



**ORTAÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENİ ADAYLARININ
CEBİR ALANINDAKİ ARGÜMANTASYON VE İSPAT SÜREÇLERİ
ARASINDAKİ İLİŞKİNİN İNCELENMESİ**

Reyhan Uysal

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

AĞUSTOS, 2019

TELİF HAKKI VE TEZ FOTOKOPİ İZİN FORMU

Bu tezin tüm hakları saklıdır. Kaynak göstermek koşuluyla tezin teslim tarihinden itibaren yirmi dört (24) ay sonra tezden fotokopi çekilebilir.

YAZARIN

Adı : Reyhan

Soyadı : UYSAL

Bölümü : Matematik Eğitimi

İmza :

Teslim Tarihi: 07/08/2019

TEZİN

Türkçe Adı: Ortaöğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Cebir Alanındaki Argümantasyon Ve İspat Süreçleri Arasındaki İlişkinin İncelenmesi

İngilizce Adı: An Investigation Into The Relationship Between Algebraic Argumentation And Proof Processes Of Prospective Secondary Math Teachers

ETİK İLKELERE UYGUNLUK BEYANI

Tez yazma sürecinde bilimsel ve etik ilkelere uyduğumu, yararlandığım tüm kaynakları kaynak gösterme ilkelerine uygun olarak kaynakçada belirttiğimi ve bu bölümler dışındaki tüm ifadelerin şahsıma ait olduğunu beyan ederim.

Yazar Adı Soyadı: Reyhan UYSAL

İmza:

JÜRİ ONAY SAYFASI

Reyhan UYSAL tarafından hazırlanan “Ortaöğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Cebir Alanındaki Argümantasyon Ve İspat Süreçleri Arasındaki İlişkinin İncelenmesi” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/ oy çokluğu ile Gazi Üniversitesi Matematik Eğitimi Anabilim Dalı’nda Yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

İmza

Danışman: Prof. Dr. Ahmet ARIKAN

(Matematik Eğitimi Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi)

.....

Başkan: Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU

(Matematik Bölümü, Ankara Üniversitesi)

.....

Üye: Doç. Dr. Sevgi ATLIHAN

(Matematik Eğitimi Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi)

.....

Tez Savunma Tarihi: 01/08/2019

Bu tezin Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans tezi olması için şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

Unvan Ad Soyad

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın tüm aşamalarında görüş ve önerileriyle bana yol gösteren, bana duyduğu güveni her zaman hissettiren, olumlu tutumlarıyla karşılaştığım zorlukların hepsinin üstesinden gelmemi kolaylaştıran tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Ahmet ARIKAN' a teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Tez çalışmalarımın başlangıcında zamanının bana ayıran ve değerli görüşlerinden yararlandığım Arş. Gör. Nida EMÜL' e teşekkür etmeyi borç bilirim.

Çalışma boyunca sıkıntılara ortak olan, yardımlarını esirgemeyen, fikir alış verişinde bulunduğum, yüksek lisans sürecine beraber başladığım arkadaşım Ezgi MANCOĞLU' na teşekkür ederim.

Hayatımın her aşamasında beni destekleyen, bana güvenen, varlıkları ile bana güç veren, eğitim hayatımın tümünde benimle aynı heyecanı paylaşan annem, babam ve ablama sonsuz teşekkür ederim.

**ORTAÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENİ ADAYLARININ
CEBİR ALANINDAKİ ARGÜMANTASYON VE İSPAT SÜREÇLERİ
ARASINDAKİ İLİŞKİNİN İNCELENMESİ**

(Yüksek Lisans Tezi)

Reyhan Uysal

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AĞUSTOS, 2019

ÖZ

Bu tez çalışmasının amacı, öğretmen adaylarının, matematiksel problemleri çözerken ortaya çıkan argümantasyon ve ispat sürecinin incelenerek, arasındaki ilişkilerin açığa çıkarılmasıdır. Bu amaç kapsamında argümantasyon ve ispat süreci arasındaki ilişkinin kullanılan farklı ispat tekniklerine göre nasıl değişkenlik gösterdiğini ortaya çıkarmak da amaçlanmıştır. Araştırmanın katılımcıları, 2017-2018 eğitim öğretim yılının bahar yarıyılında, Ankara’da bir devlet üniversitesinin matematik eğitimi bilim dalının ikinci ve üçüncü sınıfında öğrenim gören 4 öğretmen adayından oluşmaktadır. Veriler görüşme tekniği kullanarak toplanmış olup; verilerin analizinde Toulmin modeli ve Toulmin modeline entegre edilmiş ckb modeli kullanılmıştır. Araştırma sonuçları, öğretmen adaylarının, matematiksel problemlerin çözümünde ortaya çıkan argümantasyon ile ispat süreci arasında; yapısal ve bilişsel süreklilik, yapısal süreklilik-bilişsel mesafe, yapısal mesafe-bilişsel süreklilik, yapısal ve bilişsel mesafe biçiminde ilişkilerin olduğunu göstermektedir. Öğretmen adayları bilişsel mesafenin olduğu durumlarda ispatı tamamlamakta zorlanırken yapısal mesafenin olduğu durumlarda etkilenmemişlerdir. Çünkü cebirsel problemler genel olarak dedüktif bir yapıya sahip olduğundan yapısal mesafe kaçınılmaz olmuştur. Buradan yola çıkarak seçilen ispat tekniğinin de iki süreç arasındaki ilişkiyi etkilemediği söylenmiştir. Bilişsel sürekliliğin görüldüğü durumlarda

ispatın başarıyla tamamlanması beklenirken öğretmen adayları her zaman ispatı başarıyla tamamlayamamıştır. Bu durumun nedeni ise ispat sürecinde dedüktif adımların oluşturduğu zincirin zorluğudur. İspat teknikleri iki süreç arasındaki ilişkiyi etkilemezken ispatın tamamlanıp tamamlanamamasını etkilemektedir. Çünkü argümantasyon sırasında hipotezin ispatı için en doğru tekniğe karar verilmesi gerekmektedir. Araştırma esnasında öğretmen adaylarının en doğru tekniğe karar vermek yerine kullanabildiği ya da sevdiği tekniği tercih ettiği gözlemlenmiştir. Buradan yola çıkarak matematik eğitimcilerine; öğrencilerini ispat yapabileceği etkinliklerle karşılaştırmaları, bu etkinlikler sırasında ispata dair argümanlar ürettiği argümantasyonu yaşamalarına fırsat vermeleri, öğrencilerin tüm ispat tekniklerini aynı beceride kullanabilmelerini sağlayacak çeşitli etkinlikler yapmaları önerilmiştir. Matematik eğitimi araştırmacılarına ise cebirsel problemler dışındaki matematiksel problemlerin çözümünde ispat tekniklerinin argümantasyon ve ispat süreci arasındaki ilişkiyi etkileyip etkilemediği, etkiliyorsa nasıl bir etki olduğunun araştırılması önerilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Argümantasyon, Matematiksel ispat, Toulmin modeli

Sayfa Adedi: 207

Danışman: Prof. Dr. Ahmet ARIKAN

**AN INVESTIGATION INTO THE RELATIONSHIP BETWEEN
ALGEBRAIC ARGUMENTATION AND PROOF PROCESSES OF
PROSPECTIVE SECONDARY MATH TEACHERS**

