



**TOPOLOJİK UZAYLAR ÜZERİNDE
TOPOLOJİK GENELLEŞTİRİLMİŞ GRUPLAR YARDIMIYLA
OLUŞTURULAN GRUPLARIN DEMETİ ÜZERİNE**

Hatice ASLAN

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

EKİM 2019

Hatice ASLAN tarafından hazırlanan “TOPOLOJİK UZAYLAR ÜZERİNDE TOPOLOJİK GENELLEŞTİRİLMİŞ GRUPLAR YARDIMIYLA OLUŞTURULAN GRUPLARIN DEMETİ ÜZERİNE” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Hakan EFE

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Başkan: Prof. Dr. Erdal GÜNER

Matematik Ana Bilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Doç. Dr. Sevdâ SAĞIROĞLU PEKER

Matematik Ana Bilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Doç. Dr. Cüneyt ÇEVİK

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

TezSavunmaTarihi: 14/10/2019

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Doktora Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
 - Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
 - Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
 - Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
 - Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,
- bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Hatice ASLAN

...../...../.....

TOPOLOJİK UZAYLAR ÜZERİNDE TOPOLOJİK GENELLEŞTİRİLMİŞ GRUPLAR
YARDIMIYLA OLUŞTURULAN GRUPLARIN DEMETİ ÜZERİNE

(Doktora Tezi)

Hatice ASLAN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ekim 2019

ÖZET

Bu tez çalışmasında ilk olarak topolojik genelleştirilmiş grup vasıtasıyla bir demet yapısı inşa edilmiş ve bu demetin bazı cebirsel topolojik karakterizasyonları verilmiştir. Ardından tanımlanan fuzzy topolojik genelleştirilmiş grup yardımıyla oluşturulan fuzzy gruplar ile bir fuzzy demet elde edilmiştir. Tezin diğer kısmında ise $(L^p(\mathbb{T}), N_p)$, ve $1 \leq p \leq \infty$ e $(H^\alpha(\mathbb{T}), N_\alpha)$, $0 < \alpha \leq 1$ standart fuzzy normlu uzayları tanıtılmış ve Fourier serilerinin bazı t -yaklaşım özellikleri standart fuzzy normda incelenmiştir. Son olarak Fourier serilerinin kısmi toplamı, n . Fejér (Cesàro), de la Vallée Poussin ve genelleştirilmiş de la Vallée Poussin ortalamaları ile trigonometrik t -yaklaşım özellikleri $L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq \infty$ ve $(H^\alpha(\mathbb{T}), N_\alpha)$, $0 < \alpha \leq 1$ standart fuzzy normlu uzaylarında incelenip yaklaşım hızı ile ilgili tahminler verilmiştir.

Bilim Kodu : 20405
Anahtar Kelimeler : Demet teorisi, fuzzy demet teorisi, trigonometrik t -yaklaşım.
Sayfa Adedi : 84
Danışman : Prof. Dr. Hakan, EFE

ON SHEAF OF THE GROUPS FORMED BY TOPOLOGICAL GENERALIZED GROUP OVER TOPOLOGICAL SPACES

(Ph. D.Thesis)

Hatice ASLAN

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

October 2019

ABSTRACT

In this thesis, firstly sheaves are formed by groups that are determined by topological generalized groups over pointed topological spaces and some characterizations related to sheaves are given. In addition to that, a fuzzy sheaf formed by fuzzy group which constructed by defining the fuzzy topological generalized group. In the other part of thesis, the notion of standart fuzzy normed spaces Lebesgue $(L^p(\mathbb{T}), N_p)$, $1 \leq p \leq \infty$ and Hölder $(H^\alpha(\mathbb{T}), N_\alpha)$, $0 < \alpha \leq 1$ are introduced and some best t -approximation properties of Fourier series are investigated in standart fuzzy norms. Finally the order of t -approximation by n . Fejér (Cesàro), de la Vallée Poussin and generalized de la Vallée Poussin means of Fourier series are given in standart fuzzy normed $L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq \infty$ and $(H^\alpha(\mathbb{T}), N_\alpha)$, $0 < \alpha \leq 1$ spaces.

Science Code : 20405
Key Words : Sheaf theory, fuzzy sheaf theory, trigonometric t -approximation.
Page Number : 84
Supervisor : Prof. Dr. Hakan, EFE

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, hoşgörüsü ile destek olan danışmanım Sayın Prof. Dr. Hakan EFE'ye sonsuz teşekkür ederim. Tecrübeleriyle ile tez izleme sürecinde katkıda bulunan Sayın Prof. Dr. Cemil YILDIZ ve Prof. Dr. A. Duran Türkoğlu'na, son olarak her türlü yapıcı yaklaşım ve önerileri ile değerli katkılarından dolayı Sayın Prof. Dr. Erdal GÜNER'e çok teşekkür ederim. Ayrıca beni her zaman destekleyen aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	ix
1.GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR.....	5
3. TOPOLOJİK GENELLEŞTİRİLMİŞ GRUBUN OLUŞTURDUĞU GRUPLARIN DEMETİ	13
3.1.Topolojik Grubun Oluşturduğu Grupların Demeti	13
3.2.Topolojik Genelleştirilmiş Grubun Oluşturduğu Grupların Demeti.....	15
3.3. Demetin Karakterizasyonları	20
4. FUZZY TOPOLOJİK GENELLEŞTİRİLMİŞ GRUBUN OLUŞTURDUĞU FUZZY GRUPLARIN FUZZY DEMETİ.....	29
4.1. Fuzzy Topolojik Grubun Oluşturduğu Fuzzy Grupların Demeti	29
4.2.Fuzzy Topolojik Genelleştirilmiş Grubun Oluşturduğu Fuzzy Grupların Demeti.	32
5. TRİGONOMETRİK t -YAKLAŞIM	45
5.1. Fuzzy Norm ve Yaklaşım Teorisi	46
5.2. $(L^p(\mathbb{T}), N_p), 1 \leq p \leq \infty$ Fuzzy Normlu Uzayında t -Yaklaşım.....	59
5.3. $(H^\alpha(\mathbb{T}), N_\alpha), 0 < \alpha \leq 1$ Fuzzy Normlu Hölder Uzayında t -Yaklaşım.....	67
6.SONUÇ VE ÖNERİLER	73
KAYNAKLAR	75
ÖZGEÇMİŞ	81

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. Demet ve Kesitler	5
Şekil 3.1. f ve Φ fonksiyonlarının bileşkesi	14
Şekil 3.2. $f_i \circ \Phi$ fonksiyonlarının bileşkesi	15
Şekil 3.3. $f_i \circ \Phi$ ve $f_i \circ \Phi'$ fonksiyonlarının bileşkesi	17
Şekil 3.4. Homomorfizm.....	20
Şekil 4.1. f ve ϕ fuzzy fonksiyonlarının bileşkesi	31
Şekil 4.2. $f_i \circ \phi$ fuzzy fonksiyonlarının bileşkesi	39
Şekil 4.3. $f_i \circ \phi$ ve $f_i \circ \phi'$ fuzzy fonksiyonlarının bileşkesi	41

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgelerve kısaltmalar açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$\sim$	Homotopi bağıntısı
$\sim_{\text{rel. } X}$	X e göre homotop
(S, π)	Demet
(P, p_0)	Taban noktası $p_0 \in P$ olan topolojik grup
$(P, p_i)_{i=1,2,\dots,k}$	Taban noktası $p_i \in P$ olan topolojik genelleştirilmiş grup
$\Gamma(V, S)$	$H(X)$ in V üzerindeki tüm kesitlerinin kümesi
(X, P_m^r)	Taban noktası P_m^r olan fuzzy topolojik uzay
$(Z, *, P_e^r)$	Taban noktası $P_e^r \in I^Z$ olan fuzzy topolojik grup
$(Z, *, P_{e_i}^r)_{i=1,2,\dots,k}$	Taban noktası $P_{e_i}^r \in I^Z$ olan fuzzy topolojik genelleştirilmiş grup
(H, ψ)	Fuzzy Demet
$H(X)_{P_m^r}$	Fuzzy demetin I^X üzerindeki sapı
$\Gamma(W, H)$	$H(X)$ in W üzerindeki tüm kesitlerinin kümesi
$\mathbb{T}$	Birim çember veya $[0, 2\pi]$
$\lesssim, \gtrsim$	$\exists c \in \mathbb{R}, c > 0 \quad A \leq cB, A \geq cB$
$\mathcal{C}(\mathbb{T})$	$\mathbb{R}$ üzerinde 2π -periyotlu sürekli fonksiyonların kümesi
$L^p(\mathbb{T})$	$\mathbb{T}$ üzerinde p . dereceden integrallenebilen fonksiyonlar
$H^\alpha(\mathbb{T})$	Hölder uzayı
N	Fuzzy norm
(X, N)	Fuzzy normlu lineer uzay
$\ \cdot\ _\gamma$	Fuzzy norma karşılık gelen γ -norm

1. GİRİŞ

Demet teorisi, cebirsel topolojinin önemli teoremlerinden De Rham teoreminin modern kanıtının bulunması ile başlar. Bu kanıtı bulan kişi André Weil (1952) kanıtında Leray tarafından benimsenen yerel yöntemleri kullanmıştır. Leray(1946),Weil ile yaptığı görüşmeler sırasında bir noktadan noktaya değişen bir katsayı sistemi kavramını (demeti) tanımladığı bir sunum yapmıştır. SonrasındaWeil, Cartan’a De Rham teoreminin ispatını 18 Ocak 1947 tarihli Sao Paolo’dan (Weil, 1985) ünlü bir mektupta açıklamış ve bu keşifin cebirsel topoloji alanındaki araştırmalarını canlandıracağını umduğunu belirtmiştir. Gerçekten bu mektup (Weil,1985) Cartan’ı modern demet teorisi formülasyonuna yönlendiren ışığı sağlamıştır. Böylelikle demetin tanımı Cartan (Remmert ve Serre, 1979:565) tarafından geliştirilmiş ve bu tanım demetin teorisinin geometrik kullanımlarının neredeyse tamamı için yeterli olmuş veanalitik geometri, diferansiyel geometri ve diferansiyel denklem çalışmalarınınhepsinde oldukça fazla kullanılmıştır (Miller, 2000).M. Auslander demet teorisinin önemini “Demet teorisi yatay olarak topoloji yaptığınız ve dikey olarak cebir yaptığınız konudur.” diyerek belirtmiş ve üçüncü boyuttaki mantığı kimin bulacağını merak etmeye devam ettiğini söylemiştir. Demet teorisi esasen geometrinin lokal özelliklerden global özelliklere geçişi ile ilgilidir. Gerçekten demet kavramı öncesinde kompleks analizde bir noktada yakınsak kuvvet serilerini çalışmak ile serinin tüm analitik yapılanmasının Riemann yüzeyini araştırmak ayrı şeyler olarak bilinirdi. Cartan, bunu açıklığa kavuşturana ve ispatlayıncaya, bir de bunu büyük bir araç olan demetteki katsayılı bir kohomoloji ile destekleyinceye kadar bu geçiş çok belirgin olmamıştır. Böylece Cartan’ın çalışması ile yerelden küreselleşmeye geçişi sağlamıştır. Demet teorisi modern matematik bilincinin gelişmesinde temel bir rol oynamıştır. Eski makalardan anlaşılmaktadır ki Chern ve Zariski'nin raporları ve Hirzebruch ve Godement’inkitapları ile bir dönemkapanmıştır. Sonrasında 1950’lerin ilk yarısında matematikçiler ne hakkında konuştuklarını ifade edebilmeyi öğrenmişlerdir (Gray, 2006).

Sosyolojik açıdan ifade edersek, demet teorisi matematiğe yirmi yıl çok iyi hizmet edecek olan ve soyut matematik kavramlarınınıdoğru formüle eden bir paradigma olmuştur. İkinci Dünya Savaşı öncesinde cebirsel topoloji ve çok değişkenli kompleks analiz ile ilgili yayınlanan makalelerdedaha çok somut kavramlarla ilgilenildiği bilinmektedir. Örneğin, 1950'de Cartan'ın kompleks analizde demetler üzerine olan ilk makalesi bile sadece

ideallerin somut demetleri ile ilgilidir (Remmert ve Serre, 1979:565).Savaşın ardından, 1950'lerin ikinci yarısında net bir diyalekt yeni fikirlerin kategorik olarak yeniden biçimlendirilmesi için gerekli hale gelmiştir ve kısa bir süre sonra herkesin kullandığı kolay anlaşılır bir dil konuşulmaya başlamıştır. Önceki yarım yüzyıl boyunca gerçekleşenden çok daha küçük olan bu dilsel değişim ve demet kategorilerinin varlığı kuşkusuz ki gereksiz elemanları içeren tartışmaları kolaylaştırmıştır. Diğer yandan 1959'dan önce yapılan incelemelerde demet teorisi, matematik tarafından indekslenecek bir konu olarak tanınmamıştır. O zamandan 1961 yılına kadar cebirsel topoloji altında indekslenmiştir. Konu dizini 1974'e kadar ortadan kaybolmuştur. Yeni indekste ise demetler en az altı yerde açıkça ve diğerlerinin bir kısmındada örtük olarak görülmüştür (Grag, 2006). Bibliyografinin sınırları belli olmadığından demet teorisi ile vektör demeti teorisinin arasındaki sınırı belirlemekte zordur. Örneğin araştırmalarda görülmüştür ki birçok makale lokal olmayan demetlerin birleşiminden bahsederken onun kaynağı olan vektör demetlerinden bahsetmez. Sonlu boyutlu vektör demetlerinin kategorisinin abelizasyonunun somut demetlerin kategorisi olduğunu düşünülürse bu ayrım sadece terminolojik olacaktır. Bu tezde özel olarak sadece demet teorisini ele alan makaleler ve çalışmalar kullanılmıştır.

1870 yılında Fransız matematikçi Camille Jordan, Riemann'ın bir çalışması üzerine yaptığı grup teorisi ile ilgili bir araştırmasında homotopi kavramını tanıtmış ve bir yüzeyin homotopi grubunu tanımlamıştır. Böylece sonraki yıllardaki gelişmeler sonucunda, cebirsel topolojinin bir multidisipliner bilim dalı olduğu açık olarak görülmüştür. Homotopi teorisi ise cebirsel topolojiyi oluşturan temel iki alandan biri olmuş (diğeri homoloji teorisi), cebirsel topolojinin multidisipliner olmasında belki de en önemli rolü üstlenmiştir. Literatürde, homotopi ve demet teorisi birlikte ele alınarak pek çok yeni kavram ortaya çıkartılmış ve birçok önemli probleme çözümler bulunmuştur. Homotopi teorisi ve çok değişkenli kompleks fonksiyonlar teorisi, demet teorisi bakış açısından ele alınarak, kavramlar ve teoremler ile problemler bu anlayışa göre yeniden ifade edilmiş, adeta teori yeniden yazılmıştır (Grag, 2006). Yıldız (1991) homotopi ve demet teorisini birlikte göz önüne alarak topolojik grup vasıtasıyla cebirsel yapıda bir demet oluşturmuş ve neticede bazı cebirsel topolojik karakterizasyonlarını vermiştir. Ardından Gümüş ve Yıldız (2007) bu demetin fuzzyfikasyonunu yayınlamışlardır.

Diğer bir önemli kavram olan genelleştirilmiş grup ise cebirsel yapı olarak geometrik bir problemten çıkarılmış ve Molaei (1999) tarafından tanımlanmıştır. Genelleştirilmiş gruplar,

grupların ilginç bir genellemesidir. Bir grupta yalnızca bir birim eleman bulunurken, genelleştirilmiş bir grubun her bir ögesi kendi birim elemanına sahiptir. Böylece her grup bir genelleştirilmiş grup olur. Bu yeni kavram matematiğin çeşitli alanlarında cebirsel, topolojik ve türevlenebilirlik açısından incelenmiştir (Molaei, 1999-2005; Ahmadi, 2013; Adérian ve diğerleri, 2009). Genelleştirilmiş grup cebirsel yapı olarak, fiziksel bir birleştirilmiş gauge teorisinde uygulama alanına sahiptir ve direkt olarak izotopi ile ilişkisi vardır. Matematikçiler ve fizikçiler sicim teorisi, izotop teorisi ve benzeri teoriler için uygun birleşik alan teorisi oluşturmaya çalışmışlardır (Santilli, 1996, 2003; Hawking ve Ellis, 1987). Birleşik alan teorisi, uzayın geometrisi ile doğrudan bir ilişkiye sahiptir. Bu teori parçacıkların ve bunların kuantum etkileşimlerinin ve hareketlerinin uzay zamanının geometrisini açıklamaktadır (Hawking ve Ellis, 1987). Bilinir ki kuantum uzay-zaman kavramı, fiziksel güçlerin birleşik alan teorisinin amacıdır ve metrik, uzayın geometrisini belirleyebilir. Genelleştirilmiş gruptaharitaların oluşturduğu gruplarfikri de birleşik geometrik alan teorisi oluşturmak için bir araçtır. Diğer taraftan Elektroweak teorileri esasen Minkovskiye aksiyomları ve yerçekimi kuramları üzerine yapılandırılmış bunlar ise Riemann aksiyomları üzerine kurulmuştur. Dolayısıyla genelleştirilmiş gruplar elektroweak teorisinin araçları olarakta bilinirler. Ayrıca Molaei topolojik genelleştirilmiş grup tanımını verdikten sonra bu kavram DNA dizileri topolojik genelleştirilmiş grup kavramına dönüştürölüp DNA analizine de uygulanmıştır (Ahmadi, 2013).

Tezin ikinci bölümünde, çalışmamızın kolay anlaşılması için demet teorisi ve genelleştirilmiş grup ile ilgili tanımlar ve bazı teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, homotopi ve demet teorisini birlikte göz önüne alarak tek birimli olan topolojik grup yapısı yerine her elemanın kendi birimine sahip olduğu Molaei (2000) tarafından tanımlanan topolojik genelleştirilmiş grup vasıtasıyla yeni bir demet yapısı inşa edilmiş ve bazı cebirsel topolojik karakterizasyonları verilmiştir.

Dördüncü bölümde fuzzy topolojik genelleştirilmiş grup tanımlanıp, fuzzy homotopi yardımıyla fuzzy gruplar oluşturularak bir fuzzy demet elde edilmiştir.

Beşinci bölümde ise, yaklaşım teorisinin fuzzy normlu uzaylarda ve klasik yaklaşım uzaylarındaki temel kavramları verilerek önemli teoremler standart fuzzy normlu uzaylarda incelenmiştir. Son olarak kısmi toplam, n . Fejèr (Cesàro), de la Vallée Poussin ortalaması

ve genelleştirilmiş de la Vallée Poussin gibi toplanabilme metotları ile yaklaşımın derecesinin standart fuzzy normlu $L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq \infty$ ve $H^\alpha(\mathbb{T})$, $0 < \alpha \leq 1$ uzaylarındaki tahmini verilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

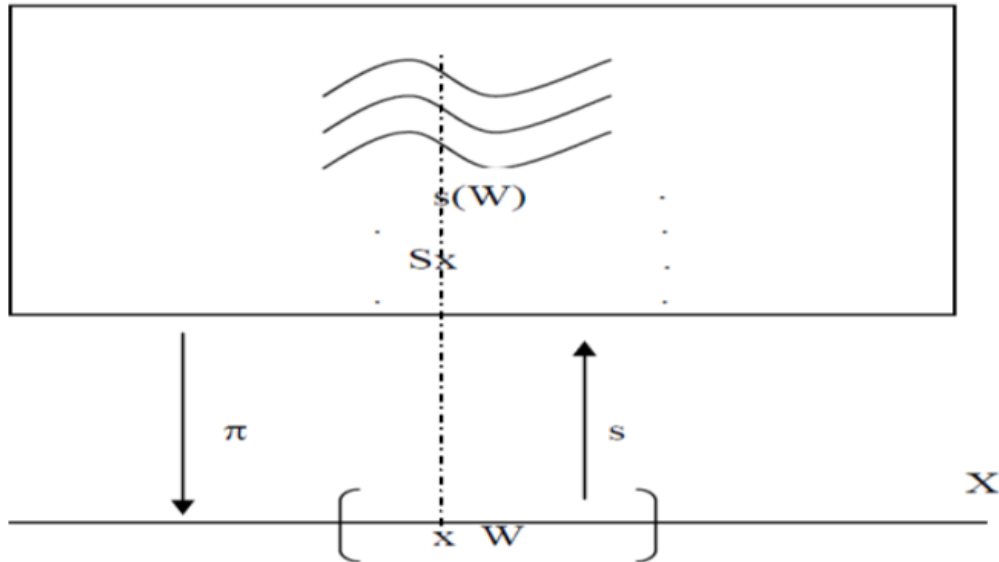
$\mathbb{R}, \mathbb{C}$ ve $\mathbb{Z}$ sırayla gerçek sayılar kümesini, kompleks sayılar kümesini ve tam sayılar kümesini gösterebiliriz.

Bu bölümde demet teorisi ve genelleştirilmiş grup ile ilgili temel tanım ve kavramları ele alacağız.

2.1. Tanım

X ve S iki topolojik uzay ve $\pi: S \rightarrow X$ bir lokal homeomorfizm olsun. Bu durumda $S = (S, \pi)$ ikilisine X üzerinde bir demet denir.

Burada her $x \in X$ için S demet uzayı, π projeksiyon dönüşümü ve X taban uzayı diye adlandırılır. Her $x \in X$ için $\pi^{-1}(x) = S_x$ kümesinin x üzerinde $S = (S, \pi)$ veya sadece S nin sapı denir (Grauert ve Fritzsche, 1976:99).



Şekil 2.1. Demet ve Kesitler

π nin lokal homeomorfizm olması S nin her bir p noktasını içeren bir W açık kümesinin $\pi|_W$ bir homeomorfizm olacak şekilde mevcut olmasıdır.

2.2. Tanım

$S = (S, \pi)$ ikilisi X üzerinde bir demet, x, X uzayında keyfi bir nokta ve W, x in açık bir komşuluğu olsun. $\pi \circ s = 1_W$ olacak biçimdeki $s: W \rightarrow S$ sürekli dönüşümüne W nin bir kesiti denir. Bundan sonra S nin W üzerindeki kesitlerin tamamını $\Gamma(W, S)$ ile göstereceğiz (Tennison, 1975:18).

2.3. Tanım

(S_1, π_1) ve (S_2, π_2) , X üzerinde iki demet olsun.

- (i) Eğer $\pi_2 \circ \pi = \pi_1$ ise $\pi: S_1 \rightarrow S_2$ dönüşümü sapları koruyor denir. Dolayısıyla $\pi((S_1)_x) \subset (S_2)_x$ dir.
- (ii) Sapları koruyan $\pi: S_1 \rightarrow S_2$ sürekli dönüşümüne demet morfizmi denir.
- (iii) Sapları koruyan $\pi: S_1 \rightarrow S_2$ homeomorfizmine demet izomorfizmi denir (Grauert ve Fritzsche, 1976:100).

2.1. Teorem

(S_1, π_1) ve (S_2, π_2) , X üzerinde iki demet ve $\pi: S_1 \rightarrow S_2$ sapları koruyan dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:

- (i) π bir demet morfizmidir.
- (ii) Her bir $V \subset X$ açık kümesi ve $s \in \Gamma(V, S_1)$ kesiti için $\pi \circ s \in \Gamma(V, S_2)$ vardır.
- (iii) Her bir $\sigma \in S_1$ için $W \subset X$ kümesi ve $s \in \Gamma(V, S_1)$ kesiti vardır öyleki $\sigma \in s(W)$ ve $\pi \circ s \in \Gamma(V, S_2)$ dir (Grauert ve Fritzsche, 1976:100).

