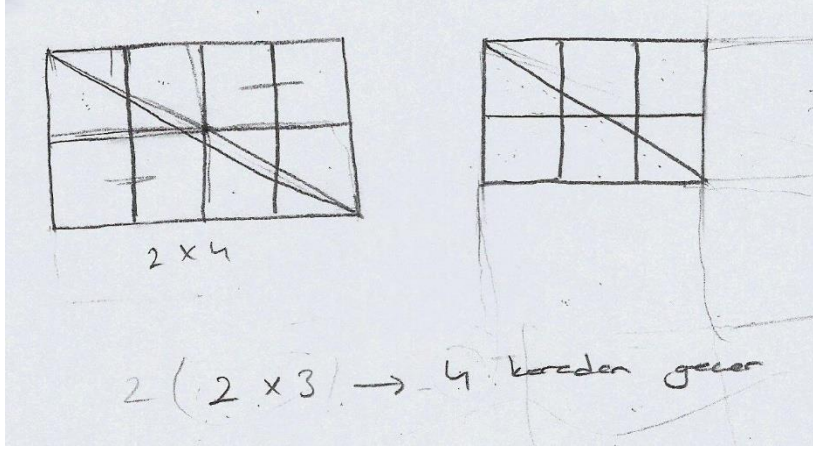
ÖA1, m ile n’nin eşit olduğu durum için özel örnekler vererek bir varsayım belirtmiştir. ÖA1 bu durumu “m ile n farklı mı olması gerekiyor? Yok hayır aynı da olabilir, sonuçta her kare bir dikdörtgen. Mesela 1x1 için köşegen içindeki 1 kareden geçiyor, 2x2 için eşitse neler oluyor yani onu bulmaya çalışıyorum. 2x2 için 2 taneden geçecek, 3x3 için 3 taneden geçecek, bu böyle devam edecek. Yani $n \times n$ için aslında köşegen n kareden geçecek.” şeklinde açıklamıştır ve bunları Şekil 9’daki gibi yazmıştır.



Şekil 9. ÖA1'in 2. probleme ait çözümünden bir bölüm

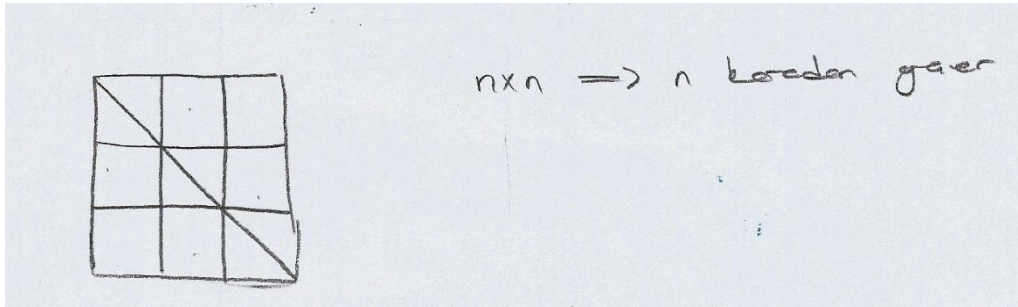
ÖA1 özel örnekleri çoğaltarak bu özel örnekler arasında ilişki aramaya devam etmiştir ve bunları Şekil 10'daki yazmıştır.





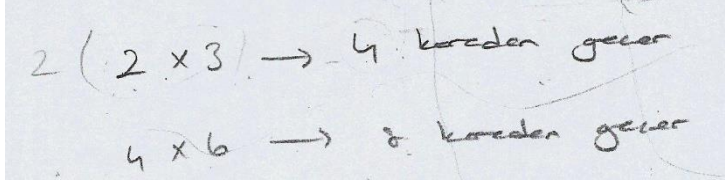
Şekil 11. ÖA2'nin 2. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA2, m ile n 'nin eşit olduğu durum için “*İuu, yani burada sonuçta m , n farklı olsun dememiş kare de olabilirdi bu*” şeklinde düşünmüştür. ÖA2 bu düşünce ve özel örneklerden yola çıkarak bir varsayım belirtmiştir. Bu durumu “*2x2 tipinde bir kare çizdim 2 tanesinden geçti. Aynı sayıda olanlardan sürekli yani 3x3'te de 3 kareden geçecek. Yani $n \times n$ tipindeyse köşegen n kareden geçer.*” cümleleri ile dile getirmiştir. ÖA2'nin 2x2 boyutundaki kare için ve 3x3 boyutundaki kare için ayrı ayrı şekiller çizmediği gözlemlenmiştir. ÖA2, önce 2x2 boyutundaki kareyi çizmiştir, köşegenin kaç kareden geçtiğini belirleyince şekli 3x3 boyutundaki kareye dönüştürmüştür ve köşegenin kaç kareden geçtiğini belirlemiştir. ÖA2 bu durum için verdiği özel örnekleri Şekil 12'deki gibi çizmiştir ve varsayımını yazmıştır.



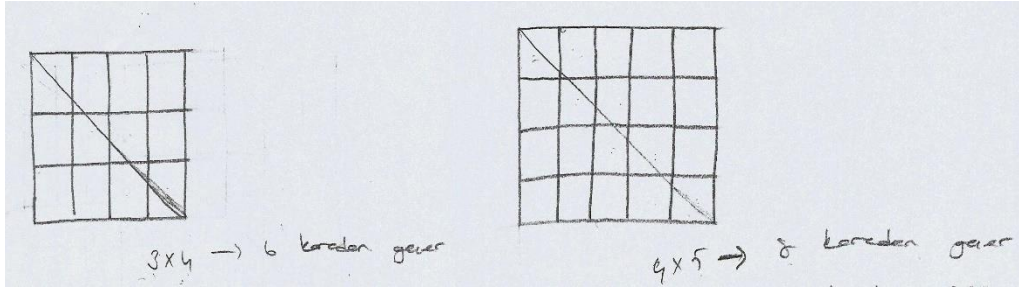
Şekil 12. ÖA2'nin 2. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA2 problem durumu için özel örnekleri çoğaltarak bunlar arasında ilişki aramaya devam etmiştir. ÖA2 verdiği özel örneklerle dayanarak “*Mesela 2x3'lükte 4 kareden geçiyor. 2 katına çıkarıyorum, 4x6'lıkta 8 kareden geçiyor. Yani 2 katına çıkıyor geçtiği kare*” şeklinde bir ilişki düşünmüştür ve bu düşüncesine göre özel örneklerden yola çıkarak 4x6 boyutundaki dikdörtgen için köşegenin geçtiği kare sayısını Şekil 13'teki gibi yazmıştır.



Şekil 13. ÖA2'nin 2. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA2, 6x9 şeklinde bir dikdörtgen çizip köşegenin 12 kareden geçtiğini görünce düşüncelerini “Yani 2x3'lük varken 4x6'ya bakmaya, 6x9'a bakmaya gerek yok. Ama 2x3'lükte neden 4 kareden geçtiği ile ilgili bir şey yakalayabilir miyim acaba? Sadece burada aralarında asal olanları inceleyerek bir şeye ulaşabilirim.” şeklinde ifade etmiştir. Ardından ÖA2 özel örnek vermeye devam etmiştir. Bu özel örnekleri Şekil 14'teki gibi çizmiştir ve çizdiği dikdörtgenlerde köşegenin kaç kareden geçtiğini yazmıştır.



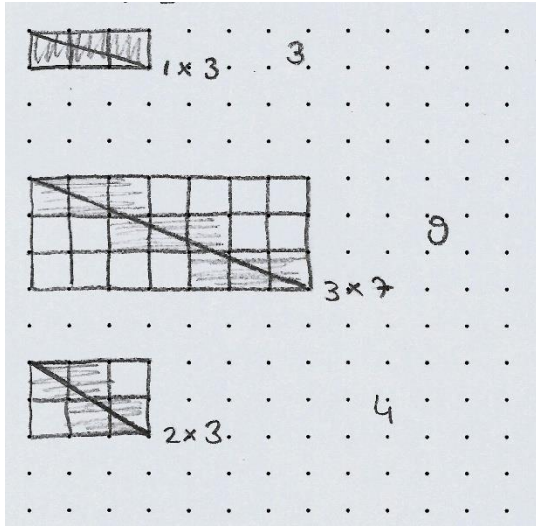
Şekil 14. ÖA2'nin 2. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA2'nin bütün bu özel durumlar arasında uzun süre ilişki aradığı ve bu özel durumlar arasındaki ilişkiye dayanarak “Köşegenin geçtiği kare sayısı kenarların toplamının 1 eksiği oluyor.” varsayımında bulunduğu gözlemlenmiştir. Ardından ÖA2'nin “Evet 3x5'te 8, 7 çıktı; 4x5'te 9, 8 çıktı. Ama 3x6'da 9, 6 kareden geçiyor aralarında asal değil bu o yüzden. O zaman aralarında asal değilken 1 çıkarmıyoruz. Burada 3x6'da 3 eksiği, 2x4'te 2 eksiği, 2x2'de 2 eksiği. Ebob'ları o zaman.” şeklinde özel örnekler vererek varsayımını kontrol ettiği ve bunun sonucunda önceki akıl yürütmelerine ve özel örnekler arasındaki ilişkiye dayanarak yeni bir varsayıma ulaştığı ve bu varsayımı Şekil 15'teki gibi yazdığı gözlemlenmiştir.

$$(n+m) - \text{ebob}(m,n)$$

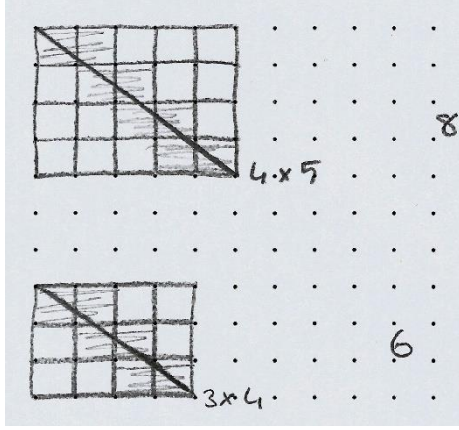
Şekil 15. ÖA2'nin 2. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA3, 2. problemde problemi okuduktan sonra problemi anlayıp istenilen değer için “Yani zaten taralı karelerden geçiyor. Kaç tane? 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; 7 tane.” açıklamalarında bulunmuştur. Ardından problem durumu hakkında genellemeye ulaşabilmek için özel örnekler vererek problemi çözmeye başlayacağını belirtmiştir. Bu durumu “*Hmm mesela kaçta kaç olsun? 1’e 3 olsun diyelim. Burada köşegen 3 tanesinin içinden geçti. Örnekleri artırsam işime yarar bir şey çıkar mı acaba? 3’e 7’lik; buna baktığımız zaman 9 taneden geçmiş oldu. 2’ye 3’lük alsam 4 taneden geçti.*” şeklinde dile getirmiştir. Daha sonra ÖA3, özel örnekleri rastgele seçerek bunları Şekil 16’daki gibi çizmiştir ve köşegenin kaç kareden geçtiğini belirlemiştir.



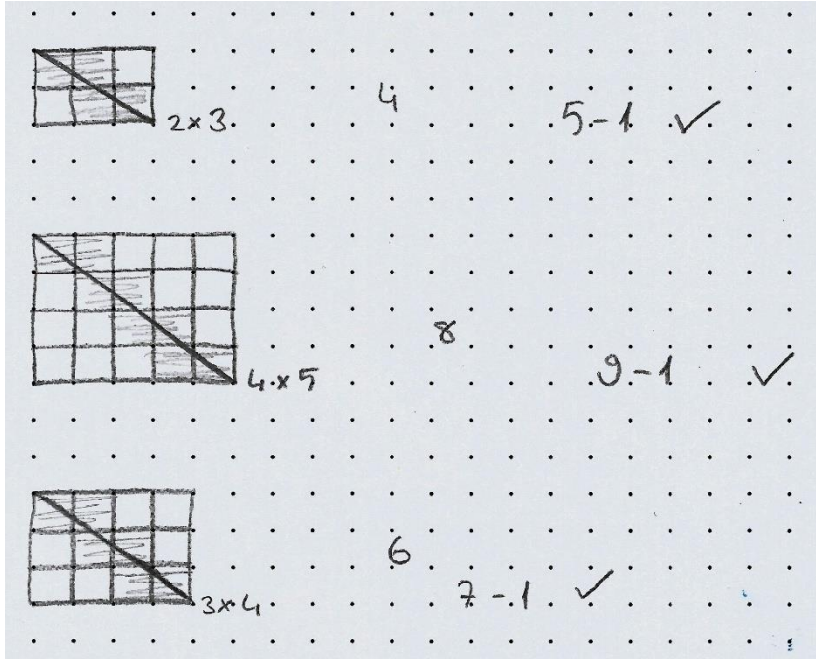
Şekil 16. ÖA3'ün 2. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA3, bu özel durumlar arasında bir ilişki aramış fakat bulamayınca özel örnekleri çoğaltacağını belirtmiştir. Bu durumu “*Yok hayır bunlardan bir şeye ulaşamıyorum. Zaten iki üç örneğe bakarak genelleme yapmak zor. O zaman 4’e 5 olsun, 8 taneden geçiyor.*” şeklinde dile getirmiştir ve ÖA3, verdiği özel örnekleri Şekil 17’deki gibi çizmiştir ve köşegenin kaç kareden geçtiğini belirlemiştir.



Şekil 17. ÖA3'ün 2. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA3, bu özel durumlar arasında da bir ilişki aramış bir ilişkiye ulaşamayınca özel örnekleri çoğaltmaya devam etmiştir. ÖA3'ün bütün bu özel durumlar arasındaki ilişkiye dayanarak “Köşegenin geçtiği kare sayısını bulmak için kenarlarını toplayıp 1 çıkarıyoruz yani m artı n eksi 1” varsayımında bulunmuştur. Ardından ÖA3'ün çizdiği bütün durumlar için varsayımını kontrol ettiği gözlemlenmiştir. ÖA3 ün varsayımını kontrol ettiği özel örneklerden bazıları Şekil 18'deki gibidir.



Şekil 18. ÖA3'ün 2. probleme ait çözümünden bir bölüm

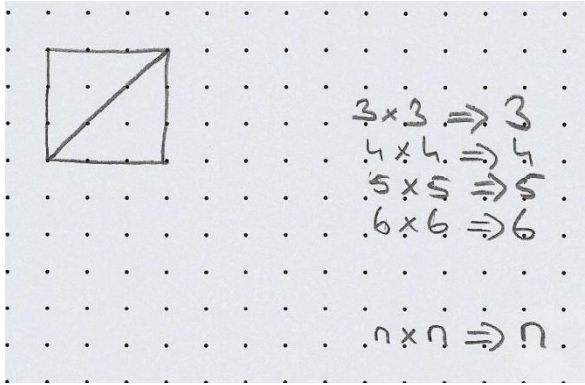
ÖA3'ün “Evet, yani bunlarda oluyor, evet 1 eksiği ama burada 3'e 3'lükte değil, burada 3 çıkarıyorum. 2'ye 4'lükte de değil burada 2 çıkarıyorum. 3'e 6'lukta da 3 çıkarıyorum.

Acaba aralarında asalken 1 çıkarıyorum ama asal değilken ne çıkarıyorum? Oranı mı? İki acaba ebob'larının 1. kuvveti mi diyeceğim. Hepsine uyuyor mu?" şeklindeki ifadelerinden özel örnekler vererek varsayımını kontrol ettiği ve bunun sonucunda özel örnekler arasındaki ilişkiye dayanarak yeni bir varsayıma ulaştığı ve bu varsayımı bütün özel örnekler için kontrol ettiği ve ulaştığı varsayımı Şekil 19'daki gibi yazdığı gözlemlenmiştir.

$$n + m - \text{ebob}(n, m).$$

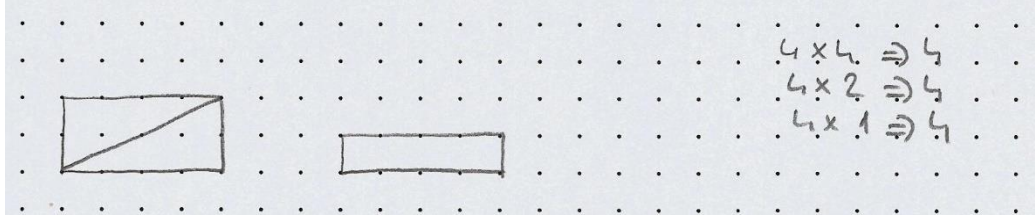
Şekil 19. ÖA3'ün 2. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA4, 2. problemde problemi okuduktan sonra problemi anlayıp istenilen değer için “Burada zaten çizilmiş halini vermiş bize, direkt sayarım yani 7.” açıklamalarında bulunmuştur. Ardından ÖA4 problem durumu için ilk olarak özel örnek vereceğini belirtmiştir. Bu durumu “3x3 bir tane kare olsun, çizelim. 3 tanesinden geçecekti.” şeklinde ifade etmiştir. Ardından sistematik bir şekilde özel örneklerini çizmeden çoğaltarak ve bu özel örnekler arasındaki ilişkiye dayanarak “ $n \times n$ olduğunda köşegen n tane kareden geçer.” varsayımında bulunduğu ve bunları Şekil 20'deki gibi yazdığı gözlemlenmiştir.



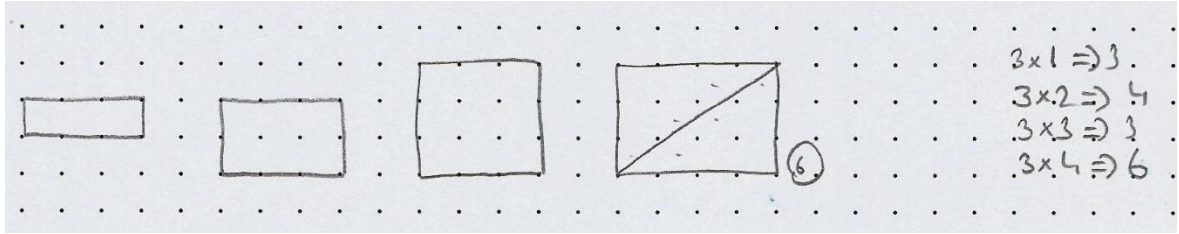
Şekil 20. ÖA4'ün 2. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA4, verilen problem durumu için özel örneklerini çoğaltarak örnekleri Şekil 21'deki gibi çizmiştir ve çizdiği her dikdörtgen için dikdörtgenin köşegeninin kaç kareden geçtiğini yazmıştır.



Şekil 21. ÖA4'ün 2. probleme ait çözümünden bir bölüm

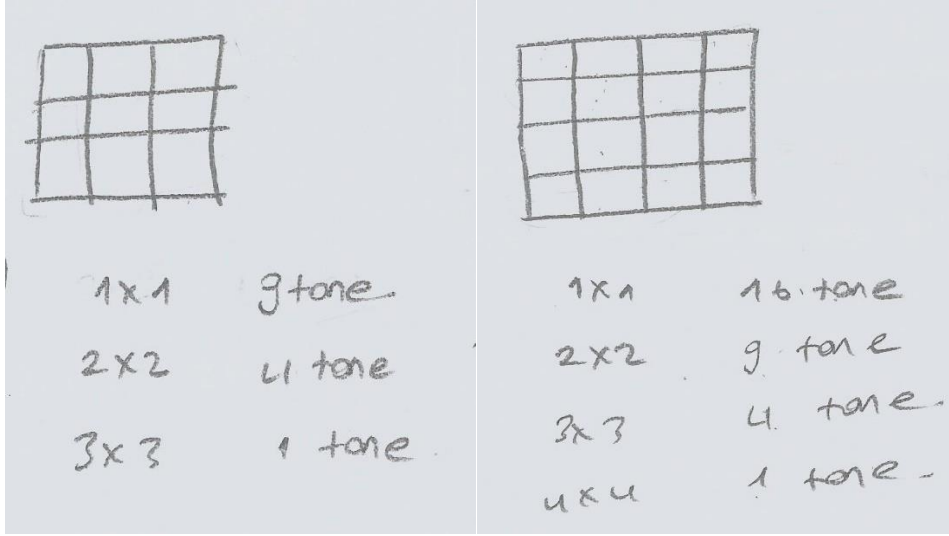
ÖA4, bu özel durumlar arasında bir ilişki aramış fakat bulamayınca özel örneklerini çoğaltarak Şekil 22'deki gibi çizmiştir ve çizdiği her dikdörtgen için dikdörtgenin köşegeninin kaç kareden geçtiğini yazmıştır.



Şekil 22. ÖA4'ün 2. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA4'ün, özel örnekleri daha da çoğaltıp bu özel durumlar arasındaki ilişki için bir arayış içinde olduğu, varsayımda bulunmak için çabaladığı fakat problem durumu için istenilen varsayıma ulaşamadığı gözlemlenmiştir.

ÖA1, 3. problemde problemi okuduktan sonra problemi anlayıp istenilen değeri “Burada 5 tane kare var.” şeklinde belirlemiştir. Ardından ÖA1'in problem durumu için sistematik bir şekilde özel örnekler verdiği gözlemlenmiştir. Bu durumu “Şimdi kare dediğimiz şey $n \times n$ tipinde olduğu için şöyle diyeyim 1×1 için 1 kare var zaten, 2×2 için de 5 kare, 3×3 için bakalım.” şeklinde ifade etmiştir. Ardından problem durumu için özel örnekleri çoğaltarak örnekleri Şekil 23'teki gibi çizmiştir ve çizdiği her kare için bütün farklı karelerin sayısını yazmıştır.