(Master's Thesis)

Reyhan Uysal

GAZİ UNIVERSITY

INSTITUTE OF EDUCATIONAL SCIENCES

AUGUST 2019

ABSTRACT

This thesis aims to examine the argumentation and proof processes engaged in prospective teachers while solving math problems, and to identify the relationships between them. The study aims also to reveal the variations in the relationship between argumentation and proof processes through the usage of different proof techniques. The participants in the study were four perspective teachers who were sophomores and juniors in the math education department of a state university in Ankara in the spring semester of the 2017–2018 academic year. Data was collected via interviews, and analyzed using the Toulmin and the $ck\checkmark$ model integrated into the Toulmin model. The findings revealed the existence of structural and cognitive continuity, structural continuity-cognitive dissonance, structural dissonance-cognitive continuity, and structural and cognitive dissonance relations between the argumentation and proof process engaged in the prospective teachers while solving math problems. The prospective teachers had difficulty in completing a proof in case of cognitive dissonance, but were unaffected by cases of structural dissonance. This can be attributed to the fact that algebraic problems generally have a deductive structure which makes structural dissonance inevitable. So it can be argued that the adopted proof techniques had no effect on the relationship between the two processes. The successful completion of the proof is expected in cases of cognitive continuity, although the

prospective teachers were sometimes unable to complete the proof successfully. This can be attributed to the difficulty of the chain of deductive steps in the proof process. The applied proving methods did not affect the relationship between the two processes, but affected according to whether or not the proof was completed. This is because argumentation requires deciding upon the most appropriate technique to prove a hypothesis. While they are using the techniques, it is seen that they prefer to choose the technique which they are able to use or like, rather than selecting the most appropriate one. Based on these findings, it is recommended that math educators introduce their students activities involving proofs and provide them opportunities to have argumentation experience during these activities by generating proof arguments, and conduct various activities that require students to use all proof techniques in a single task. It is further recommended that to researchers of math education to examine whether or not proof techniques affect the relationship between argumentation and proof processes while they solving non-algebraic math problems, and to characterize any such effects.

Key Words: Argumentation, Mathematical proof, Toulmin model

Number of Pages: 207

Advisor: Prof. Dr. Ahmet ARIKAN

İÇİNDEKİLER

TELİF HAKKI VE TEZ FOTOKOPİ İZİN FORMU	ii
ETİK İLKELERE UYGUNLUK BEYANI.....	iii
JÜRİ ONAY SAYFASI.....	iv
TEŞEKKÜR.....	v
ÖZ	vi
ABSTRACT	viii
İÇİNDEKİLER.....	x
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	xv
KISALTMALAR LİSTESİ.....	xxxi
BÖLÜM I	1
GİRİŞ.....	1
Problem Durumu.....	1
Araştırmanın Problem Cümlesi.....	4
Araştırmanın Amacı	4
Araştırmanın Önemi	5
Varsayımlar	5
Sınırlılıklar	5
BÖLÜM II.....	6
TEORİK ÇERÇEVE VE İLGİLİ ARAŞTIRMALAR	6
Teorik Çerçeve.....	6
Argüman.....	6
Argümantasyon.....	6
Hipotez	7
Matematiksel İspat	7

Argümantasyon ve İspat Süreci Arasındaki İlişkiler	8
Toulmin Modeli.....	12
<i>Tartışma Modeli: Veri, Gereçekler, İddia ve Yardımcı Bileşenler</i>	13
Toulmin Modeline Entegre Edilmiş Çkç Modeli.....	18
İlgili Araştırmalar	19
BÖLÜM III	26
YÖNTEM.....	26
Araştırmanın Modeli.....	26
Araştırma Grubu.....	26
Veri Toplama Aracı	27
Veri Toplama Süreci	27
Verilerin Analizi	27
BÖLÜM IV.....	29
BULGULAR.....	29
ÖA1'in Problem 1'e Yönelik Bulgularının Analizi	29
ÖA1'in Problem 1 de Tercih Ettiği Birinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi	29
ÖA1'in Problem 1 de Tercih Ettiği İkinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi	34
ÖA1'in Problem 1 de Tercih Ettiği Üçüncü İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi	36
ÖA1'in Problem 2'e Yönelik Bulgularının Analizi	38
ÖA1'in Problem 2 de Tercih Ettiği Birinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi	38
ÖA1'in Problem 2 de Tercih Ettiği İkinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi	43
ÖA1'in Problem 2 de Tercih Ettiği Üçüncü İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi	44
ÖA1'in Problem 3'e Yönelik Bulgularının Analizi	46
ÖA1'in Problem 3 de Tercih Ettiği Birinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi	46
ÖA1'in Problem 3 de Tercih Ettiği İkinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi	49
ÖA1'in Problem 4'e Yönelik Bulgularının Analizi	55

ÖA1'in Problem 4 de Tercih Ettiği Birinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi.....	55
ÖA1'in Problem 4 de Tercih Ettiği İkinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi.....	58
ÖA2'nin Problem 1'e Yönelik Bulgularının Analizi.....	60
ÖA2'nin Problem 1 de Tercih Ettiği Birinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi.....	60
ÖA2'nin Problem 1 de Tercih Ettiği İkinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi.....	63
ÖA2'nin Problem 2'e Yönelik Bulgularının Analizi.....	67
ÖA2'nin Problem 2 de Tercih Ettiği Birinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi.....	67
ÖA2'nin Problem 2 de Tercih Ettiği İkinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi.....	73
ÖA2'nin Problem 3'e Yönelik Bulgularının Analizi.....	76
ÖA2'nin Problem 3 de Tercih Ettiği Birinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi.....	76
ÖA2'nin Problem 3 de Tercih Ettiği İkinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi.....	81
ÖA2'nin Problem 3 de Tercih Ettiği Üçüncü İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi.....	84
ÖA2'nin Problem 4'e Yönelik Bulgularının Analizi.....	89
ÖA2'nin Problem 4 de Tercih Ettiği Birinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi.....	89
ÖA2'nin Problem 4 de Tercih Ettiği İkinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi.....	91
ÖA3'ün Problem 1'e Yönelik Bulgularının Analizi.....	93
ÖA3'ün Problem 1 de Tercih Ettiği Birinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi.....	93
ÖA3'ün Problem 1 de Tercih Ettiği İkinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi.....	98
ÖA3'ün Problem 2'e Yönelik Bulgularının Analizi.....	103
ÖA3'ün Problem 2 de Tercih Ettiği Birinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi.....	103
ÖA3'ün Problem 2 de Tercih Ettiği İkinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi.....	108
ÖA3'ün Problem 3'e Yönelik Bulgularının Analizi.....	110