2.4. Tanım

Her $W \subset X$ açık kümesi için bir M_W kümesi ve her bir $V \subset W$, (V, W) açık küme çifti için $r_V^W: M_W \rightarrow M_V$ dönüşümü aşağıda verilen koşulları sağlasın:

$$i) r_W^W = I_{M_W}$$

$$ii) U \subset V \subset W \text{ ise } r_U^V \circ r_V^W = r_U^W$$

Bu durumda, $\{X, M_W, r_V^W\}$ sistemine ön-demet, r_V^W dönüşümüne kısıtlayıcı dönüşümler denir (Grauert ve Fritzsche, 1976:102).

Doğal olarak her bir S demetine bir ön-demet karşılık gelir. Eğer V ve W, X in açık alt kümeleri ise bu durumda $\Gamma(W, S)$ kümesi ve $s \in M_W$ için $r_V^W(s) = s|_V$ dir. Açıkça $\{X, \Gamma(W, S), r_V^W\}$ kümesi bir ön-demettir. Bu demete S nin kanonik ön-demeti denir (Grauert ve Fritzsche, 1976:103).

2.2. Teorem

Her bir ön-demete bir demet karşılık gelir (Grauert ve Fritzsche, 1976:103).

2.3. Teorem

Her bir $\{M_W, r_V^W\}$ ön-demeti X üzerinde Teorem 2.2 deki anlamda S demetini tanımlar. Her $s \in M_W$ için $rs \in \Gamma(W, S)$ kesiti karşılık gelir. Eğer $x \in X$ ve $\sigma \in S_x$ ise, bu durumda $W(x) \subset X$ açık komşuluğu ve bir $s \in M_W$ vardır öyleki $\sigma = rs(x)$ dir (Grauert ve Fritzsche, 1976:103).

2.4. Teorem

S, X üzerinde bir demet ve $\{\Gamma(W, S), r_V^W\}$ kanonik ön-demeti olsun. Bu durumdaki kanonik ön-demetin tanımladığı demet S ye doğal izomorftur (Grauert ve Fritzsche, 1976:103).

2.5. Teorem

Her demet morfizmi açık dönüşümdür (Grauert ve Fritzsche, 1976:103).

2.6. Teorem

$(S_1, \pi_1), (S_2, \pi_2), \dots, (S_k, \pi_k), X$ üzerinde demetler olsun. Bu durumda $W \subset X$ açık kümesi için

$$M_W = \Gamma(W, S_1) \times \Gamma(W, S_2) \times \dots \times \Gamma(W, S_k)$$

çarpımını oluşturalım. $s = (s_1, s_2, \dots, s_k) \in M_W$ ve $V \subset W$ için $\Gamma_V^W(s) = (s_1|_V, s_2|_V, \dots, s_k|_V)$ olsun. Bu durumda $\{M_W, \Gamma_V^W\}$ bir ön demettir. Bu ön-demetin tanımladığı demete $S_1, S_2, \dots, S_k$ demetlerinin Whitney Toplamı denir ve $S^* = S_1 \oplus S_2 \oplus \dots \oplus S_k$ ile gösterilir (Grauert ve Fritzsche, 1976:104).

2.7. Teorem

$i = 1, \dots, k$ için (S_i, π_i) , X üzerinde demetler ve $S^* = S_1 \oplus S_2 \oplus \dots \oplus S_k$ Whitney toplamı olsun. Bu durumda her $x \in X$ için $(W, (s_1, s_2, \dots, s_k))_x \rightarrow (s_1(x), s_2(x), \dots, s_k(x))$ şeklinde tanımlı bir $\pi: S_x^* \rightarrow (S_1)_x \times (S_2)_x \times \dots \times (S_k)_x$ birebir ve üzerine dönüşümü vardır (Grauert ve Fritzsche, 1976:104).

2.8. Teorem

$i = 1, \dots, k$ için (S_i, π_i) , X üzerinde demetler olsun. Bu durumda

$$P_i: S_1 \oplus S_2 \oplus \dots \oplus S_k \rightarrow S_i, P_i(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k) = \sigma_i$$

doğal projeksiyonu demet morfizmidir (Grauert ve Fritzsche, 1976:104).

2.9. Teorem

X üzerinde bir (S, π) çiftine aşağıdaki şartları sağlıyorsa bir grupların demetidir denir.

- i) Her bir S_x sapı bir gruptur,
- ii) Her bir $W \subset X$, açık kümesi üzerinde herhangi ikisi $s_1, s_2 \in \Gamma(W, S)$ kesitleri için $+: S \oplus S \rightarrow S$ işlemleri sürekli ve $x \rightarrow s_1(x) - s_2(x)$, $x \in W$ dönüşümü bir kesittir (Grauert ve Fritzsche, 1976:104).

2.5. Tanım

G boş olmayan bir küme olsun. G üzerinde

$$G \times G \rightarrow G, (a, b) \mapsto ab$$

çarpım işlemi tanımlansın. Eğer çarpım işlemi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa G ye bir genelleştirilmiş grup denir (Molaei, 1999).

i) Her $a, b, c \in G$ için $(ab)c = a(bc)$ eşitliği gerçekleşir.

ii) Her bir $a \in G$ için $ae(a) = e(a)a = a$ olacak şekilde tek bir $e(a) \in G$ vardır.

iii) Her bir $a \in G$ için $a a^{-1} = a^{-1} a = e(a)$ olacak biçimde $a^{-1} \in G$ vardır.

Tanım 2.5 den kolaylıkla görülüyor ki her grup bir genelleştirilmiş gruptur. Fakat tersi genelde doğru değildir.

2.10. Teorem

G bir genelleştirilmiş grup olmak üzere her $a, b \in G$ için $ab = ba$ oluyorsa G bir abelyan gruptur (Molaei, 1999).

2.6. Tanım

H, G nin boş olmayan bir alt kümesi olmak üzere her $a, b \in H$ için $ab^{-1} \in H$ oluyorsa H ye G nin genelleştirilmiş alt grubu denir (Mehrabı ve diğerleri, 2000).

2.11. Teorem

G bir genelleştirilmiş grup ve her $a \in G$ için

$$G_a = e^{-1}\{e(a)\} = \{x \in G : e(x) = e(a) = e_a\}$$

olsun. Bu durumda G_a, G nin genelleştirilmiş alt grubudur. Üstelik G_a bir gruptur (Molaei, 2005).

2.1. Lemma

G bir genelleştirilmiş grup olsun. Bu durumda

i) Her bir $a \in G$ için bir tek $a^{-1} \in G$ vardır;

ii) Her bir $a \in G$ için $e(a) = e(a^{-1})$ ve $e(e(a)) = e(a)$ olur;

iii) Her bir $a \in G$ için $(a^{-1})^{-1} = a$ olur;

iv) $\{G_a = e^{-1}\{e(a)\} : a \in G\}$, G nin bir grup parçalanışıdır (Adéniran ve diğerleri, 2009).

2.1. Örnek

$S = \{1, 2\}$ kümesi $2.2 = 2, 2.1 = 1.2 = 2, 1.1 = 1$ işlemi ile bir yarıgruptur. Bu işleme göre 2 tek bir birime sahip olmadığından S bir genelleştirilmiş grup değildir (Molaei, 2005:14).

2.2. Örnek

$\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi olmak üzere $G = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ kümesi üzerinde tanımlanan

$$(a_1, b_1, c_1) \cdot (a_2, b_2, c_2) = (b_1 a_1, b_1 b_2, b_1 c_2)$$

çarpım işlemi ile birlikte bir genelleştirilmiş gruptur (Molaei, 1999).

2.3. Örnek

$G = \left\{ A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \text{ ve } b \neq 0 \right\}$ olsun. Her $A \in G$ matrisi için

$$e(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{a}{b} & b \end{bmatrix} \text{ ve } A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{a}{b^2} & 1 \end{bmatrix}$$

sırasıyla A matrisinin birimi ve tersi olmak üzere G kümesi bir genelleştirilmiş gruptur (Adéniran ve diğerleri, 2009).

2.4. Örnek

G, m işlemi ile bir genelleştirilmiş grup olsun. Bu durumda $G \times G$,

$$(m(a, c), m(b, d)) = m_1((a, b), (c, d))$$

işlemi ile bir genelleştirilmiş gruptur. Grubun birim elemanı her $(a, b) \in G \times G$ için $e_1((a, b)) = (e(a), e(b))$ ve ters elemanı $(a, b)^{-1} = (a^{-1}, b^{-1})$ ile tanımlanır (Farhangooost ve Nasirzade, 2013).

2.5. Örnek

$G = \left\{ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ kümesi

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a & f \\ g & d \end{bmatrix}$$

işlemi ile bir genelleştirilmiş gruptur. Sırasıyla A matrisinin birimi ve tersi kendisidir (Molaei, 1999).

2.7. Tanım

G bir yarıgrup olsun. Eğer

i) Her bir $a \in G$ için $ae(a) = e(a)a = a$ olacak biçimde tek bir $e(a) \in G$ var;

ii) Her bir $a \in G$ için $aa^{-1} = a^{-1}a = e(a)$ olacak biçimde $a^{-1} \in G$ var;

iii) G bir Hausdorff topolojik uzay;

iv) G üzerinde tanımlanan $m_1: G \times G \rightarrow G, (a, b) \rightarrow ab$ ve $m_2: G \rightarrow G, a \rightarrow a^{-1}$ dönüşümleri sürekli

koşullarını sağlanıyor ise G ye topolojik genelleştirilmiş grup denir (Molaei, 2004).

2.6. Örnek

Boş olmayan her G Hausdorff topolojik uzayı

$$G \times G \rightarrow G$$

$$(a, b) \mapsto a$$

işlemi ile bir topolojik genelleştirilmiş gruptur (Molaei, 2005:14).

2.7. Örnek

$G = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ kümesi Öklid metriğinin indirgediği topoloji ve $(a, b) \cdot (c, d) = (bc, bd)$ ikili işlemi ile bir topolojik genelleştirilmiş gruptur (Farhangoost ve Nasirzade, 2013).

2.8. Örnek

Genetikte DNA dizilim kodları $D = \{A, G, C, T\}$ veya $D = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesi ile ifade edilsin. DNA dizilerinin kümesini ise $\Sigma = \{a = (a_i) : a_i \in D, i \in \mathbb{Z}\}$ olarak tanımlayalım ve $n_{-1} < 0 \leq n_0$ olmak üzere $\xi = \{n_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ tamsayıların kesin artan dizisi olsun. Σ kümesi üzerinde

$$c_{[n_i+1, n_{i+1}]} = \begin{cases} a_{[n_i+1, n_{i+1}]}, & i \text{ çift} \\ b_{[n_i+1, n_{i+1}]}, & i \text{ tek} \end{cases}$$

olmak üzere ξ -etkisi olarak adlandırılan

$$* : \Sigma \times \Sigma \longrightarrow \Sigma, (a, b) \longrightarrow c,$$

işlemini tanımlayalım. Bu durumda $(\Sigma, *)$ bir topolojik genelleştirilmiş gruptur (Ahmadi, 2013).

3. TOPOLOJİK GENELLEŞTİRİLMİŞ GRUBUN OLUŞTURDUĞU GRUPLARIN DEMETİ

3.1. Topolojik Grubun Oluşturduğu Grupların Demeti

$\mathcal{C}$ topolojik uzayların kategorisi ve X de bu kategoride her $x \in X$ için (X, x) ler aynı homotopi tipine sahip noktalı topolojik uzay olsun.

$X \in \mathcal{C}$ taban kümesini ve p_0 birim elemanı taban noktası olan bir P keyfi bir topolojik grubunu göz önüne alalım. Bu durumda; her $x \in X$ için (X, x) den (P, p_0) ikilisine taban noktalarını koruyan, taban noktalarına göre homotop dönüşümlerin homotopi sınıflarının $[(X, x), (P, p_0)]$ kümesi bir gruptur. Üstelik bu gruplar birbirinden farklıdır. Her $x \in X$ için (X, x) noktalı topolojik uzay için oluşturulan $S(X) = \bigvee_{x \in X} [(X, x), (P, p_0)]$, X üzerinde bir kümedir.

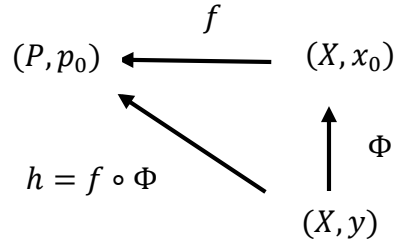
Taban noktası grubun birim elemanı p_0 olan (P, p_0) noktalı topolojik grubundan $X \in \mathcal{C}$ üzerinde elde edilen demet sıradaki teoremle verilmiştir (Yıldız, 1991).

3.1.1. Teorem

(P, p_0) taban noktası birim elemanı olan noktalı topolojik grup ve $X \in \mathcal{C}$ olsun. Eğer $S(X) = \bigvee_{x \in X} [(X, x), (P, p_0)]$ ve $\pi: S(X) \rightarrow X$ doğal dönüşümü her $\sigma = [f]_x \in S(X), x \in X$ için $\pi(\sigma) = \pi([f]_x) = x$ ise, $S(X)$ üzerinde π dönüşümünü bu topolojiye göre lokal homeomorfizm yapan bir topoloji vardır. Böylece (S, π) ikilisi X üzerinde bir demettir (Yıldız, 1991).

Teorem 3.1.1 de Yıldız, her $x \in X$ için $S(X) = \bigvee_{x \in X} [(X, x), (P, p_0)]$ kümesini, $\pi: S(X) \rightarrow X, \pi(\sigma) = x$ ve $s: V \rightarrow S(X)$ dönüşümlerini aşağıdaki biçimde tanımlamıştır:

$x_0 \in X$ ise, $S(X)$ de bir $[(X, x_0), (P, p_0)]$ grubu vardır. y, V 'nin içinde keyfi bir nokta olsun. Bu durumda; $V = V(x_0), x_0$ ın açık komşuluğu olmak üzere (X, x_0) ve (X, y) aynı homotopi tipine sahiptir. Buradan $\Phi: (X, x_0) \rightarrow (X, y)$ homotopi denklik dönüşümünün varlığını söylenebilir.



Şekil 3.1. f ve Φ fonksiyonlarının bileşkesi

Bu durumda Şekil 3.1 den $h = f \circ \Phi: (X, y) \rightarrow (P, p_0)$ dönüşümü süreklidir ve taban noktalarını korur. $[h]_y \in [(X, y), (P, p_0)]$ ise $f \circ \Phi = h$ nin bir homotopi sınıfıdır.

Böylece $s(y) = [h]_y$ biçiminde tanımlanabilir. Buradan s iyi tanımlı ve her bir $y \in V$ için $(\pi \circ s)(y) = \pi(s(y)) = y$ olur. Bu durumda ise $\pi \circ s = I_V$ dir. Dolayısıyla s dönüşümüne $S(X)$ in V üzerindeki bir kesiti denir.

$S(X)$ in tüm kesitlerinin kümesini $\Gamma(V, S)$ ile gösterelim. $s(V) = \bigcup_{y \in V} [h]_y$ olarak tanımlandığında $S(X)$ üzerinde

$$\beta = \{s(V) : V = V(x) \subset X, x \in X, s \in \Gamma(V, S)\}$$

topoloji tabanını oluşturur. Bu taban $S(X)$ üzerinde doğal bir topoloji oluşturur. Dolayısıyla $S(X)$ bir topolojik uzaydır.

Böylece Teorem 3.1.1 de P topolojik grubu ile (X, x) noktalı uzayları üzerinde (S, π) demeti oluşturulmuştur (Yıldız, 1991). (S, π) demetinin sapları ise $x \in X$ için $[(X, x), (P, p_0)] = \pi^{-1}(x)$ grubudur ve $S(X)_x$ ile gösterilir.

$\Gamma(V, S)$, her $y \in V$ için

$$(s_1 s_2)(y) = s_1(y) s_2(y), s_1, s_2 \in \Gamma(V, S)$$

şeklinde tanımlanan noktasal çarpma işlemi ile bir gruptur. Bu grubun birim elemanı $[(X, x), (P, p_0)]$ nın birimi yardımı ile tanımlanan $I: V \rightarrow S$ ve her $s \in \Gamma(V, S)$ için ters elemanı $[(X, x), (P, p_0)]$ nın tersi yardımıyla tanımlanan $s^{-1} \in \Gamma(V, S)$ dir.

$\Gamma(V, S)$ grup olduğundan her $\sigma_1, \sigma_2 \in S(X)$ için

$$\begin{aligned} (.): S(X) \oplus S(X) &\rightarrow S(X), \\ (\sigma_1, \sigma_2) &\rightarrow \sigma_1 \cdot \sigma_2 \end{aligned}$$

dönüşümü süreklidir. O halde (S, π) bir cebirsel demettir.

3.2. Topolojik Genelleştirilmiş Grubun Oluşturduğu Grupların Demeti

P sonlu noktalı topolojik genelleştirilmiş grup olsun. X üzerindeki $S_1, \dots, S_k$ demetlerinin Whitney toplamı olan $S^* = S_1 \oplus \dots \oplus S_k$ nı oluşturmak için P_{i_0} kanonik dönüşümü ve i_0 sabiti için $\pi: S^*(X) \rightarrow X$, $\pi(\sigma) = (\pi_{i_0} \circ P_{i_0})(\sigma)$ dönüşümünü tanımlayalım.

$$\begin{array}{ccc} & f_i & \\ (P, p_i) & \xleftarrow{\quad} & (X, x_0) \\ & \nwarrow h_i = f_i \circ \Phi & \uparrow \Phi \\ & & (X, y) \end{array}$$

Şekil 3.2. f_i ve Φ fonksiyonlarının bileşkesi

$x_0 \in X$ olmak üzere $i = 1, \dots, k$ için $S_i(X)$ de $[(X, x_0), (P, p_i)]$ grupları vardır. $h_i = f_i \circ \Phi: (X, x) \rightarrow (P, p_i)$ sürekli ve taban noktalarını koruyan bir dönüşüm olmak üzere $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k) = ([h_1]_{x_0}, [h_2]_{x_0}, \dots, [h_k]_{x_0})$, $\prod_{i=1, \dots, k} [(X, x_0), (P, p_i)]$ grubunda bir homotopi sınıfı olsun. Burada $i = 1, \dots, k$ için $[h_i]_y \in [(X, y), (P, p_i)]$, $f_i \circ \Phi = h_i$ dönüşümünün bir homotopi sınıfıdır.

$x_0 \in X$ keyfi bir sabit noktası için $V = V(x_0)$, X içindeki bir x_0 elemanının açık bir komşuğunu gösterebilir.

Şimdi $s = (s_1, \dots, s_k): V \rightarrow S^*(X)$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

y , V içinde keyfi bir nokta olmak üzere, $i = 1, \dots, k$ ve $s_i(y) = [h_i]_y$ için $s(y) = (s_1, s_2, \dots, s_k)(y) = (s_1(y), s_2(y), \dots, s_k(y))$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda s iyi tanımlıdır ve

1. Her $y \in V$ için

$$(\pi \circ s)(y) = (\pi_i \circ P_i \circ s)(y) = \pi_i(P_i(s_1(y), s_2(y), \dots, s_k(y))) = \pi_i(s_i(y)) = y$$

dir. Buradan $\pi \circ s = I_V$ olur.

2. x_0, V keyfi sabit bir nokta olmak üzere, $V = V(x_0)$ için

$$\begin{aligned} s(x_0) &= (s_1, \dots, s_k)(x_0) = (s_1(x_0), \dots, s_k(x_0)) \\ &= ([f_1 \circ I_x]_{x_0}, \dots, [f_k \circ I_x]_{x_0}) = ([f_1]_{x_0}, \dots, [f_k]_{x_0}) \end{aligned}$$

olur. Buradan $s(V) = \prod_{i=1, \dots, k} s_i(V) = \prod_{i=1, \dots, k} (\bigcup_{y \in V} [h_i]_y)$ yazılabilir.

Böylece $s(V)$ ler açık kümeler olarak tanımlanırsa

$$\beta = \left\{ s(V) := \prod_{i=1, \dots, k} s_i(V) : V = V(x) \subset X, x \in X, s_i \in \Gamma(V, S_i) \right\}$$

ailesi $S^*(X)$ için bir topoloji tabanı olur. Buradan $S^*(X)$ bir topolojik uzaydır.

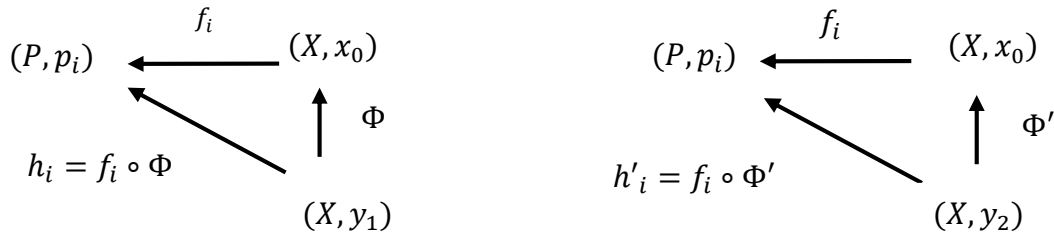
Şimdi $\pi: S^*(X) \rightarrow X$ dönüşümünün lokal homeomorfizm olduğunu gösterelim.

1. $\pi^* = \pi|_U: U \rightarrow V$ birebirdir. Gerçekten keyfi $\sigma_1, \sigma_2 \in s(V)$ için V içinde noktaları

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= s(y_1) = (s_1, s_2, \dots, s_k)(y_1) = (s_1(y_1), s_2(y_1), \dots, s_k(y_1)) \\ &= ([f_1 \circ \Phi]_{y_1}, [f_2 \circ \Phi]_{y_1}, \dots, [f_k \circ \Phi]_{y_1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_2 &= s(y_2) = (s_1, s_2, \dots, s_k)(y_2) = (s_1(y_2), s_2(y_2), \dots, s_k(y_2)) \\ &= ([f_1 \circ \Phi']_{y_2}, [f_2 \circ \Phi']_{y_2}, \dots, [f_k \circ \Phi']_{y_2})\end{aligned}$$

olacak biçimde y_1, y_2 noktaları vardır. Yani $i = 1, \dots, k$ için aşağıdaki diyagramlardan



Şekil 3.3. $f_i \circ \Phi$ ve $f_i \circ \Phi'$ fonksiyonlarının bileşkesi

$\pi^*(\sigma_1) = \pi^*(\sigma_2)$ iken $i = 1, \dots, k$ için

$$\Phi \sim \Phi' \Rightarrow f_i \circ \Phi \sim f_i \circ \Phi' \Rightarrow [f_i \circ \Phi]_{y_1} = [f_i \circ \Phi']_{y_2} \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\pi^*(s(y_1)) &= \pi^*(s(y_2)) \Rightarrow \pi^*([f_1 \circ \Phi]_{y_1}, [f_2 \circ \Phi]_{y_1}, \dots, [f_k \circ \Phi]_{y_1}) \\ &= \pi^*([f_1 \circ \Phi']_{y_2}, [f_2 \circ \Phi']_{y_2}, \dots, [f_k \circ \Phi']_{y_2}) \Rightarrow y_1 = y_2.\end{aligned}$$

elde edilir.

2. $\pi^* = \pi|_U: U \rightarrow V$ dönüşümü süreklidir. Gerçekten $y \in V$ ve y nin bir komşuluğu $W = W(y) \subset V$ ise $s(W) \subset U = s(V)$, σ nin bir komşuluğudur ve $\pi^*(s(W)) = W \subset V$ dir. Dolayısıyla π^* süreklidir.

3. $\pi^{*-1} = (\pi|_U)^{-1} = s: V \rightarrow U = s(V)$ süreklidir. Gerçekten y, V de keyfi bir eleman $s(y) = \sigma \in U$ ve $U' = U'(\sigma) \subset U$, σ nin komşuluğu ise $s(\pi|_U)(U') \subset V$, y nin bir komşuluğudur ve $U' = U'(\sigma) \subset U$ olur. Dolayısıyla $(\pi^*)^{-1}$ süreklidir.

Buradan π^* bir lokal homeomorfizmdir.

Şimdi aşağıdaki teorem verilebilir.