Şekil 23. ÖA1'in 3. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA1'in bu özel durumlar arasındaki ilişkiye dayanarak bir varsayımda bulunduğu ve bu varsayımı Şekil 24'teki gibi yazdığı gözlemlenmiştir.

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \left(\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} \right)$$

Şekil 24. ÖA1'in 3. probleme ait çözümünden bir bölüm

Ardından Şekil 25'teki gibi özel örnek vererek varsayımını kontrol ettiği gözlemlenmiştir.

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \left(\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} \right)$$

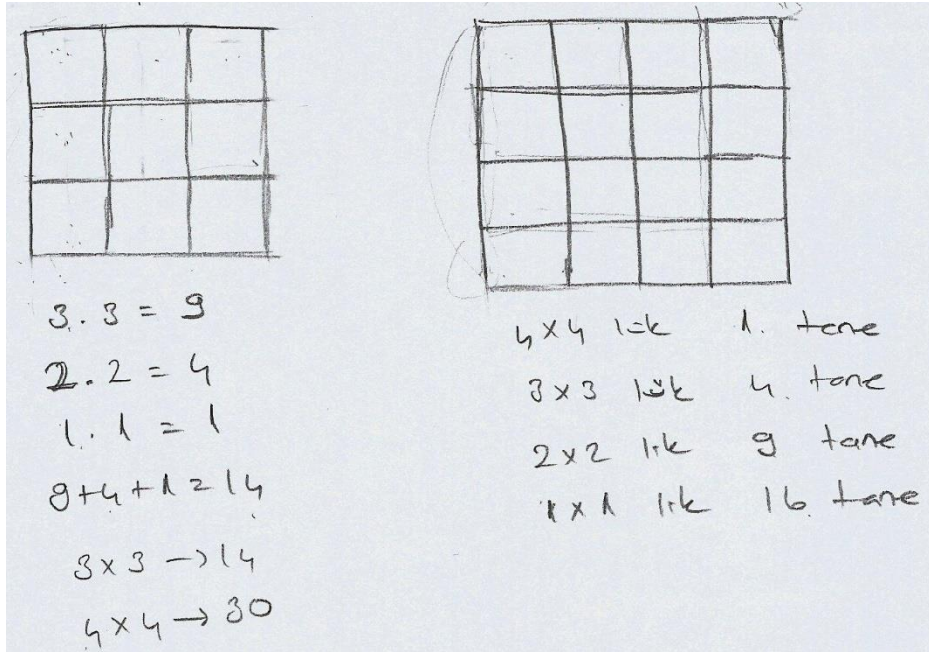
$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$$

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{6}$$

$$\frac{3 \cdot 4 \cdot 7}{6}$$

Şekil 25. ÖA1'in 3. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA2, 3. problemde problemi okuduktan sonra problemi anlayıp istenilen değer için “Yani burada az kare olduğu için zaten, evet sayılabilir, 5 tane kare var burada.” açıklamalarında bulunmuştur. Ardından ÖA2’nin problem durumu için sistematik bir şekilde özel örnekler verdiği gözlemlenmiştir. ÖA2, özel örnekleri Şekil 26’daki gibi çizmiştir ve çizdiği her kare için bütün farklı karelerin sayısını yazmıştır.



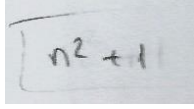
Şekil 26. ÖA2’nin 3. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA2’nin bu özel durumlar arasındaki ilişkiye dayanarak bir varsayımda bulunduğu ve bu varsayımı Şekil 27’deki gibi yazdığı gözlemlenmiştir.

$$m \times m \rightarrow 1^2 + 2^2 + \dots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

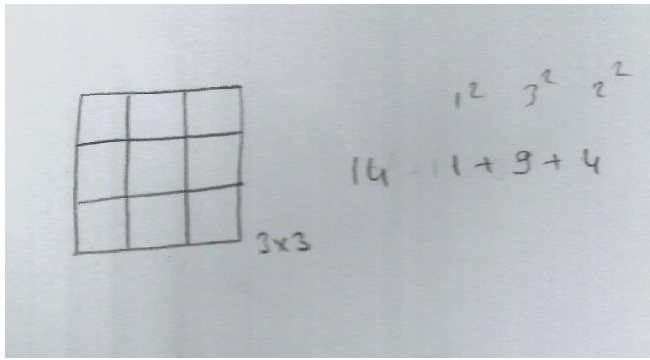
Şekil 27. ÖA2’nin 3. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA3, 3. problemde problemi okuduktan sonra problemi anlayıp istenilen değer için “Sayacağız kaç tane var, zaten 5 tane kare var.” açıklamalarında bulunmuştur. Ardından ÖA3’ün sadece problemdeki duruma bakarak bir varsayımda bulunduğu ve bu varsayımı Şekil 28’deki gibi yazdığı gözlemlenmiştir.


$$n^2 + 1$$

Şekil 28. ÖA3'ün 3. probleme ait çözümünden bir bölüm

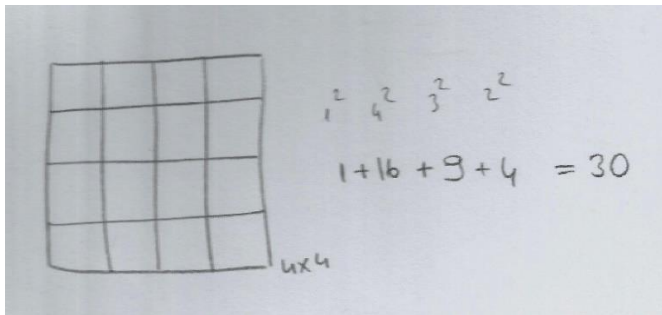
ÖA3 bütün mümkün durumları düşünmek zorunda olduğunu ve varsayımını kontrol edeceğini belirtmiştir. Bu durumu “*Ama ben sadece 2x2 ye bakarak bunu oluşturdum, bütün kareler için sağlar mı bakalım?*” cümleleri ile dile getirmiştir. Ardından Şekil 29’daki gibi özel örnekler vererek varsayımını kontrol ettiği gözlemlenmiştir.


$$16 = 1 + 9 + 4$$

3x3

Şekil 29. ÖA3'ün 3. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA3, oluşturduğu varsayımın doğru olmadığını “*Sağlamadı, 3x3 için sağlamadı, demek ki bu değil.*” şeklinde dile getirmiştir. Ardından ÖA3'ün problem durumu için bir ilişki aradığından sistematik bir şekilde özel örnek vermeye devam ettiği gözlemlenmiştir. ÖA3, verdiği özel örneği Şekil 30’daki gibi çizmiştir ve çizdiği kare için bütün farklı karelerin sayısını yazmıştır.


$$30 = 1 + 16 + 9 + 4$$

4x4

Şekil 30. ÖA3'ün 3. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA3'ün bu özel durumlar arasındaki ilişkiye dayanarak bir varsayımda bulunduğu ve bu varsayımı Şekil 31'deki gibi yazdığı gözlemlenmiştir.

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

Şekil 31. ÖA3'ün 3. probleme ait çözümünden bir bölüm

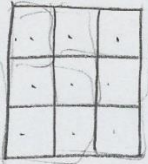
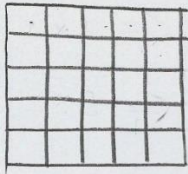
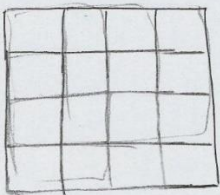
Ardından ÖA3'ün, Şekil 32'deki gibi özel örnek vererek varsayımını kontrol ettiği gözlemlenmiştir.

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

$$\frac{3 \cdot 4 \cdot (7)}{6} = 14$$

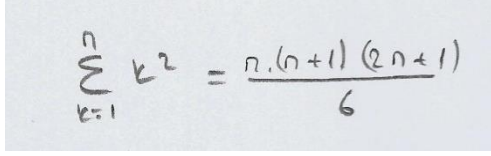
Şekil 32. ÖA3'ün 3. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA4, 3. problemde problemi okuduktan sonra problemi anlayıp istenilen değer için “Şu anda 5 tane kare vardır bu şekil üzerinde. 1,2,3,4 bir de dıştaki büyük olan 5 tane.” açıklamalarında bulunmuştur. ÖA4, bir ilişki aradığını ve bunun için de özel örnek verdiğini belirtmiştir. Bu durumu “2x2’de 5 tane var, önce bir 3x3’te nasıl bir şey oluyor diye onu da bir gözlemlemek isterdim, bir ilişki kurmak istiyorum.” cümleleriyle dile getirmiştir. ÖA4, özel örnek vermeye sistematik bir şekilde devam ederek özel örnekleri Şekil 33’teki gibi çizmiştir ve çizdiği her kare için bütün farklı karelerin sayısını yazmıştır.

	$\begin{array}{r} 3 \times 3 \\ 1 \times 1 \Rightarrow 9 \\ 2 \times 2 \Rightarrow 4 \\ 3 \times 3 \Rightarrow 1 \end{array}$	
	$\begin{array}{r} 4 \times 4 \\ 1 \times 1 \Rightarrow 16 \\ 2 \times 2 \Rightarrow 9 \\ 3 \times 3 \Rightarrow 4 \\ 4 \times 4 \Rightarrow 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 5 \times 5 \\ 1 \times 1 \Rightarrow 25 \\ 2 \times 2 \Rightarrow 16 \\ 3 \times 3 \Rightarrow 9 \\ 4 \times 4 \Rightarrow 4 \\ 5 \times 5 \Rightarrow 1 \end{array}$

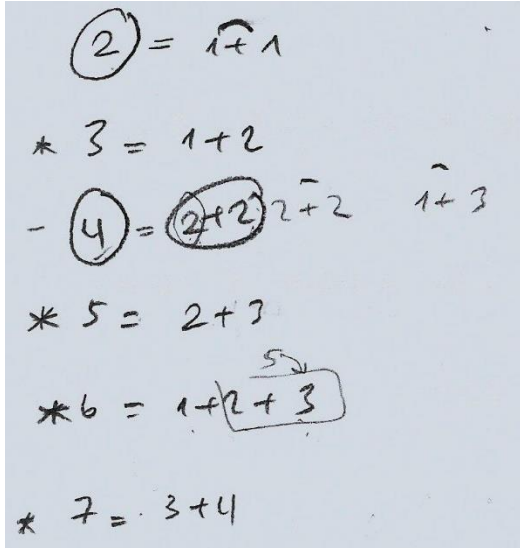
Şekil 33. ÖA4'ün 3. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA4'ün bu özel durumlar arasındaki ilişkiye dayanarak bir varsayımda bulunduğu ve bu varsayımı Şekil 34'teki gibi yazdığı gözlemlenmiştir.


$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

Şekil 34. ÖA4'ün 3. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA1'in 4. problemde problemi anlamak için problemi birkaç kere okuduğu gözlemlenmiştir. Problemi anladıktan sonra "2 yazılabiliyor mu yazılamıyor mu? Yazılamıyor. 3 olur 1 artı 2'den. Mesela 4 yok 4'te de yok, ya 2 artı 2 var ya da 1 artı 3 var ardışıklık yok. 5'te 2 artı 3. Mesela 6'da 1 artı 2 artı 3. 7 de olur 3 artı 4'ten." şeklinde düşünmüştür ve sistematik bir şekilde verdiği özel örnekleri Şekil 35'teki gibi yazmıştır.



(2) = 1+1
* 3 = 1+2
- (4) = (2+2) 2+2 1+3
* 5 = 2+3
* 6 = 1+2+3
* 7 = 3+4

Şekil 35. ÖA1'in 4. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA1, verdiği örneklerle ilgili olarak bir süre düşündükten sonra düşüncelerini "Şey düşünüyorum, tek sayılarda sorun yok ama hep çift sayılarda mı acaba yazılamama durumu oluyor? Gerçi 6 yazıldı. Bu bir dursun ama tek sayılar yazılıyor." şeklinde ifade etmiştir. ÖA1'in bu özel durumlara dayanarak "Bütün tek sayılar ardışık iki sayının toplamı olarak yazılabilir." varsayımında bulunduğu gözlemlenmiştir. ÖA1, özel örnek vermeye devam etmiştir ve sistematik bir şekilde verdiği özel örnekleri Şekil 36'daki gibi yazmıştır.

$$8 = 1 + 4$$

$$* 9 = 2 + 2 + 4$$

$$* 10 = 1 + (2 + 3 + 4)$$

Şekil 36. ÖA1'in 4. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA1, özel örnekler arasındaki ilişkiye dayanarak “2 yazılamıyor, 4 yazılamıyor, 6 oldu, 8 yazılamıyor, 10 da oldu. Mesela 16 yazılabiliyor mu?” şeklinde düşünmüştür. ÖA1, 16'nın yazılıp yazılamadığı konusunda uzun bir süre çaba göstermiş ve ardından “En az iki ardışık sayının toplamı olan sayılar 2^n şeklinde yazılamaz.” varsayımında bulunmuştur.

ÖA2'nin, 4. problemde problemi okuduktan sonra özel örnek vermeden tamamen ön bilgilerine dayalı olarak “Bütün tek sayılar ardışık iki tamsayının toplamı olarak yazılabilir.” varsayımında bulunduğu gözlemlenmiştir. ÖA2, bu varsayımı oluşturduktan sonra çift sayılar için sistematik bir şekilde verdiği özel örnekleri Şekil 37'deki gibi yazmıştır.

2 yazılamaz.

4 yazılamaz.

6 = 1 + 2 + 3

8 yazılamaz

10 = 1 + 2 + 3 + 4

12 = 3 + 4 + 5

14 = 2 + 3 + 4 + 5

16 yazılamaz.

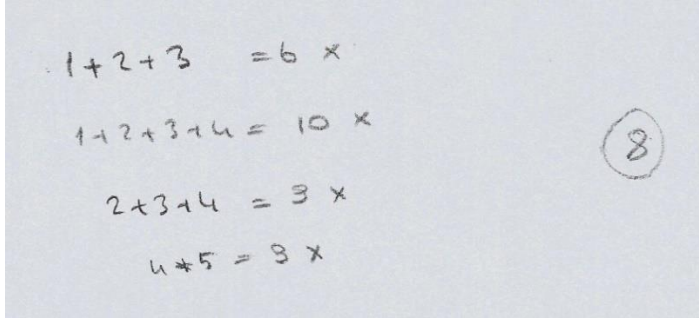
18 = 3 + 4 + 5 + 6

20 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6

Şekil 37. ÖA2'nin 4. probleme ait çözümünden bir bölüm

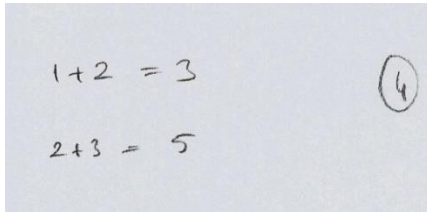
ÖA2'nin bu özel durumlar arasındaki ilişkiye dayanarak “En az iki ardışık sayının toplamı olan sayılar 2^n şeklinde yazılamaz.” varsayımında bulunduğu gözlemlenmiştir.

ÖA3'ün, 4. problemde problemi okuduktan sonra özel örnek vermeden tamamen ön bilgilerine dayalı olarak “Tek tamsayılar ardışık iki tamsayının toplamı olarak yazılabilir.” varsayımında bulunduğu gözlemlenmiştir. ÖA3'ün, bu varsayımı oluşturduktan sonra çift sayılar için rastgele verdiği özel bir örneğin problem durumu için geçerli bir örnek olup olmadığını “Mesela 8 oldukça küçük bir tamsayı. Ondan küçük olan tamsayıları düşünüyorum. Ve ardışık olması gerekiyor bunların. 1,2,3 diyorum o zaman zaten 6 yapıyor, değil. 4'ü eklersem yanlarına 10 yapıyor, bu da değil. 1'i çıkarmayı düşünüyorum şu an. 2,3,4 diyorum bu da zaten 9 yapıyor, bu da değil. Eeee 3,4 de olmaz ya da 1,3,4 olur ama onlar da ardışık olmuyor zaten. Bu yüzden olmuyor ya da 4, 5'i düşünüyorum, o da değil. Yani 8 mesela olmuyor gerçekten.” şeklindeki düşünceleri ile incelediği gözlemlenmiştir. Bu incelemesini Şekil 38'deki gibi yazmıştır.


$$\begin{array}{l} 1+2+3 = 6 \times \\ 1+2+3+4 = 10 \times \\ 2+3+4 = 9 \times \\ 4+5 = 9 \times \end{array} \quad (8)$$

Şekil 38. ÖA3'ün 4. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA3, bir süre düşünmüş ve düşüncelerini “Başka 11, 10 oldu, 6 da oldu, 8 olmuyor. Peki 4 oluyor mu? 4 de olmuyor. Yani ardışık iki tamsayının toplamı olarak ya da en az iki ardışık tamsayının toplamı olarak yazamıyorum. Mesela yine aynı şekilde 1 artı 2, 3 yapıyor ya da 2 artı 3 zaten 5. Değil. Yani yazamıyorum 4'ü de yazamadım.” cümleleriyle dile getirmiştir. Ve ÖA3, bu düşüncelerini Şekil 39'daki gibi yazmıştır.


$$\begin{array}{l} 1+2 = 3 \\ 2+3 = 5 \end{array} \quad (4)$$

Şekil 39. ÖA3'ün 4. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA3, örnekler arasındaki ilişkiye dayanarak “4’ün katlarına mı yönelmem gerekiyor? 12’ye bir bakmak istiyorum nedense. 12’yi yazabiliriz 3 artı 4 artı 5 şeklinde. 4’ün katları değilmiş demek ki. Hmmm peki 2? 2 de evet, 2’yi de yazamıyoruz. Birden 16’yı bir denemek istedim. 2’nin 4. kuvveti 16. 3 artı 4 artı 5, 12 yapıyor. Mesela 3, 4, 5’e 6 eklersek olmuyor bir kere 18 olur. Onun dışında 4, 5, 6 dersek o da 15, bu da değil. 5, 6, 7 bu zaten daha büyük bir sayı oldu, yok 16 da olmuyor, olmuyor evet.” şeklinde düşünmüştür. ÖA3, bu düşüncelerini Şekil 40’daki gibi yazmıştır.

$$3+4+5=12 \checkmark$$

$$3+4+5+6=18 \times$$

$$4+5+6=15 \times$$

$$5+6+7=18 \times$$

$$(16) = 2^4$$

Şekil 40. ÖA3’ün 4. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA3’ün bu özel durumlar arasındaki ilişkiye dayanarak “En az iki ardışık sayının toplamı olan sayılar 2’nin kuvveti şeklinde yazılamaz.” varsayımında bulunduğu gözlemlenmiştir. ÖA3 uzun bir süre düşündükten sonra yaptıklarını gözden geçirmiş ve düşüncelerini “İki ardışık sayının toplamı tek sayıları veriyor. Peki, üç ardışık sayının toplamı? 1 artı 2 artı 3, 6’yı veriyor; 2 artı 3 artı 4, 9’u; 3 artı 4 artı 5, 12. 3’ün katı olan sayılar” şeklinde dile getirmiştir. ÖA3, bu düşüncesinden ve verdiği özel örnekler arasındaki ilişkiden yola çıkarak “Üç ardışık sayının toplamı 3’e bölünür.” varsayımında bulunmuştur.

ÖA4, 4. problemde problemi okuduktan sonra bir süre sessizce düşünmüş ve problemi anlamak için problemi bir kez daha okumuştur. Ardından ÖA4’ün problem durumu için sistematik bir şekilde özel örnekler verdiği gözlemlenmiştir. Bu durumu “1’i en az iki ardışık tamsayının toplamı olarak yazabiliyorum, 0 artı 1. 2’yi yazamadım mesela 2’yi bekletelim. 3’ü yazabiliyorum, 1 artı 2. 4’ü yazabiliyor muyum? İuu, yok hayır, yazamıyorum.” şeklinde ifade etmiştir. ÖA4, bu özel durumlar arasındaki ilişkiye dayanarak “Çift sayıları yazamıyorum, çift sayılar ardışık sayıların toplamı değil.” şeklinde yanlış bir varsayımda bulunmuştur. ÖA4, oluşturduğu varsayımı özel örnek vererek kontrol ettiğini ve varsayımın yanlış olduğunu belirtmiştir. Bu durumu “6’yı inceleyeyim mesela. 6; 3 artı 3 oluyor ardışık değil ama, 4 artı 2 olmuyor, 1 artı 2 artı 3. 6’yı yazabiliyorum 6 bir çift. Demek ki değil.”