ÖA3'ün Problem 3 de Tercih Ettiği Birinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi.....	110
ÖA3'ün Problem 3 de Tercih Ettiği İkinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi.....	114
ÖA3'ün Problem 3 de Tercih Ettiği Üçüncü İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi.....	116
ÖA3'ün Problem 4'e Yönelik Bulgularının Analizi.....	117
ÖA3'ün Problem 4 de Tercih Ettiği Birinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi.....	117
ÖA3'ün Problem 4 de Tercih Ettiği İkinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi.....	120
ÖA4'ün Problem 1'e Yönelik Bulgularının Analizi.....	121
ÖA4'ün Problem 1 de Tercih Ettiği Birinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi.....	121
ÖA4'ün Problem 1 de Tercih Ettiği İkinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi.....	126
ÖA4'ün Problem 2'e Yönelik Bulgularının Analizi.....	130
ÖA4'ün Problem 2 de Tercih Ettiği Birinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi.....	130
ÖA4'ün Problem 2 de Tercih Ettiği İkinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi.....	133
ÖA4'ün Problem 2 de Tercih Ettiği Üçüncü İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi.....	137
ÖA4'ün Problem 3'e Yönelik Bulgularının Analizi.....	140
ÖA4'ün Problem 3 de Tercih Ettiği Birinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi.....	140
ÖA4'ün Problem 3 de Tercih Ettiği İkinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi.....	150
ÖA4'ün Problem 4'e Yönelik Bulgularının Analizi.....	154
ÖA4'ün Problem 4 de Tercih Ettiği Birinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi.....	154
ÖA4'ün Problem 4 de Tercih Ettiği İkinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi.....	157
BÖLÜM V	159
SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	159
Sonuçlar.....	159

Birinci Matematiksel Probleme Ait Sonuçlar	159
<i>Tümevarımla ispat tekniğinin seçildiği çözümlere dair sonuçlar</i>	<i>160</i>
<i>Doğrudan ispat tekniğinin seçildiği çözümlere dair sonuçlar</i>	<i>161</i>
<i>Çelişkiyle ispatın seçildiği çözümlere dair sonuçlar</i>	<i>161</i>
İkinci Matematiksel Probleme Ait Sonuçlar	162
<i>Tümevarımla ispat tekniğinin seçildiği çözümlere dair sonuçlar</i>	<i>162</i>
<i>Çelişkiyle ispatın seçildiği çözümlere dair sonuçlar</i>	<i>164</i>
<i>Doğrudan ispat tekniğinin seçildiği çözümlere dair sonuçlar</i>	<i>165</i>
Üçüncü Matematiksel Probleme Ait Sonuçlar	165
<i>Doğrudan ispat tekniğinin seçildiği çözümlere dair sonuçlar</i>	<i>166</i>
<i>Çelişkiyle ispatın seçildiği çözümlere dair sonuçlar</i>	<i>166</i>
<i>Tümevarımla ispat tekniğinin seçildiği çözümlere dair sonuçlar</i>	<i>167</i>
Dördüncü Matematiksel Probleme Ait Sonuçlar	168
<i>Doğrudan ispat tekniğinin seçildiği çözümlere dair sonuçlar</i>	<i>169</i>
<i>Çelişkiyle ispatın seçildiği çözümlere dair sonuçlar</i>	<i>169</i>
Öneriler	171
KAYNAKLAR.....	173

ŞEKİLLER LİSTESİ

<i>Şekil 1. Toulmin modeline göre dedüktif argümantasyonun analizi. Güneş, S. (2013). Matematik eğitiminde argümantasyon ve kanıt süreçlerinin analizi ve karşılaştırılması. Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.</i>	10
<i>Şekil 2. Toulmin modeline göre abdüktif argümantasyonun analizi. Güneş, S. (2013). Matematik eğitiminde argümantasyon ve kanıt süreçlerinin analizi ve karşılaştırılması. Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.</i>	10
<i>Şekil 3. Toulmin modeline göre sonuç genelleme. Pedemonte, B. (2007a). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? Educational Studies in Mathematic, 66, 23-41.</i>	11
<i>Şekil 4. Toulmin modeline göre süreç genelleme. Pedemonte, B. (2007a). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? Educational Studies in Mathematic, 66, 23-41.</i>	11
<i>Şekil 5. Toulmin modelinin temel yapısı. Toulmin, S. (1958). The uses of argument. UK: Cambridge University.</i>	13
<i>Şekil 6. Toulmin modelinin temel yapısının örneği</i>	14
<i>Şekil 7. Toulmin modelinde niteleyen bileşeni. Toulmin, S. (1958). The uses of argument. UK: Cambridge University.</i>	15
<i>Şekil 8. Toulmin modelinde niteleyen bileşeninin örneği.....</i>	15
<i>Şekil 9. Toulmin modelinde çürüten bileşeni. Toulmin, S. (1958). The uses of argument. UK: Cambridge University.</i>	16
<i>Şekil 10. Toulmin modelinde çürüten bileşeninin örneği</i>	16

Şekil 11. Toulmin modelinde destek bileşeni. Toulmin, S. (1958). <i>The uses of argument</i> . UK: Cambridge University.	17
Şekil 12. Toulmin modelinde destek bileşeninin örneği	17
Şekil 13. Toulmin modeline ckç modelinin entegre edilmesi. Pedemonte, B. (2008). <i>Argumentation and algebraic proof. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik</i> , 40, 385-400.....	19
Şekil 14. Birinci matematiksel problem	29
Şekil 15. ÖA1'in birinci problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyon.....	30
Şekil 16. ÖA1'in birinci problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyonun Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (1)	30
Şekil 17. ÖA1'in birinci problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyonun Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (2)	31
Şekil 18. ÖA1'in birinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarım yoluyla ispat tekniğini kullanarak yaşadığı ispat süreci	32
Şekil 19. ÖA1'in birinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullanarak yaşadığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeli ile analizi.....	33
Şekil 20. ÖA1'in birinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullanarak yaşadığı ispat süreci	34
Şekil 21. ÖA1'in birinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullanarak yaşadığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (1)	35
Şekil 22. ÖA1'in birinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullanarak yaşadığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (2)	36
Şekil 23. ÖA1'in birinci problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullanarak yaşadığı ispat süreci	37
Şekil 24. ÖA1'in birinci problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullanarak yaşadığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi.....	37

<i>Şekil 25.</i> ÖA1'in birinci problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullanarak yaşadığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizinin devamı	38
<i>Şekil 26.</i> İkinci matematiksel problem.....	38
<i>Şekil 27.</i> ÖA1'in ikinci problemin çözümünü sırasında yaşadığı argümantasyon	39
<i>Şekil 28.</i> ÖA1'in ikinci problemin çözümünü sırasında yaşadığı argümantasyonun Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi.....	39
<i>Şekil 29.</i> ÖA1'in ikinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullanarak yaşadığı ispat süreci	40
<i>Şekil 30.</i> ÖA1'in ikinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullanarak yaşadığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (1)	40
<i>Şekil 31.</i> ÖA1'in ikinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullanarak yaşadığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (2)	41
<i>Şekil 32.</i> ÖA1'in ikinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullanarak yaşadığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (3)	42
<i>Şekil 33.</i> ÖA1'in ikinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullanarak yaşadığı ispat süreci	43
<i>Şekil 34.</i> ÖA1'in ikinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullanarak yaşadığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi	43
<i>Şekil 35.</i> ÖA1'in ikinci problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullanarak yaşadığı ispat süreci	44
<i>Şekil 36.</i> ÖA1'in ikinci problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullanarak yaşadığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi.....	45
<i>Şekil 37.</i> Üçüncü matematiksel problem.....	46
<i>Şekil 38.</i> ÖA1'in üçüncü problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyon	46