3.2.1. Teorem

$(P, p_i)_{i=1, \dots, k}$, $p_1, p_2, \dots, p_k$ birim elemanları ile sonlu noktalı topolojik genelleştirilmiş grup ve $X \in \mathcal{C}$ olsun. $S^* = S_1 \oplus S_2 \oplus \dots \oplus S_k$ ve $\pi: S^*(X) \rightarrow X$ dönüşümü her $x \in X$ ve $\sigma \in S^*(X)$ için

$$\pi(\sigma) = (\pi_i \circ P_i)([h_1]_x, [h_2]_x, \dots, [h_k]_x) = x, \quad i = 1, \dots, k,$$

olmak üzere, $S^*(X)$ üzerinde bir topoloji vardır öyleki π bu topolojiye göre lokal homeomorfizmdir. Buradan (S^*, π) ikilisi X üzerinde bir demettir.

3.2.1. Tanım

Teorem 3.2.1 ile elde edilen (S^*, π) çiftine P topolojik genelleştirilmiş grubunun (X, x) , $x \in X$ noktalı topolojik uzaylar üzerinde oluşturduğu grupların demeti denir.

3.2.2. Tanım

Her bir $x \in X$ için $\prod_{i=1, \dots, k} [(X, x), (P, p_i)] = \pi^{-1}(x)$ grubuna (S^*, π) demetinin X üzerindeki sapı denir ve $S^*(X)_x$ ile gösterilir.

Eğer $x \in X$ sabit bir nokta ve $V, x \in X$ in açık bir komşuluğu ise, $S^*(X)$ topolojisinin inşasında tanımlanan, $s: V \rightarrow S^*(X)$ dönüşümüne $S^*(X)$ in V üzerindeki kesiti denir. $S^*(X)$ in V üzerindeki bütün kesitlerinin kümesini $\Gamma(V, S^*)$ ile gösterelim.

3.2.2. Teorem

$y \in V$ ve $s_1, s_2 \in \Gamma(V, S^*)$ olmak üzere

$$(s_1 s_2)(y) = s_1(y) s_2(y)$$

işlemini tanımlayalım. Bu işlem ile birlikte $\Gamma(V, S^*)$ bir gruptur.

İspat

Her $y \in V_i$ ve $i = 1, \dots, k$ için $\Gamma(V_i, S_i)$ üzerinde tanımlı

$$(s_1^i, s_2^i)(y) = s_1^i(y) s_2^i(y), s_1^i, s_2^i \in \Gamma(V_i, S_i)$$

noktasal çarpımı düşünülürse $\Gamma(V, S^*)$ grubunun her $s_1, s_2 \in \Gamma(V, S^*)$ ve $y \in V$ için tanımlanan

$$(s_1 s_2)(y) = s_1(y) s_2(y)$$

noktasal çarpımı ile bir grup olduğu kolayca gösterilebilir. Gerçekten yukarıda tanımlanan noktasal çarpım işlemi iyi tanımlı ve kapalıdır. Açıkça bu işlem birleşimli ve $\prod_{i \in I} [(X, x), (P, p_i)]$ birim elemanlarından elde edilen $I: V \rightarrow S^*(X)$ dönüşümü birim dönüşümdür. Diğer taraftan keyfi bir $s \in \Gamma(V, S^*)$ elemanının tersi ise $s^{-1}(x) = s(x)^{-1}$ biçiminde tanımlanan $s^{-1} \in \Gamma(V, S^*)$ kesitidir. O halde $\Gamma(V, S^*)$ noktasal çarpım işlemi ile bir gruptur.

Dikkat edilmelidir ki $S^*(X)_x$ sapı grup olduğundan $\Gamma(V, S^*)$ noktasal çarpım işlemi ile bir gruptur. Her $\sigma_1, \sigma_2 \in S^*(X)$ için

$$(.): S^*(X) \otimes S^*(X) \rightarrow S^*(X),$$

$$(\sigma_1, \sigma_2) \rightarrow \sigma_1 \cdot \sigma_2$$

işlemi süreklidir. Dolayısıyla (S^*, π) , X üzerinde cebirsel bir demettir.

3.3. Demetin Karakterizasyonları

X_1 ve X_2 , $\mathcal{C}$ kategorisinde noktalı topolojik uzaylar, P sonlu birim elemana sahip bir genelleştirilmiş noktalı grup ve $S^*(X_1), S^*(X_2)$ sırasıyla oluşturulan demetler olsun. Oluşturulan demetleri $(X_1, S^*(X_1))$ ve $(X_2, S^*(X_2))$ çiftleri ile gösterelim.

3.3.1. Tanım

$(X_1, S^*(X_1))$ ve $(X_2, S^*(X_2))$ çiftleri verilmiş olsun. Eğer

- i) $\alpha: X_1 \rightarrow X_2$ dönüşümü açık ve sürekli,
- ii) $\alpha^*: S^*(X_2) \rightarrow S^*(X_1)$ dönüşümü açık ve sürekli,
- iii) α^* sapları korur. Yani her $S^*(X_2)_{\alpha(x_1)} \subset S^*(X_2)$ sapı için

$$\alpha^*(S^*(X_2)_{\alpha(x_1)}) \subset S^*(X_1)_{x_1} \ni \alpha(x_1) = x_2,$$

- iv) Her $x_1 \in X_1$ için $\alpha^*|_{S^*(X_2)_{\alpha(x_1)}}: S^*(X_2)_{\alpha(x_1)} \rightarrow S^*(X_1)_{x_1}$ kısıtlaması bir homomorfizm

şartlarını sağlayan bir $F = (\alpha^*, \alpha)$ ikilisi varsa bu çiftler arasında bir homomorfizm vardır denir ve $F = (\alpha^*, \alpha): (X_1, S^*(X_1)) \rightleftharpoons (X_2, S^*(X_2))$ şeklinde yazılır.

$$\begin{array}{ccc} S^*(X_1) & \xleftarrow{\alpha^*} & S^*(X_2) \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ X_1 & \xrightarrow{\alpha} & X_2 \end{array}$$

Şekil 3.4. Homomorfizm

3.3.2. Tanım

$(X_1, S^*(X_1))$ ve $(X_2, S^*(X_2))$ çiftleri ve bu çiftler arasında bir $F(\alpha^*, \alpha): (X_1, S^*(X_1)) \rightleftharpoons (X_2, S^*(X_2))$ bir homomorfizmi verilmiş olsun. Eğer α^* ve α homeomorfizmler ise

$F(\alpha^*, \alpha)$ izomorfizmdir. Bu durumda $(X_1, S^*(X_1))$ ile $(X_2, S^*(X_2))$ izomorftir denir ve $(X_1, S^*(X_1)) \cong (X_2, S^*(X_2))$ ile gösterilir.

3.3.1. Teorem

$(X_1, S^*(X_1))$ ve $(X_2, S^*(X_2))$ çiftleri verilmiş olsun. Eğer $\alpha: X_1 \rightarrow X_2$ dönüşümü açık ve sürekli ise, $(X_1, S^*(X_1))$ ve $(X_2, S^*(X_2))$ çiftleri arasında bir homomorfizm vardır.

İspat

$x_1 \in X_1$ keyfi sabit bir nokta olsun. Bu durumda $\alpha(x_1) = x_2$ ve $i = 1, \dots, k$ için

$$\pi_1^{-1}(x_1) = \prod_{i=1, \dots, k} [(X_1, x_1), (P, p_i)] = S^*(X_1)_{x_1} \subset S^*(X_1)$$

$$\pi_2^{-1}(\alpha(x_1)) = \prod_{i=1, \dots, k} [(X_2, \alpha(x_1)), (P, p_i)] = S^*(X_2)_{\alpha(x_1)} \subset S^*(X_2)$$

oluşan saptardır.

Şimdi $(P, p_i)_{i=1, \dots, k}$ birim elemanı ile topolojik genelleştirilmiş grup olmak üzere, taban noktaları sırasıyla x_1 ve $\alpha(x_1)$ olan (X_1, x_1) , $(X_2, \alpha(x_1))$ noktalı topolojik uzaylarını göz önüne alalım. Eğer her $i = 1, \dots, k$ için $f_i, g_i: (X_1, x_1) \rightarrow (P, p_i)$ taban noktalarını koruyan sürekli dönüşümler ise $f_{i2}, g_{i2}: (X_2, \alpha(x_1)) \rightarrow (P, p_i)$ taban noktalarını koruyan sürekli dönüşümleri $f_i = f_{i2} \circ \alpha$ ve $g_i = g_{i2} \circ \alpha$ şeklinde tanımlayabiliriz. Ayrıca, her $i = 1, \dots, k$ için $f_{i2} \sim g_{i2} \text{ rel. } \alpha(x_1)$ ise, kolayca gösterilebilir ki, $f_i \sim g_i \text{ rel. } x_1$ dir. Bu yüzden

$$[f]_{\alpha(x_1)} = ([f_{12}]_{\alpha(x_1)}, \dots, [f_{k2}]_{\alpha(x_1)}) \rightarrow [f \circ \alpha]_{x_1} = ([f_{12} \circ \alpha]_{x_1}, \dots, [f_{k2} \circ \alpha]_{x_1})$$

eşlemesi tek anlamlıdır ve $(X_2, \alpha(x_1))$ den (P, p_i) ye taban noktalarını koruyan sürekli dönüşümlerin homotopi sınıflarını (X_1, x_1) den (P, p_i) ye taban noktalarını koruyan sürekli dönüşümlerin homotopi sınıflarına tasvir eder. Yani, bu eşleme her $[f]_{x_2}$ elemanına bir tek $[f \circ \alpha]_{x_1}$ elemanını karşılık getirir.

$x_1 \in X_1$ keyfi bir sabit nokta olarak alındığından yukarıdaki eşleme her $[f]_{x_2} \in S^*(X_2)$ için $\alpha^*([f]_{x_2}) = [f \circ \alpha]_{x_1} \in S^*(X_1)$ olacak biçimde $\alpha^*: S^*(X_2) \rightarrow S^*(X_1)$ dönüşümünü verir.

1. α^* süreklidir. Çünkü $U_1 \subset S^*(X_1)$ keyfi bir açık küme alınırsa $\alpha^{*-1}(U_1) = U_2 \subset S^*(X_2)$ kümesinin açık olduğu gösterilebilir. Gerçekten,

Eğer $U_1 \subset S^*(X_1)$ açık küme ise, $V_j \subset X_1, j \in I$ açık komşuluklar ve s_j^1 ler V_j üzerinde kesitler olmak üzere $U_1 = \bigcup_{j \in I} (\prod_{i=1}^k s_{ij}^1(V_j))$ ve $\pi_1(U_1) = \bigcup_{j \in I} V_j$ dir. O halde $\bigcup_{j \in I} V_j \subset X_1$ açık küme ve α açık ve sürekli dönüşüm olduğundan $\alpha(\bigcup_{j \in I} V_j) = \bigcup_{j \in I} \alpha(V_j) \subset X_2$ açık bir kümedir. Üstelik $\alpha(V_j), j \in I, X_2$ de açık komşuluklar olduğundan $\bigcup_{j \in I} (\prod_{i=1}^k s_{ij}^2(\alpha(V_j))) \subset S^*(X_2)$ yı açık yapan $s_j^2: \alpha(V_j) \rightarrow S^*(X_1), j \in I$ kesitleri vardır.

Şimdi $U_2 = \bigcup_{j \in I} (\prod_{i=1}^k s_{ij}^2(\alpha(V_j)))$ olduğunu gösterelim.

$\sigma_1 = [f]_{x_1} = ([f_1]_{x_1}, \dots, [f_k]_{x_1}) \in U_1$ keyfi bir eleman ise, $\alpha^*(\sigma_2) = \sigma_1$ ve $\pi_1(\sigma_1) = \pi_1([f]_{x_1}) = x_1$ olacak biçimde $\sigma_2 = [f]_{x_2} = ([f_{12}]_{x_2}, \dots, [f_{k2}]_{x_2}) \in U_2$ vardır. Dolayısıyla, en az bir $j \in I$ için $\alpha(x_1) = x_2 \in \alpha(V_j)$ ise $x_2 \in \alpha(V_j)$ ve $\sigma_2 = [f]_{x_2} = \bigcup_{j \in I} (\prod_{i=1}^k s_{ij}^2(\alpha(V_j)))$ olur. O halde $U_2 \subset \bigcup_{j \in I} s_{ij}^2(\alpha(V_j))$ dir.

Diğer taraftan $\sigma_2 \in \bigcup_{j \in I} (\prod_{i=1}^k s_{ij}^2(\alpha(V_j)))$ keyfi bir eleman ise, $\exists j \in I$ için $\sigma_2 \in \prod_{i=1}^k s_{ij}^2(\alpha(V_j))$ dir. Buradan $\sigma_2 = [f]_{x_2} = ([f_{12}]_{x_2}, \dots, [f_{k2}]_{x_2})$ ise $\pi_2(\sigma_2) = (\pi_{2i} \circ P_i)(\sigma_2) = x_2$ ve $\alpha(x_1) = x_2 \in V_j$ olmak üzere, $f_{i2} \circ \alpha: (X_2, x_2) \rightarrow (P, p_i)$ dönüşümü sürekli ve taban noktasını korur. Dolayısıyla $([f_{12} \circ \alpha]_{x_1}, \dots, [f_{k2} \circ \alpha]_{x_1}) = [f \circ \alpha]_{x_1} = \sigma_1$ dir. Buradan $\sigma_2 \in U_2$ ve $\bigcup_{j \in I} (\prod_{i=1}^k s_{ij}^2(\alpha(V_j))) \subset U_2$ elde edilir. Sonuç olarak $U_2 = \bigcup_{j \in I} (\prod_{i=1}^k s_{ij}^2(\alpha(V_j)))$ olur ve α^* süreklidir.

2. α^* açıktır. Çünkü, $U_2 \subset S^*(X_2)$ keyfi bir açık küme ise $\alpha^*(U_2) = U_1 \subset S^*(X_1)$ bir açık kümedir. Gerçekten $U_2 \subset S^*(X_2)$ bir açık küme ise, $W_j \subset X_2, j \in I$ açık komşuluklar ve $s_j^2: W_j \rightarrow S^*(X_2)$ kesitler olmak üzere $U_2 = \bigcup_{j \in I} (\prod_{i=1}^k s_{ij}^2(W_j))$ ve $\pi_2(U_2) = \bigcup_{j \in I} W_j$ dir. Bu yüzden $\bigcup_{j \in I} W_j \subset X_2$ açık ve α sürekli olduğundan $\alpha^{-1}(\bigcup_{j \in I} W_j) = \bigcup_{j \in I} \alpha^{-1}(W_j) \subset$

X_1 açıktır. Yine α sürekli olduğundan $\alpha^{-1}(W_j)$, $j \in I$ açık komşuluklardır ve $\cup_{j \in I} \left(\prod_{i=1}^k s_{ij}^1 \left(\alpha^{-1}(W_j) \right) \right) \subset S^*(X_1)$ yi açık küme yapan en az bir s_j^1 , $j \in I$ kesiti vardır.

Gösterelim ki $U_1 = \cup_{j \in I} \left(\prod_{i=1}^k s_{ij}^1 \left(\alpha^{-1}(W_j) \right) \right)$ dir.

Eğer $\sigma_1 = [f]_{x_1} = ([f_1]_{x_1}, \dots, [f_k]_{x_1}) \in U_1$ keyfi bir eleman ise, $\alpha^*(\sigma_2) = \sigma_1$ ve $\pi_2(\sigma_2) = \pi_2([f]_{\alpha(x_1)}) = \alpha(x_1) = x_2$ olacak biçimde $\exists \sigma_2 = [f]_{\alpha(x_1)} = ([f_{12}]_{\alpha(x_1)}, \dots, [f_{k2}]_{\alpha(x_1)}) \in U_2$ vardır. O halde en az bir $j \in I$ için $\alpha(x_1) = x_2 \in \alpha(W_j)$ ise, $x_1 \in \alpha^{-1}(W_j)$ ve $\sigma_1 = [f \circ \alpha]_{x_1} = ([f_{12} \circ \alpha]_{x_1}, \dots, [f_{k2} \circ \alpha]_{x_1})$ dolayısıyla $\sigma_1 \in \cup_{j \in I} \left(\prod_{i=1}^k s_{ij}^1 \left(\alpha^{-1}(W_j) \right) \right)$ dir. Buradan $U_1 \subset \cup_{j \in I} \left(\prod_{i=1}^k s_{ij}^1 \left(\alpha^{-1}(W_j) \right) \right)$ elde edilir.

Diğer taraftan, eğer $\sigma_1 \in \cup_{j \in I} \left(\prod_{i=1}^k s_{ij}^1 \left(\alpha^{-1}(W_j) \right) \right)$ keyfi bir eleman ise, en az bir $j \in I$ için $\sigma_1 \in \prod_{i=1}^k s_{ij}^1 \left(\alpha^{-1}(W_j) \right)$ dir. Buradan $\sigma_1 = [f \circ \alpha]_{x_1} = ([f_{12} \circ \alpha]_{x_1}, \dots, [f_{k2} \circ \alpha]_{x_1})$, ise $\pi_1(\sigma_1) = (\pi_1 \circ P_i)(\sigma_1) = x_1$ ve $\alpha(x_1) = x_2 \in W_j$ olmak üzere $f_{i2} \circ \alpha: (X_1, x_1) \rightarrow (P, p_i)$ dönüşümü sürekli ve taban noktasını korur. Dolayısıyla $([f_{12}]_{\alpha(x_1)}, \dots, [f_{k2}]_{\alpha(x_1)}) = \sigma_2$ dir. Buradan $\sigma_1 \in U_1$ ve $\cup_{j \in I} \left(\prod_{i=1}^k s_{ij}^1 \left(\alpha^{-1}(W_j) \right) \right) \subset U_1$ olur. Sonuç olarak $U_1 = \cup_{j \in I} \left(\prod_{i=1}^k s_{ij}^1 \left(\alpha^{-1}(W_j) \right) \right)$ açık küme ve α^* bir açık dönüşümdür.

3. α^* sapları korur. Gerçekten, her $\sigma_2 = [f]_{x_2} = ([f_{12}]_{x_2}, \dots, [f_{k2}]_{x_2}) \in S^*(X_2)_{x_2} \subset S^*(X_2)$ ve $\alpha(x_1) = x_2$ için $\alpha^*([f]_{x_2}) = [f \circ \alpha]_{x_1} = ([f_{12} \circ \alpha]_{x_1}, \dots, [f_{k2} \circ \alpha]_{x_1}) \in S^*(X_1)_{x_1}$ dir. O halde $\alpha(x_1) = x_2$ için $\alpha^*(S^*(X_2)_{x_2}) \subset S^*(X_1)_{x_1}$ olur.

4. $\alpha(x_1) = x_2$ için $\alpha^*|_{S^*(X_2)_{x_2}}: S^*(X_2)_{x_2} \rightarrow S^*(X_1)_{x_1}$ kısıtlaması bir homomorfizmdir. Gerçekten, her $i = 1, \dots, k$ ve $x_1 \in X_1$ için f_i, g_i dönüşümleri (X_2, x_2) den (P, p_i) ye taban noktalarını koruyan sürekli dönüşümler ve bunlara karşılık gelen taban noktalarını koruyan sürekli dönüşümler $f_i \circ \alpha, g_i \circ \alpha: (X_1, x_1) \rightarrow (P, p_i)$ olsun. Bu durumda $[f]_{x_2} = ([f_1]_{x_2}, \dots, [f_k]_{x_2})$, $[g]_{x_2} = ([g_1]_{x_2}, \dots, [g_k]_{x_2}) \in S^*(X_2)_{x_2}$ ve

$[f \circ \alpha]_{x_1} = ([f_1 \circ \alpha]_{x_1}, \dots, [f_k \circ \alpha]_{x_1}), \quad [g \circ \alpha]_{x_1} = ([g_1 \circ \alpha]_{x_1}, \dots, [g_k \circ \alpha]_{x_1}) \in S^*(X_1)_{x_1}$ dir.

Eğer $[f]_{x_1}, [g]_{x_1} \in S^*(X_1)_{x_1}$ ise

$$\begin{aligned}
 \alpha^*([f]_{x_2}[g]_{x_2}) &= \alpha^*([f_1]_{x_2}, \dots, [f_k]_{x_2})([g_1]_{x_2}, \dots, [g_k]_{x_2}) \\
 &= \alpha^*([f_1 g_1]_{x_2}, \dots, [f_k g_k]_{x_2}) \\
 &= ([f_1 g_1] \circ \alpha]_{x_1}, \dots, [f_k g_k] \circ \alpha]_{x_1}) \\
 &= ([f_1 \circ \alpha]_{x_1}, \dots, [f_k \circ \alpha]_{x_1})([g_1 \circ \alpha]_{x_1}, \dots, [g_k \circ \alpha]_{x_1}) \\
 &= \alpha^*([f_1]_{x_2}, \dots, [f_k]_{x_2}) \alpha^*([g_1]_{x_2}, \dots, [g_k]_{x_2}) \\
 &= \alpha^*([f]_{x_2}) \alpha^*([g]_{x_2}).
 \end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak $F = (\alpha^*, \alpha)$ bir homomorfizmdir.

3.3.2. Teorem

$(X_1, S^*(X_1)), (X_2, S^*(X_2)), (X_3, S^*(X_3))$ çiftleri ve $\alpha_1: X_1 \rightarrow X_2, \alpha_2: X_2 \rightarrow X_3$ dönüşümleri örten ve sürekli olarak verilmiş olsun. Bu durumda $\alpha = \alpha_2 \circ \alpha_1, \alpha^* = \alpha_1^* \circ \alpha_2^*$ olacak biçimde $F = (\alpha^*, \alpha): (X_1, S^*(X_1)) \rightarrow (X_3, S^*(X_3))$ homomorfizmi vardır.

İspat

$\alpha = \alpha_2 \circ \alpha_1: X_1 \rightarrow X_3$ dönüşümü örten ve sürekli olduğundan Teorem 3.3.1 den $F = (\alpha^*, \alpha): (X_1, S^*(X_1)) \rightarrow (X_3, S^*(X_3))$ bir homomorfizmi vardır. Bunun için $\alpha^* = \alpha_1^* \circ \alpha_2^*$ olduğunu göstermemiz ispatı için yeterlidir. Şimdi keyfi bir $[f] = ([f_1]_{x_3}, \dots, [f_k]_{x_3}) \in S^*(X_3)$ için $\alpha^*([f]) = (\alpha_1^* \circ \alpha_2^*)([f])$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
 \alpha^*([f]) &= \alpha^*([f_1]_{x_3}, \dots, [f_k]_{x_3}) = \alpha^*([f_1]_{\alpha_2(x_2)}, \dots, [f_k]_{\alpha_2(x_2)}) \\
 &= ([f_1 \circ \alpha_2]_{x_2}, \dots, [f_k \circ \alpha_2]_{x_2}) = ([f_1 \circ \alpha_2]_{\alpha_1(x_1)}, \dots, [f_k \circ \alpha_2]_{\alpha_1(x_1)}) \\
 &= \alpha_1^*([f_1 \circ \alpha_2]_{x_2}, \dots, [f_k \circ \alpha_2]_{x_2}) = \alpha_1^*(\alpha_2^*([f_1]_{x_3}, \dots, [f_k]_{x_3}))
 \end{aligned}$$

$$= (\alpha_1^* \circ \alpha_2^*) \left(([f_1]_{x_3}, \dots, [f_k]_{x_3}) \right) = (\alpha_1^* \circ \alpha_2^*)([f])$$

Buradan $\alpha^* = \alpha_1^* \circ \alpha_2^*$ elde edilir.

Şimdi aşağıdaki teoremi verebiliriz:

3.3.3. Teorem

Noktalı topolojik uzaylar ve örten, açık ve sürekli dönüşümlerin kategorisinden çiftler ve çiftlerin homomorfizmleri kategorisine, bir noktalı topolojik uzaya bu uzay üzerine inşa edilen genelleştirilmiş gruptan elde edilen homotopi gruplarının demetini, α dönüşümüne de α^* dönüşümü karşılık getiren bir kontravaryant fonktor vardır.