şeklinde ifade etmiştir. ÖA4'ün özel örnekleri sistematik bir şekilde daha da çoğaltarak Şekil 41'deki gibi yazdığı gözlemlenmiştir.

$$\begin{array}{cccc} 1 + 0 = 1 & 3 = 1 + 2 & 5 = 2 + 3 & 7 = 4 + 3 \\ \cancel{X} = & \cancel{X} = 1 + 2 + & 6 = 1 + 2 + 3 & \cancel{X} = 3 \\ & & & 1, 2, 3 \end{array}$$

Şekil 41. ÖA4'ün 4. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA4, bu özel durumlar arasındaki ilişkiye dayanarak varsayımını “*En az iki ardışık sayının toplamı olan hiçbir sayı 2'nin kuvveti şeklinde yazılamaz.*” şeklinde belirtmiştir. ÖA4'ün “*16'yı yazabilir miyim? 16'yı yazıp yazamadığıma bakalım.*” cümleleri ve gerekli incelemeler ile varsayımını kontrol ettiği gözlemlenmiştir. ÖA4, “*2ⁿ şeklinde olanları yazamıyorum. Bunlar hariç bütün sayıları yazabiliyorum. Bunları yazamadığım için onları yazabiliyorum. Yani öyle bir düşünce var.*” şeklinde düşünmüştür. ÖA4'ün özel örnekleri daha da çoğaltarak Şekil 42'deki gibi yazdığı gözlemlenmiştir.

$$\begin{array}{l} 15 = 4 + 5 + 6 \\ 13 = 6 + 7 \\ 13 = 6 + 7 \end{array}$$

Şekil 42. ÖA4'ün 4. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA4'ün bütün bu özel durumlar arasındaki ilişkiye dayanarak “*Tek sayıların hepsi iki ardışık sayının toplamıdır.*” varsayımında bulunduğu gözlemlenmiştir.

4.1.2 Özelleştirme Boyutunu Atlama

ÖA3, 1. problemde problemi okuduktan sonra problemi anlayıp istenilen değeri belirlemiştir. Bu durumu “*İlk başta gördüğümde işte 1'in küpü artı 2'nin küpü artı 3'ün küpü artı 4'ün küpü yani küplerini alıp toplamaya gitmek istiyorum. Çünkü terim sayısı fazla değil. Herhangi bir formül kullanmama da gerek yok ilk başta. Böyle görünce direkt*

küplerini alıp topluyorum. Böyle de 100 buldum.” şeklinde açıklamıştır. Sonra ÖA3, özel örnek vermeden tamamen ön bilgilerine dayalı olarak istenilen ilişkiyi hatırlamaya çalıştığını “Bu şekilde verilen ardışık küp toplamını bulmaya yarayacak matematiksel bir formül, böyle bir formül vardı. Tam olarak emin değilim nasıl olduğuna ama n tane terimin küpünü alarak topladığımızda sanırım böyle bir formül vardı, bir dakika hatırlayacağım.” cümleleriyle belirtmiştir. ÖA3 hatırladığı formülü Şekil 43’teki gibi yazmıştır.

$$\left(\frac{n \cdot (n+1)}{2} \right)^2$$

Şekil 43. ÖA3’ün 1. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA3, yazdığı formülün doğruluğundan emin olamadığından formülü özel örnek vererek kontrol edeceğini “Bunu ezbere yazdım, geçmiş bilgilerimden ama tam olarak da emin değilim çok uzun zaman oldu kullanmayalı. Sağlar mı peki, onu bir deneyeyim.” cümleleri ile dile getirmiştir. Ardından Şekil 44’teki gibi özel örnekler vererek varsayımını kontrol ettiği gözlemlenmiştir.

$$\left(\frac{n \cdot (n+1)}{2} \right)^2$$

$$\left(\frac{4 \cdot 5}{2} \right)^2 = 100$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$$

$$\left(\frac{3 \cdot 4}{2} \right)^2 = 36$$

Şekil 44. ÖA3’ün 1. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA3’ün 4. problemde problemi okuduktan ve çok kısa bir süre düşündükten sonra özel örnek vermeden varsayımda bulunduğu gözlemlenmiştir. Bu durumu “Hmm, en az iki ardışık sayının toplamı olarak yazılabilir mi? Aslında tek sayıları yazabiliriz. Tek tamsayılar ardışık iki tamsayının toplamı olarak yazılabilir.” şeklinde ifade etmiştir.

ÖA2, 4. problemde problemi okuduktan sonra özel örnek vermeden tamamen ön bilgilerine dayalı olarak bir varsayımda bulunmuştur. Bu durumu “*Buna benzer bir şey hatırlıyorum ama tek sayılarda tek sayılar zaten ardışık iki sayının toplamıdır. Bu soru tipini bir yerlerden hatırlar gibi oldum ama nerden hatırlıyor olabilirim. Geçen yıl bir seçmeli dersimizde problem çözüyorduk oradan hatırlıyor da olabilirim.*” şeklinde ifade etmiştir. Ardından ÖA2’nin “*3 mesela, 1 artı 2 ya da 5, 2 artı 3.*” şeklinde özel örnekler vererek varsayımını kontrol ettiği gözlemlenmiştir.

4.2 Genelleme Boyutuna İlişkin Bulgular ve Yorumları

Bu bölümde öğretmen adaylarının matematiksel düşünme süreçlerini incelemek amacıyla toplanan verilerin analizleri sonucunda matematiksel düşünmenin genelleme boyutuna dair bulgular ve yorumları yer almaktadır.

Öğretmen adayları problem çözme süreci içerisinde genelleme boyutunda bazı problemlerde problem durumuna uygun rastgele ya da özellikle sistematik bir şekilde verdikleri özel örnekler arasındaki ilişkiye veya problem durumu hakkındaki ön bilgilerine bağlı olarak bir genellemeye ulaşmışlardır. Öğretmen adayları bazı problemlerde ise verdikleri özel örnekler arasındaki ilişkiyi fark edemedikleri için bir genellemeye ulaşamamışlardır. Bunlardan yola çıkarak genelleme boyutuna ilişkin kodlar oluşturulmuştur.

Genelleme boyutuna ilişkin kodlar,

- Genelleme boyutunu tamamlama
- Genelleme boyutunu tamamlamama

olarak belirlenmiştir. Bu bölümde genelleme boyutuna ilişkin kodlar ayrı başlıklar ile ele alınmıştır.

4.2.1 Genelleme Boyutunu Tamamlama

ÖA2, 1. problemde problemi okuyup anladıktan sonra problemde istenilen değeri bulmuştur. ÖA2, problem durumu için bir formül hatırlamadığından hatırladığı formüllerin ona yardımcı olacağını düşünerek formülleri Şekil 45’teki gibi yazmıştır.

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{a_n \cdot (a_n + 1)}{2}, \quad a_i \in \mathbb{N}^+, 1 \leq i \leq n$$

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = \frac{a_n \cdot (a_n + 1) \cdot (2a_n + 1)}{2 \cdot 3}$$

Şekil 45. ÖA2'nin 1. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA2, bir ilişki kurmak amacıyla ön bilgilerine dayalı olarak yazdığı formüllerin onu sonuca götürüp götürmeyeceği, problem durumu ile alakalı olup olmadığı konusunda kararsızlık yaşadığını belirtmiştir ve bu durumu “Buradan ilerleyebilir miyim şu an, yani bu iki formülden benzer bir formül çıkarabilir miyim? Bir ilgisi var mıdır acaba?” cümleleri ile ifade etmiştir. Yazdığı formüllerde düzenleme yapmıştır ve problem durumu için bir sonuca ulaşamayacağını “Hiç alakası da olamayabilir, yok buradan bir şeye ulaşamayacağım galiba.” şeklinde dile getirmiştir. ÖA2, hatırladığı formüllerden bir yere varamayınca sistematik bir şekilde örnekler vermeye ve bu özel örnekler arasında ilişki aramaya başlamıştır. ÖA2, genelleme aşamasında özel durumlar arasındaki ilişkiyi fark edip bu ilişkiyi aritmetik olarak açıklamıştır ve genelleme için bütün mümkün durumları düşünmek zorunda olduğunu “Ama bu her seferinde böyle mi olacak? Bence böyle.” cümleleriyle dile getirmiştir. ÖA2, özel durumlar arasındaki ilişkiye dayalı olarak cebirsel bir genellemeye ulaşmıştır ve ulaştığı genellemeyi Şekil 46’daki gibi yazmıştır.

$$\left(\frac{a_n \cdot (a_n + 1)}{2} \right)^2 = (1 + 2 + \dots + a_n)^2 = 1^3 + 2^3 + \dots + a_n^3$$

Şekil 46. ÖA2'nin 1. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA3, 1. problemde problemi okuyup anladıktan sonra problemde istenilen değeri bulmuştur. Sonra ÖA3, problem durumu için özel örnek vermeden tamamen ön bilgilerine dayalı olarak istenilen ilişkiyi hatırlamaya çalıştığını belirtmiştir. Bu durumu “Böyle bir formül vardı, bir dakika hatırlayacağım.” cümleleri ile ifade etmiştir. ÖA3, tamamen ön bilgilerine dayalı olarak Şekil 47’deki gibi cebirsel bir genellemeye ulaşmıştır.

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2} \right)^2$$

Şekil 47. ÖA3'ün 1. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA4, 1. problemde problemi okuyup anladıktan sonra problemde istenilen değeri bulmuştur. ÖA4, sistematik bir şekilde özel örnekler vermeye ve bu özel örnekler arasında ilişki aramaya başlamıştır. ÖA4, genelleme aşamasında özel durumlar arasındaki ilişkiyi fark edip bu ilişkiyi sözel olarak “*Tabanların toplamlarının karesi oldu yani 1’den n’ye kadar olan sayıların küpleri toplamı, 1’den n’ye kadar olan sayıların toplamının karesine eşittir.*” şeklinde ifade etmiştir. ÖA4, özel durumlar arasındaki ilişkiye dayalı olarak Şekil 48’deki gibi cebirsel bir genellemeye ulaşmıştır.

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$$

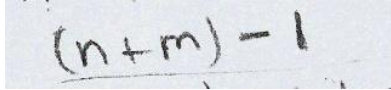
Şekil 48. ÖA4'ün 1. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA2, 2. problemde problemi okuyup anladıktan sonra problemde istenilen değeri bulmuştur. ÖA2, bir ilişki kurmak adına düşüncelerini “*Açılarla bir ilişkisi olabilir mi diyorum, ama yok gibi.*” şeklinde dile getirmiştir. ÖA2, açılı fikrinden bir şeye ulaşamayacağını anlayınca özel örnekler vermeye ve bu özel örnekler arasında ilişki aramaya başlamıştır. Birkaç özel örnek verdikten sonra ÖA2, m ile n’nin eşit olduğu durumu ele alıp sistematik bir şekilde özel örnekler vermeye başlamıştır. Bu özel örnekler arasındaki ilişkiyi fark edip bu ilişkiyi sözel olarak “*Bir dikdörtgen n x n tipindeyse köşegen n kareden geçiyor.*” şeklinde ifade etmiştir. ÖA2, özel durumlar arasındaki ilişkiye dayalı olarak bir genellemeye ulaşmıştır ve bunu Şekil 49’daki gibi ifade etmiştir.

$$n \times n \Rightarrow n \text{ kareden geçer}$$

Şekil 49. ÖA2'nin 2. probleme ait çözümünden bir bölüm

Ardından ÖA2 özel örnekler vermeye ve bu özel örnekler arasında ilişki aramaya devam etmiştir. Özel örnekleri incelerken bir ilişki aradığına dair düşüncelerini “*Taralı karelerle taralı olmayanlar arasında bir bağlantı kurmaya çalışıyorum ama zaten bizden istenen taralı olan kare sayısı.*” şeklinde dile getirmiştir. ÖA2 özel örnek vermeye devam etmiştir ve verdiği özel örneklerle dayanarak “*Mesela 2x3'lükte 4 kareden geçiyor. 2 katına çıkarıyorum. 4x6'lıkta 8 kareden geçiyor. Yani 2 katına çıkıyor geçtiği kare. Yani 2x3'lük varken 4x6'ya bakmaya, 6x9'a bakmaya gerek yok. Ama 2x3'lükte neden 4 kareden geçtiği ile ilgili bir şey yakalayabilir miyim acaba? Sadece burada aralarında asal olanları inceleyerek bir şeye ulaşabilirim.*” şeklinde bir ilişki düşünmüştür. Ardından ÖA2, özel örnekler vermeye ve bu özel örnekler arasında ilişki aramaya devam etmiştir. Bu durumu “*Mesela 3x4'ken 6 kareden geçiyor, 4x5'ken 8 kareden geçiyor bunların çarpımından bir şey çıkarıp buluyor olabiliriz. Çarpıtımda tüm karelerin sayısını buluyorum, bir şey çıkarttımda taralı olan karelere ulaşmak istiyorum o zaman çıkarttığım şey taralı olmayanlar ama onların da sayısını bilmiyorum ki. Hiç alakası olmuyor.*” şeklinde açıklamıştır. ÖA2 ilişki aramaya “*Taralı karelerin sayısı ile kenarların toplamının bir alakası olabilir mi? Toplamdan gitsem mesela 2x3'lük için topladım 5, 4 kareden geçiyor; 3x4'lükte kenarları topladım 7, 6 kareden geçiyor.*” cümleleri ile devam etmiştir. Bu özel örnekler arasındaki ilişkiyi fark edip bu ilişkiyi sözel olarak “*Aaa 1 eksiği, köşegenin geçtiği kare sayısı kenarların toplamının 1 eksiği.*” şeklinde ifade etmiştir. ÖA2, özel durumlar arasındaki ilişkiye dayalı olarak Şekil 50'deki gibi cebirsel bir genellemeye ulaşmıştır.



$$(n+m) - 1$$

Şekil 50. ÖA2'nin 2. probleme ait çözümünden bir bölüm

Ardından ÖA2 genelleme için bütün mümkün durumları düşünmek zorunda olduğunu “*Evet 3x5'te 8, 7 çıktı; 4x5'te 9, 8 çıktı. Ama 3x6'da 9, 6 kareden geçiyor aralarında asal değil bu o yüzden. O zaman aralarında asal değilken 1 çıkarmıyoruz. Burada 3x6'da 3 eksiği, 2x4'te 2 eksiği, 2x2'de 2 eksiği. Bu farklar ne olabilir. Ebob'ları, Ebob'ları o zaman.*” cümleleriyle dile getirmiştir. ÖA2 özel durumlar arasındaki ilişkiye dayalı olarak istenilen genellemeye ulaşmış ve ulaştığı genellemeyi Şekil 51'deki gibi cebirsel olarak ifade etmiştir.

$$(n+m) - \text{lebob}(m,n)$$

Şekil 51. ÖA2'nin 2. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA3, 2. problemde problemi okuyup anladıktan sonra problemde istenilen değeri bulmuştur. ÖA3, özel örnekler vermeye ve bu özel örnekler arasında ilişki aramaya başlamıştır. Bu durumu “Şimdi bir formül oluşturmam gerek evet bu örnekler arasında bir bağlantı bir ilişki var mı? Bir ilişki bulmam gerek.” şeklinde açıklamıştır. ÖA3, özel örnekler arasında bir ilişki bulamayınca düşüncelerini “Yok hayır bunlardan bir şeye ulaşamıyorum. Zaten iki üç örneğe bakarak genelleme yapmak zor.” şeklinde dile getirmiştir. ÖA3, daha fazla özel örnek vermeye ve bütün bu özel örnekler arasında ilişki aramaya devam etmiştir. ÖA3 ilişki aramaya “Yani kafam sürekli şeye gidiyor. 3'e 5'lik için 15 karenin 7'sinden geçiyor köşegen, 2'ye 3'lük için 6 karenin 4'ünden, 4'e 5'lik için 20 karenin 8'inden. Oradan bir şey yakalayabilir miyim acaba diyorum ama yanlış da düşünüyor olabilirim.” şeklinde devam etmiştir ve bu açıklamalarını Şekil 52'deki gibi yazmıştır.

15	7
6	4
20	8

Şekil 52. ÖA3'ün 2. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA3, bir ilişki bulamayınca “Kenarların uzunlukları ile alakalı olabilir mi? Çarpıp 2'ye bölüyorum bazılarında oluyor bazılarında olmuyor. Çarpımlarının yarısı mı dedim ama o da olmadı. Ya hani nasıl diyeyim acaba birinin karesinden diğerini çıkarınca falan mı öyle şeyler geliyor aklıma ama o da tutmuyor, birini tutunca ötekini tutmuyor. Ama onun dışında sürekli bir bağlantı oluşturmaya çalışıyorum.” şeklinde düşünmeye ve deneme yanılma yoluyla ilişki aramaya devam etmiştir. ÖA3, ilişki aramaya “İı, köşegenin uzunluğundan mı gitsem diye düşündüm, hipotenüsten, ama bir şey vermiyor onu fark ettim sonra hani yaklaşık olarak bir ama hangi alt değeri mi üst değeri mi onu bilemeyiz. Birbirlerinin kuvvetleri olarak da yazıyorum mesela ama o da olmuyor. Toplasam peki?” cümleleri ile devam etmiştir. ÖA3, düşüncelerini “1 eksiği oluyor. Bu da bir eksiği, bu da 1 eksiği, evet 1

eksiği.” şeklinde dile getirmiştir. Bu özel örnekler arasındaki ilişkiyi fark edip bu ilişkiye bağlı olarak “*Köşegenin geçtiği kare sayısını bulmak için kenarlarını toplayıp 1 çıkarıyoruz yani m artı n eksi 1*” şeklinde sözel bir genellemeye ulaşmıştır. Ardından ÖA3, genelleme için bütün mümkün durumları düşünmek zorunda olduğunu “*Evet yani bunlarda oluyor. Evet 1 eksiği ama burada 3’e 3’lükte değil, burada 3 çıkarıyorum. 2’ye 4’lükte de değil, burada 2 çıkarıyorum. 3’e 6’lıkta da 3 çıkarıyorum. Acaba aralarında asalken 1 çıkarıyorum ama asal değilken ne çıkarıyorum? Oranı mı? İki acaba ebob’larının 1. kuvveti mi diyeceğim. Hepsine uyuyor mu?*” cümleleriyle dile getirmiştir. Gerekli incelemeleri yaptıktan sonra ÖA3, özel durumlar arasındaki ilişkiye dayalı olarak Şekil 53’deki gibi cebirsel bir genellemeye ulaşmıştır.

$$n + m - \text{ebob}(n, m)$$

Şekil 53. ÖA3’ün 2. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA1, 3. problemde problemi okuyup anladıktan sonra problemde istenilen değeri bulmuştur. ÖA1, sistematik bir şekilde özel örnekler vermiştir ve bunları çizmiştir ve çizdiği her kare için bütün farklı karelerin sayısını bulmuştur. ÖA1, genelleme aşamasında özel durumlar arasındaki ilişkiyi fark edip bu ilişkiyi aritmetik olarak açıklamıştır ve Şekil 54’teki gibi yazmıştır.

$$n \times n \quad (1^2 + \dots + n^2)$$

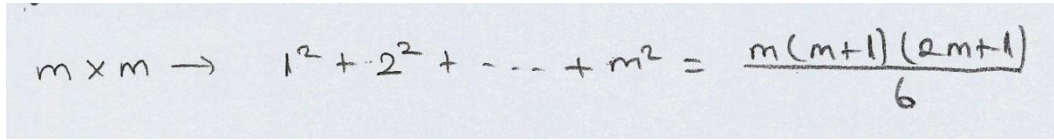
Şekil 54. ÖA1’in 3. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA1, özel durumlar arasındaki ilişkiye dayalı olarak Şekil 55’teki gibi cebirsel bir genellemeye ulaşmıştır.

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \left(\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} \right)$$

Şekil 55. ÖA1’in 3. probleme ait çözümünden bir bölüm

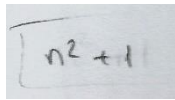
ÖA2, 3. problemde problemi okuyup anladıktan sonra problemde istenilen değeri bulmuştur. ÖA2, sistematik bir şekilde özel örnekler vermiştir ve bunları çizmiştir ve çizdiği her kare için bütün farklı karelerin sayısını bulmuştur. Ardından bu özel örnekler arasında ilişki aramaya başlamıştır. Bu durumu “*Sonuçta biz sürekli ekliyoruz. 5 eklersem bu sefer bir satır ve bir sütun ekleyeceğim ve içerdeki için de oluşturduklarım aynı kalacak. Yani 4x4 için oluşturduklarımı 5x5’te de oluşturacağım sadece sonuncuyu düşünmem yeterli, son eklediklerimi. Her seferinde de bu şekilde eklersem sadece son eklediklerimle daha ne kadar oluşturabilirim onları düşünmem yeterli. Bu da beni bir genellemeye götürebilir. Yani bir ilişki gibi bir şey var mı ona bakıyorum şu an.*” şeklinde açıklamıştır. ÖA2, genelleme aşamasında özel durumlar arasındaki ilişkiyi fark edip bu ilişkiyi aritmetik olarak açıklamıştır. ÖA2, özel durumlar arasındaki ilişkiye dayalı olarak cebirsel bir genellemeye ulaşmıştır ve bunu Şekil 56’daki gibi yazmıştır.



$$m \times m \rightarrow 1^2 + 2^2 + \dots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

Şekil 56. ÖA2’nin 3. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA3, 3. problemde problemi okuyup anladıktan sonra problemde istenilen değeri bulmuştur. Sonra ÖA3, sadece problemdeki tek bir duruma dayalı olarak “*Aslında 2’nin yani 2 çarpı 2. nxn boyutunda ise n’nin karesi artı 1.*” şeklinde düşünüp Şekil 57’deki gibi yanlış bir genellemeye ulaşmıştır.



$$n^2 + 1$$

Şekil 57. ÖA3’ün 3. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA3, genelleme aşamasında ulaştığı genelleme için bütün mümkün durumları düşünmek zorunda olduğunu “*Ama hepsi için sağlar mı?*” cümleleriyle dile getirmiştir. ÖA3, 3x3 boyutundaki özel örneği ele alıp gerekli incelemeleri yaptıktan sonra ulaştığı genellemenin yanlış olduğunu “*3x3 için sağlamadı. Yanlış oldu bu.*” cümleleri ile belirtmiştir. ÖA3, bu durum hakkındaki düşüncesini “*Zaten tek bir duruma bakarak genelleme yapamam ki.*” şeklinde dile getirmiştir. Ardından ÖA3, sistematik bir şekilde özel örnekler vermiştir ve bunları çizmiştir ve çizdiği her kare için bütün farklı karelerin sayısını bulmuştur. Ardından

bu özel örnekler arasında ilişki aramaya başlamıştır. ÖA3, genelleme aşamasında özel durumlar arasındaki ilişkiyi fark edip bu ilişkiyi sözel olarak “*Bütün karelerin sayısı 1’den n’ye kadar olan sayıların karelerinin toplamıdır.*” şeklinde ifade etmiştir. ÖA3, özel durumlar arasındaki ilişkiye dayalı olarak cebirsel bir genellemeye ulaşmıştır ve bunu Şekil 58’deki gibi yazmıştır.