<i>Şekil 39.</i> ÖA1'in üçüncü problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyonun Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi.....	46
<i>Şekil 40.</i> ÖA1'in üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullanarak yaşadığı ispat süreci	47
<i>Şekil 41.</i> ÖA1'in üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullanarak yaşadığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (1).....	47
<i>Şekil 42.</i> ÖA1'in üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullanarak yaşadığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (2).....	48
<i>Şekil 43.</i> ÖA1'in üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı birinci yapısal argümantasyon süreci.....	49
<i>Şekil 44.</i> ÖA1'in üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı birinci yapısal argümantasyon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (1).....	49
<i>Şekil 45.</i> ÖA1'in üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı birinci yapısal argümantasyon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (2).....	50
<i>Şekil 46.</i> ÖA1'in üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı ikinci yapısal argümantasyon süreci	50
<i>Şekil 47.</i> ÖA1'in üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı ikinci yapısal argümantasyon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (1).....	51
<i>Şekil 48.</i> ÖA1'in üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı ikinci yapısal argümantasyon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (2).....	52
<i>Şekil 49.</i> ÖA1'in üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı üçüncü yapısal argümantasyon süreci	53

<i>Şekil 50.</i> ÖA1'in üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı üçüncü yapısal argümantasyon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (1).....	53
<i>Şekil 51.</i> ÖA1'in üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı üçüncü yapısal argümantasyon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (2).....	54
<i>Şekil 52.</i> Dördüncü matematiksel problem	55
<i>Şekil 53.</i> ÖA1'in dördüncü problemin çözümüne yönelik hipotez oluşturduğu argümantasyonu	55
<i>Şekil 54.</i> ÖA1'in dördüncü problemin çözümüne yönelik hipotez oluşturduğu argümantasyonun Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi	56
<i>Şekil 55.</i> ÖA1'in dördüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat süreci	56
<i>Şekil 56.</i> ÖA1'in dördüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi.....	57
<i>Şekil 57.</i> ÖA1'in dördüncü problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat süreci	58
<i>Şekil 58.</i> ÖA1'in dördüncü problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi ..	59
<i>Şekil 59.</i> Birinci matematiksel problem	60
<i>Şekil 60.</i> ÖA2'nin birinci problemin çözümüne yönelik hipotez oluşturduğu argümantasyonu	60
<i>Şekil 61.</i> ÖA2'nin birinci problemin çözümü için yaşadığı argümantasyonunun Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi.....	60
<i>Şekil 62.</i> ÖA2'nin birinci problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat süreci	61
<i>Şekil 63.</i> ÖA2'nin birinci problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi ..	62

<i>Şekil 64.</i> ÖA2'nin birinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinde yaşadığı yapısal argümantasyon süreci.....	63
<i>Şekil 65.</i> ÖA2'nin birinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinde yapısal argümantasyon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi	64
<i>Şekil 66.</i> ÖA2'nin birinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat süreci	64
<i>Şekil 67.</i> ÖA2'nin birinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi ..	65
<i>Şekil 68.</i> ÖA2'nin birinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinde yaşanan ikinci yapısal argümantasyon süreci	66
<i>Şekil 69.</i> ÖA2'nin birinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinde yaşanan ikinci yapısal argümantasyon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi.....	66
<i>Şekil 70.</i> ÖA2'nin birinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat süreci (2).....	66
<i>Şekil 71.</i> ÖA2'nin birinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin (2) Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi	67
<i>Şekil 72.</i> İkinci matematiksel problem.....	67
<i>Şekil 73.</i> ÖA2'nin ikinci problemin çözümüne yönelik hipotez oluşturduğu argümantasyonu	68
<i>Şekil 74.</i> ÖA2'nin ikinci problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyonun Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi.....	68
<i>Şekil 75.</i> ÖA2'nin ikinci problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat süreci	69
<i>Şekil 76.</i> ÖA2'nin ikinci problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi ..	70
<i>Şekil 77.</i> ÖA2'nin ikinci problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat süreci (2).....	71

<i>Şekil 78.</i> ÖA2'nin ikinci problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin (2) Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi	71
<i>Şekil 79.</i> ÖA2'nin ikinci problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat süreci (3).....	71
<i>Şekil 80.</i> ÖA2'nin ikinci problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin (3) Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi	72
<i>Şekil 81.</i> ÖA2'nin ikinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat süreci	73
<i>Şekil 82.</i> ÖA2'nin ikinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (1)	74
<i>Şekil 83.</i> ÖA2'nin ikinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (2)	75
<i>Şekil 84.</i> Üçüncü matematiksel problem.....	76
<i>Şekil 85.</i> ÖA2'nin üçüncü matematiksel problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyon	76
<i>Şekil 86.</i> ÖA2'nin üçüncü problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyonun Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi.....	77
<i>Şekil 87.</i> ÖA2'nin üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinde yaşadığı birinci yapısal argümantasyon süreci	77
<i>Şekil 88.</i> ÖA2'nin üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinde yaşadığı birinci yapısal argümantasyon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi.....	78
<i>Şekil 89.</i> ÖA2'nin üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinde yaşadığı ikinci yapısal argümantasyon süreci.....	78

<i>Şekil 90.</i> ÖA2'nin üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinde yaşadığı ikinci yapısal argümantasyon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi.....	79
<i>Şekil 91.</i> ÖA2'nin üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinde yaşadığı üçüncü yapısal argümantasyon süreci	80
<i>Şekil 92.</i> ÖA2'nin üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinde yaşadığı üçüncü yapısal argümantasyon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi.....	80
<i>Şekil 93.</i> ÖA2'nin üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat süreci	82
<i>Şekil 94.</i> ÖA2'nin üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (1)	82
<i>Şekil 95.</i> ÖA2'nin üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (2)	83
<i>Şekil 96.</i> ÖA2'nin üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı birinci yapısal argümantasyon süreci.....	84
<i>Şekil 97.</i> ÖA2'nin üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı birinci yapısal argümantayon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi	85
<i>Şekil 98.</i> ÖA2'nin üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı ikinci yapısal argümantayon süreci	86
<i>Şekil 99.</i> ÖA2'nin üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı ikinci yapısal argümantayon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (1).....	86
<i>Şekil 100.</i> ÖA2'nin üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı ikinci yapısal argümantayon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (2).....	87