İspat

$\mathcal{C}$, noktalı topolojik uzaylar ve örten, açık ve sürekli dönüşümlerin kategorisini ve $\mathcal{D}$, çiftler ve çiftlerin homomorfizmlerinin kategorisini gösterebiliriz. Her X ve $\alpha: X_1 \rightarrow X_2$ için $\delta: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ dönüşümünü

$$\delta(X) = \bigvee_{x \in X} \prod_{i=1, \dots, k} [(X_1, x_1), (P, p_i)] = S^*(X) \text{ ve } \delta(\alpha) = \alpha^*: S^*(X_2) \rightarrow S^*(X_1)$$

biçiminde tanımlayalım. Bu durumda

(i) $X_1 = X_2$ ve $\alpha = 1_{X_1}$ ise $\delta(X_1) = 1_{S^*(X_1)}$, $S^*(X_1) = \delta(X_1)$ dir. Çünkü $\delta(X_1) = 1_{X_1}^*$ ve her $[f] \in S^*(X_2)$ için

$$1_{X_1}^*([f]) = [1_{X_1} \circ f] = [f]$$

dir. Dolayısıyla $1_{X_1}^* = 1_{S^*(X_1)}$ dir.

(ii) $\alpha_1: X_1 \rightarrow X_2$, $\alpha_2: X_2 \rightarrow X_3$ dönüşümleri örten ve sürekli olarak verilmiş olsun. Bu durumda $\alpha_2 \circ \alpha_1: X_1 \rightarrow X_3$ dönüşümü örten ve süreklidir. Dolayısıyla

$$\delta(\alpha_2 \circ \alpha_1): S^*(X_3) \rightarrow S^*(X_1)$$

bir sürekli homomorfizmdir. Gerçekten

$$\delta(\alpha_2 \circ \alpha_1) = \alpha_1^* \circ \alpha_2^* = \delta(\alpha_1)\delta(\alpha_2)$$

dir. O halde $\delta: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ bir kontravaryant funktordur.

3.3.4. Teorem

$(X_1, S^*(X_1))$ ve $(X_2, S^*(X_2))$ çiftleri verilmiş olsun. Eğer, $\alpha: X_1 \rightarrow X_2$ bir topolojik dönüşüm ise $(X_1, S^*(X_1))$ ve $(X_2, S^*(X_2))$ çiftleri arasında bir izomorfizm vardır.

İspat

Teorem 3.3.1 den dolayı $(X_1, S^*(X_1))$ ve $(X_2, S^*(X_2))$ çiftleri arasında $F = (\alpha^*, \alpha)$ homomorfizmi vardır. Teoremin ispatı için α^* in birebir ve $(\alpha^*)^{-1}$ in sürekli olduğunu göstermemiz yeterlidir.

α bir topolojik dönüşüm olduğundan α^{-1} süreklidir. Bu durumda Teorem 3.3.1 den dolayı $F = (\alpha^*, \alpha)$ ve $F^{-1} = ((\alpha^{-1})^*, \alpha^{-1})$ homomorfizmleri vardır.

Diğer yandan, keyfi iki

$$[f_2] = ([f_1]_{x_2}, \dots, [f_k]_{x_2}), [g_2] = ([g_1]_{x_2}, \dots, [g_k]_{x_2}) \in S^*(X_2)$$

elemanı için,

$$\alpha^*([f_1]_{x_2}, \dots, [f_k]_{x_2}) = \alpha^*([g_1]_{x_2}, \dots, [g_k]_{x_2})$$

$$\Rightarrow ([f_1 \circ \alpha]_{x_1}, \dots, [f_k \circ \alpha]_{x_1}) = ([g_1 \circ \alpha]_{x_1}, \dots, [g_k \circ \alpha]_{x_1})$$

dır. Buradan

$$(\alpha^{-1})^* \left(\alpha^* \left(([f_1]_{x_2}, \dots, [f_k]_{x_2}) \right) \right) = (\alpha^{-1})^* \left(\alpha^* \left(([g_1]_{x_2}, \dots, [g_k]_{x_2}) \right) \right)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$(\alpha^{-1})^* \circ \alpha^* = (\alpha \circ \alpha^{-1})^* \text{ ve } \alpha \circ \alpha^{-1} = I_{X_2}$$

olduğundan $(\alpha \circ \alpha^{-1})^* = I_{S^*(X_2)}$ ve $[f_2] = [g_2]$ dır. Böylece

$$(\alpha^{-1})^* \left(([f_1 \circ \alpha]_{x_1}, \dots, [f_k \circ \alpha]_{x_1}) \right) = (\alpha^{-1})^* \left(([g_1 \circ \alpha]_{x_1}, \dots, [g_k \circ \alpha]_{x_1}) \right)$$

olur. Buradan α^* birebirdir ve $(\alpha^*)^{-1} = (\alpha^{-1})^*$ olduğundan, $(\alpha^*)^{-1}$ süreklidir. O halde $F = (\alpha^*, \alpha)$ bir izomorfizmdir.

3.3.5. Teorem

Noktalı topolojik uzaylar ve örten, açık ve sürekli dönüşümlerin kategorisinden çiftler ve çiftlerin izomorfizmleri kategorisine; bir noktalı topolojik uzaya, bu uzay üzerine inşa edilen genelleştirilmiş gruptan elde edilen homotopi gruplarının demetini, α dönüşümüne de α^* dönüşümü karşılık getiren bir kontravaryant fonktor vardır.

İspat

$\mathcal{C}$, noktalı topolojik uzaylar ve örten, açık ve sürekli dönüşümlerin kategorisini ve $\mathcal{D}$, çiftler ve çiftlerin izomorfizmlerinin kategorisini gösterebilir. Her X ve $\alpha: X_1 \rightarrow X_2$ için $\delta: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ dönüşümünü

$$\delta(X) = \bigvee_{x \in X} \prod_{i=1, \dots, k} [(X, x), (P, p_i)] = S^*(X) \text{ ve } \delta(\alpha) = \alpha^*: S^*(X_2) \rightarrow S^*(X_1)$$

biçiminde tanımlayalım. Bu durumda

(i) $X_1 = X_2$ ve $\alpha = 1_{X_1}$ ise $\delta(X_1) = 1_{S^*(X_1)}$, $S^*(X_1) = \delta(X_1)$ dir. Çünkü $\delta(X_1) = 1_{X_1}^*$ ve her $[f] \in S^*(X_2)$ için

$$1_{X_1}^*([f]) = [1_{X_1} \circ f] = [f]$$

dir. Dolayısıyla $1_{X_1}^* = 1_{S^*(X_1)}$ dir.

(ii) $\alpha_1: X_1 \rightarrow X_2$, $\alpha_2: X_2 \rightarrow X_3$ dönüşümleri örten ve sürekli olarak verilmiş olsun. Bu durumda $\alpha_2 \circ \alpha_1: X_1 \rightarrow X_3$ dönüşümü örten ve süreklidir. Dolayısıyla $\delta(\alpha_2 \circ \alpha_1): S^*(X_3) \rightarrow S^*(X_1)$ bir izomorfizmdir. Gerçekten

$$\delta(\alpha_2 \circ \alpha_1) = \alpha_1^* \circ \alpha_2^* = \delta(\alpha_1)\delta(\alpha_2)$$

dir. O halde tanımına göre $\delta: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ bir kontravaryant funktordur.

4. FUZZY TOPOLOJİK GENELLEŞTİRİLMİŞ GRUBUN OLUŞTURDUĞU FUZZY GRUPLARIN FUZZY DEMETİ

Zadeh'in (1965) fuzzy küme ve fuzzy küme operasyonlarını tanımlamasından sonra Chang(1968), Wong (1974), Lowen (1976) fuzzy topoloji teorisini, Rosenfeld (1971) ise fuzzy grup teorisini geliştirmiştir. Ardından fuzzy topolojik uzay ve fuzzy grup kavramları ile beraber fuzzy topolojik grup tanımı Foster (1979) tarafından ortaya koyulmuştur. İzleyen yıllarda Liang ve Hai (1984, 1985,1987) fuzzy topolojik grup tanımını klasik topolojik grup tanımının genelleştirilmiş olması için tanımı değiştirip fuzzy normal grup, fuzzy bölüm grubu, fuzzy topolojik grupların direkt toplamı olarak karakterize etmişlerdir. Chon (2001), Jha ve Singh (1995, 1999) fuzzy topolojik grup kavramına katkıda bulunanlardandır. Chang ve Liu (1984a, 1984b) ve Chuanlin (1985) fuzzy esas grup ve fuzzy homotopi kavramlarını fuzzy topolojik uzaylarda tanımlayıp fuzzy esas grupların fuzzy topolojik ve homotopik değişmezlerini incelemişlerdir. Gümüş ve Yıldız (2007) ise çalışmalarında topolojik uzaylardaki demet tanımından hareketle fuzzy demet yapısını fuzzy topolojik gruplar vasıtasıyla oluşturmuştur.

Tezin bu bölümünde ilk olarak fuzzy topolojik grubun fuzzy homotopi ile oluşturduğu fuzzy grupların fuzzy demeti incelenip sonrasında fuzzy topolojik genelleştirilmiş grup tanımlanmış ve oluşturduğu fuzzy gruplar ile fuzzy demet inşa edilmiştir.

4.1. Fuzzy Topolojik Grupların Oluşturduğu Fuzzy Grupların Fuzzy Demeti

Gümüş ve Yıldız (2007) çalışmasında topolojik uzaylardaki demet tanımından hareketle fuzzy demet yapısını fuzzy topolojik gruplar vasıtasıyla oluşturmuştur. Bu kısımda Gümüş ve Yıldız'ın oluşturduğu fuzzy demetin yapısı incelenecektir.

(X, τ) fuzzy topolojik uzay olmak üzere $P_m^r \in I^X$ fuzzy noktasını taban noktası olarak kabul eden (X, P_m^r) noktalı fuzzy topolojik uzayları her $P_m^r \in I^X$ için aynı homotopi tipine sahip olsun. Bunun yanında $P_e^r \in I^Z$ taban noktası birim eleman olan $(Z, *, P_e^r)$ fuzzy topolojik grubunu ise $(Z, *, P_e^r)$ olarak göstereyim. Eğer (X, P_m^r) noktalı fuzzy topolojik uzay, $(Z, *, P_e^r)$ herhangi bir fuzzy topolojik grup ise, (X, P_m^r) den $(Z, *, P_e^r)$ ye tanımlanan fuzzy sürekli ve taban noktayı koruyan fonksiyonların fuzzy homotopi sınıflarının kümesini;

$$H(X)_{P_m^r} = [(X, P_m^r), (Z, *, P_e^r)] = \{[f]_{P_m^r} | f : (X, P_m^r) \rightarrow (Z, *, P_e^r), \\ f(P_m^r) = P_{f(m)}^r = P_e^r, f \text{ fuzzy sürekli}\}.$$

ile gösterilsin. $H(X)_{P_m^r}$ nin üyelik fonksiyonu $\mu_{H(X)_{P_m^r}} : H(X)_{P_m^r} \rightarrow [0, 1]$,

$$\mu_{H(X)_{P_m^r}}([f]_{P_m^r})(x) = \begin{cases} r, & m = x, \\ 0, & m \neq x \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmak üzere $H(X)_{P_m^r}$, X de bir fuzzy kümesidir.

Bu durumda $f, g : (X, P_m^r) \rightarrow (Z, *, P_e^r)$ fuzzy için

$$(f \odot g)(P_m^r) = f(P_m^r) * g(P_m^r)$$

fuzzy fonksiyonu fuzzy süreklidir ve taban noktayı korur (Gümüşve Yıldız, 2007).

$\forall [f]_{P_m^r}, [g]_{P_m^r} \in [(X, P_m^r), (Z, *, P_e^r)]$ için $\blacksquare$ işlemi;

$$[f]_{P_m^r} \blacksquare [g]_{P_m^r} = [f \odot g]_{P_m^r} \in [(X, P_m^r), (Z, *, P_e^r)]$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda (X, P_m^r) noktalı fuzzy topolojik uzay, $(Z, *, P_e^r)$ noktalı fuzzy topolojik grup ise $([(X, P_m^r), (Z, *, P_e^r)], \blacksquare) = (H(X)_{P_m^r}, \blacksquare)$ bir fuzzy grup olur. Ayrıca $\forall m \in X$ için oluşan her bir grup diğerlerinden farklıdır. Üstelik $(Z, *)$ grubu değişmeli ise, $(H(X)_{P_m^r}, \blacksquare)$ grubu da değişmelidir.

4.1.1. Teorem

$(Z, *, P_e^r)$ fuzzy topolojik grup, (X, P_m^r) noktalı fuzzy topolojik uzay ve her bir $P_m^r \in I^X$, $m \in X$ için (X, P_m^r) ler aynı fuzzy homotopi tipinden olsun. Eğer

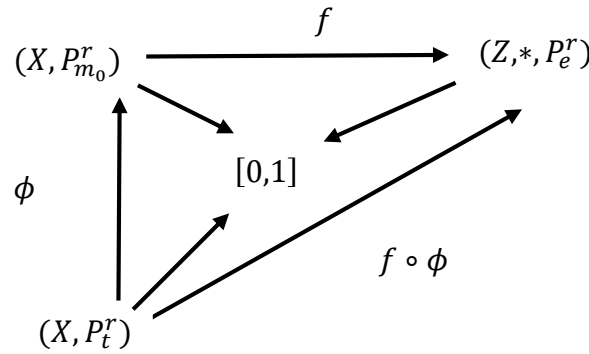
$$H(X) = \bigvee_{P_m^r \in I^X} H(X)_{P_m^r}, m \in X$$

ve $\psi: H(X) \rightarrow I^X$ fuzzy fonksiyonu her $[h]_{P_m^r} \in H(X)$, $P_m^r \in I^X$ için $\psi([h]_{P_m^r}) = P_m^r$ ise, bu durumda $H(X)$ üzerinde bir fuzzy topoloji vardır, öyle ki ψ bu topolojiye göre fuzzy lokal homeomorfizmdir. Böylece (H, ψ) çifti I^X üzerinde fuzzy demettir (Gümüş ve Yıldız, 2007).

Teorem 4.1.1 de her bir $m \in X$ için $[(X, P_m^r), (Z, *, P_e^r)] = \psi^{-1}(P_m^r)$ fuzzy grubuna fuzzy demetin I^X üzerindeki sapı denir ve $H(X)_{P_m^r}$ ile gösterilir.

(X, τ) fuzzy topolojik uzay ve $m \in X$, keyfi sabit bir nokta $W = W(P_m^r)$, P_m^r nin I^X deki bir açık Q-komşuluğu olmak üzere $s: W \rightarrow H(X)$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$m_0 \in X$ için $P_{m_0}^r \in I^X \Rightarrow H(X)$ de bir $H(X)_{P_{m_0}^r}$ grubu vardır. Bu gruba ait $[f]_{P_{m_0}^r} \in H(X)_{P_{m_0}^r}$ homotopi sınıfını alalım. Ayrıca P_t^r, W de farklı bir fuzzynoktası olmak üzere (X, P_t^r) ile $(X, P_{m_0}^r)$ aynı fuzzy homotopi tipinden olduklarından; $(X, P_t^r) \xrightarrow{\phi^*} (X, P_{m_0}^r)$ fuzzy homotopi eşdeğerlik dönüşümü vardır.



Şekil 4.1. f ve ϕ fuzzy fonksiyonlarının bileşkesi

f ve ϕ fuzzy fonksiyonları fuzzy sürekli olduklarından $f \circ \phi$ fonksiyonu da fuzzy sürekli olup üstelik taban noktayı da korur, yani;

$$(f \circ \phi)(P_t^r) = f(\phi(P_t^r)) = f(P_{m_0}^r) = P_{f(m_0)}^r = P_e^r$$

dır. $f \circ \phi = h$ dönüşümünün homotopi sınıfı $[h]_{P_t^r} \in H_t$ dir. O halde $s(P_t^r) = [h]_{P_t^r}$ olarak

tanımlanabilir. Buradan

$$s: W \rightarrow H(X), \forall P_t^r \in W \text{ için } s \rightarrow s(P_t^r) = [h]_{P_t^r}$$

olarak tanımlayabileceğimiz s fonksiyonu iyi tanımlı olur. Böylece $\forall P_t^r \in W$ için

$$(\psi \circ s)(P_t^r) = \psi(s(P_t^r)) = \psi([h]_{P_t^r}) = P_t^r$$

olduğundan $\psi \circ s = I_W$ dır. Burada W den $H(X)$ e yukarıdaki gibi tanımlanan s fuzzy fonksiyonlarının kümesini $\Gamma(W, H)$ olarak göstereceğiz. s nin tanımından hareketle $s(W) = \bigcup_{P_t^r \in W} [h]_{P_t^r}$ şeklinde yazabilir. Bu durumda, $s(W)$ leri açık olarak kabul eden ve

$$\beta = \{ s(W) : W = W(P_m^r) \leq I^X, m \in X, s \in \Gamma(W, H) \}$$

olarak tanımlanan ailenin $H(X)$ üzerinde fuzzy topoloji tabanı şartlarını sağladığı kolaylıkla gösterilebilir. Böylece β nın $H(X)$ üzerinde oluşturduğu fuzzy topolojisiyle birlikte $H(X)$ bir fuzzy topolojik uzaydır.

4.2. Fuzzy Topolojik Genelleştirilmiş Grubun Oluşturduğu Fuzzy Grupların Demeti

$Z \neq \emptyset$ ve $(Z, *)$ bir genelleştirilmiş grup olsun. $A, B \in I^Z$ ve $C, D \subseteq Z$ olmak üzere $A, B \in I^Z, A^{-1} \in I^Z, C * D \subseteq Z$ ve $C^{-1} \subseteq Z$ kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$(A.B)(z) = \text{Sup}\{\min\{A(z_1), A(z_2)\}, z_1 * z_2 = z\},$$

$$A^{-1}(z) = A(z^{-1}), C * D = \{c * d: c \in C, d \in D\}, C^{-1} = \{c^{-1}: c \in C\}.$$

4.2.1.Tanım

$Z \neq \emptyset$ bir küme olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa $(Z, *, \tau)$ üçlüsüne fuzzy topolojik genelleştirilmiş grup denir.

(i) $(Z, *)$ bir genelleştirilmiş grup

- (ii) (Z, τ) fuzzy topolojik uzay
- (iii) $\forall x, y \in Z$ ve P_{x*y}^r fuzzy noktasının fuzzy açık W , Q -komşuluğu için P_x^r nin U ve P_y^r nin V Q -komşuluğu $U.V \leq W$ olacak biçimde mevcut
- (iv) $\forall x \in X$ ve $P_{x^{-1}}^r$ fuzzy noktasının V fuzzy açık Q -komşuluğu için P_x^r nin U Q -komşuluğu $U^{-1} \leq V'$ olacak biçimde mevcut

Şimdi fuzzy topolojik uzaylardaki fuzzy demet tanımından hareketle fuzzy demet yapısını fuzzy ön-demeti tanımlayarak, fuzzy topolojik genelleştirilmiş gruplar vasıtasıyla oluşturacağız.

4.2.2. Tanım

(H_1, ψ_1) ve (H_2, ψ_2) , I^X üzerinde iki fuzzy çift olsun.

- i) Eğer $\psi_2 \circ \psi = \psi_1$ yani $\psi(H_1(X)_{P_m^r}) < H_2(X)_{P_m^r}$ ise $\psi: H_1(X) \rightarrow H_2(X)$ dönüşümü sapları koruyor denir.
- ii) Sapları koruyan $\psi: H_1(X) \rightarrow H_2(X)$ fuzzy sürekli dönüşümüne fuzzy demet morfizmi denir.
- iii) Sapları koruyan $\psi: H_1(X) \rightarrow H_2(X)$ fuzzy homeomorfizmine fuzzy demet izomorfizmi denir.

4.2.3. Tanım

Her $W \in I^X$ fuzzy açık kümesi için bir M_W fuzzy kümesi ve her bir $V < W$, (V, W) fuzzy açık küme çifti için

i) $\gamma_W^W = I_{M_W}$

ii) $U < V < W$ ise $\gamma_U^V \circ \gamma_V^W = \gamma_U^W$

koşullarını sağlayan $\gamma_V^W: M_W \rightarrow M_V$ fuzzy dönüşümü verilsin. Bu durumda $\{M_W, \gamma_V^W\}$ sistemine fuzzy ön-demet denir.

Her bir H fuzzy demetine doğal olarak bir fuzzy ön-demet karşılık gelir. Eğer V, W, I^X in fuzzy açık alt kümeleri ise bu durumda $\Gamma(W, H)$ kümesi ve $s \in M_W$ için $\gamma_V^W(s) = s|_V$ dir.

Açıkça $\{\Gamma(W, H), \gamma_V^W\}$ kümesi bir fuzzy ön-demettir. Bu fuzzy demete H nin kanonik fuzzy ön-demeti denir.

4.2.1. Teorem

Herbir fuzzy ön-demete bir fuzzy demet karşılık gelir.

İspat

$\{M_W, \gamma_V^W\}$ fuzzy ön-demet ve $P_m^r, m \in X$ fuzzy sabit noktası verilsin. $\{(W, s): W, P_m^r$ nin açık Q – komşuluğu, $s \in M_W\}$ ailesi üzerinde

$(W_1, s_1) \sim^{P_m^r} (W_2, s_2) \Leftrightarrow P_m^r$ nin açık bir Q-komşuluğu $W < W_1 \wedge W_2$ ve $\gamma_W^{W_1}(s_1) = \gamma_W^{W_2}(s_2)$ olacak biçimde mevcut

denklik bağıntısını tanımlayalım ve (W, s) çiftlerinin denklik sınıflarını $(W, s)_{P_m^r}$ ile , sınıflarının tamamını ise $H(X)_{P_m^r}$ ile gösterelim. Varsayalım ki $H(X) = \bigvee_{P_m^r \in I^X} H(X)_{P_m^r}$ ve $\psi: H(X) \rightarrow I^X$ kanonik projeksiyon olsun. Bu durumda $H(X)$ üzerinde ψ yi fuzzy lokal homeomorfizm yapan topolojiyi aşağıdaki biçimde elde edebiliriz.

$W \in I^X$ fuzzy açık küme ve $s \in M_W$ olsun. Herbir s elemanına, $\gamma s: W \rightarrow H(X)$, $\gamma s(P_m^r) = (W, s)_{P_m^r}, P_m^r \in W$ fonksiyonunu karşılık gelsin. Bu durumda

$$B := \{\gamma s(W): W \in I^X \text{ fuzzy açık küme}, s \in M_W\} \cup H(X)$$

$H(X)$ üzerinde bir topoloji tabanı olur. Gerçekten, $W_1, W_2 \in I^X$ fuzzy açık kümeler, $s_1 \in M_{W_1}, s_2 \in M_{W_2}$ olsun ve

$$W := \{P_m^r \in W_1 \wedge W_2: \gamma s_1(P_m^r) = \gamma s_2(P_m^r)\}$$

varsayalım.

1. W fuzzy açık kümedir. Gerçekten $P_{m_0}^r \in W \Rightarrow (W_1, s_1)_{P_{m_0}^r}$ dir. Bu durumda $\exists V(P_{m_0}^r) < W < W_1 \wedge W_2 \ni \gamma_V^{W_1}(s_1) = \gamma_V^{W_2}(s_2) \Rightarrow \forall P_m^r \in V$ için $(W_1, s_1)_{P_m^r} = (W_2, s_2)_{P_m^r}$ dir. Buradan $\gamma s_1(P_m^r) = \gamma s_2(P_m^r)$ elde edilir. Böylece $V < W$ ve $P_{m_0}^r, W$ nin bir iç fuzzy noktasıdır.