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Şekil 58. ÖA3’ün 3. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA4, 3. problemde problemi okuyup anladıktan sonra problemde istenilen değeri bulmuştur. ÖA4, sistematik bir şekilde özel örnekler vermiştir ve bunları çizmiştir ve çizdiği her kare için bütün farklı karelerin sayısını bulmuştur. Ardından ÖA4, bu özel örnekler arasında ilişki aramaya başlamıştır. Bu durumu “*Yani şimdi mesela, 2x2’de 1 birimlik 4 tane, 2 birimlik 1 tane oluyor. 3x3 için baktığım zaman 1 birimlik 9 tane, 2 birimlik 4 tane, 3 birimlik 1 tane. Böyle yazıyorum çünkü aralarında bir ilişki kurmak istiyorum.*” şeklinde açıklamıştır. ÖA4, genelleme aşamasında özel durumlar arasındaki ilişkiyi fark edip bu ilişkiyi aritmetik olarak açıklamıştır ve Şekil 59’daki gibi yazmıştır.

$$n \times n \Rightarrow 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$$

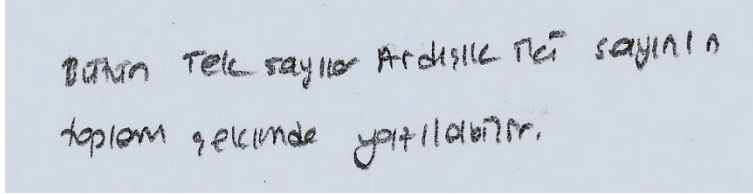
Şekil 59. ÖA4’ün 3. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA4, özel durumlar arasındaki ilişkiye dayalı olarak Şekil 60’taki gibi cebirsel bir genellemeye ulaşmıştır.

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Şekil 60. ÖA4’ün 3. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA1, 4. problemde problemi okuyup anladıktan sonra sistematik bir şekilde özel örnekler vermeye ve bu özel örnekler arasında ilişki aramaya başlamıştır. ÖA1, genelleme aşamasında sayılar arasındaki ilişkiye dayalı olarak “*Bütün tek sayılar ardışık iki sayının toplamı olarak yazılabilir.*” şeklinde bir genellemeye ulaşmıştır. ÖA1, ulaştığı genellemeyi Şekil 61’deki gibi sözel olarak ifade etmiştir.



Şekil 61. ÖA1’in 4. probleme ait çözümünden bir bölüm

Ardından ÖA1, sistematik bir şekilde özel örnekler vermeye ve bu özel örnekler arasında ilişki aramaya devam etmiştir. ÖA1, genelleme aşamasında sayılar arasındaki ilişkiyi fark edip bu ilişkiyi sözel olarak ifade etmiştir ve bu ilişkiye dayalı olarak “*En az iki ardışık sayının toplamı olan sayılar 2^n şeklinde yazılamaz.*” şeklinde sözel bir genellemeye ulaşmıştır

ÖA2, 4. problemde problemi okuyup anladıktan sonra problem durumu için özel örnek vermeden tamamen ön bilgilerine dayalı olarak “*Bütün tek sayılar ardışık iki tamsayının toplamı olarak yazılabilir.*” şeklinde sözel bir genellemeye ulaşmıştır. Ardından ÖA2, sistematik bir şekilde özel örnekler vermeye ve bu özel örnekler arasında ilişki aramaya başlamıştır. Özel örnekleri inceledikten sonra düşüncelerini “*2 yazılamıyor, 4 de yazılamıyor. Çünkü burada 2 ve 4’te sadece asal çarpan olarak 2 var o yüzden mi yazılamıyor acaba diye düşünüyorum şu an.*” şeklinde ifade etmiştir. ÖA2, sistematik bir şekilde özel örnek vermeye devam etmiştir. ÖA2, genelleme aşamasında sayılar arasındaki ilişkiyi fark edip bu ilişkiyi “*Evet bunun sayıların asal çarpanı ile ilgisi var, asal çarpanı sadece 2 olanlar, 2 olan çift sayılar bu şekilde yazılamıyor.*” şeklinde açıklamıştır. Bu açıklamalarını Şekil 62’deki gibi yazmıştır.

$$\begin{aligned}
2^1 &= 2 \text{ yazılamaz.} \\
2^2 &= 4 \text{ yazılamaz.} \\
2 \cdot 3 &= 6 = 1 + 2 + 3 \\
2^3 &= 8 \text{ yazılamaz} \\
2 \cdot 5 &= 10 = 1 + 2 + 3 + 4 \\
2^2 \cdot 3 &= 12 = 3 + 4 + 5 \\
14 &= 2 + 3 + 4 + 5 \\
2^4 &= 16 \text{ yazılamaz.}
\end{aligned}$$

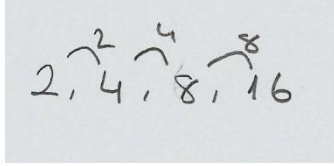
Şekil 62. ÖA2'nin 4. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA2, genelleme aşamasında sayılar arasındaki ilişkiye dayalı olarak “En az iki ardışık sayının toplamı olan sayılar 2^n şeklinde yazılamaz.” şeklinde sözel bir genellemeye ulaşmıştır.

ÖA3, 4. problemde problemi okuyup anladıktan sonra problem durumu için özel örnek vermeden tamamen ön bilgilerine dayalı olarak sözel bir genellemeye ulaşmıştır. ÖA3, ulaştığı sözel genellemeyi “Tek tamsayılar ardışık iki tamsayının toplamı olarak yazılabilir.” şeklinde ifade etmiştir. Ardından ÖA3, sistematik bir şekilde özel örnekler vermeye ve bu özel örnekler arasında ilişki aramaya başlamıştır. ÖA3, genelleme aşamasında sayılar arasındaki ilişkiyi fark edip bu ilişkiyi ve genelleme için bütün mümkün durumları düşünmek zorunda olduğunu “2'nin 1. kuvveti, 2. kuvveti, 3. kuvveti, 4. kuvveti olmayınca 2 üzeri n'ler hiçbirini yazamıyor muyuz? Bütün 2^n 'ler bunu sağlar mı? Aslında çok az sayıda örnek verdim ama şuradan bakınca öyleymiş gibi geliyor bana.” şeklinde dile getirmiştir. ÖA3, genelleme aşamasında sayılar arasındaki ilişkiye dayalı olarak “En az iki ardışık sayının toplamı olan sayılar 2'nin kuvveti şeklinde yazılamaz.” şeklinde sözel bir genellemeye ulaşmıştır. ÖA3, yaptıklarını gözden geçirdikten sonra özel örnekler vermeye ve bu özel örnekler arasında tekrar bir ilişki aramaya başlamıştır. Bu durumu “İki ardışık sayının toplamı tek sayıları veriyor, peki üç ardışık sayının toplamı? 1 artı 2 artı 3, 6'yı veriyor; 2 artı 3 artı 4, 9'u; 3 artı 4 artı 5, 12. 3 ün katı olan sayılar.” şeklinde dile getirmiştir. ÖA3, genelleme aşamasında sayılar arasındaki ilişkiye dayalı olarak sözel bir

genellemeye ulaşmıştır ve ulaştığı genellemeyi “Üç ardışık sayının toplamı 3’e bölünür.” şeklinde ifade etmiştir.

ÖA4, 4. problemde problemi okuyup anladıktan sonra sistematik bir şekilde özel örnekler vermeye ve bu özel örnekler arasında ilişki aramaya başlamıştır. ÖA4 genelleme aşamasında sayılar arasındaki ilişkiye dayalı olarak “Çift sayılar ardışık sayıların toplamı değil.” şeklinde yanlış bir genellemeye ulaşmıştır. ÖA4, genelleme aşamasında ulaştığı genelleme için bütün mümkün durumları düşünmek zorunda olduğunu “Ben 2’ye ve 4’e bakarak söyledim acaba her çift için böyle mi?” cümleleriyle dile getirmiştir. ÖA4, 6 sayısını ele alıp gerekli incelemeleri yaptıktan sonra ulaştığı genellenenin yanlış olduğunu “6’yı yazabiliyorum, 6 bir çift sayı. O zaman çift sayılar ardışık sayıların toplamı değil diyemem.” cümleleri ile belirtmiştir. ÖA4, sistematik bir şekilde özel örnekler vermeye ve bu özel örnekler arasında ilişki aramaya devam etmiştir. Bu durumu “2 yazılamadı, 4 yazılamadı, 8 yazılamadı. Peki burada nasıl bir artış var? 2 ve 4 burada 8 desem 16’yı yazabilir miyim? Iıı, burada 2,4,8’i yazamadığımı fark ettim, bunlarda da bir artış şeklinde hep bir artış var, katları, evet her seferinde 2 katı kadar, 8’de de 8 artış gösterir deyip 16’yı düşündüm.” şeklinde ifade etmiştir ve bu açıklamalarını Şekil 63’teki gibi yazmıştır.



Şekil 63. ÖA4’ün 4. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA4, 16 sayısı için gerekli incelemeyi yapmıştır ve 16’nın yazılamadığını “16’yı yazamıyorum.” şeklinde belirtmiştir. ÖA4, sayılar arasındaki ilişkiyi “Peki bunlarda ne var? 1’i yazamıyorum, 2’yi yazamıyorum, 4’ü yazamıyorum, 8’i yazamıyorum, 16’yı yazamıyorum aaaa hep 2’nin, 2 üzeri n olarak yazamıyorum.” cümleleri ile dile getirmiştir. ÖA4, genelleme aşamasında sayılar arasındaki ilişkiye dayalı olarak “En az iki ardışık sayının toplamı olan hiçbir sayı 2’nin kuvveti şeklinde yazılamaz.” şeklinde sözel bir genellemeye ulaşmıştır. Ardından ÖA4, sistematik bir şekilde özel örnekler vermeye ve bu özel örnekler arasında ilişki aramaya devam etmiştir. ÖA4, genelleme aşamasında sayılar arasındaki ilişkiye dayalı olarak sözel bir genellemeye ulaşmıştır. ÖA4 ulaştığı genellemeyi “Tek sayıların hepsi iki ardışık sayının toplamıdır.” şeklinde ifade etmiştir.

4.2.2 Genelleme Boyutunu Tamamlayamama

ÖA1, 1. problemde problemi okuyup anladıktan sonra problemde istenilen değeri bulmuştur. ÖA1, ön bilgilerine dayalı olarak istenilen ilişkinin var olduğunu bildiğini ama hatırlayamadığını belirtmiştir. Bu durumu “*Bu zaten oluşturulmuş bir formül, ama nasıldı ki? Hatırlayamadım.*” cümleleri ile dile getirmiştir. Bir süre daha düşündükten sonra formül aklına gelmeyince düşüncelerini “*Yani hiç yok, gerçekten geçmiş bilgilerimi bayağı unuttuğumu fark ettim şu an, yani ben aslında daha çok böyle nereden geldiğini bulmaktan ziyade ezber. Ama hani böyle bir şeyleri kendim oluşturmaya çalışmakta evet zorlanıyorum özellikle kendim için konuşacak olursam zorlanabiliyorum yani sıfırdan bir şey inşa etmeye çalışmak kendi düşüncelerimle orda biraz tıkanabiliyorum.*” şeklinde ifade etmiştir. Ardından ÖA1, sistematik bir şekilde özel örnekler vermeye ve bu özel örnekler arasında ilişki aramaya başlamıştır. Bu durumu “*Yani bağlantılı bir şeyler oluşturulabiliyor mu? Mesela buradan 1, öbüründen 8, diğerinden 27, diğerinden 64 geliyor bu şekilde. Bu aralarında bağlantı ya da ilişki olacak şekilde n^3 ’e kadar gidecek. İlk terim, artış miktarı tarzı şeyler aklıma geliyor burada ama yani hiç bilmiyorum. Aralarındaki şeyler farklar bulunup onlar arasında bir ilişki kurulabilir.*” şeklinde açıklamıştır. Bu açıklamalarını Şekil 64’teki gibi yazmıştır.

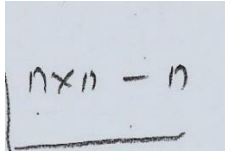
Handwritten mathematical work showing a sequence of cubes and their differences. The sequence is: 1, 8, 27, 64, 125. The differences between consecutive terms are: 7, 19, 35, 61. The differences of these differences are: 12, 16, 26. The final difference is labeled $(n-1)^3$. A box is drawn at the bottom left, and n^3 is written at the bottom right.

Şekil 64. ÖA1’in 1. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA1’in bir ilişki arayışı içinde olduğunu “*Bu toplamlar arasındaki ilişki, bunu terimlerin küpleri toplamına nasıl uyarlayacağız? Bir ilişki bulmam lazım ama nasıl?*” şeklinde ifade etmiştir. ÖA1, bir süre düşündükten sonra “*Yok yani çıkamıyorum işin içinden, bir fikrim*

yok. Yok, bunun formülünü hatırlayamıyorum, çıkaramıyorum da.” cümleleri ile düşüncelerini dile getirmiştir. ÖA1’in genelleme için bir ilişki arayışı içinde olduğu, özel durumlar arasındaki ilişkiyi bulmak için çabaladığı fakat problem durumu için istenilen genellemeye ulaşamadığı gözlemlenmiştir.

ÖA1, 2. problemde problemi okuyup anladıktan sonra problemde istenilen değeri bulmuştur. ÖA1, genellemeye ulaşmak için özel örnek vereceğini ve bu özel örnekler arasında ilişki arayacağını belirtmiştir. Bu durumu “*Daha küçük boyutta dikdörtgenler düşünüp onlar için de bakalım. Aralarında bir ilişki ya da bir şey bulabilecek miyim ki onu genelledebileyim $m \times n$ ’ye bir fikrim oluşsun.*” şeklinde ifade etmiştir. Ardından ÖA1, özel örnekler vermeye ve bu özel örnekler arasında ilişki aramaya başlamıştır. ÖA1, birkaç özel örnek verdikten sonra, m ile n ’nin eşit olduğu durum için sistematik bir şekilde özel örnekler vermeye başlamıştır. ÖA1 bu durumu “ *m ile n farklı mı olması gerekiyor? Yok hayır aynı da olabilir sonuçta her kare bir dikdörtgen. Mesela 1×1 için köşegen içindeki 1 kareden geçiyor, 2×2 için eşitse neler oluyor yani onu bulmaya çalışıyorum. 2×2 için 2 taneden geçecek 3×3 için 3 taneden geçecek bu böyle devam edecek. Yani $n \times n$ için n kareden geçer.*” şeklinde açıklamıştır. ÖA1, özel durumlar arasındaki ilişkiye dayalı olarak m ile n ’nin eşit olduğu durum için Şekil 65’teki gibi bir genellemeye ulaşmıştır.


$$n \times n - n$$

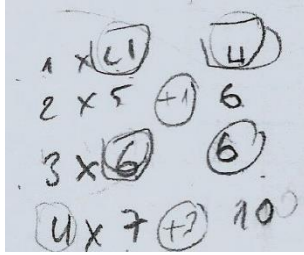
Şekil 65. ÖA1’in 2. probleme ait çözümünden bir bölüm

Ardından ÖA1, özel örnekler vermeye ve bu özel örnekler arasında ilişki aramaya devam etmiştir. Özel örnekleri incelerken bir ilişki aradığına dair düşüncelerini “*Mesela kenarların çarpımının da bir etkisi olabilir, yine bir ilişki kurulabilir oradan da.*” şeklinde açıklar ve bu düşüncesini Şekil 66’daki gibi yazar.


$$\begin{array}{l} 3 \times 5 \\ \hline 15 \end{array} \text{ dikdörtgen} \rightarrow 7 \text{ kare} \quad \begin{array}{l} 3 \times 4 \\ \hline 12 \end{array} - 6 \text{ kare}$$

Şekil 66. ÖA1’in 2. probleme ait çözümünden bir bölüm

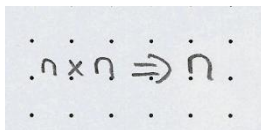
ÖA1, özel örnekler vermeye ve bu özel örnekler arasında ilişki aramaya devam etmiştir. ÖA1, bu ilişkiyi ve genelleme için tüm mümkün durumları da düşünmek zorunda olduğunu “Bir kenarın 2 katı olabilir mi? 5×6 için köşegen 10 kareden geçiyor, 6×7 için 12 kareden ama bu hepsinde sağlamıyor, mesela 3×5 ’te 7 oluyor.” şeklinde ifade etmiştir. ÖA1, özel örnekler arasında ilişki aramaya devam etmiştir. Ardından ÖA1, düşüncelerini “Şey mi oluyor acaba; teklerde yani n tekse m ’yi alıyor, n çiftse acaba m ’nin 1 fazlasını mı alıyor? 1×4 için 4, 2×5 için 6, 3×6 için 6, 4×7 için 10 olmalı 4×7 için sağlamadı. Yine yok evet yok.” cümleleri ile dile getiriyor ve bu düşüncelerini Şekil 67’deki gibi yazıyor.



Şekil 67. ÖA1’in 2. probleme ait çözümünden bir bölüm

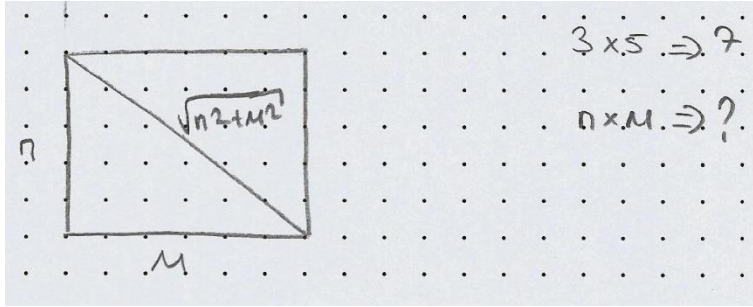
ÖA1, “Sanki formül, içinde ikisini de barındırarak ama çarpılı mı artık artılı mı, eksili mi bölülü mü?” şeklinde düşünmeye devam etmiştir. ÖA1, bir süre düşündükten sonra “Yani nasıl bir formül oluşturabilirim? Bunların hepsini sağlayacak bir formül oluşturamıyorum yok olmuyor.” cümleleri ile düşüncelerini dile getirmiştir. ÖA1’in genelleme için bir ilişki arayışı içinde olduğu, özel durumlar arasındaki ilişkiyi bulmak için çabaladığı fakat problem durumu için istenilen genellemeye ulaşamadığı gözlemlenmiştir.

ÖA4, 2. problemde problemi okuyup anladıktan sonra problemde istenilen değeri bulmuştur. ÖA4, özel örnekler vermeye ve bu özel örnekler arasında ilişki aramaya başlamıştır. ÖA4, genelleme aşamasında özel durumlar arasındaki ilişkiyi fark edip bu ilişkiyi sözel olarak “ $n \times n$ olduğunda köşegen n tane kareden geçiyor.” şeklinde ifade etmiştir. ÖA4, özel durumlar arasındaki ilişkiye dayalı olarak m ile n ’nin eşit olduğu durum için Şekil 68’deki gibi bir genellemeye ulaşmıştır.



Şekil 68. ÖA4’ün 2. probleme ait çözümünden bir bölüm

Ardından ÖA4, özel örnekler vermeye ve bu özel örnekler arasında ilişki aramaya devam etmiştir. Özel örnekleri incelerken bir ilişki aradığına dair düşüncelerini “*Burası n birim burası m birim, köşegenin boyunu hesaplamak geldi aklıma nedense kök içerisinde n^2 artı m^2 olduğunu görüyorum. Köşegenin kaç tane kareden geçeceği hakkında bir şey verir mi? Mesela 3×5 ’i düşünecek olursam $\sqrt{34}$, 9. Bir bağlantı kurmaya çalıştım fakat gelecek gibi durmuyor. Doğru bir şey değil bu durum üzerinden gitmek.*” şeklinde açıklamıştır ve bu açıklamalarını Şekil 69’daki gibi yazmıştır.