<i>Şekil 101.</i> ÖA2'nin üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı üçüncü yapısal argümantasyon süreci	87
<i>Şekil 102.</i> ÖA2'nin üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı üçüncü yapısal argümantasyon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi	88
<i>Şekil 103.</i> Dördüncü matematiksel problem	89
<i>Şekil 104.</i> ÖA2'nin dördüncü problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyon	89
<i>Şekil 105.</i> ÖA2'nin dördüncü problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyonun Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi	90
<i>Şekil 106.</i> ÖA2'nin dördüncü problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat süreci	90
<i>Şekil 107.</i> ÖA2'nin dördüncü problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi ..	91
<i>Şekil 108.</i> ÖA2'nin dördüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat süreci	92
<i>Şekil 109.</i> ÖA2'nin dördüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (1)	92
<i>Şekil 110.</i> ÖA2'nin dördüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (2)	93
<i>Şekil 111.</i> Birinci matematiksel problem	93
<i>Şekil 112.</i> ÖA3'ün birinci problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyon.....	94
<i>Şekil 113.</i> ÖA3'ün birinci problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyonun Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi.....	94
<i>Şekil 114.</i> ÖA3'ün birinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat süreci (1).....	95

<i>Şekil 115.</i> ÖA3'ün birinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin (1) Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi	96
<i>Şekil 116.</i> ÖA3'ün birinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat süreci (2).....	97
<i>Şekil 117.</i> ÖA3'ün birinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin (2) Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi	97
<i>Şekil 118.</i> ÖA3'ün birinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinin başlangıcında yaşadığı yapısal argümantasyon süreci.....	98
<i>Şekil 119.</i> ÖA3'ün birinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinin başlangıcında yaşadığı yapısal argümantasyon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (1).....	98
<i>Şekil 120.</i> ÖA3'ün birinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinin başlangıcında yaşadığı yapısal argümantasyon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (2).....	99
<i>Şekil 121.</i> ÖA3'ün birinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat süreci (1).....	99
<i>Şekil 122.</i> ÖA3'ün birinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinin (1) Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (1)	100
<i>Şekil 123.</i> ÖA3'ün birinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinin (1) Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (2)	101
<i>Şekil 124.</i> ÖA3'ün birinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat süreci (2).....	102
<i>Şekil 125.</i> ÖA3'ün birinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinin (2) Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi	102
<i>Şekil 126.</i> İkinci matematiksel problem.....	103
<i>Şekil 127.</i> ÖA3'ün ikinci problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyon	103
<i>Şekil 128.</i> ÖA3'ün ikinci problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyonun Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi.....	104

<i>Şekil 129.</i> ÖA3'ün ikinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat süreci	105
<i>Şekil 130.</i> ÖA3'ün ikinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (1).....	106
<i>Şekil 131.</i> ÖA3'ün ikinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (2).....	107
<i>Şekil 132.</i> ÖA3'ün ikinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat süreci	108
<i>Şekil 133.</i> ÖA3'ün ikinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi	109
<i>Şekil 134.</i> Üçüncü matematiksel problem.....	110
<i>Şekil 135.</i> ÖA3'ün üçüncü problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyon.....	110
<i>Şekil 136.</i> ÖA3'ün üçüncü problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyonun Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi	111
<i>Şekil 137.</i> ÖA3'ün üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat süreci	112
<i>Şekil 138.</i> ÖA3'ün üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (1)	112
<i>Şekil 139.</i> ÖA3'ün üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (2)	113
<i>Şekil 140.</i> ÖA3'ün üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat süreci	114
<i>Şekil 141.</i> ÖA3'ün üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi	115
<i>Şekil 142.</i> ÖA3'ün üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat süreci	116

<i>Şekil 143.</i> ÖA3'ün üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (1).....	116
<i>Şekil 144.</i> ÖA3'ün üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (2).....	117
<i>Şekil 145.</i> Dördüncü matematiksel problem	117
<i>Şekil 146.</i> ÖA3'ün dördüncü problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyon	118
<i>Şekil 147.</i> ÖA3'ün dördüncü problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyonun Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi	118
<i>Şekil 148.</i> ÖA3'ün dördüncü problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat süreci	119
<i>Şekil 149.</i> ÖA3'ün dördüncü problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi	119
<i>Şekil 150.</i> ÖA3'ün dördüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat süreci	120
<i>Şekil 151.</i> ÖA3'ün dördüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (1).....	120
<i>Şekil 152.</i> ÖA3'ün dördüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (2).....	121
<i>Şekil 153.</i> Birinci matematiksel problem	121
<i>Şekil 154.</i> ÖA4'ün birinci problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyon.....	122
<i>Şekil 155.</i> ÖA4'ün birinci problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyonun Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi.....	122
<i>Şekil 156.</i> ÖA4'ün birinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat süreci (1).....	123
<i>Şekil 157.</i> ÖA4'ün birinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin (1) Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi	124
<i>Şekil 158.</i> ÖA4'ün birinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat süreci (2).....	125

<i>Şekil 159.</i> ÖA4'ün birinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin (2) Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi	125
<i>Şekil 160.</i> ÖA4'ün birinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı birinci yapısal argümantasyon süreci.....	126
<i>Şekil 161.</i> ÖA4'ün birinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı birinci yapısal argümantasyon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi.....	126
<i>Şekil 162.</i> ÖA4'ün birinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı ikinci yapısal argümantasyon süreci	127
<i>Şekil 163.</i> ÖA4'ün birinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı ikinci yapısal argümantasyon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi	127
<i>Şekil 164.</i> ÖA4'ün birinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat süreci (1).....	128
<i>Şekil 165.</i> ÖA4'ün birinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi.....	128
<i>Şekil 166.</i> ÖA4'ün birinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı üçüncü yapısal argümantasyon süreci	129
<i>Şekil 167.</i> ÖA4'ün birinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı üçüncü yapısal argümantasyon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi.....	129
<i>Şekil 168.</i> İkinci matematiksel problem.....	130
<i>Şekil 169.</i> ÖA4'ün ikinci problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyon.....	130
<i>Şekil 170.</i> ÖA4'ün ikinci problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyonun Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi.....	131
<i>Şekil 171.</i> ÖA4'ün ikinci problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat süreci (1).....	131

<i>Şekil 172.</i> ÖA4'ün ikinci problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin (1) Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi	132
<i>Şekil 173.</i> ÖA4'ün ikinci problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat süreci (2).....	132
<i>Şekil 174.</i> ÖA4'ün ikinci problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin (2) Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi	133
<i>Şekil 175.</i> ÖA4'ün ikinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat süreci (1).....	134
<i>Şekil 176.</i> ÖA4'ün ikinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin (1) Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi	135
<i>Şekil 177.</i> ÖA4'ün ikinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat süreci (2).....	135
<i>Şekil 178.</i> ÖA4'ün ikinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin (2) Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi	136
<i>Şekil 179.</i> ÖA4'ün ikinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat süreci	137
<i>Şekil 180.</i> ÖA4'ün ikinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (1)	137
<i>Şekil 181.</i> ÖA4'ün ikinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (2)	138
<i>Şekil 182.</i> ÖA4'ün ikinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (3)	139
<i>Şekil 183.</i> Üçüncü matematiksel problem.....	140
<i>Şekil 184.</i> ÖA4'ün üçüncü problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyon.....	140
<i>Şekil 185.</i> ÖA4'ün üçüncü problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyonun Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi	141