2. $s = \gamma_W^{W_1}(s_1) \in M_W$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \gamma s_1(W_1) \wedge \gamma s_2(W_2) = \gamma s(W) &\Rightarrow \exists \sigma \in H(X) \ni \sigma \in \gamma s_1(W_1) \wedge \gamma s_2(W_2) \\ &\Leftrightarrow \exists P_m^r \in W_1 \wedge W_2 \ni \gamma s_1(P_m^r) = \sigma = \gamma s_2(P_m^r) \end{aligned}$$

elde edilir. Yani

$$\exists P_m^r \in W \ni \gamma s_1(P_m^r) = \sigma \Leftrightarrow \sigma = (W_1, s_1)_{P_m^r} = (W, s)_{P_m^r} \in \gamma s(W)$$

olur. Dolayısıyla

$$\gamma s_1(W_1), \gamma s_2(W_2) \in B \Rightarrow \gamma s_1(W_1) \wedge \gamma s_2(W_2) \in B$$

dir. Buradan $B, H(X)$ üzerinde bir fuzzy topoloji tabanı olup fuzzy açık kümeler B ye ait elemanların birleşimleridir.

Şimdi $\psi: H(X) \rightarrow I^X$ nin fuzzy lokal homeomorfizm olduğunu gösterelim.

1. $\sigma \in H(X)$ ve $P_m^r = \psi(\sigma)$ olsun. Bu durumda $P_m^r \in W$ olmak üzere bir $W \in I^X$ fuzzy açık kümesi vardır ve $\exists s \in M_W \ni \sigma = (W, s)_{P_m^r} = \gamma s(P_m^r)$. Varsayalım ki $U = \gamma s(W)$ olsun. Bu durumda $U, H(X)$ de σ nin açık Q-komşuluğudur ve $\psi \circ s = 1_w, \gamma s \circ (\psi|_U) = 1_U$ dir. Dolayısıyla $\psi|_U: U \rightarrow W$ bijectiftir, buradan $\gamma s = (\psi|_U)^{-1}$ elde edilir.

2. Herbir $U' < U$ fuzzy açık kümesi, $U' = \bigcup_{i \in I} \gamma s_i(W_i)$ biçimindedir. Burada herbir $W_i < W$, W de fuzzy açık kümedir ve $s_i \in M_{W_i}$ dir. Üstelik $\psi(U') = \bigcup_{i \in I} W_i$, W de fuzzy açıktır. Bu durumda görülür ki $\psi|_U$ fuzzy açık kümeleri fuzzy açık kümelere dönüştürür. Dolayısıyla $(\psi|_U)^{-1} = \gamma s$ fuzzy süreklidir.

3. $W' < W$ fuzzy açık küme ise her $P_m^r \in W'$ için $(W, s) \sim^{P_m^r} (W', \gamma_{W'}^W(s))$ dir. Dolayısıyla $s|_{W'} = \gamma_{W'}^W(s)$ olduğundan $\gamma s|_{W'} = \gamma(\gamma_{W'}^W(s))(W')$ elde edilir. Buradan $\gamma s(W') = \gamma(\gamma_{W'}^W(s))(W')$ dir. Bu küme ise fuzzy açık kümedir. Dolayısıyla γs de fuzzy açık kümeleri fuzzy açık kümelere dönüştürür. Yani $\psi|_U$ fuzzy süreklidir.

Buradan $\psi: H(X) \rightarrow I^X$ nin fuzzy lokal homeomorfizm olduğu görülür.

4.2.1. Sonuç

Herbir $\{M_W, \gamma_V^W\}$ fuzzy ön-demeti I^X üzerinde yukarıdaki anlamda H fuzzy demeti tanımlar. Her $s \in M_W$ için $\gamma s \in \Gamma(W, H)$ kesiti karşılık gelir. Bu durumda $W(P_m^r) \in I^X, m \in X$ açık Q-komşuluğu ve bir $s \in M_W$ vardır öyleki $\sigma = \gamma s(P_m^r)$ biçimindedir.

4.2.2. Teorem

H, I^X üzerinde bir fuzzy demet ve $\{\Gamma(W, H), \gamma_V^W\}$ kanonik fuzzy ön-demeti olsun. Bu durumda kanonik fuzzy ön-demetin tanımladığı demet H ye doğal izomorfür.

İspat

Kanonik fuzzy ön-demetin tanımladığı fuzzy demeti (H', ψ') ile gösterelim ve $\theta: H' \rightarrow H, (W, s)_{P_m^r} \rightarrow s(P_m^r)$ dönüşümünü tanımlayalım. Bu durumda

1. $(W_1, s_1) \sim^{P_m^r} (W_2, s_2) \Leftrightarrow s_1(P_m^r) = s_2(P_m^r)$ denklik bağıntısı θ dönüşümünü birebir yapar ve sapları korur. θ dönüşümü aynı zamanda örtendir. Gerçekten $\sigma \in H(X)_{P_m^r}$ ise $\exists W(P_m^r)$ Q-komşuluğu ve bir $s \in \Gamma(W, H)$ vardır $\exists s(P_m^r) = \sigma$ dir. Buradan $\gamma s(P_m^r) = (W, s)_{P_m^r} \in H'(X)_{P_m^r}$ ve $\theta(\gamma s(P_m^r)) = \sigma$ olur.

2. θ dönüşümünü $\sigma' = \gamma s(P_m^r)$ de fuzzy süreklidir. Gerçekten, $\exists W(P_m^r) \in I^X, m \in X$ fuzzy açık kümesi ve bir $s \in \Gamma(W, S)$ vardır $\exists \sigma' = (W, s)_{P_m^r} = \gamma s(P_m^r)$ dir. Dolayısıyla $\gamma s \in \Gamma(W, H'), \sigma' \in \gamma s(W)$ ve $\theta \circ \gamma s = s \in \Gamma(W, H)$ dir. Buradan θ, σ' de fuzzy sürekli olur.

3. θ^{-1} fuzzy süreklidir (θ fuzzy açıktır). Gerçekten $W(P_m^r) \in I^X, m \in X$ fuzzy açık küme ve $s \in \Gamma(W, H)$ ise $\theta \circ \gamma s \in \Gamma(W, H) \Rightarrow \theta(\gamma s)(W) = (\theta \circ s)(W)$, H da fuzzy açık kümedir. $s(W), H$ de fuzzy açık olduğundan teoremin ispatı tamamlanır.

$(H_i, \psi_i), i = 1, 2, \dots, k, I^X$ üzerinde fuzzy demetler olmak üzere ve $W \in I^X$ fuzzy açık kümesi için $M_W := \Gamma(W_1, H_1) \times \dots \times \Gamma(W_k, H_k)$ ve $(s_1, s_2, \dots, s_k) \in M_W$ için $\gamma_V^W(s) := (s_1|_V, s_2|_V, \dots, s_k|_V)$ olsun. Bu durumda $\{X, M_W, \gamma_V^W\}$ bir fuzzy ön-demettir. Bu fuzzy ön-demetin oluşturduğu Whitney toplamının fuzzy topolojik uzaylardaki karşılığı olan fuzzy demeti $H^* = H_1 \oplus \dots \oplus H_k$ ile gösterelim.

4.2.3. Teorem

$(H_i, \psi_i), i = 1, 2, \dots, k, I^X$ üzerinde fuzzy demetler ve $H^*(X) = H_1(X) \oplus \dots \oplus H_k(X)$ olsun. Bu durumda her $P_m^r \in I^X$ için $(W, (s_1, s_2, \dots, s_k))_{P_m^r} \rightarrow (s_1(P_m^r), \dots, s_k(P_m^r))$ biçiminde tanımlı $\rho: H^*(X)_{P_m^r} \rightarrow H_1(X)_{P_m^r} \times \dots \times H_k(X)_{P_m^r}$ fuzzy birebir ve örten dönüşümü vardır.

İspat

$P_m^r \in W_1 \wedge W_2$ ve $s_\lambda = (s_1^\lambda, s_2^\lambda, \dots, s_k^\lambda), \lambda = 1, 2 \in \Gamma(V, H^*)$ olsun. Bu durumda

1. $(W_1, s_1) \sim^{P_m^r} (W_2, s_2)$ dir ancak ve ancak P_m^r fuzzy noktasının $(s_1^1|_W, s_2^1|_W, \dots, s_k^1|_W) = (s_1^2|_W, s_2^2|_W, \dots, s_k^2|_W)$ olacak biçimde $W(P_m^r) \leq W_1 \wedge W_2$ Q-komşuluğudur. Bu ise $i = 1, \dots, k, s_i^1|_W(P_m^r) = s_i^2|_W(P_m^r)$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla

$$(W, (s_1, s_2, \dots, s_k))_{P_m^r} \rightarrow (s_1(P_m^r), s_2(P_m^r), \dots, s_k(P_m^r))$$

dönüşümü birebirdir.

2. $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k) \in (H_1)_{P_m^r} \times (H_2)_{P_m^r} \times \dots \times (H_k)_{P_m^r}$ ve $s_i \in \Gamma(V_i, H_i)$ verilsin. Bu durumda $\sigma_i = s_i^*(P_m^r)$ ise $W = \bigwedge_{i=1}^k W_i P_m^r$ nin bir Q-komşuluğudur ve $s_i^*|_W = s_i \in \Gamma(W_i, H_i)$ dir. Buradan $s = (s_1, s_2, \dots, s_k) \in M_V$ ve $\gamma s: \gamma s(P_m^r) = (W, s)_{P_m^r} \rightarrow s(P_m^r) = \sigma$, H^* fuzzy demetinin bir kesitidir.

Üstelik $W \in I^X$ fuzzy açık küme olduğundan $s(W), H^*$ da fuzzy açık kümedir. Ayrıca $s_1, s_2 \in \Gamma(W, H^*)$ ve $s_1(P_m^r) = s_2(P_m^r)$, $m \in X$, ise W de $s_1 = s_2$ olur. Buradan yukarıda tanımlanan dönüşüm birebir ve örten olur. Dolayısıyla

$$(H_1(X) \oplus H_2(X) \oplus \dots \oplus H_k(X))_{P_m^r} = H_1(X)_{P_m^r} \times \dots \times H_k(X)_{P_m^r}$$

birebir bir eşlemedir.

4.2.4. Teorem

(H_i, ψ_i) , $i = 1, 2, \dots, k, I^X$ üzerinde fuzzy demetler olsun. Bu durumda

$$P_i: H_1(X) \oplus \dots \oplus H_k(X) \rightarrow H_i(X), P_i((\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)) = \sigma_i$$

doğal projeksiyonu fuzzy demet morfizmidir.

İspat

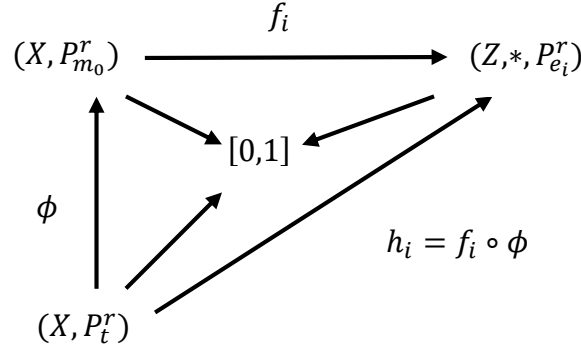
P_i fonksiyonu tanımından dolayı sapları koruyan bir dönüşümdür. Gerçekten $\sigma \in (H_1(X) \oplus H_2(X) \oplus \dots \oplus H_k(X))_{P_m^r} = H_1(X)_{P_m^r} \times \dots \times H_k(X)_{P_m^r}$ olduğunda $s = (s_1, s_2, \dots, s_k)$ için $s_i(P_m^r) = P_i(\sigma)$ veya $s(P_m^r) = \sigma$ olacak şekilde bir $s_i \in \Gamma(W_i, H_i)$ vardır. Buradan $P_i \circ \gamma s = s_i$ fuzzy süreklidir. Böylece P_i fuzzy sürekli olur. Dolayısıyla P_i doğal projeksiyonu fuzzy demet morfizmidir.

Şimdi P_{i_0} projeksiyon fonksiyonu olmak üzere i_0 sabiti için

$$\psi: H^*(X) \rightarrow I^X, \psi(\sigma) = (\psi_{i_0} \circ P_{i_0})(\sigma)$$

dönüşümünü tanımlayalım. Bu durumda $P_{m_0}^r \in I^X$ sabit fuzzy nokta ise $H_i(X)$ de $i = 1, \dots, k$ için $[(X, P_{m_0}^r), (Z, *, P_{e_i}^r)]$ gruplar vardır. $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k) = ([f_1]_{P_{m_0}^r}, [f_2]_{P_{m_0}^r}, \dots, [f_k]_{P_{m_0}^r})$, $\prod_{i=1, \dots, k} [(X, P_{m_0}^r), (Z, *, P_{e_i}^r)]$ grubunda bir fuzzy homotopi sınıfı olsun. Bu durumda P_t^r , V de farklı bir fuzzy nokta ise, $(X, P_{m_0}^r)$

ve (X, P_t^r) aynı homotopi tipine sahiptir. Buradan $(X, P_{m_0}^r)$ den (X, P_t^r) ye bir $\phi : (X, P_{m_0}^r) \rightarrow (X, P_t^r)$ homotopi eşdeğerlik dönüşümü vardır.



Şekil 4.2. f_i ve ϕ fuzzy fonksiyonlarının bileşkesi

Böylece Şekil 4.2 deki diyagramda görülen $h_i = f_i \circ \phi : (X, P_t^r) \rightarrow (Z, *, P_{e_i}^r)$ fuzzy fonksiyonu $i = 1, \dots, k$ için fuzzy süreklidir ve taban noktayı korur. $i = 1, \dots, k$ için $[h_i]_{P_t^r} \in [(X, P_t^r), (Z, *, P_{e_i}^r)]$, $f_i \circ \phi = h_i$ nin bir homotopi sınıfı olsun.

Eğer P_t^r, W de keyfi fuzzy nokta olmak üzere her $i = 1, \dots, k$ için $s(P_t^r) = (s_1, s_2, \dots, s_k)(P_t^r) = (s_1(P_t^r), s_2(P_t^r), \dots, s_k(P_t^r))$ olarak tanımlayalım. Bu şekilde elde edilen s dönüşümü iyi tanımlıdır ve

1. Her $P_t^r \in W$ için

$$\begin{aligned}
 (\psi \circ s)(P_t^r) &= (\psi_i \circ P_i \circ s)(P_t^r) \\
 &= \psi_i(P_i(s_1(P_t^r), s_2(P_t^r), \dots, s_k(P_t^r))) \\
 &= \psi_i(s_i(P_t^r)) \\
 &= \psi_i([h_i]_{P_t^r}) \\
 &= P_t^r
 \end{aligned}$$

dir. Buradan $\psi \circ s = 1_V$ olur.

2. $P_{m_0}^r, V$ de keyfi sabit bir fuzzy nokta ise $V = V(P_{m_0}^r)$ için

$$\begin{aligned} s(P_{m_0}^r) &= (s_1, \dots, s_k)(P_{m_0}^r) = (s_1(P_{m_0}^r), \dots, s_k(P_{m_0}^r)) \\ &= ([f_1 \circ I_x]_{P_{m_0}^r}, \dots, [f_k \circ I_x]_{P_{m_0}^r}) = ([f_1]_{P_{m_0}^r}, \dots, [f_k]_{P_{m_0}^r}) \end{aligned}$$

olur.

Böylece $s(W) = \prod_{i=1, \dots, k} s_i(W) = \prod_{i=1, \dots, k} (\bigvee_{P_t^r \in W} [h_i]_{P_t^r})$ biçiminde yazılabilir. $s(W)$ yi açık küme olarak tanımlarsak,

$$\mathcal{B} = \left\{ s(W) := \prod_{i=1, \dots, k} s_i(W) : W = W(P_m^r) \leq I^X, m \in X, s_i \in \Gamma(W, H_i) \right\}$$

ailesinin $H^*(X)$ için bir fuzzy topoloji tabanı olduğu kolayca gösterilebilir. Böylece tabanın ürettiği topoloji ile $H^*(X)$ bir fuzzy topolojik uzay olur.

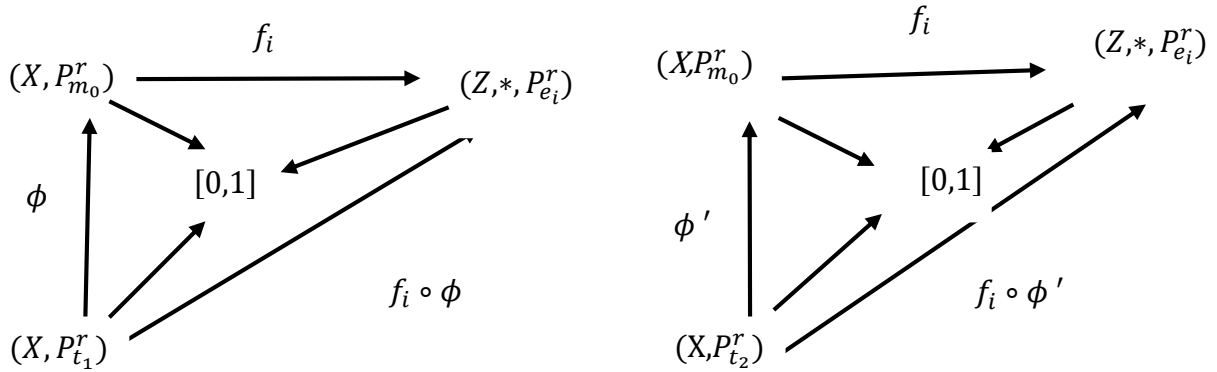
Şimdi $\psi: H^*(X) \rightarrow I^X$ dönüşümünün bir fuzzy lokal homeomorfizm olduğunu gösterelim. Eğer $\sigma = [h]_{P_t^r} \in H^*(X)$ ve $P_t^r \in X$ ise $\psi(\sigma) = \psi([h]_{P_t^r}) = P_t^r$ olur. Böylece $s(P_t^r) = \sigma$, $P_t^r \in W$ olacak biçimde $s: W \rightarrow H^*(X)$ dönüşümü vardır. Şimdi bir W açık Q-komşuluğu için $U(\sigma) = s(W)$ ve $\psi|_U = \psi^*$ olduğunu varsayalım.

1. $\psi^* = \psi|_U: U \rightarrow W$ dönüşümü birebirdir. Çünkü $\sigma_1, \sigma_2 \in s(W)$ için

$$\begin{aligned} \sigma_1 = s(P_{t_1}^r) &= (s_1, s_2, \dots, s_k)(P_{t_1}^r) = (s_1(P_{t_1}^r), s_2(P_{t_1}^r), \dots, s_k(P_{t_1}^r)) \\ &= ([f_1 \circ \phi]_{P_{t_1}^r}, [f_2 \circ \phi]_{P_{t_1}^r}, \dots, [f_k \circ \phi]_{P_{t_1}^r}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 = s(P_{t_2}^r) &= (s_1, s_2, \dots, s_k)(P_{t_2}^r) = (s_1(P_{t_2}^r), s_2(P_{t_2}^r), \dots, s_k(P_{t_2}^r)) \\ &= ([f_1 \circ \phi']_{P_{t_2}^r}, [f_2 \circ \phi']_{P_{t_2}^r}, \dots, [f_k \circ \phi']_{P_{t_2}^r}) \end{aligned}$$

olacak biçimde W de $P_{t_1}^r, P_{t_2}^r$ vardır. Buradan aşağıdaki diyagramları elde ederiz.



Şekil 4.3. $f_i \circ \phi$ ve $f_i \circ \phi'$ fuzzy fonksiyonlarının bileşkesi

Gerçekten $\psi^*(\sigma_1) = \psi^*(\sigma_2)$ ise

$$\begin{aligned}
 \psi^*(s(P_{t_1}^r)) &= \psi^*(s(P_{t_2}^r)) \\
 \Rightarrow \psi^*\left([f_1 \circ \phi]_{P_{t_1}^r}, [f_2 \circ \phi]_{P_{t_1}^r}, \dots, [f_k \circ \phi]_{P_{t_1}^r}\right) \\
 &= \psi^*([f_1 \circ \phi']_{P_{t_2}^r}, [f_2 \circ \phi']_{P_{t_2}^r}, \dots, [f_k \circ \phi']_{P_{t_2}^r}) \\
 \Rightarrow P_{t_1}^r &= P_{t_2}^r.
 \end{aligned}$$

olur. Böylece $(X, P_{t_1}^r)$ ve $(X, P_{t_2}^r)$ aynı homotopi tipinde olduğundan her $i = 1, \dots, k$ için

$$\phi \sim \phi' \Rightarrow f_i \circ \phi \sim f_i \circ \phi' \Rightarrow [f_i \circ \phi]_{P_{t_1}^r} = [f_i \circ \phi']_{P_{t_2}^r} \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2$$

dir.

2. $\psi^* = \psi|_U: U \rightarrow W$ dönüşümü fuzzy süreklidir. Gerçekten $P_t^r \in W$ ve P_t^r nin bir Q-komşuluğu $W = W(P_t^r) \leq V$ ise, $s(V) \leq U = s(W)$, $[h]_{P_t^r}$ nin bir Q-komşuluğudur ve $\psi^*(s(W)) = W < V$ dir. Dolayısıyla ψ^* fuzzy süreklidir.

3. $\psi^{*-1} = (\psi|_U)^{-1} = s: W \rightarrow U = s(W)$ fuzzy süreklidir. Gerçekten P_t^r, W de keyfi bir eleman $s(P_t^r) = [h]_{P_t^r} \in U$ için $U' = U'([h]_{P_t^r}) < U$, P_t^r nin Q -komşuluğu ise P_t^r nin W de bir Q -komşuluğudur ve $s(\psi|_U)(U') = U' \leq U$ olur. Dolayısıyla ψ^{*-1} fuzzy süreklidir.

Buradan $\psi: H^*(X) \rightarrow I^X$ dönüşümünün bir lokal fuzzy homeomorfizm olup aşağıdaki teorem verilebilir.

4.2.5. Teorem

$P_{e_1}^r, P_{e_2}^r, \dots, P_{e_k}^r$ birim elemanları ile $(Z, *, P_{e_i}^r)_{i=1, \dots, k}$ sonlu noktalı bir fuzzy topolojik genelleştirilmiş grup ve (X, P_m^r) fuzzy topolojik uzay olsun. Eğer

$$H^*(X) = H_1(X) \oplus H_2(X) \oplus \dots \oplus H_k(X) \text{ ve } \psi: H^*(X) \rightarrow I^X$$

fuzzy dönüşümü her $m \in X, \sigma \in H^*(X)$ ve $i = 1, \dots, k$ için $\psi(\sigma) = (\psi_i \circ P_i)([h_1]_{P_m^r}, [h_2]_{P_m^r}, \dots, [h_k]_{P_m^r}) = P_m^r$ ise H^* üzerinde ψ bu topolojiye göre fuzzy lokal homeomorfizm olacak biçimde bir fuzzy topoloji vardır. Böylece (H^*, ψ) çifti I^X üzerinde bir fuzzy demettir.

4.2.4. Tanım

Teorem 4.2.5 ile elde edilen (H^*, ψ) fuzzy çiftine Z fuzzy topolojik genelleştirilmiş grubunun (X, P_m^r) noktalı fuzzy topolojik uzaylar üzerinde oluşturduğu fuzzy grupların fuzzy demeti denir.

4.2.5. Tanım

Her bir $m \in X, P_m^r \in I^X$ için $\prod_{i=1, \dots, k} [(X, P_m^r), (Z, *, P_{e_i}^r)] = \psi^{-1}(x)$ fuzzy grubuna (H^*, ψ) fuzzy demetinin I^X üzerindeki sapı denir ve $H^*(X)_{P_m^r}$ ile gösterilir.