Şekil 69. ÖA4’ün 2. probleme ait çözümünden bir bölüm

Ardından ÖA4, özel örnekler vermeye ve bu özel örnekler arasında ilişki aramaya devam etmiştir. Bu durumu “*Sanki çarpımlarının yarısı gibi bir şeyden geçecekmiş gibi duruyor. 3×5 ’te 7 buçuk, 7 taneden geçiyor ama 3×4 ’te 6, tam 6 taneden geçiyor ya da 4×5 ’te 10, ama 8 taneden geçiyor. Yok, böyle de düşünemem.*” şeklinde açıklamıştır. ÖA4, bir süre düşündükten sonra “*Yok yani ben bunu oluşturmam, bunun üzerinden şu andaki geometri bilgimi şey yaparak bir formülize yok yani.*” cümleleri ile düşüncelerini dile getirmiştir. ÖA4’ün genelleme için bir ilişki arayışı içinde olduğu, özel durumlar arasındaki ilişkiyi bulmak için çabaladığı fakat problem durumu için istenilen genellemeye ulaşamadığı gözlemlenmiştir.

4.3 Varsayımda Bulunma Boyutuna İlişkin Bulgular ve Yorumları

Bu bölümde öğretmen adaylarının matematiksel düşünme süreçlerini incelemek amacıyla toplanan verilerin analizleri sonucunda matematiksel düşünmenin varsayımda bulunma boyutuna dair bulgular ve yorumları yer almaktadır.

Öğretmen adayları, problem çözme süreci içerisinde varsayımda bulunma boyutunda bazı durumlarda matematiksel düşünmenin özelleştirme veya genelleme evresinde yapılanlardan yararlanarak problem durumu ile alakalı sözel veya cebirsel olarak varsayımlarını ifade

etmişlerdir. Öğretmen adayları bazı durumlarda matematiksel düşünmenin diğer boyutlarını tamamlamadığı için problem durumu ile ilgili bir varsayımda bulunamamışlardır.

Varsayımda bulunma boyutuna ilişkin kodlar,

- Varsayımda bulunma boyutunu sözel olarak ifade etme
- Varsayımda bulunma boyutunu cebirsel olarak ifade etme
- Varsayımda bulunma boyutunu sözel ve cebirsel olarak ifade etme
- Varsayımda bulunma boyutunu tamamlayamama

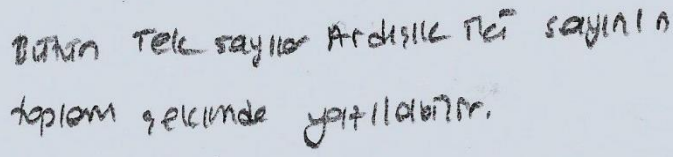
olarak belirlenmiştir.

Varsayımda bulunma, özelleştirme ve genelleme süreçlerinde otomatik olarak ortaya çıkmaktadır (Mason, Burton & Stacey, 2010, s.63). Bu nedenle varsayımda bulunma süreci matematiksel düşünmenin özelleştirme ve genelleme boyutları bağlamında daha ayrıntılı bir şekilde ele alınmış olup bu bölümde varsayımda bulunma boyutuna ilişkin kodlar çerçevesinde sınıflandırılmıştır.

4.3.1 Varsayımda Bulunma Boyutunu Sözel Olarak İfade Etme

ÖA3, 2. problemde genelleme aşamasında problem durumu için özel durumlar arasındaki ilişkiye dayanarak “*Köşegenin geçtiği kare sayısını bulmak için kenarlarını toplayıp 1 çıkarıyoruz, yani m artı n eksi 1*” şeklinde sözel bir varsayımda bulunmuştur. ÖA3’ün oluşturduğu varsayımı genellemeye ulaşırken kullandığı bütün özel durumlar için kontrol ettiği gözlemlenmiştir. Ardından ÖA3, dikdörtgenin kenar uzunlukları m ve n ’nin aralarında asal olduğu durumda bu varsayımın sağlandığını gözlemlemiştir. ÖA3’ün dikdörtgenin kenar uzunlukları m ve n ’nin aralarında asal olmadığı durumlar için yeni bir varsayımda bulunduğu gözlemlenmiştir.

ÖA1, 4. problemde genelleme aşamasında problem durumu için özel durumlar arasındaki ilişkiye dayalı olarak bir varsayımına ulaşmıştır. ÖA1, ulaştığı varsayımı sözel olarak “*Bütün tek sayılar ardışık iki sayının toplamı olarak yazılabilir.*” şeklinde ifade etmiştir ve Şekil 70’teki gibi yazmıştır.



Şekil 70. ÖA1'in 4. probleme ait çözümünden bir bölüm

Ardından ÖA1, problem durumu için daha fazla özel örnek vererek bu özel durumlar arasındaki ilişkiye dayalı olarak istenilen varsayıma ulaşmıştır. ÖA1, problem durumu için ulaştığı varsayımı sözel olarak “*En az iki ardışık sayının toplamı olan sayılar 2^n şeklinde yazılamaz*” şeklinde ifade etmiştir.

ÖA2, 4. problemde genelleme aşamasında problem durumu için özel örnek vermeden tamamen ön bilgilerine dayalı olarak “*Bütün tek sayılar ardışık iki tamsayının toplamı olarak yazılabilir.*” şeklinde sözel bir varsayıma ulaşmıştır. Ardından ÖA2, genelleme aşamasında problem durumu için özel durumlar arasındaki ilişkiye dayalı olarak istenilen varsayıma ulaşmıştır. ÖA2, ulaştığı varsayımı sözel olarak “*En az iki ardışık sayının toplamı olan sayılar 2^n şeklinde yazılamaz.*” şeklinde ifade etmiştir.

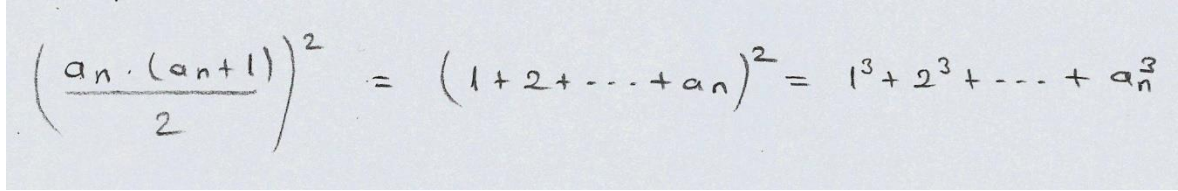
ÖA3, 4. problemde genelleme aşamasında problem durumu için özel örnek vermeden tamamen ön bilgilerine dayalı olarak “*Tek tamsayılar ardışık iki tamsayının toplamı olarak yazılabilir.*” şeklinde sözel bir varsayımda bulunmuştur. Ardından ÖA3, problem durumu için özel örnek vererek ve bu özel durumlar arasındaki ilişkiye dayalı olarak istenilen varsayıma ulaşmıştır. ÖA3, ulaştığı varsayımı sözel olarak “*En az iki ardışık sayının toplamı olan sayılar 2 'nin kuvveti şeklinde yazılamaz.*” şeklinde ifade etmiştir. ÖA3, yaptıklarını gözden geçirdikten sonra problem durumu için daha fazla özel örnek vererek bu özel durumlar arasındaki ilişkiye dayalı olarak “*Üç ardışık sayının toplamı 3 'e bölünür.*” şeklinde sözel bir varsayımda daha bulunmuştur.

ÖA4, 4. problemde genelleme aşamasında problem durumu için özel durumlar arasındaki ilişkiye dayanarak ilk olarak yanlış bir varsayımda bulunmuştur. ÖA4, ulaştığı varsayımı sözel olarak “*Çift sayılar ardışık sayıların toplamı değil.*” şeklinde ifade etmiştir. ÖA4'ün oluşturduğu varsayımı özel örnek vererek kontrol ettiği ve varsayımın yanlış olduğunu fark ettiği gözlemlenmiştir. Ardından ÖA4, problem durumu için sistematik bir şekilde daha fazla özel örnek vererek bu özel durumlar arasındaki ilişkiye dayalı olarak istenilen varsayıma ulaşmıştır. ÖA4, ulaştığı bu varsayımı sözel olarak “*En az iki ardışık sayının toplamı olan*

hiçbir sayı 2'nin kuvveti şeklinde yazılamaz.” şeklinde ifade etmiştir. Daha sonra ÖA4, problem durumu için daha fazla özel örneği inceleyerek bu özel durumlar arasındaki ilişkiye dayalı olarak “Tek sayıların hepsi iki ardışık sayının toplamıdır” şeklinde sözel bir varsayımda daha bulunmuştur.

4.3.2 Varsayımda Bulunma Boyutunu Cebirsel Olarak İfade Etme

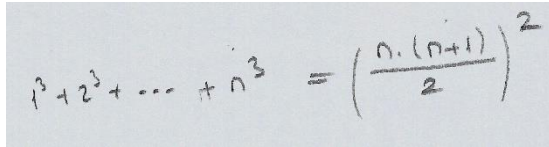
ÖA2, 1. problemde genelleme aşamasında problem durumu için özel durumlar arasındaki ilişkiye dayalı olarak istenilen varsayıma ulaşmıştır. ÖA2, problem durumu için ulaştığı varsayımı cebirsel olarak Şekil 71'deki gibi yazmıştır.



$$\left(\frac{a_n \cdot (a_n + 1)}{2} \right)^2 = (1 + 2 + \dots + a_n)^2 = 1^3 + 2^3 + \dots + a_n^3$$

Şekil 71. ÖA2'nin 1. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA3, 1. problemde genelleme aşamasında problem durumu için özel örnek vermeden tamamen ön bilgilerine dayalı olarak istenilen varsayıma ulaşmıştır. ÖA3, problem durumu için ulaştığı varsayımı cebirsel olarak Şekil 72'deki gibi yazmıştır.

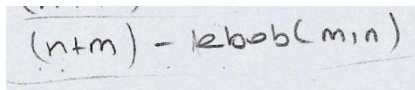


$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n \cdot (n + 1)}{2} \right)^2$$

Şekil 72. ÖA3'ün 1. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA3'ün ulaştığı varsayımın doğruluğunu birden fazla özel örnek vererek kontrol ettiği gözlemlenmiştir.

ÖA2, 2. problemde genelleme aşamasında problem durumu için özel durumlar arasındaki ilişkiye dayalı olarak istenilen varsayıma ulaşmıştır. ÖA2, problem durumu için ulaştığı varsayımı cebirsel olarak Şekil 73'teki gibi yazmıştır.



$$(n+m) - \text{ekob}(m, n)$$

Şekil 73. ÖA2'nin 2. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA3, 2. problemde genelleme aşamasında problem durumu için özel durumlar arasındaki ilişkiye dayalı olarak istenilen varsayıma ulaşmıştır. ÖA3, problem durumu için ulaştığı varsayımı cebirsel olarak Şekil 74'teki gibi yazmıştır.

$$n + m = e.b.o.b.(n, m).$$

Şekil 74. ÖA3'ün 2. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA1, 3. problemde genelleme aşamasında problem durumu için özel durumlar arasındaki ilişkiye dayalı olarak istenilen varsayıma ulaşmıştır. ÖA1, problem durumu için ulaştığı varsayımı cebirsel olarak Şekil 75'teki gibi yazmıştır.

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \left(\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} \right)$$

Şekil 75. ÖA1'in 3. probleme ait çözümünden bir bölüm

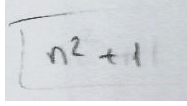
ÖA1'in ulaştığı varsayımın doğruluğunu birden fazla özel örnek vererek kontrol ettiği gözlemlenmiştir.

ÖA2, 3. problemde genelleme aşamasında problem durumu için özel durumlar arasındaki ilişkiye dayalı olarak istenilen varsayıma ulaşmıştır. ÖA2, problem durumu için ulaştığı varsayımı cebirsel olarak Şekil 76'daki gibi yazmıştır.

$$1^2 + 2^2 + \dots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

Şekil 76. ÖA2'nin 3. probleme ait çözümünden bir bölüm

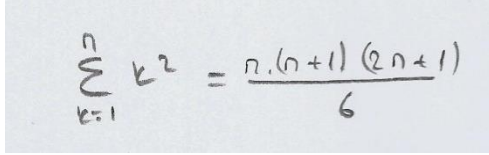
ÖA3, 3. problemde genelleme aşamasında problem durumu için tek bir özel duruma dayalı olarak yanlış bir varsayıma ulaşmıştır. ÖA3, problem durumu için ulaştığı varsayımı cebirsel olarak Şekil 77'deki gibi yazmıştır.


$$n^2 + 1$$

Şekil 77. ÖA3'ün 3. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA3'ün ulaştığı varsayımın doğruluğunu özel örnek vererek kontrol ettiği gözlemlenmiştir. ÖA3, varsayımın yanlış olduğunu fark etmiştir ardından yeni bir varsayımda bulunmuştur.

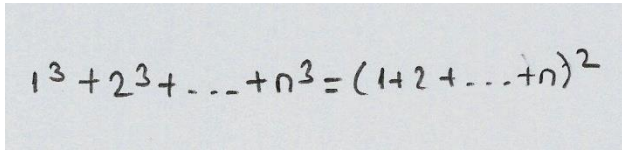
ÖA4, 3. problemde genelleme aşamasında problem durumu için özel durumlar arasındaki ilişkiye dayalı olarak istenilen varsayıma ulaşmıştır. ÖA4, problem durumu için ulaştığı varsayımı cebirsel olarak Şekil 78'deki gibi yazmıştır.


$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

Şekil 78. ÖA4'ün 3. probleme ait çözümünden bir bölüm

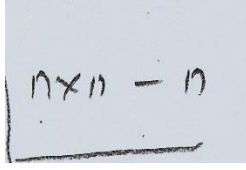
4.3.3 Varsayımda Bulunma Boyutunu Sözel ve Cebirsel Olarak İfade Etme

ÖA4, 1. problemde genelleme aşamasında problem durumu için özel durumlar arasındaki ilişkiye dayalı olarak istenilen varsayıma ulaşmıştır. ÖA4, problem durumu için ulaştığı varsayımı hem sözel olarak “1’den n’ye kadar olan sayıların küpleri toplamı, 1’den n’ye kadar olan sayıların toplamının karesine eşittir.” şeklinde ifade etmiştir hem de Şekil 79’daki gibi cebirsel olarak ifade etmiştir.


$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$$

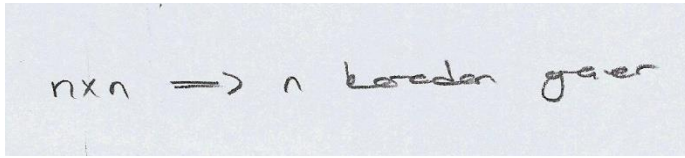
Şekil 79. ÖA4'ün 1. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA1, 2. problemde genelleme aşamasında problem durumu için özel durumlar arasındaki ilişkiye dayanarak “ $n \times n$ için köşegen n kareden geçer.” varsayımını hem sözel olarak ifade etmiştir hem de Şekil 80'deki gibi cebirsel olarak ifade etmiştir.


$$n \times n - n$$

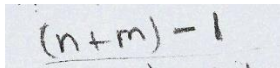
Şekil 80. ÖA1'in 2. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA2, 2. problemde genelleme aşamasında problem durumu için özel durumlar arasındaki ilişkiye dayanarak “Bir dikdörtgen $n \times n$ tipindeyse köşegen n kareden geçer.” varsayımını hem sözel olarak ifade etmiştir hem de Şekil 81'deki gibi cebirsel olarak ifade etmiştir.


$$n \times n \Rightarrow n \text{ kareden geçer}$$

Şekil 81. ÖA2'nin 2. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA2, dikdörtgenin kenar uzunluklarının eşit olmadığı durumlar için yeni bir varsayım ortaya koymuştur. ÖA2, 2. problemde genelleme aşamasında problem durumu için özel durumlar arasındaki ilişkiye dayalı olarak bir varsayımda daha bulunmuştur. ÖA2, problem durumu için ulaştığı varsayımı hem sözel olarak “Köşegenin geçtiği kare sayısı kenarların toplamının 1 eksiği.” şeklinde ifade etmiştir hem de Şekil 82'deki gibi cebirsel olarak ifade etmiştir.


$$(n+m) - 1$$

Şekil 82. ÖA2'nin 2. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA2'nin ulaştığı varsayımın doğruluğunu özel örnek vererek kontrol ettiği gözlemlenmiştir. Ardından ÖA2, dikdörtgenin kenar uzunlukları m ve n 'nin aralarında asal olduğunda bu varsayımın sağlandığını gözlemlemiştir. ÖA2, dikdörtgenin kenar uzunlukları m ve n 'nin aralarında asal olmadığı durumlar için yeni bir varsayımda bulunmuştur.

ÖA4, 2. problemde genelleme aşamasında problem durumuna dair özel durumlar arasındaki ilişkiye dayalı olarak n ile m 'nin eşit olduğu durum için bir varsayıma ulaşmıştır. ÖA4, problem durumu için ulaştığı varsayımı hem sözel olarak “ $n \times n$ olduğunda köşegen n tane kareden geçer.” şeklinde ifade etmiştir hem de Şekil 83'teki gibi cebirsel olarak ifade etmiştir.

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \times & \cdot & \Rightarrow & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

Şekil 83. ÖA4'ün 2. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA3, 3. problemde genelleme aşamasında problem durumu için özel durumlar arasındaki ilişkiye dayalı olarak istenilen varsayıma ulaşmıştır. ÖA3, problem durumu için ulaştığı varsayımı hem sözel olarak “*Bütün karelerin sayısı 1’den n’ye kadar olan sayıların karelerinin toplamıdır.*” şeklinde ifade etmiştir hem de Şekil 84’teki gibi cebirsel olarak ifade etmiştir.

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

Şekil 84. ÖA3'ün 3. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA3'ün ulaştığı varsayımın doğruluğunu özel örnek vererek kontrol ettiği gözlemlenmiştir.

4.3.4 Varsayımda Bulunma Boyutunu Tamamlayamama

ÖA1'in, 1. problemde ve 2. problemde özel örnek vererek bu özel durumlar arasındaki ilişki için bir arayış içinde olduğu, varsayımda bulunmak için çabaladığı fakat problem durumu için istenilen varsayıma ulaşamadığı gözlemlenmiştir.

ÖA4'ün de, 2. problemde özel örnek vererek bu özel durumlar arasındaki ilişki için bir arayış içinde olduğu, varsayımda bulunmak için çabaladığı fakat problem durumu için istenilen varsayıma ulaşamadığı gözlemlenmiştir.

4.4 İspatlama Boyutuna İlişkin Bulgular ve Yorumları

Bu bölümde öğretmen adaylarının matematiksel düşünme süreçlerini incelemek amacıyla toplanan verilerin analizleri sonucunda matematiksel düşünmenin ispatlama boyutuna dair bulgular ve yorumları yer almaktadır.

Öğretmen adayları, problem çözme süreci içerisinde ispatlama boyutunda bazı durumlarla karşı karşıya kalmaktadır. Öğretmen adayları bazı durumlarda uygun ispat fikri ile ispata başlar ve ispat içerisinde gerekli matematiksel işlemlerle ispatı başarı ile sonuçlandırabilir. Bu durumlardan farklı olarak öğretmen adayları bazı durumlarda ispat için fikir yürütmekte fakat çeşitli hatalar nedeniyle ispatı uygun şekilde tamamlayamamaktadır. Yani öğretmen adayları ispata başlayabilmektedir fakat ispatın devamındaki işlemlerde bazı sorunlarla karşılaşabilmektedir. Öğretmen adayları bazı durumlarda matematiksel düşünmenin önceki boyutlarını uygun şekilde tamamlayamadığı için ispat aşamasına geçememekte ve ispata başlayamamakta, buna ek olarak öğretmen adayları bazı durumlarda ispata nasıl başlayacağını bilememekte, ispatı yapma adına hiçbir fikir yürütememekte, sıkıntı yaşamakta, zorlanmakta ve ispata başlayamamaktadır. Bunlardan yola çıkarak ispatlama boyutuna ilişkin kodlar oluşturulmuştur.

İspatlama boyutuna ilişkin kodlar,

- İspat boyutunu tamamlama
- İspat boyutunu tamamlayamama
- İspat boyutuna başlayamama

olarak belirlenmiştir. Bu bölümde ispatlama boyutuna ilişkin kodlar ayrı başlıklar ile ele alınmıştır.