<i>Şekil 186.</i> ÖA4'ün üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı birinci yapısal argümantasyon süreci.....	141
<i>Şekil 187.</i> ÖA4'ün üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı birinci yapısal argümantasyon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi.....	142
<i>Şekil 188.</i> ÖA4'ün üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı ikinci yapısal argümantasyon süreci	143
<i>Şekil 189.</i> ÖA4'ün üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı ikinci yapısal argümantasyon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi	143
<i>Şekil 190.</i> ÖA4'ün üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı üçüncü yapısal argümantasyon süreci	144
<i>Şekil 191.</i> ÖA4'ün üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı üçüncü yapısal argümantasyon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (1).....	144
<i>Şekil 192.</i> ÖA4'ün üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı üçüncü yapısal argümantasyon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (2).....	145
<i>Şekil 193.</i> ÖA4'ün üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat süreci (2).....	146
<i>Şekil 194.</i> ÖA4'ün üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat süreci (2).....	147
<i>Şekil 195.</i> ÖA4'ün üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinin (2) Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (1)	147
<i>Şekil 196.</i> ÖA4'ün üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinin (2) Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (2)	148
<i>Şekil 197.</i> ÖA4'ün üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinin (2) Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (3)	149
<i>Şekil 198.</i> ÖA4'ün üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinin (2) Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (4)	150

<i>Şekil 199.</i> ÖA4'ün üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat süreci	150
<i>Şekil 200.</i> ÖA4'ün üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi	151
<i>Şekil 201.</i> ÖA4'ün üçüncü problemin çözümü için tekrar yaşadığı argümantasyon süreci	152
<i>Şekil 202.</i> ÖA4'ün üçüncü problemin çözümü için tekrar yaşadığı argümantasyon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi	152
<i>Şekil 203.</i> ÖA4'ün üçüncü problemin çözümünde tekrar tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat süreci	153
<i>Şekil 204.</i> ÖA4'ün üçüncü problemin çözümünde tekrar tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (1)	153
<i>Şekil 205.</i> ÖA4'ün üçüncü problemin çözümünde tekrar tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (2)	154
<i>Şekil 206.</i> Dördüncü matematiksel problem	154
<i>Şekil 207.</i> ÖA4'ün dördüncü problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyon	155
<i>Şekil 208.</i> ÖA4'ün dördüncü problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyonun Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi	155
<i>Şekil 209.</i> ÖA4'ün dördüncü problemin çözümünde tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat süreci	156
<i>Şekil 210.</i> ÖA4'ün dördüncü problemin çözümünde tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi	156
<i>Şekil 211.</i> ÖA4'ün dördüncü problemin çözümünde tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat süreci	157
<i>Şekil 212.</i> ÖA4'ün dördüncü problemin çözümünde tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi	158

KISALTMALAR LİSTESİ

MEB	Milli Eğitim Bakanlığı
TDK	Türk Dil Kurumu
ÖA	Öğretmen Adayı

BÖLÜM I

GİRİŞ

Bu bölümde, araştırmaya ilişkin problem durumu, araştırmanın amacı, problem cümlesi, alt problemler, araştırmanın önemi, varsayımlar ve sınırlılıklar yer almaktadır.

Problem Durumu

İçinde bulunduğumuz çağda bilgi ve iletişim teknolojileri insan hayatının her anını etkilemekte, değişen ve gelişen fikirler yeni problemleri de ortaya çıkarmaktadır. Bu yeni problemlerle birlikte matematiği problem çözmede kullanabilen, matematiğe değer veren ve matematiksel düşünme becerisi gelişmiş bireylere ihtiyaç duyulmaktadır. Eğitim-öğretim kademelerinde okutulan matematik dersinin amaçları da bu ihtiyaçlar doğrultusunda düzenlenmektedir. Örneğin; bireylerin problemlere farklı açılardan bakarak problem çözme becerilerini geliştirmeleri ortaöğretim matematik dersi öğretim programının genel amaçlarından biridir (MEB, 2018).

Matematik öğretiminde kullanılan problem çözme yaklaşımı, öğrencilerin matematiğe yönelik algılarını, kurallara dayalı bir disiplinden; araştırma, şüphe ve yaratıcılık gerektiren bir disipline doğru değiştirmelerine yardım eder. Polya (1945), problem çözmenin dört aşamadan oluştuğunu ileri sürmüştür. Bu aşamalar; problemi anlama, çözümü planlama, planlanan çözümü uygulama ve geriye bakıştır (s. xvi-xvii). Bu aşamalardan geriye bakış, çözümün geçerliliğini ve doğruluğunu kontrol etme, çözümü genelleme ve yeni problemler kurma süreçlerini içerir. Bu süreçlerden çözümü genelleme için bireylerden farklı yöntemler kullanarak sonuçları tahmin etme ve bu sonuçları matematiksel gerekçelere dayandırarak savunma, tümevarım ve tümdengelim yöntemlerini etkili bir

şekilde kullanma davranışları göstermeleri beklenir. Bu davranışların geliştirilmesi bireylerin ispat yapabilme becerisini geliştirir.

Ortaöğretim matematik dersi öğretim programının genel amaçlarından bir diğeri, bireylerin matematiksel düşünme becerisi kazanabilmeleridir (MEB, 2018). “İspat matematiksel düşünmenin kalbidir ve ispat sürecinin temelini oluşturan tündengelimli akıl yürütme, matematik ve deneysel bilimler arasındaki ayrımı örneklemektedir (Healey and Hoyles 1998 s-1, akt. Balacheff, N., 2008)”. Sözünu ettiğimiz ortaöğretim matematik dersi öğretim programının belirlediği amaçlar matematiksel ispatla ilişkili olup, bu amaçlara ulaşılabilmesi için öğrencilere kazandırmayı hedeflediği temel beceriler de bulunmaktadır. İspat yapabilme de bu becerilerden bir tanesidir.

“İspat, öğrencinin gelişen ve artan bir anlayışa (kavrayışa) sahip olmasına ilişkin bir kavramdır. Sadece matematik alanındaki çalışmalara hitap eden bir kavram olmayıp, aynı zamanda kararların alındığı ve alınmış kararların bulunduğu tüm durumlara ilişkin bir kavramdır. Matematiğin bu kavramın gelişiminde eşsiz bir katkısı vardır” (Fawcett, H., 1938, s. 120).

Hemen hemen tüm dünyada her öğretim kademesindeki öğrenciler için ispat yapmak, yapılan ispatı anlamlandırmak zor bir süreç olmuştur. Bu zorlukların aşılması için matematik öğretmenlerinin dikkat etmesi gereken bazı hususlar vardır. Bunlardan birini Tall (1998) şöyle açıklamıştır. Öğretim kademelerinde ispat yapabilme becerisi kazandırılırken öğrencilerin bilişsel gelişimi dikkate alınmalıdır. Böylece ispat kendileri için anlamlı olan formlarda sunulur. Bu, eğitimcilerden ve matematikçilerden matematiksel ispatın doğasını yeniden düşünmelerini ve bireyin bilişsel gelişimi ile ilgili farklı ispat türlerini kullanmayı düşünmelerini gerektirir (s.17). Bir diğer husus matematik öğretmenleri hem öğrencilerine daha verimli olabilmeli hem de öğrencilerinin ispat yaparken yaşadıkları zorlukların ve başarısızlıkların nedenlerini belirleyebilmelidir. Öğrencilerin yaşadıkları bu zorlukların ve başarısızlıkların nedenlerini belirleyebilmede matematik öğretmenlerine kaynak olacak bir takım araştırmalar yapılmış ve halen de yapılmaktadır.