4.2.6. Tanım

$P_m^r \in I^X$ sabit bir fuzzy nokta ve V, P_m^r in açık bir Q -komşuluğu ise, H^* topolojisinin

inşasında tanımlanan, $s: W \rightarrow H^*(X)$ dönüşümüne $H^*(X)$ in W üzerindeki kesiti denir.

$H^*(X)$ in W üzerindeki bütün kesitlerinin kümesini $\Gamma(W, H^*)$ ile gösterelim. Her $i = 1, \dots, k$ için $(s_1^i, s_2^i)(P_t^r) = s_1^i(P_t^r)s_2^i(P_t^r)$ olduğu göz önüne alınırsa aşağıdaki teorem verilebilir.

4.2.6. Teorem

$\Gamma(W, H^*)$, $s_1, s_2 \in \Gamma(W, H^*)$ ve $P_t^r \in W$ olmak üzere

$$(s_1 s_2)(P_t^r) = s_1(P_t^r) s_2(P_t^r)$$

noktasal çarpımı ile bir fuzzy gruptur.

İspat

Tanımlanan noktasal çarpım işlemi iyi tanımlı ve kapalıdır. Açıkça çarpım işlemi birleşimli ve $\prod_{i \in I} \bigvee_{P_m^r \in I^X} [(X, P_m^r), (Z, *, P_{e_i}^r)]$ birim elemanlarından elde edilen $I: W \rightarrow H^*(X)$ dönüşümü birim dönüşümdür. Diğer taraftan keyfi bir $s \in \Gamma(W, H^*)$ elemanının tersi yani $s^{-1} \in \Gamma(W, H^*)$, $(Z, *, P_{e_i}^r)$ fuzzy topolojik genelleştirilmiş grubunun tersi ile elde edilir.

O halde $\Gamma(W, H^*)$ bir fuzzy gruptur.

Bu nedenle Teorem 4.2.6 dan her $\sigma_1, \sigma_2 \in H^*(X)$ için

$$(.): H^*(X) \times H^*(X) \rightarrow H^*(X), (\sigma_1, \sigma_2) \rightarrow \sigma_1 \cdot \sigma_2$$

işlemi fuzzy süreklidir. O halde (H^*, ψ) çifti cebirsel bir fuzzy demettir.

5. FUZZY NORMLU UZAYLARDA TRİGONOMETRİK t -YAKLAŞIM

Lineer uzayda fuzzy norm fikri ilk olarak Katsaras (1984) tarafından fuzzy topolojik vektör uzayları incelenirken tanıtılmıştır. Katharas'ın (1984) tanımından sonra, fuzzy norm kavramı farklı şekillerde tanıtılmıştır. Örneğin, Felbin (1992) lineer uzayın her bir elemanına bir fuzzy sayı atayarak lineeruzay üzerinde fuzzy norm fikrini ortaya koymuştur. Bu fuzzy norm ile ilişkili olan fuzzy metrik Kaleva ve Seikkala (1984) tipindedir. Daha sonra Cheng ve Mordeson (1994) bir lineer uzayda fuzzy norm fikrini, ilgili fuzzy metriği Kramosil ve Michalek (1975) tipinde olacak şekilde başka bir tanımla vermiştir. Bag ve Samanta (2003), Cheng ve Mordeson'dan sonra yine fuzzy metriği Kramosil ve Michalek tipi olan bir fuzzy norm tanımlamıştır. Bu tanımın yeni özelliği, bu tür fuzzy normlar için önemli olan ayrışma teoreminin, bu yeni normların ailesindeki geçerliliğidir. Bag ve Samantabu özelliği kullanarak sonlu boyutlu fuzzy normlu lineer uzayların bazı özelliklerini çalışabilmişlerdir. Bag ve Samanta (2005) lineer bir operatörün fuzzy normlu bir uzaydan başka bir fuzzy normlu lineer uzaya sınırlılık kavramını ortaya koymuş ve iki tip (güçlü ve zayıf) fuzzy sınırlı operatör tanımlamıştır. Kider ve Kadhum (2017) ise fuzzy sınırlı lineer operatörün fuzzy normunu tanımlamak için başka fuzzy sınırlı operatör tipi tanımlamıştır. Bag ve Samantatarafından verilen kavramlar fuzzy fonksiyonel analizin geliştirilmesinde kullanılmış ve uygulamaları yapılmış ve farklı yazarlar tarafından çok sayıda makale yayınlanmıştır (Bag ve Samanta, 2005, 2006, 2007, 2013, 2015; Golet, 2010; Hasanhaki, Nazari ve Saheli, 2010). Yılmaz (2010) güçlü ve zayıf fuzzy yaklaşımın özelliklerini ortaya koymaktadır. Daha sonra Lee (2016) sınırlı yaklaşım özelliğini tanıtarak ve fuzzy normlu alanlarda yaklaşım özelliklerinin karakterizasyonunu sağlamıştır. Bu tez için fuzzy normlu uzayda ihtiyaç duyulan en iyi t –yaklaşım kavramı Vaezpourve Karimi (2008) ve fuzzy normlu uzaylarda zayıf ve güçlü Schauder tabanı kavramı Yılmaz (2010) tarafından tanıtılmıştır.

Bu tez için bir diğer önemli kavram ise yaklaşım teorisidir. Yaklaşım teorisi; nitelikleri daha az bilinen (çalışılması zor olan) bir fonksiyona, nitelikleri daha iyi bilinen (çalışılması kolay olan, örneğin polinomlar gibi) ve daha basit yapıda olan fonksiyonlarla yaklaşım sağlanabilir mi ve bu yaklaşım en iyi nasıl elde edilir sorularına cevap arayan çalışmaları kapsamaktadır. Weierstrass, 1885 de her periyodik fonksiyona, trigonometrik polinomlar tarafından düzgün şekilde yaklaşabileceğine dair önemli bir teoremi kanıtlamıştır. Dolayısıyla önemli yaklaşım

elemanlarından biri trigonometrik polinomlardır. (De Vore ve Lorentz, 1993). $f \in X$ 'e verilen bir alt uzaydan fonksiyonlar yardımı ile yapılan yaklaşımınderecesini tahmin etmek, yaklaşım teorisi için klasik bir problemdir. $f \in L^p(\mathbb{T})$ için tipik bir yaklaşım alanı, tüm trigonometrik polinomların n 'den küçük veya eşit olan elemanlardan oluşan küme $\tau_n := \text{span} \{e^{ikx} : |k| \leq n, k \in \mathbb{Z}\}$ biçimindedir. Burada $\{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$ kümesine Fourier tabanı denir. Klasik Fourier serileri ile yaklaşım hata tahminleri çeşitli yazarlar tarafından incelenmiştir. Bu çalışmaların sonuçları referanslarda bulunabilir (De Vore ve Lorentz, 1993; Timan, 1963; Zygmund, 1959; Holland, 1981). Yaklaşım teorisinde Fourier serileri oldukça önemlidir. Çünkü Fourier serileri bir periyodik fonksiyonu basit dalgalı fonksiyonların (sinüs ve kosinüs) toplamına çevirir, bir başka deyişle kompleks üstel fonksiyona e^{ikx} li forma çevirir.

5.1. Fuzzy Normlu Uzaylar ve Yaklaşım Teorisi

Bu bölümde tezin beşinci bölümünü oluşturan fuzzy normlu uzaylar ve yaklaşım teorisi ile ilgili temel tanım ve kavramları ele alacağız.

5.1.1. Tanım

$X \neq \emptyset$ herhangi bir küme ve $A \subseteq X$ olmak üzere $\mu_A : X \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu ile karakterize edilen $A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in X\}$ kümesine X üzerinde bir fuzzy küme denir. μ_A fonksiyonuna A kümesinin üyelik fonksiyonu, her $x \in X$ için $\mu_A(x) \in [0,1]$ değerine de $x \in X$ 'in üyelik derecesi denir (Zadeh, 1965).

5.1.2. Tanım

$*$: $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ikili işlem olsun. $*$ işlemi

i) $*$ birleşimli ve değişimlidir,

ii) $*$ süreklidir,

iii) $a * 1 = a$ her $a \in [0, 1]$ için,

iv) $a \leq c$ ve $b \leq d$ olduğunda $a * b \leq c * d$ ve $a, b, c, d \in [0, 1]$

koşullarını sağlıyorsa, $*$ işlemine sürekli bir t – norm denir (Bag ve Samanta, 2003).

5.1.1. Örnek

Aşağıdakiler, tüm $a, b \in [0, 1]$ için tanımlanan fuzzy kesişim olarak sıklıkla kullanılan bazı t –normlara örnek olarak verilebilir (Bag ve Samanta, 2003).

i) Standard kesişim: $a * b = \min(a, b)$

ii) Cebirsel çarpım: $a * b = ab$

iii) Sınırlı fark: $a * b = \max(0, a + b)$

$$a * b = \begin{cases} a & , b = 1 \\ b & , a = 1 \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases} \text{ ise}$$

Bag ve Samanta (2003) lineer uzayda fuzzy normu aşağıdaki biçimde tanımlamıştır:

5.1.3. Tanım

X , lineer bir vektör uzayı olsun. $X \times \mathbb{R}$ 'nin fuzzy alt kümesi N $x, y \in X$ ve $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

(N1) $\forall t \in \mathbb{R}, t \leq 0, N(x, t) = 0$;

(N2) $(\forall t \in \mathbb{R}, t > 0, N(x, t) = 1)$ dir ancak ve ancak $x = 0$;

(N3) $\forall t \in \mathbb{R}, t > 0, N(cx, t) = N(x, \frac{t}{|c|})$ ve $c \neq 0$;

(N4) $\forall t, s \in \mathbb{R}, \text{ve } x, y \in X; N(x + y, s + t) \geq \min\{N(x, s), N(y, t)\}$;

(N5) $N(x, \cdot), \mathbb{R}'$ de azalmayan bir fonksiyondur ve $\sup_{t \in \mathbb{R}} N(x, t) = 1$

şartları sağlanıyorsa X üzerinde fuzzy norm denir ve (X, N) ikilisine ise fuzzy normlu vektör uzayı adı verilir (Bag ve Samanta, 2003).

$N(x, t)$, x 'in normuna üyelik derecesini gösteren $t \in \mathbb{R}$ ve $x \in X$ e bağlı olan ve $[0, 1]$ aralığında değer alan X 'in fuzzy normudur.

Tanım 5.1.3, aşağıdaki Ayrışma teoremini içerir.

5.1.1. Teorem (Ayrışma teoremi)

(X, N) fuzzy normlu lineer uzay olsun. Varsayalım ki

$$(N6) (\forall t > 0, N(x, t) > 0) \Rightarrow x = 0,$$

$\|x\|_\gamma = \wedge \{t > 0: N(x, t) \geq \gamma\}, \forall \gamma \in (0,1)$ olsun. Bu durumda $\{\|x\|_\gamma : \gamma \in (0,1)\}$, X üzerindeki normların bir ailesidir ve X üzerindeki fuzzy normlara karşılık gelen γ -normlar denir (Bag ve Samanta, 2003).

Bununla birlikte, Tanım 5.1.3 üçgen eşitsizliğinin t -norm olarak “min” seçtiğinden güçlü bir kısıtlama gerektirir (N4). Böylece, kısa bir süre önce, Bag ve Samanta Tanım 5.1.2 nin (N4) koşulunda bulunan “min” koşulu yerine aşağıdaki şekilde bir t -normunu düşünerek lineer bir uzayda fuzzy bir normun genel tanımını verdiler (Bag ve Samanta, 2013).

5.1.4. Tanım

X , lineer bir vektör uzayı olsun. N , $X \times \mathbb{R}$ 'nin fuzzy alt kümesi, $x, y \in X$ ve $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$(N1) \forall t \in \mathbb{R}, t \leq 0, N(x, t) = 0;$$

$$(N2) (\forall t \in \mathbb{R}, t > 0, N(x, t) = 1) \text{ dir ancak ve ancak } x = 0;$$

$$(N3) \forall t \in \mathbb{R}, t > 0, N(cx, t) = N(x, \frac{t}{|c|}) \text{ ve } c \neq 0;$$

$$(N4) \forall t, s \in \mathbb{R}, \text{ ve } x, y \in X; N(x + y, s + t) \geq N(x, s) * N(y, t);$$

$$(N5) N(x, \cdot), \mathbb{R}'\text{de azalmayan bir fonksiyondur ve } \sup_{t \in \mathbb{R}} N(x, t) = 1$$

şartları sağlanıyorsa N' 'ye X üzerinde t -norma göre fuzzy norm denir ve (X, N) ikilisine ise fuzzy normlu vektör uzayı adı verilir (Bag ve Samanta, 2013).

Bag ve Samanta, bunun normlu, sürekli t -norm “min” a göre fuzzy normlu bir uzay olmayan fakat t -norm “çarpım” a göre normlu fuzzy bir uzay olan ancak fuzzy normdan klasik norm ailesine ayrışma teoremini sağlamayan bir örnek verdiler. Bu örnekte (X, N) çarpım t -norma göre fuzzy normlu uzaydır. Fakat bu durumda $\wedge \{t > 0: N(x, t) \geq \gamma\}, X$, üzerinde bir norm fonksiyonu olmaz (Bag ve Samanta, 2013).

5.1.1. Uyarı

N, X üzerinde $*t$ –normuna göre bir fuzzy norm olsun. Bu durumda bazı $\gamma \in (0,1)$ için $\gamma * \gamma = \gamma$ özelliğini sağlıyorsa bu γ için $\bigwedge \{t > 0: N(x, t) \geq \gamma\}, x \in X, X$ üzerinde bir norm olur (Bag ve Samanta, 2013).

Aşağıdaki örnek bize klasik anlamdaki her normdan bir fuzzy norm elde edilebileceğini göstermektedir.

5.1.3. Örnek

$(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olsun. Her $x \in X$ için $a * b = \min\{a, b\}$ ve $a \cdot b = a \cdot b$ t -normlarını alalım.

$$N(x, t) = \begin{cases} \frac{t}{t + \|x\|} & t > 0 \text{ ise} \\ 0 & t \leq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon bir fuzzy norm ve böylece $(X, N, *)$ üçlüsü bir fuzzy normlu uzay olur. Bu uzaya *standart fuzzy normlu uzay* denir (Golet, 2010).

5.1.5. Tanım

(X, N) fuzzy normlu uzay ve $(x_n) \subset X$ bir dizi olsun. Bu durumda her $t > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n - x, t) = 1$$

ise (x_n) dizisi (X, N) 'de $x \in X$ e yakınsıyor denir ve

$$x_n \xrightarrow{N} x$$

biçiminde gösterilir (Lael ve Nourouzi, 2007).

5.1.6. Tanım

Her $x \in X$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{k=1}^n a_k x_k \right\|_X = 0$$

olacak biçimde $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ skalerlerin bir tek dizisi varsa $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 'e, X normlu lineer uzayının bir Schauder tabanı denir (Schauder, 1927).

5.1.7. Tanım

$x \in X$ olmak üzere her $\alpha \in (0,1)$, $\varepsilon > 0$ ve $n \geq n_0$ için

$$N\left(x - \sum_{k=1}^n a_k x_k, \varepsilon\right) \geq 1 - \alpha$$

olacak biçimde $n_0 = n_0(\alpha, \varepsilon)$ ve $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi var ise $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 'e, X fuzzy normlu lineer uzayının bir zayıf tabanı denir ve bu

$$x \xrightarrow{\text{zayıf}} \sum_{k=1}^n a_k x_k$$

biçiminde yazılır. Bu durumda her $x \in X$ elemanı

$$x = \sum_{k=1}^n a_k x_k$$

zayıf fuzzy gösterimine sahip olur (Yılmaz, 2010).

5.1.2. Teorem

X bir Banach uzayı ve $\{x_n\} \subset X$ bir bazı olsun ve $a * b = \min\{a, b\}$, t -normunu

düşünelim. Bu durumda

$$N(x, t) = \begin{cases} \frac{t}{t + \|x\|} & t > 0 \text{ ise} \\ 0 & t \leq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere $\{x_n\}$, (X, N) fuzzy normlu uzayında bir zayıf-tabandır (Yılmaz, 2010).

5.1.8. Tanım

$A, (X, N, *)$ fuzzy normlu uzayının boş olmayan bir alt kümesi ve $*$, sürekli bir t -norm olsun. $x \in X, t > 0$ için

$$E_A(x, t) = \sup_{y \in A} \{N(y - x, t)\}$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda

$$N(y_0 - x, t) = E_A(x, t)$$

eşitliğini sağlayan $y_0 \in A$ elemanına x elemanının en iyi t -yaklaşımı denir (Vaezpour ve Karimi, 2008).

5.1.9. Tanım

$A, (X, N, *)$ fuzzy normlu uzayının boş olmayan bir altkümesi ve $*$, sürekli bir t -norm olsun. $x \in X, t > 0$ için x elemanının en iyi t -yaklaşımlarının kümesi

$$P_A^t(x) = \{y \in A: N(y - x, t) = E_A(x, t)\}$$

biçiminde tanımlanır. Herbir $x \in X, A$ da en azından bir tane en iyi t -yaklaşımına sahip ise A 'ya t -proximal (t -Chebyshev kümesine benzer olarak) küme denir (Vaezpour ve Karimi, 2008).

5.1.10. Tanım

(X, N_1) ve (Y, N_2) , t -normu $a * b = \min\{a, b\}$ olan fuzzy normlu uzaylar ve $T: (X, N_1) \rightarrow (Y, N_2)$ bir lineer operatör olsun. Her $x \in X$ ve $t \in \mathbb{R}$ için

$$N_1(x, t/M_\alpha) \geq \alpha \Rightarrow N_2(T(x), t) \geq \alpha$$

olacak biçimde en azından bir $M_\alpha, 0 < \alpha < 1$ pozitif reel sayısı bulunuyorsa T operatörüne X üzerinde zayıf fuzzy sınırlı operatör denir (Bag ve Samanta, 2005).

5.1.11. Tanım

(X, N_1) ve (Y, N_2) , t -normu $a * b = \min\{a, b\}$ olan fuzzy normlu uzaylar ve $T: (X, N_1) \rightarrow (Y, N_2)$ bir lineer operatör olsun. Her $x \in X$ ve $t \in \mathbb{R}$ için

$$N_2(T(x), t) \geq N_1(x, t/M)$$

olacak biçimde en azından bir $M > 0$ pozitif reel sayısı bulunuyorsa T operatörüne X üzerinde güçlü fuzzy sınırlı operatör denir (Bag ve Samanta, 2005)

5.1.3. Teorem

(X, N_1) ve (Y, N_2) , t -normu $a * b = \min\{a, b\}$ olan fuzzy normlu uzaylar ve $T: (X, N_1) \rightarrow (Y, N_2)$ bir lineer operatör olsun. T güçlü fuzzy sınırlı ise zayıf fuzzy sınırlıdır. Fakat tersi geçerli değildir (Bag ve Samanta, 2005).

5.1.12. Tanım

(X, N_1) ve (Y, N_2) iki fuzzy normlu uzay ve $*$ sürekli t -norm ve $D(T)$, T operatörünün tanım bölgesi olmak üzere $T: D(T) \rightarrow Y$ bir operatör olsun. Her $x \in D(T)$ için

$$N_2(T(x), t) \geq (1 - r) * N_1(x, t)$$

olacak biçimde en azından bir $r, 0 < r < 1$ sayısı var ise T ye fuzzy sınırlı operatör denir (Kider ve Kadhum, 2017).

5.1.1. Notasyon

(X, N_1) ve (Y, N_2) iki fuzzy normlu uzay olsun.

$$FB(X, Y) = \{T: X \rightarrow Y, T \text{ fuzzy sınırlı operatör}\}$$

(Kider ve Kadhum, 2017).

5.1.5. Örnek

$X, [0,1]$ üzerinde tanımlı polinomların vektör uzayı ve $\|y\| = \max_{t \in [0,1]} \{y(t)\}$ olsun.

$$N(y, s) = \begin{cases} 1 & \|y\| < s \text{ ise} \\ 0 & \|y\| \geq s \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Burada t -normu min alırsak (X, N) bir fuzzy normlu uzay olur.

$T: X \rightarrow X$ operatörü $T[y(t)] := y'(t)$ biçimde tanımlansın. Bu durumda T operatörü lineerdir.

$y_n(t) = t^n$ için $\|y_n\| = 1$ dir. Buradan

$$N(T(y), s) = \begin{cases} 1 & n < s \text{ ise} \\ 0 & s \leq n \text{ ise} \end{cases}$$

olur. Dolayısıyla $N(T(y), s) \geq (1 - c) * N(y, t)$ olacak biçimde bir $c, 0 < c < 1$ elemanı bulunamaz. Buradan T operatörü fuzzy sınırlı değildir (Kider ve Kadhum, 2017).

5.1.4. Teorem

(X, N_1) ve (Y, N_2) iki fuzzy normlu uzay olmak üzere $T: D(T) \rightarrow Y$ operatörünün normu

$$N(T, t) := \inf_{x \in D(T)} N_2(T(x), t), t > 0$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda $(FB(X, Y), N, *)$ bir fuzzy normlu uzaydır (Kider ve Kadhum, 2017).

5.1.2. Uyarı

Teorem 5.1.4 deki eşitlik

$$N_2(T(x), t) \geq N(T, t) * N_1(x, t)$$

biçimde yazılabilir (Kider ve Kadhum, 2017).

$\mathbb{T} := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ olsun. 2π -periyotlu fonksiyonları tanımlamak için $\mathbb{T}$ kullanılır. $L^p(\mathbb{T})$ uzayı aşağıdaki biçimde tanımlanır.

$$L^p(\mathbb{T}) := \left\{ f : \|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < +\infty \right\}, 1 \leq p < \infty.$$

f , $\mathbb{T}$ üzerinde her yerde tanımlı ve sürekli fonksiyon olmak üzere $\|f\|_{\infty} := \sup_{x \in \mathbb{T}} |f(x)| < +\infty$ biçimdeki fonksiyonların Banach uzayı $C(\mathbb{T})$ olarak gösterilir (De Vore ve Lorentz, 1993:18).

5.1.13. Tanım

Derecesi en fazla n olan cebirsel bir polinom

$$P(x) := P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

biçiminde tanımlanır (De Vore ve Lorentz, 1993:1).

5.1.14. Tanım

Derecesi en fazla n olan trigonometrik bir polinom

$$T(x) := T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

biçiminde tanımlanır (Zygmund, 1959:1).

5.1.15. Tanım

$f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq \infty$ için f fonksiyonunun süreklilik modülü

$$\omega(f, \delta)_p := \sup_{0 \leq h \leq \delta} \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_p$$

biçiminde tanımlıdır (Zygmund, 1959:45).

Süreklilik modülü birçok özelliğe sahip olmakla birlikte bu tezde $\delta > 0$ ve $\lambda > 0$ olmak üzere $[a, b]$ aralığında sınırlı bir fonksiyon için iyi bilinen bir özellik olan

$$\delta_1 \leq \delta_2 \Rightarrow \omega(f, \delta_1)_p \leq \omega(f, \delta_2)_p$$

özellliği kullanılacaktır (De Vore ve Lorentz, 1993:41).

5.1.16. Tanım

$f \in L^1(\mathbb{T})$ fonksiyonunun $\{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$ ortonormal Fourier tabanına göre seri açılımı

$$c_k(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{ikx} dx, k \in \mathbb{Z}$$

olmak üzere

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ikx}$$

biçimindedir. Bu seriye Fourier serisi denir (De Vore ve Lorentz, 1993:3).

5.1.17. Tanım

$n \in \mathbb{N}$ ve $t \in \mathbb{R}$ olsun.

$$D_n(t) := \sum_{k=-n}^n e^{ikt}$$

şeklinde tanımlanan D_n fonksiyonuna n -mertebeli Dirichlet çekirdeği denir ve D_n fonksiyonu

$$D_n(t) := 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos kt$$

şeklinde yazılabilir. Her $n = 0, 1, 2, \dots$ için D_n fonksiyonu reel değerli, 2π – periyotlu çift bir fonksiyondur. D_n hem pozitif hem negatif değerler alabilir (De Vore ve Lorentz, 1993:3).