4.4.1 İspatlama Boyutunu Tamamlama

ÖA2, 1. problemde ulaştığı varsayımın doğruluğunu göstermek için ispat aşamasına geldiğinde öncelikle kullanacağı ispat yöntemini belirlemiş ve gerekçesini belirtmiştir. ÖA2, bu durumu “*Şu an aslında 1’in kine bakarak 1’in küpü, 2’ninkine bakarak 1’in küpü artı 2’nin küpü... Bunların hepsine bakarak tümevarımsal bir muhakeme yapıyoruz, tümevarımla ispatı kullanacağız.*” şeklinde açıklamıştır. Ardından tümevarım yöntemiyle ispatın basamaklarını “*Tümevarımda mesela $k=1$ için doğru olup olmadığını kontrol ediyorduk sonra bir n doğal sayısı için doğru olduğunu kabul edip $n+1$ doğal sayısı için de doğru olur mu diye bakıyorduk.*” cümleleriyle açıklamıştır. ÖA2, bu açıklamalarını Şekil 85’teki gibi yazmıştır.

$$\begin{aligned}
& k=1 \\
& n \\
& n+1 \\
& k=1 \Rightarrow 1^3 = 1 = \left(\frac{1 \cdot (1+1)}{2} \right)^2 \\
& n \in \mathbb{N} \text{ olsun. } 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + \underbrace{\left(\frac{n \cdot (n+1)}{2} \right)^2}_{n+1 \text{ tam değeri mu?}} \text{ olan } n.
\end{aligned}$$

Şekil 85. ÖA2'nin 1. probleme ait çözümünden bir bölüm

Daha sonra ÖA2'nin gerekli işlemleri yaparak Şekil 86'daki gibi ispatı tamamladığı gözlemlenmiştir.

$$\begin{aligned}
& \underbrace{(1^3 + 2^3 + \dots + n^3)}_{\left(\frac{n \cdot (n+1)}{2} \right)^2} + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2 \\
& (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2 - \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2} \right)^2 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{n \cdot (n+1)}{2} \right) \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} + \frac{n \cdot (n+1)}{2} \right) \\
& = \left(\frac{n^2 + 3n + 2 - n^2 - n}{2} \right) \left(\frac{2n^2 + 4n + 2}{2} \right) \\
& = \left(\frac{2n + 2}{2} \right) \left(\frac{2n^2 + 4n + 2}{2} \right) \\
& = (n+1)(n^2 + 2n + 1)
\end{aligned}$$

Şekil 86. ÖA2'nin 1. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA3, 1. problemde ulaştığı varsayımın doğruluğunu göstermek için ispat aşamasına geldiğinde öncelikle kullanacağı ispat yöntemini belirlemiştir, ardından kullanacağı ispat yönteminin basamaklarını açıklamıştır. Bu durumu “Yani tümevarımla bunu ispatlayabiliriz, şimdi n 'ye 1 verip sonra n için doğruysa $n+1$ için doğruluğunu gösterebiliriz diye düşünüyorum.” şeklinde ifade etmiştir. Daha sonra ÖA3'ün tümevarım yöntemiyle ispat basamaklarını uygun şekilde gerçekleştirerek ve gerekli işlemleri yaparak Şekil 87'deki gibi tümevarım yöntemi ile ispatı tamamladığı gözlemlenmiştir.

$$\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + \dots + n^3 &= \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2} \right)^2 \\
n=1 \text{ olsun.} \\
1^3 &= \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1 \\
n \text{ için doğru olsun. } (n+1) \text{ için de doğru mu?} \\
\left(\frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2} \right)^2 &= \left(\frac{(n+1) \cdot n + (n+1) \cdot 2}{2} \right)^2 \\
&= \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) \right)^2 \\
1^3 + 2^3 + \dots + n^3 &= \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2} \right)^2 + \frac{2 \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n+1)}{2} + (n+1)^2 - (n+1)^3 \\
&= \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2} \right)^2 + (n+1)^2 \cdot \left(\frac{n+1 - n - 1}{0} \right) \\
&= \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2} \right)^2
\end{aligned}$$

Şekil 87. ÖA3'ün 1. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA4, 1. problemde “1’den n’ye kadar olan sayıların küpleri toplamı, 1’den n’ye kadar olan sayıların toplamının karesine eşittir.” varsayımına ulaşmıştır ve ulaştığı varsayımın doğruluğunu göstermek için ispat aşamasına geldiğinde öncelikle kullanacağı ispat yöntemini belirlemiştir, gerekçesini tümevarımsal muhakemeye dayandırmıştır ve izleyeceği yolu açıklamıştır. Bu durumu “Bunu ispatlamam gerekirse tümevarım yöntemini denemeyi düşünürdüm. Çünkü sonuç olarak, belirli adımda örneğin üzerinden gittik, bu örneklerden bir genellemeye ulaştık. Burada $n=1$ için sağlar zaten, n tanesi için doğru olduğunu kabul edip $n+1$ tanesi için de doğruluğunu göstermeye çalışırdım.” şeklinde ifade etmiştir. Daha sonra ÖA4’ün bu adımları gerçekleştirerek Şekil 88’deki gibi tümevarım yöntemi ile ispatı tamamladığı gözlemlenmiştir.

$$\begin{aligned}
& \underbrace{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}_{(1+2+\dots+n)^2} + (n+1)^3 = (1+2+\dots+n+n+1)^2 \\
& (n+1)^3 \stackrel{?}{=} (1+2+\dots+n+1)^2 - (1+2+\dots+n)^2 \\
& = \left(\frac{(n+2) \cdot (n+1)}{2} \right)^2 - \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2} \right)^2 \\
& = \left(\frac{n^2 + 3n + 2}{2} \right)^2 - \left(\frac{n^2 + n}{2} \right)^2 \\
& = \left(\frac{2n+2}{2} \right) \cdot \left(\frac{2n^2 + 4n + 2}{2} \right) \\
& = (n+1) \cdot (n^2 + 2n + 1) \\
& = (n+1) \cdot (n+1)^2 = (n+1)^3
\end{aligned}$$

Şekil 88. ÖA4'ün 1. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA2, 3. problemde ulaştığı varsayımın doğruluğunu göstermek için ispat aşamasına geldiğinde daha önceki oturumda kullanmış olduğu tümevarım yöntemini kullanmaya karar vermiştir. ÖA2, bu durum için “*Bunu da tümevarımla ispatlayabiliriz, sonuçta küp formülü oradan gelmişti.*” şeklinde ifade etmiştir. Ardından daha önceki oturumda kullanmış olduğu tümevarım yöntemiyle ispatın basamaklarına vurgu yaparak “*Burada da yine 1 için doğru olup olmadığını kontrol ediyorum. n için doğru olsun, n+1 için doğru mu? Ona bakıyoruz.*” açıklamalarında bulunmuştur. Sonra ÖA2'nin bu adımları gerçekleştirerek ve gerekli işlemleri yaparak Şekil 89'daki gibi tümevarım yöntemi ile ispatı tamamladığı gözlemlenmiştir.

$k=1$ tam doğru mu?

$$\frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1$$

$n \in \mathbb{N}^+$ tam doğru olsun. $n+1$ tam doğru mu?

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n^2+3n+2)(2n+3)}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{2n^3+n^2+2n^2+n}{6} + (n+1)^2 = \frac{2n^3+3n^2+6n^2+8n+4n+6}{6}$$

$$(n+1)^2 = \frac{2n^3+8n^2+13n+6}{6} - \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

$$= \frac{6n^2+12n+6}{6}$$

$$= n^2+2n+1$$

Şekil 89. ÖA2'nin 3. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA3, 3. problemde ulaştığı varsayımın doğruluğunu göstermek için ispat aşamasına geldiğinde öncelikle kullanacağı ispat yöntemini belirlemiştir. Bu durumu “Burada tümevarımla ispat yapabiliriz diye düşünüyorum.” şeklinde ifade etmiştir. Ardından ÖA3, tümevarım yöntemi ile ispatın basamaklarını “ n 'ye 1 diyelim, zaten 1×1 boyutundaki bir karede 1 tane kare var, o zaman $n=1$ için doğru, n için doğru olsun $n+1$ için doğru mu? Bunu inceleyeceğiz.” şeklinde açıklamıştır. Sonra ÖA3, bu açıklamalarını Şekil 90'daki gibi yazmıştır.

$n=1$ olsun.

$$\square \quad \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2+1)}{6} = 1$$

$n=1$ için doğrudur.

n için doğru olsun. $n+1$ için doğru mu?

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \quad ?$$

Şekil 90. ÖA3'ün 3. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA3'ün tümevarım yöntemiyle ispat basamaklarını uygun şekilde gerçekleştirerek ve gerekli işlemleri yaparak Şekil 91'deki gibi tümevarım yöntemi ile ispatı tamamladığı gözlemlenmiştir.

$$\begin{aligned}
 1^2 + 2^2 + \dots + (n+1)^2 &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \quad ? \\
 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\
 &= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} \\
 &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\
 &= \frac{(n+1)(2n+3)(n+2)}{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 2n^2 + 7n + 6 \\
 2n \quad \quad + 3 \\
 n \quad \quad + 2
 \end{array}$$

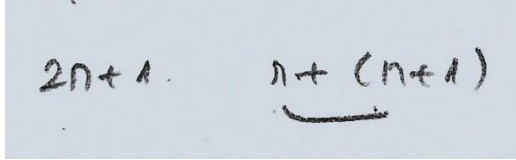
Şekil 91. ÖA3'ün 3. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA4, 3. problemde ulaştığı varsayımın doğruluğunu göstermek için ispat aşamasına geldiğinde kullanacağı ispat yöntemini belirlemiştir. Bu durumu “Burada bu formül için yani tümevarım denenebilir.” şeklinde ifade etmiştir. Ardından kullanacağı ispat yönteminin basamaklarını “1 için incelerim sonra n için kabul eder n+1 için doğruluğunu gösterirdim.” cümleleri ile açıklamıştır. Daha sonra ÖA4'ün tümevarım yöntemiyle ispat basamaklarını uygun şekilde gerçekleştirerek ve gerekli işlemleri yaparak Şekil 92'deki gibi tümevarım yöntemi ile ispatı tamamladığı gözlemlenmiştir.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
 1^2 + 2^2 + \dots + (n+1)^2 &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\
 (n+1)^2 &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
 6(n+1)^2 &= (n+1)(2n^2 + 7n + 6 - 2n^2 - n) \\
 6(n+1) &= 6n + 6 \\
 1 &= 1
 \end{aligned}$$

Şekil 92. ÖA4'ün 3. probleme ait çözümünden bir bölüm

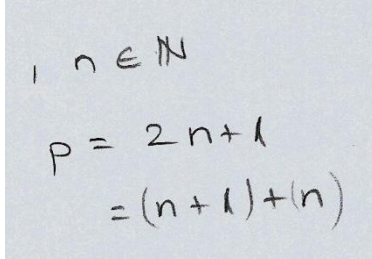
ÖA1, 4. problemde “Bütün tek sayılar ardışık sayıların toplamı şeklinde yazılabilir.” varsayımında bulunmuştur ve düşüncelerini “Tek sayılar hani $2n+1$ formunda ya hani, bunu n artı $n+1$ olarak yazabildiğimizden 2 sayı var burada, o zaman tek sayılar ardışık iki tamsayının toplamı olarak yazılabiliyor.” şeklinde dile getirmiştir. Bu düşüncelerini Şekil 93’teki gibi yazmıştır. ÖA1’in doğrudan ispat yöntemi ile varsayımını ispatladığı gözlemlenmiştir.



$$2n+1 \quad n+(n+1)$$

Şekil 93. ÖA1’in 4. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA2’nin, 4. problemde “Bütün tek sayılar iki ardışık tamsayının toplamı olarak yazılabilir.” varsayımına ulaştığı ve doğrudan ispat yöntemi ile bu varsayımını Şekil 94’teki gibi ispatladığı gözlemlenmiştir.



$$n \in \mathbb{N}$$

$$p = 2n+1$$

$$= (n+1)+(n)$$

Şekil 94. ÖA2’nin 4. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA2’nin 4. problemde “En az iki ardışık sayının toplamı olan sayılar 2^n şeklinde yazılamaz.” varsayımında bulunduğu gözlemlenmiştir. ÖA2, bu varsayımı nasıl ispatlayacağı hakkında bir fikrinin olmadığını “En az iki ardışık sayının toplamı olan sayıların 2^n şeklinde yazılamadığını ispatlamam gerekiyor, ama nasıl?” cümleleriyle ifade etmiştir. Ardından ÖA2, “Toplamdan gitsem mesela işte bir sayı alıp hani belirli bir toplamın, aslında demek istediğim şey belirli bir toplam 2^n şeklinde yazılamaz. O zaman x ’den $x+r$ ’ye kadar olan sayıları toptasam gelir mi oradan bir şey?” şeklinde düşünmüş, bu açıklamalarını Şekil 95’teki gibi yazmıştır.

$$x + (x+1) + (x+2) + \dots + (x+r) \\ = \underbrace{(r+1)}_{\text{terim sayısı}} \cdot \underbrace{x}_{\text{ilk terim}} + \frac{r(r+1)}{2} = (r+1) \left(x + \frac{r}{2} \right) = (r+1) \left(\frac{2x+r}{2} \right)$$

Şekil 95. ÖA2'nin 4. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA2'nin " 2^n 'nin bütün asal çarpanları sadece 2 olduğu için hiçbir zaman tek sayı gelmeyecek, o yüzden ardışık sayıların toplamında bir tek çarpan olmak zorunda. Eğer $(r+1)$ ve $(2x+r)$ sayılarından birinin tek olduğunu garanti edersem ispatlamış olurum." şeklinde akıl yürüttüğü ve doğrudan ispat yöntemi ile Şekil 96'daki gibi ispatı tamamladığı gözlemlenmiştir.

$$(r+1) \left(\frac{2x+r}{2} \right) = a \Rightarrow (r+1)(2x+r) = 2a$$

r tek ise $(r+1)$ çifttir. $(2x+r)$ tektrr.
 r çift ise $(r+1)$ tektrr. $(2x+r)$ çifttrr.

Şekil 96. ÖA2'nin 4. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA3'ün 4. problemde "Tek tamsayılar ardışık iki tamsayının toplamı olarak yazılabilir." varsayımına ulaştığı ve ulaştığı varsayımı doğrudan ispat yöntemi ile Şekil 97'deki gibi ispatladığı gözlemlenmiştir.

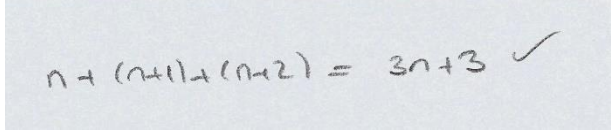
$$n + (n+1) = 2n+1$$

$n \in \mathbb{Z}^+$ olsun. n ile $(n+1)$ i topladığımızda bize bir pozitif tek tamsayı verir.

$$n + (n+1) = 2n+1 ; n \in \mathbb{Z}$$

Şekil 97. ÖA3'ün 4. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA3'ün 4. problemde “Üç ardışık sayının toplamı üçe bölünür.” varsayımında bulunduğu gözlemlenmiştir. Ardından “Üç ardışık sayı alalım, n , $n+1$ ve $n+2$ bunları toplarsak $3n+3$ ” şeklinde düşünmüş ve düşüncelerini Şekil 98'deki gibi yazmıştır.


$$n + (n+1) + (n+2) = 3n+3 \checkmark$$

Şekil 98. ÖA3'ün 4. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA3, “ $3n+3$ yapıyor. Bu sayı üçe bölünür. Demek ki, her üç ardışık sayının toplamı üçe bölünür.” açıklamasında bulunmuştur. ÖA3'ün oluşturduğu varsayımı doğrudan ispat yöntemi ile ispatladığı gözlemlenmiştir.

ÖA4'ün 4. problemde “Tek sayıların hepsi iki ardışık sayının toplamıdır.” varsayımına ulaşmıştır. Ardından “Tek sayıların çoğunu yazabiliyorum, hatta tek sayılar genelde ardışık zaten, tek sayılar n artı $(n+1)$ şeklinde yazılabildiği için tek sayıların hepsini yazabiliyorum.” şeklindeki düşüncesini dile getirmiştir. ÖA4'ün doğrudan ispat yöntemi ile varsayımını ispatladığı gözlemlenmiştir.

4.4.2 İspatlama Boyutunu Tamamlayamama

ÖA1'in 3. problemde ulaştığı varsayımın doğruluğunu göstermek için ispat aşamasına geldiğinde “Bu tarz ispatlar yaptık soyut matematik dersinde. Tümevarım mıydı? Tümevarım yapıyorduk sanırım. Evet, evet ispatta tümevarım kesin kullanılacak.” ifadeleriyle kullanacağı ispat yöntemine ispatın alışlagelmiş formatlarından etkilenerek karar vermiştir. Ardından tümevarım yöntemiyle ispatın basamakları hakkındaki düşüncelerini “0 için sağlatıyorduk yanlış hatırlamıyorsam sonra bir n bir de $n+1$ 'i mi deniyorduk öyle bir şey vardı. Evet, ardışığını deniyorduk yanlış hatırlamıyorsam.” şeklinde ifade etmiştir. Ardından uzun bir süre düşündükten sonra “İlk beklediğimiz şey 0 için sağlaması; n için sağlaması; bir de $n+1$, $n+1$ içindi evet ardışığı içindi, $n+1$ için doğru olmasını bekliyorum.” söylemlerinde bulunmuştur ve tümevarım yöntemiyle ispatı nasıl uygulayacağına karar vermiştir. ÖA1, tümevarım yöntemiyle ispat basamaklarını Şekil 99'daki gibi yazmıştır.

İspat: Tümevarım. 0 yeme $n=1$ tüm sağlıyor.

$$\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} = 1^2 + \dots + n^2$$

$$\frac{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (2n+3)}{6} = 1^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2$$

Şekil 99. ÖA1'in 3. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA1'in ispatı yaparken tümevarımla ispat yönteminin basamaklarını derste öğrendiklerine benzer olarak yapılandırdığı fakat bu basamaklar arasında mantıksal çıkarım yapamadığı gözlemlenmiştir. Bu durumu “*Bunu sağlattırdık ($n=1$ için) bunun zaten doğru olduğunu genellemeden biliyoruz. Peki, bunun doğruluğunu göstermek için ne yapıyordum? Birbirinden mi çıkarıyorduk bunları acaba, nasıl yapıyorduk, dağıtıyorduk bunları sanki ama o da bir işe yarar mı?*” ifadeleri ortaya koymaktadır. ÖA1, uzun bir süre düşündükten sonra neler yaptığını gözden geçirmiş “*İspatta buraya kadar gelebildim.*” cümleleri ile ispata devam edemeyeceğini belirtmiştir. ÖA1'in ispat süreci içerisinde ispatı bir noktaya kadar getirebildiği fakat ispatı tamamlayamadığı gözlemlenmiştir.

ÖA4'ün 4. problemde “*En az iki ardışık sayının toplamı olan hiçbir sayı 2^n 'nin kuvveti şeklinde yazılamaz, 2^n şeklinde yazılamaz.*” varsayımında bulunmuştur. Bu varsayım hakkında biraz düşündükten sonra oluşturduğu varsayımı nasıl ispatlayacağı hakkında bir fikrinin olmadığını “*İı, başka ne diyebilirim 2^n 'nin kuvveti şeklinde yazamıyorum. Başka ne diyebilirim, bunu nasıl doğrulayabilirim, nasıl ispatlarım?*” şeklinde ifade etmiştir. Daha sonra üç ardışık sayı alarak bunu Şekil 100'deki gibi yazmıştır.

$$n + (n+1) + (n+2)$$

Şekil 100. ÖA4'ün 4. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA4, düşünmeye “ *n artı $(n+1)$ artı $(n+2)$; $3n+3$ bu 2^n 'ye bölünmediği için mi yani ispata buradan ulaşabilir miyim? 2^n 'ye bölünemediği için yazılamaz.*” cümleleriyle devam etmiştir. Ama bu düşüncesinin ispat olmadığını ispat için matematiksel dil gerektiğini ve ispatın belirli bir sistematik yapı içinde gerçekleştiğini “*Ama bu ispat olmaz. İspat olamaz bu, ispat*

olması için bunun benim adım şeklinde gitmem gerekiyordu, yani biz genelde şöyle başlıyoruz; n pozitif tamsayı ise şöyle şöyledir, şöyle şöyledir ama şu an hayır.” şeklinde dile getirir. ÖA4’ün ulaştığı varsayımı nasıl ispatlayacağı ile ilgili hala bir fikrinin olmadığını “İspat, ispatta nasıl bir yol izleyebilirim? 2^n diye yazamıyorum, uuu yani nasıl bir ispat yoluna gitmeliyim? İspat yoluna nasıl gidebilirim?” cümleleriyle ifade eder. Daha sonra ÖA4, ardışık sayıların toplamını Şekil 101’deki gibi yazar.

$$\begin{aligned}
 &n + (n+1) + (n+2) + \dots + (n+k) \\
 &(k+1)n + (1+2+\dots+k) \\
 &(k+1).n + \frac{k.k+1}{2} \neq
 \end{aligned}$$

Şekil 101. ÖA4’ün 4. probleme ait çözümünden bir bölüm

ÖA4, doğrudan ispat için bir adım atmıştır fakat ispata ulaşıp ulaşamayacağı noktasında kararsızlık yaşadığını belirtmiştir. Bu durumu “Bu şekildeki toplamalar 2^n şeklinde yazılamıyor, bu toplamın 2^n ’ye bölünemediğine zaten kendimi inandırdım ama bunun ispata giden yol olup olmadığı konusunda emin olamadım.” şeklinde ifade etmiştir. Bir süre düşündükten sonra “Evet bu doğru mu, böyle düşünmem doğru mu, bu ispata giden yol mu?” cümleleriyle kararsızlığının uzun bir süre devam ettiği gözlemlenmiştir. ÖA4’ün, ispata karşı olumsuz bir tutuma sahip olduğunu “Ne yapabilirim ki? İspatlamak ne kadar zormuş ya. Gerçekten çok zor.” şeklinde ifade etmiştir. ÖA4, uzun bir süre düşündükten sonra “Nasıl bir yol izlemem gerektiği şu an aklıma gelmiyor, off yok, hayır ispatlayamıyorum” cümleleri ile ispata devam edemeyeceğini belirtmiştir. ÖA4’ün ispat süreci içerisinde ispata başladığı fakat ispatın devamını getiremediği ve ispatı tamamlayamadığı gözlemlenmiştir.