Son dönemlerde bazı araştırmacılar öğrencilerin ispat yapmaya başlamadan önce girdikleri hipotez oluşturma sürecine odaklanmışlardır (Boero, Garuti, Lemut ve Mariotti, 1996; Boero, Garuti ve Mariotti, 1996; Inglis, Mejia-Ramos ve Simpson, 2007). Yapılan bu çalışmalar kapsamında öğrencilerin bireysel olarak veya bir grupta birlikte yapacağı bir ispata ilişkin fikir yürüttüğü, hipotezler oluşturduğu, ispatı tamamlayabilmek için kullanılacak yöntemi belirlemeye yönelik akıl yürüttüğü bu süreç argümantasyon olarak

adlandırılmıştır. Argümantasyon öğrencilerin merak duygusunu uyandırıp öğrenme sürecinde aktif olmalarını da sağlarken, anlamlı öğrenmenin gerçekleşmesine ve öğrencilerin kendini ifade edebilmesine de fırsat verir. Bu nedenle matematik eğitiminde argümantasyon, bir süre araştırmaların odak noktası olmuştur. “Argümantasyondan sonra önermenin doğruluğunu ya da yanlışlığını göstermek, başka bir ifade ile matematiksel bir topluluğu da verdiği karara ikna edebilmek için ürün üretme süreci başlar” (Doruk, 2016, s. 3). Bu süreç ise ispat süreci olarak adlandırılır. Daha sonra araştırmacılar bu iki süreç arasındaki ilişkilere odaklanan çalışmalar yapmışlardır (Fiallo ve Gutierrez, 2017; Pedemonte, 2002, 2003, 2007a, 2007b, 2008; Pedemonte ve Martinez, 2014). Çalışmalar başlangıçta geometri alanında yapılırken sonradan cebir ve analiz alanında da yapılmıştır. Bu çalışmalarda argümantasyon ve ispat süreci içerik ve yapı açısından karşılaştırılmıştır. Araştırmacılar argümantasyon ve ispat süreci arasındaki içerik sisteminde “bilişsel süreklilik” adı verilen bir süreklilik tanımlamışlardır (Boero, Garuti, Mariotti, 1996; Pedemonte, 2002). Eğer öğrenci argümantasyon sürecinde kullandığı argümanları mantıksal bir zincir halinde organize ederek ispat sürecinde de kullanmışsa burada öğrenci bilişsel süreklilik kurmaktadır. Yapılan bazı araştırmalarda öğrencilerin bilişsel süreklilik kursa bile ispatı başarıyla tamamlayamadığı gözlemlenmiştir. Bunun üzerine araştırmacılar argümantasyon ve ispat süreci arasındaki ilişkiyi yapı açısından analiz etmeye başlamışlardır. Pedemonte (2007b) çalışmasında, argümantasyon ve ispatın abdüktif, dedüktif ya da indüktif yapıda olacağını belirtmiştir. Abdüktif yapı ile elde veri olmadan bir takım gerekçelerle bir iddiaya ulaşmak, dedüktif yapı ile verilerden gerekçeler aracılığıyla bir iddiaya ulaşmak, indüktif yapı ile de bazı özel durumları genelleyerek bir iddiaya ulaşmak kastedilmektedir. Bunun üzerine Pedemonte (2007b) argümantasyon sürecinde kurulan yapının ispatta da devam ettirilmesi durumunda iki süreç arasında “yapısal süreklilik” olduğunu söylemiştir.

Literatür incelendiğinde ülkemizde argümantasyon ve ispat süreci arasındaki ilişkiyi inceleyen çalışma sayısının az olduğu görülmüştür. Bu çalışmalar;

- Ortaöğretim öğrencilerinin geometri alanındaki argümantasyon ve ispat süreçleri arasındaki ilişkilerin incelendiği (Bülbül ve Urhan, 2016),
- İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının analiz alanındaki argümantasyon ve ispat süreçlerinin incelendiği (Doruk, 2016),

- Argümantasyon ve matematiksel ispat süreçlerini karşılaştıran ve bu iki süreç arasındaki ilişki ya da ilişkileri Toulmin Modeli'ne göre analiz eden çalışmaların derlendiği (Güneş, 2013, s. i),
- Matematik lisans derslerinde gerçekleştirilen tartışmalarda, öğrencilerin attıkları adımların yapısını özellikle yaptıkları muhakemeleri, birbirleriyle ve öğretmenleriyle olan etkileşimlerinin incelendiği ve Toulmin tarafından alandan bağımsız olarak önerilen Toulmin tartışma modelinin söz konusu tartışmaların yapısını incelemek için nasıl kullanılacağına araştırıldığı (Dinçer, 2011, s. i)

çalışmalardır. Ulusal ve uluslararası çalışmalar incelendiğinde seçilen ispat tekniğinin argümantasyon ve ispat süreçleri arasındaki ilişkiyi etkileyip etkilemediğine, etkiliyorsa nasıl etkilediğine yönelik çalışmalara rastlanmamıştır. Bu nedenle bu çalışmada öğretmen adaylarının matematiksel problemleri çözerken oluşan argümantasyon ve ispat süreçleri arasındaki ilişkileri incelenirken seçilen ispat teknikleri de dikkate alınmıştır.

Araştırmanın Problem Cümlesi

Araştırmada “Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının, matematiksel problemleri çözerken ortaya çıkan argümantasyon ve ispat süreci arasındaki ilişki, yapısal ve bilişsel açıdan incelendiğinde nasıldır?” sorusuna yanıt aranmıştır. Bu araştırma sorusu kapsamında “Seçilen ispat teknikleri matematiksel problemleri çözerken oluşan argümantasyon ve ispat süreci arasındaki ilişkiyi nasıl etkiler?” alt problemine yanıt aranmıştır.

Araştırmanın Amacı

Öğretmen adayları hem öğrencilerine daha verimli olabilmeli hem de öğrencilerinin ispat yaparken yaşadıkları zorlukların ve başarısızlıkların nedenlerini belirleyebilmelidir. Bunun için de öğretmen adayları ispat sürecinden önce yaşanan argümantasyonun ve argümantasyon ile ispat süreci arasında bir ilişki olduğunun farkında olabilmelidir. Buna yönelik olarak araştırmanın amacı, matematik öğretmen adaylarının matematiksel problemleri çözerken oluşan argümantasyon ve ispat süreçlerinin incelenerek bu süreçler arasındaki ilişkilerin açığa çıkarılmasıdır. Çalışmada öğretmen adaylarının farklı ispat yöntemlerini seçerek doğrulayabilecekleri problemler kullanılmıştır. Buradan da

matematiksel problemleri çözerken oluşan argümantasyon ve ispat süreci arasındaki ilişkinin kullanılan farklı ispat yöntemlerine göre değişkenlik gösterip göstermediğini ortaya çıkarmak amaçlanmıştır.