5.1.18. Tanım

D_n fonksiyonuna n -mertebeli Dirichlet çekirdeği olmak üzere,

$$\Lambda_n := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} |D_n(t)| dt$$

ifadesine Lebesgue sabiti denir (Zygmund, 1959:67).

5.1.7. Teorem

$n \in \mathbb{N}$ ve $|r_n| \leq 3$ olsun. Bu durumda

$$\Lambda_n := \frac{4}{\pi^2} \log n + r_n$$

eşitliği sağlanır (Zygmund, 1959:67).

Fourier serisinin n . kısmi toplamını $S_n(f)(x)$, D_n , n . dereceden Dirichlet çekirdeği olmak üzere

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(y) D_n(y - t) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x + y) D_n(y) dy \end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir (De Vore ve Lorentz, 1993:3).

Her $f \in C(\mathbb{T})$ 'nin $S_n(f)$ Fourier toplamı f fonksiyonuna düzgün yakınsamaz. Ancak Fourier toplamlarının aritmetik ortalamaları ile her $f \in C(\mathbb{T})$ ye düzgün yakınsayan trigonometrik polinomların serilerini elde edebiliriz. Bu ortalamalar n . Fejër (Cesàro) ortalaması $\sigma_n(f)$ ve de la Vallée Poussin ortalaması $V_n^m(f)$

$$\sigma_n(f) := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(f) \text{ ve } V_n^m(f) := \frac{1}{n-m+1} \sum_{k=m}^n S_k(f)$$

biçimde tanımlanırlar (De Vore ve Lorentz, 1993:3; Mastroianni ve Milovanovic, 2008:32).

Şimdi $\sum c_n$ sonsuz seri ve S_n bu serinin kısmi toplamını, $\lambda = \{\lambda_n\}$, $\lambda_1 = 1$ ve $\lambda_{n+1} - \lambda_n \leq 1$ göstermek üzere tamsayıların bir dizisi olsun. S_n dizisinin $\{\lambda_n\}$ dizisi ile üretilen Fourier tabanında n . genelleştirilmiş de la Vallée Poussin ortalaması $V_n(\lambda, x) := V_n(f, \lambda; x)$,

$$V_n(\lambda, x) := \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=n-\lambda_n}^{n-1} S_k(f) (n \geq 1)$$

biçiminde tanımlanır.

$V_n(\lambda)$ serisi yakınsak ise $\sum c_n$ sonsuz serisi (V_n, λ) -toplanabilir ve eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} |V_{n+1}(\lambda) - V_n(\lambda)|$$

yakınsak ise $|V_n, \lambda|$ -mutlak toplanabilirdir denir (Leindler,1968).

Kolayca görmek mümkündür ki n . genelleştirilmiş de la Vallée Poussin ortalaması $\lambda = \lambda_n$ için uygun seçimler yapıldığında, örneğin $\lambda_n = 1$ için $V_{n+1}(\lambda) = S_n$ kısmi toplam dizisini ve $\lambda_n = n$ için ise $V_{n+1}(\lambda) = \sigma_n n$. Fejèr (Cesàro) ortalamasını verir (Leindler,1968).

5.1.19. Tanım

$L^p(\mathbb{T})$ uzayı için $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere Fourier tabanları $\{e^{ikx}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ile en iyi yaklaşım

$$E_n(f)_p := \inf_{T \in \tau_n} \|f - T\|_p$$

şeklinde gösterilir. Üstelik $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(f)_p = 0$ dir.

$f \in C(\mathbb{T})$ fonksiyonuna yaklaşımların dereceleri için kullanılan bir diğer önemli kavram olan süreklilik modülü ile en iyi yaklaşımın ilişkisi Jackson teoremi ile verilmiştir (Zygmund, 1959:115; De Vore ve Lorentz:59).

5.2. $(L^p(\mathbb{T}), N_p)$, $1 \leq p \leq \infty$ Fuzzy Normlu Uzayında t –Yaklaşım

$(L^p(\mathbb{T}), \|\cdot\|_p)$ Banach uzayı üzerinde $a * b = \min\{a, b\}$ t –normu ile Örnek 5.1.3 düşünülürse

$$N_p(x, t) = \begin{cases} \frac{t}{t + \|x\|_p} & t > 0 \text{ ise} \\ 0 & t \leq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

fuzzy normu ile $(L^p(\mathbb{T}), N_p)$ sıralı ikilisi bir standart fuzzy normlu uzay olur.

Teorem 5.1.2 göz önüne alınırsa klasik Fourier tabanı, $1 < p < \infty$ için Schauder tabanı olduğundan $(L^p(\mathbb{T}), N_p)$ fuzzy normlu uzayında için bir zayıf-fuzzy tabanıdır. Dolayısıyla her $f \in L^p(\mathbb{T}), 1 < p < \infty$ için

$$c_k(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{ikx} dx, k \in \mathbb{Z}$$

olmak üzere

$$\sum_{k=1}^n c_k(f) e^{ikx} \xrightarrow{\text{zayıf}} f(x)$$

yazabiliriz. Bu ise her $\alpha \in (0,1), \varepsilon > 0$ ve $n \geq n_0$ için

$$N_p \left(f - \sum_{k=1}^n c_k(f) e^{ikx}, \varepsilon \right) \geq 1 - \alpha$$

olacak biçimde en azından bir $n_0 = n_0(\alpha, \varepsilon)$ nin var olması demektir. Bu durumda f fonksiyonu

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k(f) e^{ikx}$$

zayıf fuzzy gösterimine sahip olur.

5.2.1. Teorem

Her $f \in (C(\mathbb{T}), N_\infty)$ ve $\varepsilon > 0$ için $t > 0$ olmak üzere

$$N_\infty(f - T, t) \geq \frac{t}{t + \varepsilon}$$

olacak biçimde bir $T \in \tau_n$ trigonometrik polinomu vardır.

İspat

$f \in (C(\mathbb{T}), N_\infty)$ olsun. Bu durumda iyi bilinen Weierstrassikinci teoremi ve standart fuzzy normun tanımından istenilen sonuç aşağıdaki gibi kolayca elde edilir (Zygmund, 1959:90).

$$N_\infty(f - T, t) = \frac{t}{t + \|f - T\|_\infty} \geq \frac{t}{t + \varepsilon}.$$

5.2.1. Tanım

$\tau_n, L^p(\mathbb{T}), 1 \leq p \leq \infty$ standart fuzzy normlu uzayının boş olmayan bir alt kümesi olmak üzere $f \in L^p(\mathbb{T}), 1 \leq p \leq \infty$ için

$$E_n(f, t)_p := \sup_{T \in \tau_n} \{N_p(f - T, t)\}, t > 0$$

olmak üzere τ_n den en iyi t -yaklaşımı

$$N_p(f - T^*, t) = E_n(f, t)_p$$

eşitliğini sağlayan T^* polinomuna τ_n in f ye en iyi t -yaklaşımı denir.

$f \in L^p(\mathbb{T}), 1 \leq p \leq \infty$ için $t > 0$ olmak üzere τ_n den en iyi t -yaklaşan elemanların kümesi

$$P_n^t(f) := \{T \in \tau_n : N_p(f - T, t) = E_n(f, t)_p\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 5.1.19 da verilen klasik en iyi yaklaşım tanımından

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(f, t)_p = 1$$

olduğu görülür.

5.2.2. Tanım

Standart fuzzy normlu $(L^p(\mathbb{T}), N_p)$, $1 \leq p \leq \infty$ uzayında t -süreklilik modülü $t > 0$ olmak üzere

$$\omega_F(f, \delta)_p := \inf_{0 < h \leq \delta} N_p(f(\cdot + h) - f, t)$$

şeklinde tanımlanır. Üstelik $p = \infty$ için $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_F(f, \delta)_\infty = 1$ dir.

5.2.2. Teorem

$f \in (C(\mathbb{T}), N_\infty)$ olsun. Bu durumda her bir $n \in \mathbb{N}$ ve $t > 0$ olmak üzere

$$E_n(f, t/C)_\infty \geq \omega_F\left(f, \frac{1}{n}\right)_\infty$$

olur.

İspat

$f \in (C(\mathbb{T}), N_\infty)$ olsun. Bu durumda iyi bilinen Jackson teoremi ve Tanım 5.1.19 da verilen klasik en iyi yaklaşımın tanımından istenilen sonuç aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \omega_F\left(f, \frac{1}{n}\right)_\infty &:= \inf_{0 < h \leq 1/n} N_p(f(\cdot + h) - f, t) \\ &= \frac{t}{t + \sup_{0 < h \leq 1/n} N_p(f(\cdot + h) - f, t)} \\ &= \frac{t}{t + \omega\left(f, \frac{1}{n}\right)_\infty} \\ &= \frac{t}{t + E_n(f)_\infty} = \frac{t}{t + C \inf_{T \in \tau_n} \|f - T\|_\infty} \end{aligned}$$

$$= \frac{t/C}{t/C + \|f - T\|_\infty} = E_n(f, t/C)_\infty$$

$S_n(f)$, f 'nin Fourier tabanlı gösteriminin kısmi toplamına Fourier operatörü diyelim. Bu durumda Fourier operatörü τ_n üzerinde bir projektördür, yani her $f \in \tau_n$ için $S_n(f) \in \tau_n$ olur. Dolayısıyla her $T \in \tau_n$ için ilk olarak

$$\begin{aligned} N_p(f - S_n(f), t) &\geq \min\{N_p(f - T, t/2), N_p(S_n(f) - T, t/2)\} \\ &\geq \min\{N_p(f - T, t/2), N_p(S_n(f - T), t/2)\} \end{aligned} \quad (5.1)$$

eşitsizliğini, buradan ise

$$N_p(S_n(f - T), t/2) = \frac{t/2}{t/2 + \|S_n\| \|f - T\|_p} \geq \frac{\frac{t}{2\|S_n\|}}{\frac{t}{2\|S_n\|} + \|f - T\|_p} = N_p\left(f - T, \frac{t}{2\|S_n\|}\right)$$

yukarıda verilen klasik normlu uzaylardaki operatör tanımı (Korovkin, 1960) ile

$$N_p(f - S_n(f), t) \geq N_p\left(f - T, \frac{t}{2\|S_n\|}\right)$$

elde edilir. Böylece eşitsizliğin iki tarafında $T \in \tau_n$ için supremum alınırsa

$$N_p(f - S_n(f), t) \geq E_n\left(f, \frac{t}{2\|S_n\|}\right)_p$$

olur.

Klasik teoride Fourier operatörünün Lebesgue sabitinin davranışı kısmi toplamalarının yaklaşım hız oranını hesaplamak için ne kadar önemli ise fuzzy normlu uzay içinde o derece önemlidir. Standart fuzzy normlu uzay için Eş. 5.1'in iki tarafının $T \in \tau_n$ ye göre supremumunu alırsak,

$$E_n(f, t)_p \geq N_p(f - S_n(f), t) \geq E_n\left(f, \frac{t}{2\|S_n\|}\right)_p$$

elde ederiz. Buradan

$$N_p(f - S_n(f), t) \sim E_n(f, t)_p$$

olması için gerek ve yeter şart Lebesgue sabitlerinin sınırlı olmasıdır. Sıradaki teoremden Lebesgue sabitlerinin standart fuzzy normlu uzaylardaki davranışı verilmiştir.

5.2.3. Teorem

$L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq \infty$ standart fuzzy normlu uzay ve $n \in \mathbb{N}$ için $S_n: (L^p(\mathbb{T}), N_p) \rightarrow (L^p(\mathbb{T}), N_p)$ olsun. Bu durumda $t > 0$

$$c_p := \begin{cases} 4 \left(\frac{p}{p-1} \right)^{1/p} & 1 < p < 2 \quad ise \\ 1 & p = 2 \quad ise \\ 4p^{(p-1)/p} + 1 & 2 < p < +\infty \quad ise \end{cases}$$

olmak üzere $1 < p < +\infty$ için

$$N_p(S_n(f), t) \geq N_p(f, t/c_p)$$

olup güçlü fuzzy sınırlıdır. $p = 1$ ve $p = +\infty$ ise n ye ve f ye bağlı olmayan bir C sabiti için

$$N_p(S_n(f), t) \geq N_p(f, t/C \log n)$$

olur.

İspat

$L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq \infty$ standart fuzzy normlu uzay ve $n \in \mathbb{N}$ için $S_n: (L^p(\mathbb{T}), N_p) \rightarrow (L^p(\mathbb{T}), N_p)$ olsun. Bu durumda $t > 0$ olmak üzere $1 < p < +\infty$ için Teorem 3.1.1 (Mastroianni ve Milovanovic, 2008:193) göz önüne alınırsa

$$c_p := \begin{cases} 4 \left(\frac{p}{p-1} \right)^{1/p} & 1 < p < 2 \quad \text{ise} \\ 1 & p = 2 \quad \text{ise} \\ 4p^{(p-1)/p} + 1 & 2 < p < +\infty \quad \text{ise} \end{cases}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} N_p(S_n(f), t) &= \frac{t}{t + \|S_n(f)\|_p} \geq \frac{t}{t + c_p \|f\|_p} \\ &= \frac{t/c_p}{t/c_p + \|f\|_p} = N_p(f, t/c_p) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla Tanım 5.1.11 den S_n operatörü güçlü fuzzy sınırlı olur.

$p = 1$ ve $p = +\infty$ için ise yine Teorem 3.1.1 (Mastroianni ve Milovanovic, 2008:193) göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} N_p(S_n(f), t) &= \frac{t}{t + \|S_n(f)\|_p} \geq \frac{t}{t + C. \log n \|f\|_p} \\ &= \frac{t/C. \log n}{t/C. \log n + \|f\|_p} = N_p(f, t/C. \log n) \end{aligned}$$

eşitsizliğinden $n \rightarrow \infty$ için $M = \infty$ olacağından S_n operatörü güçlü fuzzy sınırlı değildir.

$p = 1$ ve $p = +\infty$ durumları

$$E_n(f, t)_p \geq N_p(f - S_n(f), t) \geq E_n\left(f, \frac{t}{C. \log n}\right)_p$$

olduğundan en iyi t -yaklaşımı için kritik durumlardır. Bu durumlar için operatörünün en iyi t -yaklaşımına yakınsaklığı garanti değildir. Bunun için önemli bir örnek klasik Fourier analizi için Kolmogorov tarafından verilmiştir. Bu klasik örnekte Fourier toplamı her yerde ıraksak olan bir $f \in L^1(\mathbb{T})$ verilir (Zygmund, 1959:230).

5.2.1. Lemma

(X, N_1) ve (Y, N_2) standart fuzzy normlu uzaylar ve üzerindeki t -norm $a * b = \min\{a, b\}$ olsun. Bu durumda $T: (X, N_1) \rightarrow (Y, N_2)$ operatörü güçlü-fuzzy sınırlı ise fuzzy sınırlıdır.

İspat

(X, N_1) ve (Y, N_2) standart fuzzy normlu uzaylar ve üzerindeki t -norm $a * b = \min\{a, b\}$ olsun. $T: (X, N_1) \rightarrow (Y, N_2)$ operatörünü güçlü-fuzzy sınırlı kabul edelim. Teorem 5.1.3 den T operatörü zayıf-fuzzy sınırlı olur. Bu durumda Tanım 5.1.10 den her $x \in X$ ve $t \in \mathbb{R}$ için

$$N_1(x, t/M_\alpha) \geq \alpha \Rightarrow N_2(T(x), t) \geq \alpha$$

olacak biçimde en azından bir M_α , $0 < \alpha < 1$ pozitif reel sayısı vardır. Buradan $r \leq 1 - \alpha$ seçersek, her $\alpha \in (0, 1)$ için

$$N_2(T(x), t) \geq \min\{1 - r, N_1(x, t)\}$$

olacak biçimde $\exists r, 0 < r < 1$ bulabiliriz. Bu ise Teorem 5.1.4 de verilen tanım düşünüldüğünde bize T nin fuzzy sınırlı olduğunu gösterir.

5.1.1. Sonuç

$(L^p(\mathbb{T}), N_p)$ standart fuzzy normlu uzay ve $n \in \mathbb{N}$ için $S_n: (L^p(\mathbb{T}), N_p) \rightarrow (L^p(\mathbb{T}), N_p)$ olsun. Bu durumda $1 < p < +\infty$ ve $t > 0$ için S_n operatörü fuzzy sınırlıdır.

İspat

Teorem 5.2.3 ve Lemma 5.2.1 den operatörünün fuzzy sınırlı olduğu görülür.

S_n operatörünün her $f \in (C(\mathbb{T}), N_\infty)$ için fuzzy sınırlı olmadığını gördük. Sıradaki teoremlerle n . Fejér ortalamasının keyfi bir f için yakınsak olduğunu gösterir.

5.2.4. Teorem

$(C(\mathbb{T}), N_\infty)$ standart fuzzy normlu uzay olsun. $\sigma_n: (L^p(\mathbb{T}), N_p) \rightarrow (L^p(\mathbb{T}), N_p)$ Fejér operatör olsun. Bu durumda her $f \in (C(\mathbb{T}), N_\infty)$ ve $t > 0$ için $\sigma_n(f) \xrightarrow{N} f$ dir.

İspat

$f \in (C(\mathbb{T}), N_\infty)$ ve $t > 0$ olsun. Bu durumda Fejér teoremine (Mastroianni ve Milovanovic, 2008:196) ve aşağıdaki basit bir hesaplama

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_\infty(\sigma_n(f) - f, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t}{t + \|\sigma_n(f) - f\|_\infty} = \frac{t}{t + \lim_{n \rightarrow \infty} \|\sigma_n(f) - f\|_\infty} = 1$$

ile elde edilir.

Şimdi daha iyi bir yaklaşım elde etmek için

$$V_n^{2n}(f) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} S_k(f)$$

de la Vallée Poussin ortalamasını düşünelim. Fuzzy normda yaklaşım hatasının tahmini aşağıdaki gibidir.

5.2.5. Teorem

$f \in (L^p(\mathbb{T}), N_p)$, $1 \leq p \leq \infty$ olsun. Bu durumda $t > 0$ olmak üzere

$$N_p(V_n(f) - f, t) \geq E_n(f, t/C)_p$$

$C \neq C(n, f)$ elde edilir.

İspat

Klasik yaklaşım $E_n(f)_p$ için verilen Tanım 5.1.19dan her $f \in (L^p(\mathbb{T}), N_p)$, $1 \leq p \leq \infty$ ve $t > 0$ için

$$\begin{aligned} N_p(V_n(f) - f, t) &= \frac{t}{t + \|V_n(f) - f\|_p} \geq \frac{t}{t + CE_n(f)_p} = \frac{\frac{t}{C}}{\frac{t}{C} + E_n(f)_p} \\ &= \frac{t/C}{t/C + \inf_{T \in \tau_n} \|f - T\|_p} = \sup_{T \in \tau_n} \frac{t/C}{t/C + \|f - T\|_p} \end{aligned}$$

Teorem 3.1.2 (Mastroianni ve Milovanovic, 2008:196) elde edilir. Dolayısıyla buradan da

$$N_p(V_n(f) - f, t) \geq E_n(f, t/C)_p$$

elde edilir.

5.3. $(H^\alpha(\mathbb{T}), N_\alpha)$, $0 < \alpha \leq 1$ Fuzzy Normlu Hölder Uzayında t -Yaklaşım

$L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq \infty$ uzayı gibi bu tez çalışması için önemli olan diğer bir Banach uzayı Prössdorff (1975) tarafından 2π -periyotlu sürekli fonksiyonların bir alt uzayı olarak ele alınmıştır. Bu uzay Hölder uzayıdır ve aşağıda tanımı verilmiştir.

5.3.1. Tanım

$1 \leq p \leq \infty$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere Hölder sınıfı

$$H_p^\alpha(\mathbb{T}) := \left\{ f \in L^p(\mathbb{T}) : \sup_{\delta > 0} \{ t^{-\alpha} \omega(f, \delta)_p \} \right\} < \infty$$

şeklinde tanımlanır (De Vore ve Lorentz, 1993:51).

$p = \infty$ ise H_∞^α yerine H^α yazılır. Buradan $f \in C(\mathbb{T})$ fonksiyonunun H^α Hölder sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^\alpha$$

olacak şekilde bir $K > 0$ sayısının bulunması olur.

H^α uzayı $x \neq y$ için,

$$\Delta^\alpha f(x, y) = \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}, \Delta^0 f(x, y) = 0$$

olmak üzere

$$\|f\|_\alpha = \|f\|_\infty + \sup_{x \neq y} \Delta^\alpha f(x, y)$$

biçiminde tanımlı $\|\cdot\|_\alpha$ normu ile Banach uzayıdır (Prössdorff, 1975).

Bu bölümdeki amacımız Fourier serilerinin kısmi toplamlar, n . Fejér (Cesàro) ortalaması ve genelleştirilmiş de la Vallée Poussin ortalaması için Hölder sınıflarında verilen bazı klasik yaklaşım teoremlerini standart fuzzy normlu uzayda incelemektir.

Şimdi standart fuzzy normda ile Hölder sınıfını tanımlayalım.

H^α uzayı $\|\cdot\|_\alpha$ normu ile Banach uzayı olduğundan $t, \delta > 0$ için

$$H^\alpha(\mathbb{T}) := \left\{ f \in C(\mathbb{T}) : \omega_F(f, \delta) \geq \frac{t}{t + k\delta^\alpha} \right\}$$

biçiminde tanımlanabilir. Diğer taraftan

$$N_\alpha(f, t) := \frac{t}{t + \|f\|_\alpha}$$

olmak üzere $(H^\alpha(\mathbb{T}), N_\alpha)$, $0 < \alpha \leq 1$ standart fuzzy normlu uzay olur.

5.3.1. Teorem

$f \in (C(\mathbb{T}), N_\infty)$ olsun. Bu durumda $t > 0$ olmak üzere her x için

$$N_\infty(V_n(\lambda, f) - f, t) \gtrsim E_{n-\lambda_n} \left(f, \frac{t}{4 + \log \frac{2n-\lambda_n}{\lambda_n}} \right)_\infty$$

olur.

İspat

$f \in C(\mathbb{T})$ olduğundan Teorem 3 (Leindler, 1968) den yararlanarak istenilen sonuç

$$\begin{aligned} N_\infty(V_n(\lambda, f) - f, t) &= \frac{t}{t + \|V_n(\lambda, f) - f\|_\infty} \\ &\gtrsim \frac{t}{t + \left(4 + \log \frac{2n-\lambda_n}{\lambda_n}\right) E_{n-\lambda_n}(f)} \\ &= \frac{t}{t + \left(4 + \log \frac{2n-\lambda_n}{\lambda_n}\right) \inf_{T \in \tau_{n-\lambda_n}} \|f - T\|_\infty} \\ &= E_{n-\lambda_n} \left(f, \frac{t}{4 + \log \frac{2n-\lambda_n}{\lambda_n}} \right)_\infty \end{aligned}$$

yukarıdaki gibi elde edilir.

5.3.2. Teorem

$f \in (H^\alpha(\mathbb{T}), N_\alpha)$, $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bu durumda $t > 0$ olmak üzere her x için

$$N_\infty(V_n(\lambda, f) - f, t) \gtrsim \begin{cases} \frac{\lambda_n^\alpha t}{\lambda_n^\alpha t + 1}, & 0 < \alpha < 1 \\ \frac{\lambda_n t}{\lambda_n t + (1 + \log \lambda_n)}, & \alpha = 1 \end{cases}$$

sağlanır.