4.4.3 İspatlama Boyutuna Başlayamama

ÖA2’nin 2. problemde istenilen varsayıma ulaştığı gözlemlenmiştir. ÖA2, bu varsayıma nasıl ulaştığını ve ispata dair düşüncesini “Buraya kadar yaptıklarım, şu an sadece akıl yürütme ile buna ulaştık ama ispatı nasıl olur? Burada tümevarım kullanamam herhalde

çünkü ebob var içinde ama ayrı ayrı inceleyebilir miyim bilemiyorum.” şeklinde dile getirmiştir. ÖA2, formülü bulabildiğini fakat bu formülün nasıl ispatlanması gerektiğini bilmediğini hatta hangi ispat yöntemini kullanacağını dahi bilmediğini, kendisini formülün doğruluğu yönünde inandırmış olsa da formülün doğruluğunu ispatlayamayacağını belirtmiştir. Bu durumu “Yani gerçekten ispat olarak aklıma gelmiyor. Şu formüle şu an çok inandım $m+n$ -ebob(m,n) çok mantıklı geldi çünkü yaptığımız incelediğimiz hepsinde bu şu an geçerli. Ama ispatı olarak düşündüğümde şu ispat yöntemiyle yapabiliriz bile söyleyemiyorum şu an. Nasıl doğrulayabiliriz? Yani sadece farklı durumları inceleyerek bir ispat yapılabilir gibi geldi çünkü ulaşıırken de onu kullandık. Ama işte aralarında asal olma durumu var. O zaman da çok uzar, hepsi için gösteremeyiz, sonuçta ebob’larının 2 olması, 3 olması, 4 olması, 5 olması diye o yüzden. Sanırım bunun ispatını yapamam.” cümleleri ile ifade etmiştir.

ÖA3’ün 2. problemde istenilen varsayıma ulaşmıştır. ÖA3, ulaştığı varsayımın doğruluğunu göstermek için ispat aşamasına geldiğinde ispatı nasıl yapacağına ve ispat yöntemlerine dair düşüncesini “*Bunu nasıl ispatlarım? Iıı, evet yani aslında tümevarımla gidesim geliyor ama. Başka ispat yöntemlerini düşünürsem, çelişki, ama bu olmuyor şu an bir çelişki bulamayız. Iıı başka doğrudan yapamıyorum.*” şeklinde ifade etmiştir. ÖA3; matematiksel düşünmenin özelleştirme, genelleme ve varsayımda bulunma boyutlarında sorun yaşamadığını fakat ispat aşamasına geldiğinde ispat için bir fikri olmadığını, özel örnek vermenin matematiksel anlamda ispat olmadığını ve ispatı yapamayacağını belirtmiştir. Bu durumu “*Yani aklıma da bir şey gelmiyor aslında ispat için. Önceki adımlarda örnekler vererek bir şeylere ulaştım ama burada örnekleri kullanmak kesin bir kanıt sunmuyor bize, sadece örneklerle desteklemiş oluyorum, ispatlamış olmuyorum. Galiba ispatlayamayacağım.*” cümleleriyle dile getirmiştir.

ÖA1’in 4. problemde “*En az iki ardışık sayının toplamı olan sayılar 2^n şeklinde yazılamaz.*” varsayımında bulunduğu gözlemlenmiştir. ÖA1, ispatı nasıl yapacağına, hangi yöntemi kullanacağına dair bir fikri olmadığını belirtmiştir. Bu durumu “*Nasıl ispatlayabilirim? Iı mesela az önce tümevarım ilkesini kullandım ya ispat yöntemlerinde, burada hangi ilkeyi kullanmam gerekiyor acaba?*” cümleleriyle ifade etmiştir. ÖA1, ispat için bir fikri olmadığını, ispata nasıl başlayacağını bilmediğini ve ispatı yapamayacağını belirtmiştir. Bu durumu “*Nasıl bir şey yapabilirim ki burada? Aklıma hiçbir şey gelmiyor, nasıl*

başlayacağımı bilemiyorum. Yok, hayır ben bunu ispatlayamam yapamam yani.” şeklinde dile getirmiştir.

ÖA3’ün 4. problemde “*Ardışık sayıların toplamı olan sayılar 2’nin kuvveti biçiminde yazılamaz.*” varsayımına ulaşmıştır. ÖA3, ulaştığı varsayımın doğru olduğunu söyleyebildiğini ama niçin doğru olduğunu göstermede sıkıntı yaşadığını ve varsayımını ispatlayamayacağını belirtmiştir. Bu durumu “*En az iki ardışık sayının toplamı olan sayıların 2’nin kuvveti şeklinde yazılamadığını söyleyebiliyorum, evet doğru olduğunu da düşünüyorum ama bunu ispatlamakta şu an sıkıntı yaşıyorum, evet ispatlayamıyorum, ispatlayamam.*” cümleleriyle ifade etmiştir.

ÖA1’in 1. problemde ve 2. problemde matematiksel düşünmenin genelleme ve varsayımda bulunma boyutlarını uygun şekilde tamamlayamadığı için ispat aşamasına geçemediği gözlemlenmiştir. ÖA4’ün de 2. problemde matematiksel düşünmenin genelleme ve varsayımda bulunma boyutlarını uygun şekilde tamamlayamadığı için ispat aşamasına geçemediği gözlemlenmiştir.

BÖLÜM V

SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu bölümde, araştırmanın bulgularından elde edilen sonuçlara ve bu sonuçlar doğrultusunda eğitimciler ve araştırmacılar için önerilere yer verilmiştir.

5.1 Sonuç ve Tartışma

Özelleştirme bir problem durumunu incelemek ve daha iyi anlamak için belirli örnek durumlar üzerinde çalışmayı içermektedir (Burton, 1984). Aynı zamanda bir genellemeye ulaşmayı sağlayacak gerekli verileri bir araya getirme olarak da ifade edilebilir (Mason, Burton & Stacey, 2010, s.9). Bu doğrultuda öğretmen adaylarının problem durumunu anladıkları, problemde istenilen değeri belirledikleri, problem durumu için rastgele veya sistematik bir şekilde örnekler verdikleri görülmüştür. Verilen problemlere ilişkin öğretmen adaylarının problemde istenilen değeri belirlemenin ötesinde bir inceleme yapma eğilimi gösterdikleri tespit edilmiştir. Araştırma kapsamında öğretmen adaylarının problem durumu ile ilgili özel örnek vermede zorlanmadıkları, özelleştirme aşamasında sorun yaşamadıkları belirlenmiştir. Bu sonuç yapılan araştırmalar (Arslan & Yıldız, 2010; Keskin, Akbaba Dağ & Altun, 2013; Yağdıran, 2018; Yıldırım, 2015) ile paralellik göstermektedir.

Yağdıran'ın (2018) araştırma sonucunda olduğu gibi bu çalışmada da katılımcıların özel örnek sayısını verileri değiştirerek çoğaltmak yerine, sistematik bir yol bularak örnek sayısını çoğaltmayı tercih ettikleri gözlemlenmiştir. Ayrıca öğretmen adaylarının ön bilgilerinin etkili olduğu problem durumlarında özel örnek vermeden direkt ilişki kurabildikleri, özelleştirme boyutunu atlayıp doğrudan varsayımda bulundukları sonucuna ulaşılmıştır. Bu sonuç matematiksel düşünme üzerine yapılan araştırmalar (Arslan & Yıldız,

2010; Keskin, Akbaba Dağ & Altun, 2013; Yağdırın, 2018; Yıldırım, 2015) ile paralellik arz etmektedir.

Lane ve Harkness (2012), daha fazla örnek durumlar üzerinde çalışmanın istenilen ilişkilerin daha iyi fark edilmesine yardımcı olduğunu, dolayısıyla genelleme ve varsayımda bulunma aşamalarının daha sağlıklı şekilde gerçekleştiğini ortaya koymuşlardır. Bu bağlamda öğretmen adaylarının veriler arasında bir ilişki bulana kadar özel örnekleri çoğalttığı tespit edilmiştir. Özel örneklerin sistematik veya rastgele bir şekilde çoğaltılması probleme göre değişkenlik göstermesine rağmen öğretmen adaylarının ilişki bulmak için sistematik örneklerden faydalandıkları görülmüştür. Bir ilişki araştırılıyor ve başarı elde etmek isteniyorsa özel durumların sistematik olarak seçilmesi daha faydalıdır (Mason, Burton & Stacey, 2010, s.5).

Öğretmen adaylarının sadece tek bir özel duruma bakarak ilişki kursa bile bunun yanlış olduğunu fark edip örnekleri çoğaltarak tüm örnek durumları kapsayacak doğru ilişkiye ulaştıkları ya da tüm örnek durumları kapsayacak doğru bir ilişkiye ulaşamayan öğretmen adaylarının özelleştirme aşamasında kaldıkları, ilişki arayışı içinde oldukları gözlemlenmiştir. Yıldırım (2015) çalışmasında, veriler arasında rastgele ilişki arayan öğrencilerin varlığı dikkat çekmiştir. Buna paralel olarak araştırmamızda da bazı öğretmen adalarının özel durumlara bakmadan deneme yanılma yoluyla rastgele ilişki aradıkları görülmüştür. Ayrıca Stacey'nin (1989) araştırmaları sonucunda olduğu gibi, katılımcıların şekilleri bir ilişki bulma yönünde incelemek yerine sayı örüntüsüne dönüştürmek için kullandıkları gözlemlenmiştir.

Öğretmen adaylarının tüm örnek durumları göz önünde bulundurarak doğru bir ilişkiye ulaşmada zorlandıkları görülmektedir. Tall (1988), genellemenin bilişsel şemanın genişletilmesi şeklinde gerçekleştiğini, özel durumların niteliklerinin ihmal edilmeden daha geniş bir bağlamda ele alınması şeklinde olduğunu belirtmiştir. Ancak genelleme sürecinde ortaya çıkabilecek sorunların engellenmesi için genellenecek olan duruma ilişkin artan detayların gözden kaçırılmaması gerektiğini vurgulamıştır. Buradan araştırmada öğretmen adaylarının problem durumuna ilişkin tüm detayları göz önüne alarak tam ve doğru bir genelleme yapmakta zorlandıkları yani bazı özel durumlara ilişkin detayları gözden kaçırdıkları sonucuna ulaşılmıştır. Bu sonuç yapılan araştırmalar (Alkan & Bukova Güzel, 2005; Kükey, 2018; Yağdırın, 2018; Yeşildere & Akkoç, 2011) ile paralellik arz etmektedir. Yeşildere ve Akkoç (2011) çalışmasında genelleme sürecinin doğru şekilde

gerçekleşmesinin başlangıcında veriler arasındaki ortak özelliğin doğru şekilde belirlenmemesinin yattığını, tespit edilen ortak özelliğin doğru olmadığı takdirde oluşturulan hipotezin tüm terimlerin bulunabilmesini sağlayacak kapsamda olmadığını ve genel terimin yazılamadığını belirtmiştir. Alkan ve Bukova Güzel (2005) ise öğretmen adaylarının, genelleme aşamasında sıkıntı çektikleri için, doğal olarak soyutlamada da başarısız olduklarını ortaya koymuştur. Yağdıran (2018) çalışmasında, genelleme evresinde verilen örneklerden yola çıkarak bir ilişkinin bulunmasının zor olduğunu tespit etmiştir.

Öğretmen adaylarının her ne kadar genelleme sürecinde zorlansalar da birçoğunun en az bir genellemeye ulaştığı ve bunu varsayım olarak ifade ettiği gözlemlenmiştir. Genelleme sürecinde öğretmen adaylarının genelleme sürecinde buldukları ilişkiyi problem durumuna bağlı olarak sözel veya cebirsel olarak ifade ettikleri sonucuna ulaşılmıştır. Öğretmen adaylarının ulaşılan genellemeyi cebirsel olarak ifade etse bile sözel olarak da açıkladıkları görülmüştür. Bu durum matematiksel düşünme üzerine yapılan bazı araştırmaların (Arslan & Yıldız, 2010; Yıldırım, 2015) sonuçları ile örtüşmemektedir. Arslan ve Yıldız (2010) çalışmasında 11. sınıf öğrencilerinin genellemeyle ilgili olarak, sayılar veya değişkenler arasındaki ilişkiyi daha çok sözel olarak ifade etmeyi tercih ettiklerini ve bu ilişkiyi matematiksel sembollerle ifade etmede zorlandıklarını belirtmiştir. Yıldırım (2015) çalışmasında, genelleme sürecinde 8. sınıf öğrencilerinin ulaştıkları genellemeleri sözel olarak açıklayabildikleri halde cebirsel olarak ifade etmede zorlandıkları sonucuna ulaşmıştır. Bu çalışmaların (Arslan & Yıldız, 2010; Yıldırım, 2015) aksine Tuncay (2015) çalışmasında katılımcıların genelleme sürecinde sözel ifadelerin yanı sıra matematiksel gösterimlerde de bulunduklarını ve çok zorlanmadıklarını, bu durumun ise alının eğitim ve deneyim ile ilişkili olduğunu belirtmiştir. Araştırmamızda da bu durum öğretmen adaylarının eğitim seviyesi ve geçmiş akademik deneyimlerinden kaynaklanabilir.

Öğretmen adaylarının ulaştıkları varsayımların doğru olup olmadığını özel örnek vererek kontrol ettikleri ya da özel durumlardan yola çıktıkları için varsayımlarını doğru olarak düşündüklerinden kontrol etme gereksinimi duymadıkları gözlemlenmiştir. Bu sonuç yapılan araştırmalar (Arslan & Yıldız, 2010; Kükey, 2018; Yıldırım, 2015) ile paralellik göstermektedir.

Öğretmen adaylarının bir varsayımı ispatlama aşamasında zorlandıkları gözlemlenmiştir. Bu sonuç yapılan araştırmalar ile paralellik arz etmektedir (Alkan & Bukova Güzel, 2005; Arslan & Yıldız, 2010; Keskin, Akbaba Dağ & Altun, 2013; Tanışlı, 2016). Bu durumun

öğretmen adaylarının ispata nasıl başlayacağını bilememelerinden, ispatta nasıl bir yol izleyeceklerini bilememelerinden ve ispata karşı olumsuz tutumlarının olmasından kaynaklandığını söyleyebiliriz. Matematiksel düşünme üzerine yapılan araştırmalarda (Arslan & Yıldız, 2010, Tanışlı, 2016) öğrencilerin varsayımları özel değerlerle doğrulamaya çalıştıkları ve cebirsel ispattan kaçındıkları bulgusu elde edilmiştir. Aksine bu araştırmada, bir varsayımın doğruluğunu gösterirken özel örnek vermenin öğretmen adayları için geçerli bir ispat anlamına gelmediği, öğretmen adaylarının ispat aşamasında cebirsel ispatı tercih ettikleri tespit edilmiştir. Elde edilen bu sonuca paralel olarak Keskin, Akbaba Dağ ve Altun (2013), ispat yapan 11. sınıf öğrenci gruplarının daha çok cebirsel ispata yöneldiklerini ve bunun nedeninin çalışma yapılan 11. sınıf öğrencilerinin başarı düzeyi yüksek bir lisenin öğrencileri olmasından kaynaklanıyor olabileceğini belirtmiştir. Araştırmamızda da bu durum öğretmen adaylarının eğitim seviyesi ve geçmiş akademik deneyimlerinden kaynaklanabilir.

Öğretmen adaylarının bir matematiksel varsayımın ispatı için hangi ispat yöntemini kullanacaklarına karar verirken zorlandıkları, tümevarım yöntemi ile ispat yapmaya daha yatkın oldukları gözlemlenmiştir. Bu sonuç yapılan araştırmalar ile paralellik göstermektedir (Tanışlı, 2016; Yağdıran, 2018). Yağdıran (2018) çalışmasında, okulda tanıtılan ispat yöntemlerinde tümevarımla ispat yapma yöntemine ağırlık verilmiş olmasından dolayı öğrencilerin ispat etme evresine geçtiklerinde genellikle tümevarım yöntemi ile ispat yapmaya çalıştıklarını belirtmiştir. Birçok öğretmen adayı başarılı bir şekilde tümevarım yöntemi ile ispat yapsa da bir öğretmen adayının tümevarım yöntemi ile ispat yaparken ispatı derslerden öğrendiklerine benzer adımlar oluşturarak yapılandığı fakat ispatı tamamlayamadığı gözlemlenmiştir. Bu durum öğrencilerin veya matematik öğretmen adaylarının tümevarım yöntemi ile ispat yaparken zorlandıklarını ve tümevarım yöntemi ile ispatın altında yatan mantığı kavrayamadığını söyleyen bazı araştırmaların (Güler, Özdemir & Dikici, 2012; Zaimoğlu, 2012) sonuçlarıyla paralellik göstermektedir. Matematik öğretmen adaylarıyla yürütülen çalışmaların (Güler, Özdemir & Dikici, 2012; Sağır, 2013) sonuçları öğretmen adaylarının matematiksel tümevarım basamakları arasındaki ilişkiyi kavrayamadıklarını ve bu yöntemi takip edilmesi gereken bir prosedür gibi kullandıklarını göstermiştir. Sağır (2013) çalışmasında öğretmen adaylarının ispat yöntemlerini ezbere kullanmaya çalıştıklarını aynı zamanda kullandıkları yöntemler hakkında eksik ve yanlış bilgilere sahip olduklarını belirlemiştir. Bu durum bu araştırmanın bulgularıyla paralellik göstermektedir. Öğretmen adaylarının ispatlarını önceden edindikleri bilgilere dayanarak

yapılandırmaya çalıştıkları gözlemlenmektedir. Bu sonuç yapılan çalışmalarla paralellik arz etmektedir (Çontay, 2017).

Öğretmen adaylarının, matematiksel bir ispat için mantıksal notasyonun uygun yerde kullanılması ve ispat yöntemini işaret eden belli biçimdeki kelimelerin yer aldığı, mümkün olan en açık şekilde yazılmış olması gerektiğinin (Weber & Alcock, 2009, s.326) farkında oldukları söylenebilir. Bu durum öğretmen adaylarının, ispatın ne anlama geldiğini, ispat yapmak için neye gereksinim olduğunu bilmelerinin bir sonucudur.

Öğretmen adaylarının oluştukları varsayımların doğru olduğu yönünde açıklamalarda bulunmalarına rağmen neden doğru olduğuna yönelik açıklamalarının yeterli olmadığı gözlemlenmiştir. Bu sonuç öğretmen adaylarının doğru önermeleri belirleme becerilerinin yüksek ancak neden doğru olduğunu açıklama becerilerinin düşük olduğu şeklindeki araştırma sonuçları ile paraleldir (Güler & Ekmekçi, 2016; Ko, 2010; Ko & Knuth, 2009)

Yapılan araştırmalara (Arslan & Yıldız, 2010; Keskin, Akbaba Dağ & Altun, 2013; Yağdıran, 2018) paralel olarak matematiksel düşünme sürecinde öğretmen adaylarının özelleştirme aşamasında çok fazla sıkıntı yaşamadıkları sonraki aşamalarda sırasıyla bir önceki aşamaya göre daha çok zorlandıkları ve öğrenci başarısının düştüğü görülmüştür.

Tuncay'ın (2015) ve Coşkun'un (2012) araştırma sonuçlarında olduğu gibi matematiksel düşünmenin tüm boyutlarını birbirlerinden bağımsız olarak incelenmenin zor olduğu, matematiksel düşünme süreçlerinin birbirleriyle etkileşen bir yapıda olduğu gözlemlenmiştir.

5.2 Öneriler

Araştırmanın bu kısmında; araştırmanın bulguları ve sonuçları doğrultusunda matematik öğretmenlerine, araştırmacılara ve öğretmen eğitimcilerine çeşitli öneriler sunulmuştur.

- Matematiksel düşünme evrelerini içeren etkinliklerin kullanımı zaman içerisinde bu evrelerin daha iyi yapılabilmesini sağladığı tespit edilmiştir (Yağdıran, 2018). Bu nedenle matematiksel düşünmenin gelişimine yardımcı olacak öğrenme ortamlarının oluşturulması ve bu ortamlarda matematiksel düşünme boyutlarını içeren etkinliklerin tasarlanması ve uygulanması gerektiği düşünülmektedir.
- Öğretmen adayları, lisans eğitimleri süresi boyunca aldıkları alan derslerinin hemen hepsinde ispatla karşılaşmakta fakat yapılan çalışmalar öğretmen adaylarının ispat

yaparken zorlandıklarını ortaya koymaktadır. Bu kapsamda ğretim elemanlarının derslerde, değişik ispat yöntemlerini kapsayan uygulamalar yapmaları yararlı olacaktır.