İspat

$f \in H^\alpha(\mathbb{T})$, $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bu durumda Leindler (1968) ın makalesindeki Teorem 4 geçerli olduğundan

$\alpha < 1$ için

$$N_\infty(V_n(\lambda, f) - f, t) = \frac{t}{t + \|V_n(\lambda, f) - f\|_\infty} = \frac{t}{t + \frac{1}{\lambda_n^\alpha}} = \frac{\lambda_n^\alpha t}{\lambda_n^\alpha t + 1}$$

ve $\alpha = 1$ için

$$N_\infty(V_n(\lambda, f) - f, t) = \frac{t}{t + \|V_n(\lambda, f) - f\|_\infty} = \frac{t}{t + \left(\frac{1 + \log \lambda_n}{\lambda_n}\right)} = \frac{\lambda_n t}{\lambda_n t + (1 + \log \lambda_n)}$$

elde edilir.

5.3.3. Teorem

$f \in (H^\alpha(\mathbb{T}), N_\alpha)$, $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bu durumda $t > 0$ olmak üzere

$$N_\infty(\sigma_n(f) - f, t) \geq \begin{cases} \frac{n^\alpha t}{n^\alpha t + 1} & , 0 < \alpha < 1 \quad \text{ise} \\ \frac{nt}{nt + \log n} & , \alpha = 1 \quad \text{ise} \end{cases}$$

elde edilir.

İspat

$f \in H^\alpha(\mathbb{T})$, $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bu durumda $t > 0$ olmak üzere Fejér ortalaması ile hata tahmini teoremi (Mastroianni ve Milovanovic, 2008:196), standart fuzzy norm ve $0 < \alpha < 1$ için

$$N_{\infty}(\sigma_n(f) - f, t) = \frac{t}{t + \|\sigma_n(f) - f\|_{\infty}} \geq \frac{t}{t + \frac{1}{n^{\alpha}}} = \frac{n^{\alpha}t}{n^{\alpha}t + 1} \quad (5.2)$$

ve $\alpha = 1$ için

$$N_{\infty}(\sigma_n(f) - f, t) = \frac{t}{t + \|\sigma_n(f) - f\|_{\infty}} \geq \frac{t}{t + \frac{\log n}{n}} = \frac{nt}{nt + 1} \quad (5.3)$$

olur. Eş. 5.2 ve Eş. 5.3 den istenilen sonuç elde edilir.

5.3.4. Teorem

$f \in (H^{\alpha}(\mathbb{T}), N_{\alpha})$, $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$ olsun. Bu durumda $t > 0$ olmak üzere her x için

$$N_{\beta}(V_n(\lambda, f) - f, t) \gtrsim \begin{cases} \frac{\lambda_n^{\alpha}t}{\lambda_n^{\alpha}t + \lambda_n^{\beta}}, & \alpha < 1 \\ \frac{\lambda_n^{1-\beta}t}{\lambda_n^{1-\beta}t + (1 + \log \lambda_n)}, & \alpha = 1 \end{cases}$$

sağlanır.

İspat

$f \in H^{\alpha}(\mathbb{T})$, $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$ olsun. Bu durumda Leindler, Meir ve Totik (1985) makalesindeki Hölder uzayında hata derecesi tahmini (4) den $t > 0$ olmak üzere her f ve $\alpha < 1$ için

$$\|V_n(\lambda, f) - f\|_{\beta} = \frac{t}{t + \|V_n(\lambda, f) - f\|_{\beta}} \gtrsim \frac{t}{t + \lambda_n^{\beta-\alpha}} = \frac{\lambda_n^{\alpha}t}{\lambda_n^{\alpha}t + \lambda_n^{\beta}}$$

ve $\alpha = 1$ için ise

$$\|V_n(\lambda, f) - f\|_{\beta} = \frac{t}{t + \|V_n(\lambda, f) - f\|_{\beta}} \gtrsim \frac{t}{t + \lambda_n^{\beta-1}(1 + \log \lambda_n)} = \frac{\lambda_n t}{\lambda_n t + \lambda_n^{\beta}(1 + \log \lambda_n)}$$

elde edilir.

5.3.1. Sonuç

$f \in (H^\alpha(\mathbb{T}), N_\alpha)$, $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$ olsun. Bu durumda $t > 0$ olmak üzere her x için

$$N_\beta(\sigma_n(f) - f, t) \gtrsim \begin{cases} \frac{n^{\alpha-\beta}t}{n^{\alpha-\beta}t + 1}, & \alpha < 1 \\ \frac{nt}{n^{\alpha-\beta}t + (1 + \log \lambda_n)}, & \alpha = 1 \end{cases}$$

sağlanır.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Demet teorisi yatay olarak topoloji ve dikey olarak cebir yapılan konudur ve esasen geometrinin lokal özelliklerden global özelliklere geçiş ile ilgilidir. Tezin üçüncü bölümünde, cebirsel topolojiden homotopi ve demet teorisini birlikte göz önüne alarak Molaei (2000) tarafından tanımlanan topolojik genelleştirilmiş grup vasıtasıyla yeni bir demet yapısı inşa edilmiş ve bazı cebirsel topolojik karakterizasyonları verilmiştir. Demet ve homotopi kavramlarının fuzzy topolojideki karşılığı çoktan beri tanımlı olduğundan, dördüncü bölümde bu kavramlardan yararlanıp literatüre fuzzy topolojik genelleştirilmiş grup gibi yeni bir kavramda katarak, bir fuzzy demet yine fuzzy homotopinin oluşturduğu fuzzy gruplar ile oluşturulmuştur. Tezin bu kısmı Farhangooost ve Nasirizade (2013) nin genişletilmiş homotopi ile beraber tanımlanan genelleştirilmiş temel gruplar ile yeni demet oluşumlarına fikir vermektedir. Üstelik bu kavramlar fuzzy topolojiye kazandırılabilir.

Fuzzy topolojinin önemli problemlerinden biri, uygun bir fuzzy metrik uzay ve fuzzy normlu uzay kavramının elde edilmesidir. Bu problem birçok yazar tarafından farklı bakış açılarından araştırılmıştır (Kramosil ve Michalek, 1975; Felbin 1992; Bag ve Samanta, 2003). Normlu bir lineer uzayın sonlu boyutlu bir alt uzayından en iyi t -yaklaşımların tanımı Veeramani (2001), karakterizasyonları ise Vaezpour ve Karimi (2008) tarafından çalışılmıştır. Tezimizin beşinci bölümünde en iyit-yaklaşım, fuzzy operatörlerin sınırlılığı tanımı ve bir Banach uzayının üzerinde tanımlanan standart fuzzy norm gibi çalışmalar sayesinde klasik Lebesgue ve Hölder uzaylarındaki trigonometrik yaklaşımın çok önemli klasik teoremleri standart fuzzy normda incelenmiştir. Sonrasında Fourier tabanlı serilerininkısmi toplamı, n . Fejér, de la Vallée Poussin ve genelleştirilmiş de la Vallée Poussin ortalamaları gibi ortalamalar ile t -yaklaşım özellikleri ve hızının oranları verilmiştir. Bu bölümde, fuzzy normlu uzaylarda önemli yaklaşım teoremlerinin çalışılmış olması, sonraki çalışmalar için açık problemleri ortaya koymaktadır. Örneğin diğer fonksiyon uzaylarında fuzzy normdaki t -yaklaşımın davranışları incelenebilir. Öte yandan Fourier analizi, zaman serilerinin ve düzensiz sinyallerin spektral temsiliinin temelini oluşturur. Üstelik doğrusal-durağan verilerin işlenmesinde ve veri manipülasyonunda temel bir rol oynar. Fuzzy sistemlerde veri için benzerlik ölçüsü olarak fuzzy normun kullanılmasından

dolayı, sonuçlarımız sinyal ve veri işleme için yada periyodik sinirsel fonksiyon ağlarının oluşturacağı fuzzy sistemleri analiz etmek için uygun bir araç olabilir.

KAYNAKLAR

- Adéniran, J. O., Akinmoyewa, J. T., Şòlàìrìn, A. R. T., and Jaiyéó, T. G. (2009). On some algebraic properties of generalized groups. *Octagon Mathematical Magazine*, 17, 125-134.
- Ahmadi, S. A. (2013). Generalized topological groups and genetic recombination. *Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories*, 11, 51-58.
- Bag, T., and Samanta, S. K. (2003). Finite dimensional fuzzy normed linear spaces. *Journal of Fuzzy Mathematics*, 11(3), 687–705.
- Bag, T., and Samanta, S. K. (2005). Fuzzy bounded linear operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 151, 513–547.
- Bag, T., and Samanta, S. K. (2006). Fixed point theorems on fuzzy normed linear spaces. *Information Sciences*, 176, 2910–2931.
- Bag, T., and Samanta, S. K. (2007). Some fixed point theorems on fuzzy normed linear spaces. *Information Sciences*, 177, 3271–3289.
- Bag, T., and Samanta, S. K. (2013). Finite dimensional fuzzy normed linear spaces. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 6, 271–283.
- Bag, T., and Samanta, S. K. (2015). Operator's fuzzy norm and some properties. *Fuzzy Information and Engineering*, 7, 151–164.
- Chang, Y. Z., and Liu W. J. (1984). Fuzzy homotopy type invariance of fundamental group of fuzzy topological space, *Fuzzy Mathematics*, 4(4), 53-56, In Chinese.
- Chang Y. Z., and Liu W. J. (1984). Fundamental group of fuzzy topological space and its fuzzy topological invariance, *Fuzzy Mathematics*, 4, 27-37, In Chinese.
- Chang, C. L. (1968). Fuzzy topological space, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 24, 182-190.
- Cheng S. C., and Mordeson J. N. (1994). Fuzzy linear operators and fuzzy normed linear spaces. *Bulletin of Calcutta Mathematical Society*, 86(5), 429–436.
- Chon, I. (2001). Some properties of fuzzy topological groups, *Fuzzy Sets and Systems*, 13, 197-201.
- Chuanlin, S., (1985). Homotopy and fundamental group in fuzzy topology, *Dongbei Shida Xuebao*, 2, 25-31, In Chinese.
- De Vore, R. A., and Lorentz, G. (1993). *Constructive approximation*, New York: Springer-Verlag.

- Farhangdoost, M. R., and Nasirzade, T. (2013). Geometrical categories of generalized Lie groups and Lie group-groupoids. *Iranian Journal of Science and Technology A*, 69-73.
- Felbin, C. (1992). Finite dimensional fuzzy normed linear spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 48, 239–248.
- Foster, D.H. (1979). Fuzzy topological groups. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* (67), 549-564.
- Golet, I. (2010). On generalized fuzzy normed spaces and coincidence point theorems. *Fuzzy Sets and Systems*, 161, 1138–1144.
- Grauert, H., and Fritzsche, K. (1976). *Several complex variables*. New York. Springer-Verlag.
- Gray, J. W. (2006). Fragments of the history of the sheaf theory, DOI:10.1007/BFb0061812 In book: *Applications of Sheaves*.
- Gümüş, S., and Yıldız C. (2007). The fuzzy sheaf of the groups formed by fuzzy topological group over pointed fuzzy topological spaces. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 1(37), 101-112.
- Hasankhani, A., Nazari, A., and Saheli, M. (2010). Some properties of fuzzy Hilbert spaces and norm of operators. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 7(3), 129–157.
- Hawking, S. W., and Ellis, G.F.R. (1987). *The large scale structure of space-time*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Holland, A. S. B. (1981). A survey of degree of approximation of continuous functions. *SIAM Review*, 23, 344–379.
- Jha, P. K., and Singh, T.B. (1995). Some local properties of fuzzy topology and fuzzy topological groups. *Bulletin of Calcutta Mathematical Society*, (7), 441-448.
- Jha, P. K., and Singh, T.B. (1999). Fuzzy topological groups. *Bulletin of Calcutta Mathematical Society*, 91(5), 351-358.
- Kaleva, O., and Seikkala, S. (1984). On fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 12, 215–229.
- Katsaras, A. K. (1984). Fuzzy topological vector spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 12, 143–154.
- Kider, J. R., and Kadhum, N. A. (2017). Properties of fuzzy norm of fuzzy bounded operators. *Iraqi Journal of Science*, 58(3A), 1237–1281.
- Kramosil, A. K., and Michalek, J. (1975). Fuzzy metric and statistical metric spaces. *Kybernetika (Prague)*, 11(5), 336–344.

- Korovkin, P. P. (1960). *Linear Operators and Approximation Theory*. Delhi: Hindustan Publishing Corporation.
- Lael, F., and Nourouzi, K. (2007). Fuzzy compact linear operators. *Chaos Solitons Fractals*, 34, 1584–1589.
- Lee, K. Y. (2016). Approximation properties in fuzzy normed spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 282, 115–130.
- Leindler, L. (1968). On summability of Fourier series. *Acta Science Mathematica. Szeged* 29, 147-162.
- Leindler, L., Meir, A., and Totik, V. (1985). On approximation of continuous functions in Lipschitz norms. *Acta Mathematica Hungarica*, 45, 441–443.
- Leray, J. (1946). L'anneau d'homologie d'une représentation, *C.R. Academical Science* 222 (Paris), 1419-1422.
- Liang, M. J., and Hai, Y.C. (1984). Fuzzy topological groups. *Fuzzy Sets and Systems*, 12, 289-299.
- Liang, M. J., and Hai, Y.C. (1985). On the direct product of fuzzy topological groups. *Fuzzy Sets and Systems*, 17, 91-97.
- Liang, M. J., and Hai, Y.C. (1987). On fuzzy topological groups. *Fuzzy Sets and Systems*, 23, 281-287.
- Lowen, R. (1976). Fuzzy topological spaces and fuzzy compactness. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 56, 621-633.
- Mastroianni, G., and Milovanovic, G.V. (2008). *Interpolation processes basic theory and applications*, Springer Monographs in Mathematics.
- Mehrabi, M., Molaei, M. R., and Olomi, A. (2000). Generalized subgroups and homomorphisms. *Arabian Journal of Mathematics and Science*, 6, 1-7.
- Miller, H. (2000). Leray in Oflag XVIIA: The origins of sheaf theory, sheaf cohomology, and spectral sequences, Jean Leray (1906-1998), *Gazette Mathematica*, 84, 17-34.
- Molaei, M. R., (1999, 14-17 October). *Generalized groups*. Paper presented at International Conference on Algebra, Romania.
- Molaei, M. R. (1999, 1-10 September). *Generalized actions*. Paper presented at International Conference on Geometry, Integrability and Quantization. In: Ivailo, M. Mladenov, Gregory L. Naber, editors. Varna, Bulgaria. Sofia: Coral Press, 175-179.
- Molaei, M. R. (2000). Topological generalized groups. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2(9), 1055-1060.

- Molaei, M. R. and Tahmoresi, A. (2004). Connected topological generalized groups. *General Mathematics*, 12(1), 13–22.
- Molaei, M. R. (2005). *Mathematical structures based on completely simple semigroups*. USA, Florida: Hadronic Press.
- Prössdorf, S. (1975). Zur Konvergenz der Fourierreihen Hölder stetiger Funktionen. *Mathematische Nachrichten*, 69, 7-14.
- Remmert, R. and Serre J. P. (1979) Henri Cartan Ceuvres collected works Volume 1. New York: Springer-Verlag.
- Rosenfeld, A. (1971). Fuzzy groups, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 35, 512-517.
- Santilli, R. M. (1996). Nonlocal-integral isotopies of differential calculus, geometries and mechanics. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Supplemento*, 42, 7-82.
- Santilli, R. M. (2003). Iso-, geno-, hyper-mechanics for matter, their isoduals for antimatter, and their novel applications in physics, chemistry and biology. *Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories*, 1(2), 121-193.
- Schauder, J. (1927). Zur theorie stetiger abbildungen in funktionalraumen. *Mathematischezeitschrift*, 26(1), 47–65.
- Tennison, B. R. (1975). *Sheaf theory*. New York: Springer-Verlag, Cambridge University Press.
- Timan, A. F. (1963). *Theory of approximation of functions of a real variable*. New York Oxford-Paris: Pergamon Press.
- Vaezpour, S. M., and Karimi F. (2008). t -best approximation in fuzzy normed spaces. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 5(2), 93–99.
- Veeramani P. (2001). Best approximation in fuzzy metric spaces. *Journal of Fuzzy Mathematics*, 9(1), 75- 80.
- Weil, A. (1952). Sur les théorèmes de Rham, *Commentarii Mathematici Helvetici* 26, 119–145.
- Weil, A. (1985). Lettre à H. Cartan, 18 janvier, 1947, Oeuvres 2, 44–46.
- Wong, C. K. (1974). Fuzzy topology: Product and quotient theorems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 45, 512-521.
- Yıldız, C. (1991). Topolojik uzaylar üzerinde topolojik grubun oluşturduğu grupların demeti. *Eriyes Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 7(1), 1112-1120.

- Yılmaz, Y. (2010). Schauder bases and approximation property in fuzzy normed spaces. *Computational Mathematics and Applications.*, 59, 1957–1964.
- Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Controls* 3, 336-435.
- Zygmund, A. (1959). *Trigonometric series*. Vols. I-II 2nd edition, London: Cambridge University Press.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : ASLAN, Hatice
 Uyruğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 31.10.1982, İzmir
 Medeni hali : Bekar
 Telefon : 0(506)505 91 97
 Faks : 0(424)237 00 00-5891
 e-mail : haticeasla@gmail.com



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Doktora	Gazi Üni./ Topoloji	Devam Ediyor
Yüksek Lisans	Çanakkale Onsekiz Mart Üni./Matematik	2009
Lisans	Balıkesir Üni./ Matematik	2006
Lise	Suphi Koyuncuoğlu Y.D.A. Lisesi	2000

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2012- Halen	Fırat Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce (ÜDS-75)

Yayınlar

- Aslan, H, and Efe, H. (2018). The sheaf of the groups formed by topological generalized group over topological spaces. *Gazi Journal of Science*, 31(4), 1202-1211.
- Aslan, H., and Efe, H. (2019). Topological characterizations for sheaf of the groups formed by topological generalized group. *Sakarya University Journal of Science*, 23 (3), 313-321.
- Aslan, H., and Güven, A. (2018). Some approximation properties of series with nonlinear Fourier basis. *Mathematical Sciences and Applications E-Notes*, 6(2), 13-18.

- Aslan, H., and Güven, A. (2019). (Baskıda) On approximation of Hexagonal Fourier of series in generalized Hölder metric. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*.
- Aslan, H., and Ismail M. E. H., (2019). (Baskıda) A q -Translation approach to Liu's calculus. *Annals of Combinatorics*, 1-24.
- Ayazgök, B. and Aslan H. (2014). The review of academic perception, level of metacognitive awareness and reflective consideration skills of science and mathematic university students. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 141, 781-790.
- Gürsoy M. H., Aslan H., and İcen İ. (2017). Generalized crossed modules and group groupoids, *Turkish Journal of Mathematics*, 41, 1535-1551.

Sempozyumlar

1. Aslan, H. and Güven, A. (2011, September 11-12). *Trigonometric approximation in generalized Lebesgue spaces*. Paper presented at XXIV. National Mathematic Symposium. Bursa, Turkey.
2. Aslan, H. and Güven, A. (2013, August). *Approximation in generalized Lebesgue spaces*. Paper presented at 2nd International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications. Sarajevo, Bosna Hersek.
3. Ayazgök, B. and Aslan H. (2013, October). *The review of academic perception, level of metacognitive awareness and reflective consideration skills of science and mathematic university students*. Paper presented at 4th World Conference on Learning, Teaching and Educational Leadership, Barcelona, Spain.
4. Aslan, H., Kelleci and Ergut M., (2014, June 5-7). *Self-similar spacelike surfaces of revolution in Minkowski 3-space*. Paper presented at V. Congress of The Turkic World Mathematicians. Issyk-Kul, Kyrgyzstan.
5. Aslan, H. and Güven, A. (2014, August 13-14). *Approximation in generalized Hardy spaces*. Paper presented at 3rd International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications. Vienna, Austria.
6. Aslan, H. and Ismail M.E.H. (2016, July). *A continous analogue of Bernstein Polynomials*. Paper presented at 12th International Conference on Symetries and Integrability of Differential Equations (SIDE 12) in CRM, Quebec, Canada.
7. Aslan, H. and Ismail M.E.H. (2017, April 27-29). *A continous analogue of Bernstein polynomials*. Paper presented at International Workshop on Mathematical Methods in Engineering (MME 2017). Çankaya University, Ankara, Turkey.
- 8- Aslan, H. (2017, May 11-13). *Hypergeometric functions and arrangements of hyperplanes*. International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2017). Paper presented at Harran University, Şanlıurfa, Turkey.

9. Aslan, H. (2017, May 20-22). *Approximation properties of de la-Vallée Poussin means for series by nonlinear Fourier atoms*. Paper presented at Second International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences (CMES-2017). Istanbul, Turkey.
10. Aslan, H. (2017, September 29-30). *Summability of series by nonlinear Fourier basis and Bernstein inequality*. Paper presented at Ukrainian Conference on Applied Mathematics (UCAM-2017). Lviv, Ukraine.
11. Aslan, H. and Güven, A. (2018, May 04-06). On approximation of hexagonal Fourier series in generalized Hölder metric. Paper presented at The Third International Conference On Computational Mathematics and Engineering Sciences (CMES-2018). Girne, Cyprus.
12. Aslan, H. and Efe, H.(2018, May 04-06). *The sheaf of the groups formed by topological generalized group over topological space*. Paper presented at The Third International Conference On Computational Mathematics and Engineering Sciences (CMES-2018). Girne, Cyprus.
13. Aslan, H. and Güven, A.(2018, May 11-13). *Approximation properties of Fourier series by nonlinear basis in generalized Hölder spaces*. Paper presented at International Conference on Mathematical Advances and Applications (ICOMAA-2018). İstanbul, Turkey.

Seminerler ve Kolokyum

1. (A continous analogue of Bernstein polynomials), Department of Mathematics, University of Central Florida, Seminer, 01.01.2016 (Uluslararası)
2. (A Continuous Analogue of the Bernstein polynomials), Department of Mathematics, University of Central Florida, Kolokyum, 30.03.2016 (Uluslararası)
3. (Hypergeometric functions seminar), The Selberg integral I, Department of Mathematics, University of Central Florida, Seminer, 24.02.2016(Uluslararası)
4. (The Selberg integral II), Hypergeometric functions seminar and the Selberg integral., Department of Mathematics, University of Central Florida, Çalışma, 17.02.2016 (Uluslararası)
5. (Hypergeometric functions), Hypergeometric functions, Gauss equations, Department of Mathematics, University of Central Florida, Seminer, 10.02.2016 (Uluslararası)

Yaz Okulları

1. 21th Gökova Topology-Geometry Workshop 2014, Muğla, Turkey, Kurs, 26- 29 May, 2014.
2. 23rd SCGAS (Southern Geometric Analysis Seminar), University of California Irvine, CA, USA, January 30-31 2016.

3. Graduate Student Conference in Algebra, Geometry and Topology, Temple University, Philadelphia, PA, USA, May 14-15, 2016, Kurs, 14.05.2016 -15.05.2016.
4. Abecedarian of SIDE (ASIDE), SIDE 12 is the twelfth in a series of biennial conferences devoted to Symmetries and Integrability of Difference Equations and related topics: Centre de recherches mathématiques, Université de Montréal, Kurs, 27.06.2016 -01.07.2016.
5. OPSF Summer school on Orthogonal Polynomials and Special Functions Dedicated to Memory and Legacy of Frank W. Olver, Robert Wiener Center for Harmonic Analysis and Applications, University of Maryland, College Park, Maryland, USA, July 11-15, 2016, Kurs, 11.07.2016 -15.07.2016.
6. Summer Research Institute on q -Series Nankai University, Tianjin, P. R. China, Kurs, July 25-August 15, 2018.

Burslar

1. 2214-A Yurt Dışı Doktora Sırası Araştırma Burs Programı, University of Central Florida, Araştırma, 15.08.2015 -01.08.2016.
2. Chern Institute of Mathematics, Nankai University, Graduate Student Fellowship, Araştırma, Tianjin, China. 25.07.2018-15.08.2018.

Hobiler

Bisiklet, Koşu, Kitap okuma, Müzik dinleme.



GAZİ GELECEKTİR..