- Bu araştırmanın verileri dört tane problem durumu üzerinden üniversitede eğitim görmekte olan dört matematik ğretmeni adayıyla sınırlıdır. Öğretmen adaylarının matematiksel düşünme süreçlerinin incelenmesi için farklı örneklem ve problemlerle araştırmalar yapılabilir.
- Araştırmanın katılımcılarını 2 ve 3. sınıf matematik ğretmen adayları oluştırmaktadır. Araştırma 1 ve 4. sınıf matematik ğretmen adaylarıyla tekrarlanabilir ve araştırma sonuçları ile yapılacak yeni çalışmalardan elde edilecek sonuçlar karşılaştırılabilir. Böylece kademe farkına göre ğretmen adaylarının matematiksel düşünme süreçlerindeki benzerlikler ve farklılıklar araştırılabilir.
- Öğretim programının amaçları arasında yer alan matematiksel düşünme becerilerinin öğrencilerde geliştirilmesi noktasında programın uygulayıcısı olan öğretmenlerin de farkındalığa sahip olmaları gerekmektedir. Bu sebeple hizmet öncesi eğitimde ğretmen adayları ile yapılacak uygulamalar ile ğretmen adaylarının bu tür ortamlardan haberdar edilmelerinin önemli olduğu düşünülmektedir. Bu nedenle ğretmen adaylarının matematiksel düşünme süreçlerine yönelik deneyim kazanabilmeleri için matematiksel düşünme etkinliklerinin nasıl hazırlanıp uygulanacağı noktasında lisans düzeyinde seçmeli derslerin açılması yararlı olacaktır.

KAYNAKLAR

- Alkan, H. & Bukova Güzel, E. (2005). Öğretmen adaylarında matematiksel düşünmenin gelişimi. *Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 25(3), 221-236.
- Ardahan. H. (1990). Matematik öğretimi. *Selçuk Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 4, 197-205.
- Arıkan, R. (2013). *Araştırma yöntem ve teknikleri*. Ankara: Nobel Kitap.
- Arslan, S. & Yıldız, C. (2010). 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin aşamalarındaki yaşantılarından yansımalar. *Eğitim ve Bilim*, 35(156), 17-31.
- Baki, A. (2015). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi*. Ankara: Harf Eğitim Yayıncılığı.
- Başaran, S. (2011). *Üniversite öğrencilerinin matematiksel düşünme ve akıl yürütme becerileriyle ilgili duyuşsal ve demografik etmenlerin araştırılması*. (Doktora Tezi). <https://tez.yok.gov.tr> sayfasından erişilmiştir.
- Baykul, Y. (2002). *İlköğretimde matematik öğretimi 6.-8. sınıflar*. Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.
- Blitzer, R. (2003). *Thinking mathematically*. New Jersey: Prentice Hall.
- Bukova Güzel, E. (2008). Yapılandırmacı öğrenme yaklaşımının matematik öğretmen adaylarının matematiksel düşünme süreçlerine olan etkisi. *e-Journal of New World Sciences Academy*, 3(4), 678-688.
- Bulut, M. (2009). *İşbirliğine dayalı yapılandırmacı öğrenme ortamlarında kullanılan bilgisayar cebir sistemlerinin matematiksel düşünme, öğrenci başarısına ve tutumuna etkisi*. (Doktora Tezi). <https://tez.yok.gov.tr> sayfasından erişilmiştir.

- Burton, L. (1984). Mathematical thinking: The struggle for meaning. *Journal of Researching Mathematics Education*, 15(1), 35-49.
- Büyüköztürk, Ş., Kılıç Çakmak, E., Akgün, Ö.E., Karadeniz, Ş. & Demirel, F. (2011). *Bilimsel araştırma yöntemleri*. Ankara: Pegem Akademi Yayınları.
- Cai, J. (2000). Mathematical thinking involved in U.S. and Chinese students' solving of process-constrained and process-open problems. *Mathematical Thinking and Learning*, 2(4), 309-340.
- Cai, J. (2002). Assessing and understanding U.S. and Chinese students' mathematical thinking. *ZDM Mathematics Education*, 34(6), 278-290.
- Cai, J. (2003). Singaporean students' mathematical thinking in problem solving and problem posing: an exploratory study. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 34 (5), 719-737.
- Carraher, D.W., Martinez, M.V. & Schliemann, A.D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*, 40, 3-22.
- Cevizci, A. (2000). *Felsefe terimleri sözlüğü*. İstanbul: Paradigma.
- Coşkun, S. (2012). *Üst düzey matematiksel düşünme süreçlerinin sorgulayıcı problem çözme ve öğrenme modeline göre tasarlanmış çalışma yaprakları yardımıyla incelenmesi*. (Yüksek lisans tezi). <https://tez.yok.gov.tr> sayfasından erişilmiştir.
- Çontay, E.G. (2017). *Ortaokul matematik öğretmenleri adaylarının ispat şemaları*. (Yüksek Lisans Tezi). <https://tez.yok.gov.tr> sayfasından erişilmiştir.
- Dede, Y., & Karakuş, F. (2014). Matematiksel ispat kavramına pedagojik bir bakış: Kuramsal bir çalışma. *Adıyaman Üniversitesi Eğitim Bilimleri Dergisi*, 4(7), 4771.
- Demirtaş, B. (2018). *Sınıf öğretmenlerinin yaratıcılık fenomenine duyarlılığı ile matematiksel düşünme becerileri arasındaki ilişki*. (Yüksek Lisans Tezi). <https://tez.yok.gov.tr> sayfasından erişilmiştir.
- Düşünme. (t.y.). *Türk Dil Kurumu* içinde. http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_content&view=frontpage&Itemid=1 sayfasından erişilmiştir.

- Edwards, L.D. (1997). Exploring the territory before proof: Student's generalizations in a computer microworld for transformation geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 2(3), 187-215.
- Ersoy, E. & Güner, P. (2014). Matematik öğretimi ve matematiksel düşünme. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi*, 3(2), 102-112.
- Ferri, R.B. (2003). *Mathematical thinking styles- an empirical study*. Paper presented at the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, Bellaria, Italia, February 2003. Retrieved from <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.485.3819&rep=rep1&type=pdf>
- Fisher, R. (1990). *Teaching children to think*. Cheltenham: Nelson Thornes.
- Furinghetti, F., & Morselli, F. (2009). Every unsuccessful problem solver is unsuccessful in his or her own way: Affective and cognitive factors in proving. *Educational Studies in Mathematics*, 70(1), 71-90.
- Gall, M. D., Borg, W. R., & Gall, J. P. (1996). *Educational research: An introduction*. New York: Longman.
- Genelleme. (t.y.). *Türk Dil Kurumu* içinde. http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_content&view=frontpage&Itemid=1 sayfasından erişilmiştir.
- Göl, R. (2017). *12. sınıf fen lisesi öğrencilerinin matematiksel düşünme becerilerinin özelleştirme, tahmin, ispat ve genelleme basamakları bağlamında incelenmesi*. Yüksek Lisans Tezi, Uşak Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Uşak.
- Güler, G. & Ekmekçi, S. (2016). Matematik öğretmen adaylarının ispat değerlendirme becerilerinin incelenmesi: Ardışık tek sayıların toplamı örneği. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi*, 11(1), 59-83.
- Güler, G., Özdemir, E., & Dikici, R. (2012). Öğretmen adaylarının matematiksel tümevarım yoluyla ispat becerileri ve matematiksel ispat hakkındaki görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 20(1), 219-236.
- Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students proof schemes: Results from exploratory studies. In Schoenfeld, A., Kaput, J. & Dubinsky, E. (Eds.), *Research in collegiate*

mathematics education III (pp. 243-283). Providence, R.I.: American Mathematical Society.

Henderson, P. B., Fritz, S. J., Hamer, J., Hitchner, L., Marion, B., Riedesel, C., Scharf, C. (2002). Materials development in support of mathematical thinking. *In ACM SIGCSE Bulletin*, 35(2), 185-190.

Holstein, J. A, Gubrium, J. F. (1997). Active interviewing. D. Silverman (Eds.), *Qualitative research: theory, method and practise* (pp. 113-129). London: Sage Publications.

İspat. (t.y.). *Türk Dil Kurumu* içinde.
http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_content&view=frontpage&Itemid=1
sayfasından erişilmiştir.

Karasar, N. (2016). *Bilimsel araştırma yöntemi*. Ankara: Nobel Akademi.

Kazancı, O. (1989). *Eğitimde eleştirci düşünme ve öğretimi*. İstanbul: Kazancı Kitap AŞ.

Keith, D. (2000). Finding your inner mathematician. *Chronicle Of Higher Education*. 47(5), 5-6.

Keskin, M., Akbaba Dağ, S. & Altun, M. (2013). 8. ve 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme aşamalarındaki davranışlarının karşılaştırılması. *Journal of Educational Sciences*, 1(1), 33-50.

Kılıç, P., Tunç Pekkan, Z. & Karatoprak, R. (2013). Materyal kullanımının matematiksel düşünme becerisine etkisi. *Eğitimde Kuram ve Uygulama*, 9(4), 544-556.

Ko, Y.Y. & Knuth, E. (2009). Undergraduate mathematics majors' writing performance producing proofs and counterexamples about continuous functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, 28(1), 68-77.

Ko, Y.Y. (2010). Mathematics teachers' conceptions of proof: Implications for educational research. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 8(6), 1109-1129.

Kocaman, M. (2017). *Lise 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme ve akıl yürütme becerilerinin incelenmesi*. (Yüksek Lisans Tezi). <https://tez.yok.gov.tr> sayfasından erişilmiştir.

- Koyuncu, M. K. (2018). *Matematik felsefesi etkinliklerinin öğrencilerin matematiksel düşünme becerilerine, matematiğe yönelik tutum ve inançlarına etkisinin incelenmesi*. (Doktora Tezi). <https://tez.yok.gov.tr> sayfasından erişilmiştir.
- Kükey, E. (2018). *Ortaokul öğrencilerinin matematiksel düşünme biçimleri ile öğretmen ve öğretmen adaylarının bu konudaki görüşlerinin incelenmesi*. (Doktora tezi). <https://tez.yok.gov.tr> sayfasından erişilmiştir.
- Lane, C.P., & Harkness, S.S. (2012). Game show mathematics: Specializing, conjecturing, generalizing, and convincing. *Journal of Mathematical Behavior*, 31(2), 163– 173.
- Lee, J. K. (2002). Philosophical perspectives on proof in mathematics education. *Philosophy of Mathematics Education*, 16. <http://www.ex.ac.uk/~PErnest/pome16/docs/lee.pdf> sayfasından erişilmiştir.
- Liu, P. H. & Niess, M. L. (2006). An exploratory study of college students' views of mathematical thinking in a historical approach calculus course. *Mathematical Thinking and Learning*, 8(4), 373-406.
- Liu, P. H. (2003). Do teachers need to incorporate the history of mathematics in their teaching?. *The Mathematics Teacher*, 96(6), 416-421.
- Lutfiyya, L. A. (1998). Mathematical thinking of high school in Nebraska. *International Journal of Mathematics Education and Science Technology*, 29(1), 55-64.
- Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (2010). *Thinking mathematically*. Harlow England: Pearson Education Limited, <https://epdf.tips/thinking-mathematically-2nd-edition.html> sayfasından erişilmiştir.
- Matematik. (t.y.). *Türk Dil Kurumu* içinde. http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_content&view=frontpage&Itemid=1 sayfasından erişilmiştir.
- Merriam, S.B. (1998). *Qualitative research and case study applications in education*. California: Jossey-Bass.
- Milli Eğitim Bakanlığı (2007). *İlköğretim düşünme eğitimi dersi (6, 7 ve 8. sınıf) öğretim programı*. Ankara: MEB.
- Milli Eğitim Bakanlığı (2009). *İlköğretim matematik dersi (6,7 ve 8. sınıf) öğretim programı*. Ankara: MEB.

- Mubark, M. (2005). *Mathematical thinking and mathematics achievement of students in the year 11 scientific stream in Jordan*. (Doctoral dissertation). Retrieved from <https://ogma.newcastle.edu.au/vital/access/services/%20Download/uon:699/DS3>
- Özden, Y. (2011). *Öğrenme ve öğretme*. Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.
- Öztürk, G. (2013). *Matematiksel düşünme odaklı öğretim: ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının planlama becerileri ve görüşleri*. (Doktora Tezi). <https://tez.yok.gov.tr> sayfasından erişilmiştir.
- Pape, S. J., Bell, C. V. & Yetkin, İ. E. (2003). Developing mathematical thinking and self-regulated learning: a teaching experiment in a seventh-grade mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 53(3), 179-202.
- Patton, Q. M. (1990). *Qualitative evaluation an research methods*. London: Sage Pub.
- Polya, G. (1973). *How to solve it: a new aspect of mathematical method*. Princeton, N.J.: Princeton Uni. Press.
- Robson, C. (1993). *Real world research*. Oxford: Blackwell Publisliers Ltd.
- Saban, A. (2004). *Öğrenme öğretme süreci*. Ankara: Nobel Yayın Dağıtım.
- Sağır, P. (2013). *Matematik öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinin incelenmesi*. (Yüksek Lisans Tezi). <https://tez.yok.gov.tr> sayfasından erişilmiştir.
- Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. D.A. Grouws (Eds.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the national council of teachers of mathematics* (pp. 334-370). Newyork: Macmillan.
- Solso, R.L., Maclin, M.K., & Maclin, O.H. (2007). *Bilişsel psikoloji* (A. Ayçiçeği Dinn, Çev.). İstanbul: Kitabevi.
- Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20(2), 147–164.
- Stacey, K. (2006). *What is mathematical thinking and why is it important?*, Paper presented at the APEC-Tsukuba International Conference, Tokyo and Sapporo, Japan, December 2006. Retrieved from https://www.researchgate.net/publication/254408829_WHAT_IS_MATHEMATICAL_THINKING_AND_WHY_IS_IT_IMPORTANT

- Stewart, K. & Cash, W. B. (1985). *Interviewing: principles and practices*. Dubuque, IO: Wm. C. Brown Pub.
- Stylianides, G. J. & Stylianide, A. J. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(3), 314-352.
- Tall, D. (1988). *The nature of advanced mathematical thinking*. Paper presented at the 12th International Conference Psychology of Mathematics Education, Veszprem, Hungary, July 1988. Retrieved from <https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1988i-nature-of-amtpme.pdf>
- Tall, D. (2002). *Advanced mathematical thinking*. USA: Kluwer Academic Publishers.
- Tanışlı, D. (2016). How do students prove their learning and teachers their teaching? Do teachers make a difference? *Eurasian Journal of Educational Research*, 66, 47-70.
- Taşdemir, A. (2008). *Matematiksel düşünme becerilerinin ilköğretim öğrencilerinin fen ve teknoloji dersindeki akademik başarıları, problem çözme becerileri ve tutumları üzerine etkileri*. (Doktora Tezi). <https://tez.yok.gov.tr> sayfasından erişilmiştir.
- Tataroğlu Taşdan, B. (2014). *Matematik öğretmenlerinin pedagojik alan bilgilerini matematiksel düşünmeyi destekleme bağlamında geliştirmeyi amaçlayan bir öğretim tasarımı*. (Doktora Tezi). <https://tez.yok.gov.tr> sayfasından erişilmiştir.
- Tataroğlu Taşdan, B., Çelik, A. & Erduran, A. (2013). Matematik öğretmen adaylarının matematiksel düşünme ve öğrencilerin matematiksel düşünmelerinin geliştirilmesi hakkındaki görüşlerinin incelenmesi. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 21(4), 1487-1504.
- Tuncay, H. A. (2015). *Matematiksel düşünme süreçlerinin incelenmesi*. (Yüksek Lisans Tezi). <https://tez.yok.gov.tr> sayfasından erişilmiştir.
- Tuncer, T. (1995). *Matematik sözlüğü*. İstanbul: İ.Ü. Fen Fakültesi Döner Sermaye İşletmesi, Prof. Dr. Nazım Terzioğlu Basım Atölyesi.
- Umay, A. (1992). *Matematiksel düşünmede süreci ve sonucu yoklayan testler arasında bir karşılaştırma*. (Doktora Tezi). <https://tez.yok.gov.tr> sayfasından erişilmiştir.
- Umay, A. (2003). Matematiksel muhakeme yeteneği. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24, 234-243.

- Varsayım. (t.y.). *Türk Dil Kurumu* içinde.
http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_content&view=frontpage&Itemid=1
sayfasından erişilmiştir.
- Weber, K. & Alcock, L. (2009). Semantic and syntactic reasoning in the representation system of proof. In Stylianou, D.A, Blanton M. L., & Knuth E. J (Eds.), *Teaching and Learning Proof Across Grades: A K-16 Perspective* (pp. 323-338). New York: Washington.
- Yağdıran, B. (2018). *Teknoloji destekli öğrenme ortamlarında 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçlerinin incelenmesi*. (Yüksek Lisans Tezi). <https://tez.yok.gov.tr> sayfasından erişilmiştir.
- Yeşildere, S. & Akkoç, H. (2011). Matematik öğretmen adaylarının şekil örüntülerini genelleme süreçleri. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 30(2), 141-153.
- Yeşildere, S. & Türnüklü, E.B. (2007). Öğrencilerin matematiksel düşünme ve akıl yürütme süreçlerinin incelenmesi. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi*, 40(1), 181-213.
- Yeşildere, S. (2006). *Farklı matematiksel güce sahip ilköğretim 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme ve bilgiyi oluşturma süreçlerinin incelenmesi*. (Doktora Tezi). <https://tez.yok.gov.tr> sayfasından erişilmiştir.
- Yıldırım, A. & Şimşek, H. (2016). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- Yıldırım, C. (2018). *Matematiksel düşünme*. İstanbul: Remzi Kitabevi.
- Yıldırım, D. & Yavuzsoy Köse, N. (2017). Ortaokul öğrencilerinin çokgen problemlerindeki matematiksel düşünme süreçleri. *Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 18(1), 605-633.
- Yıldırım, D. (2015). *Ortaokul öğrencilerinin geometrik problemlerdeki matematiksel düşünme süreçlerinin incelenmesi*. (Yüksek Lisans Tezi). <https://tez.yok.gov.tr> sayfasından erişilmiştir.
- Yin, R. K. (1984). *Case study research: designs and methods*. Newbury Park, CA: Sage.

Zaimoğlu, Ş. (2012). *8. sınıf öğrencilerinin geometrik ispat süreci ve eğilimleri*. (Yüksek Lisans Tezi). <https://tez.yok.gov.tr> sayfasından erişilmiştir.

Zazkis, R., Liljdahl, P. & Chernoff, E. J. (2007). The role of examples in forming and refuting generalizations. *ZDM Mathematics Education*, 40, 131-141.

EKLER

EK 1. Öğrenci Görüşme Bilgilendirme Metni

Sevgili Öğrenci;

Ben Ayşe Yiğit, Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Bilim Dalı yüksek lisans öğrencisiyim. Matematik öğretmen adaylarının matematiksel düşünme süreçleri üzerine bir araştırma yapmaktayım. Bu konuyla ilgili olarak seninle çalışma yapmak istiyorum.

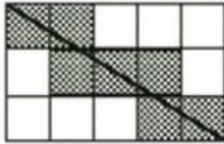
Görüşmemizde sana birbirinden bağımsız bazı matematiksel problemler yönelteceğim. Araştırmamda verilerini kullanırken senin gerçek ismini kullanmayacağım. Sorulara verdiğin cevaplar doğrultusunda herhangi bir puanlandırma yapılmayacağı gibi herhangi bir not da almayacaksın. Soruları cevaplarken açık, net ve ayrıntılı bir şekilde ne düşündüğünü ifade etmen benim için önemli. Soruları doğru ya da yanlış cevaplandırman benim için önemli değil. Ayrıca bu görüşmeyi sesli ve görüntülü olarak kayıt edeceğim. Bu kayıtlar sadece çalışmada veri olarak kullanılacak ve başkaları ile paylaşılmayacaktır. Bu nedenle senden rahat olmanı istiyorum.

Araştırmaya katılmayı kabul ettiğin için teşekkür ederim. Çalışma hakkında başka soruların varsa, yanıtlamaktan memnun olurum.

EK 2. Görüşmede Kullanılan Problemler

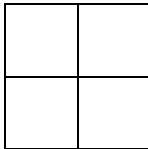
Problem 1: $1^3+2^3+3^3+4^3$ toplama işleminin sonucu kaçtır? Bu şekilde verilen ardışık küp toplamını bulmaya yarayacak matematiksel bir formül oluşturabilir misiniz? Matematiksel olarak bu formülü nasıl doğrularsınız/ispatlarsınız?

Problem 2: 3×5 boyutunda bir dikdörtgen ele alalım. Bu dikdörtgenin köşegeni, dikdörtgenin $3 \cdot 5 = 15$ karesinin kaç tanesinin içinden geçer?



$n \times m$ boyutunda bir dikdörtgen verildiğinde bu dikdörtgenin köşegeni, dikdörtgenin $n \cdot m$ karesinin kaç tanesinin içinden geçer? Matematiksel olarak bir formül oluşturabilir misiniz? Matematiksel olarak bu formülü nasıl doğrularsınız/ispatlarsınız?

Problem 3:



Bütün farklı karelerin sayısını bulunuz. $n \times n$ şeklinde bir kare verildiğinde bütün farklı karelerin sayısını bulmaya yarayacak matematiksel bir formül oluşturabilir misiniz? Matematiksel olarak bu formülü nasıl doğrularsınız/ispatlarsınız?

Problem 4: Bazı pozitif tamsayılar, iki ya da daha fazla ardışık tam sayının toplamı olarak ifade edilebilir. Örneğin,

$$9=2+3+4$$

$$11=5+6$$

$$18=3+4+5+6$$

Her sayı en az iki ardışık tamsayının toplamı olarak yazılabilir mi?
Doğrulayınız/ispatlayınız.



GAZİLİ OLMAK AYRICALIKTIR..