Araştırmanın Önemi

Matematik ve diğer bilim alanlarındaki gelişmeler mevcut sistemlerin tanımlarının ve özelliklerinin tekrar gözden geçirilmesine neden olmaktadır. Bu gözden geçirmeler yeni sistemlerin oluşmasına ve oluşan bu sistemlerin özelliklerinin incelenmesine zemin hazırlamaktadır. Hatta yeni sistemlerden bazıları eski sistemlerin daha iyi anlaşılabilmesine ışık tutar. Artık fikirlerin, anlaşılması ve keşfedilmesi gereken yeni bir dünyası vardır ve bu dünyaya girmek için matematiksel ispat ve soyutlama yöntemlerinin kullanılması gerekmektedir (Argün, Arıkan, Bulut ve Halıcıoğlu, 2014, s. 234).

Yapılan ispatları anlamlandırmak, bir ispat yapabilmek veya ispat yaparken yaşanan zorlukların ve başarısızlıkların nedenlerini belirleyebilmek için ispat sürecini tanımak oldukça önemlidir. Bunun için de öğrencilerin ispat yapmaya başlamadan önceki hipotez oluşturma süreci olan argümantasyon süreci ile ilgilenilmelidir. Sadece ispat süreci ile ilgilenmek yeterli olmayacağı gibi sadece argümantasyon ile ilgilenmek de yeterli olmamaktadır. Bu nedenle ispat süreci ile argümantasyon arasındaki ilişkilere de odaklanılmalıdır. Öğretmenlerde bu konu ile ilgili farkındalık oluşturmak önemlidir. Çünkü bu konuda bilgisi olmayan bir öğretmen dersin işlenişini bu doğrultuda ayarlayamayabilir. Dolayısıyla bu araştırmanın ispat yapmaya yönelik temellerin atıldığı ortaöğretim ve ispatla fazlasıyla iç içe olunan lisans düzeyindeki tüm ilgili kişilere fayda sağlayacağı düşünülmektedir.

Varsayımlar

Araştırmanın varsayımı bulunmamaktadır.

Sınırlılıklar

Araştırmada araştırmacıyı sınırlayan bir şey bulunmamaktadır.

BÖLÜM II

TEORİK ÇERÇEVE VE İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

Bu bölümde araştırmaya ilişkin teorik çerçeve ve ilgili araştırmalar yer alacaktır.

Teorik Çerçeve

Argüman

“Argüman” kavramı Türk Dil Kurumu’nda “kanıt, tez, iddia, sav” olarak tanımlanmıştır. Webster’ın sözlüğünde ise “ kanıt veya çürütme için gösterilen bir neden” ve “ikna etmeyi amaçlayan söylem” olarak tanımlanmıştır. Argümana dair daha detaylı bir tanım Wood(1999) tarafından “bazı düşünce biçimlerini kullanarak başkalarını ikna etmek amacıyla katılımcılar arasında söylemsel bir değişim” olarak verilmiştir.

Bu tez çalışması kapsamında incelenen çalışmalarda araştırmacılar argüman kavramını “bir iddianın ortaya atılması ve bu iddianın desteklenmesi veya çürütülmesi için geliştirilen nedenler” anlamında kullanmıştır (Pedemonte, 2002, 2003, 2007a, 2007b, 2008; Douek, 1998).

Argümantasyon

Webster’ın sözlüğünde argümantasyon, “nedenleri belirleme, sonuç çıkarma, tartışma durumunda bu sonuçlara başvurma” ve “bir şeyi savunmak veya kanıt yapmak amacıyla yazma ya da konuşma işlevi” olarak tanımlanmıştır. Argümantasyon bir argümanın

geliştirilmesi veya sunulması işlemidir (Lavy, 2006). Özetle, bir argümantasyon, bir veya daha fazla mantıksal olarak bağlı argümandan oluşur (Douek, 1998).

Argümantasyon, muhatabımız için anlaşmazlığa neden olan bir bakış açısının kabul edilebilirliğini artırmak veya azaltmak amacıyla yapılan sözel ve sosyal bir muhakeme aktivitesidir. Bu aktivite, rasyonel bir karara varmadan önce söz konusu bakış açısını savunmak veya reddetmek amacıyla bir takım önermeler sunarak gerçekleştirilir (Eemeren ve diğerlerinden aktaran Dinçer, 2011, s. 1).

Matematik eğitimi alanında yapılan çalışmalar incelendiğinde bu çalışmalarda genellikle, argümantasyon, öğrencinin bireysel olarak veya bir grupta birlikte yapacağı bir ispata ilişkin fikir yürüttüğü, varsayımlar oluşturduğu, ispatı tamamlayabilmek için kullanılacak yöntemi belirlemeye yönelik akıl yürüttüğü bir süreç olarak kullanılmıştır (Boero, Garuti, Mariotti, 1996; Pedemonte, 2002).

Hipotez

Hipotez kavramı TDK'da varsayım, önsav, deneylerle tam olarak kanıtlanmamış kuram, araştırmanın başlangıcında henüz doğruluğu veya yanlışlığı kestirilemeyen bir öneri veya ön beklenti olarak tanımlanmıştır. Argün, Arıkan Bulut ve Halıcıoğlu'na (2014) göre hipotez “iki ya da daha fazla değişken arasındaki ilişkiye ait doğruluğu kesin olmayan ancak tecrübelerle doğruluğu hissedilen ifadelerdir. Ayrıca bilimsel yöntemlerde olaylar arasında ilişkiler kurmak ve olayları bir nedene bağlamak üzere tasarlanan ve geçerli sayılan bir önermedir” (s. 212).

Matematiksel İspat

İspat kavramı TDK'da “tanıt ve kanıt göstererek bir şeyin gerçek yönünü ortaya çıkarma, kanıtlama, tanıtlama” olarak tanımlanmıştır. Webster'ın sözlüğünde ise “bir ifadenin geçerliliğini özellikle mantık ilkelerine uygun olarak diğer ifadelerden türeterek oluşturma süreci veya durumu” biçiminde tanımlanmıştır. Argün vd. (2014)'ne göre ispat “yeterli delil göstererek bir yargı, sav ya da üretilen bir fikrin doğruluğuna ya da yanlışlığına ikna etme veya kabul ettirmedir” (s. 234).

“Matematiksel ispat; bir sonucu doğrulamak, başkalarını bilgilendirmek ve bu bilgiye ikna etmek, bir sonuç bulmak ve sonuçları tümdengelimsel bir sistemin içine yerleştirmek için kullanılır” (Almeida, 2003). Pedemonte'ye (2000) göre “hipotezi açıklayan ifade; bir matematiksel teori kullanılarak geçerli hale getirildiğinde ispat üretilmiş demektir ve bu

ispat matematiksel teori üzerine kurulmuş özel bir argümantasyondur” (Pedemonte’den aktaran Güneş, 2013, s. 17).

Pedemonte (2007a) çalışmasında matematikte, argümantasyon ve ispatın aralarındaki ortak yönleri açıklayan dört işlevsel özelliğin tanımlanabileceğini belirtmiştir. Bu özellikler şunlardır:

1. Argümantasyon ve ispat matematikte mantıklı gerekçeler olarak kabul edilebilir.
2. Argümantasyon ve ispatlar matematikte ikna etmeyi sağlar.
3. Matematikte argüman ve ispatlar evrensel bir izleyici kitleye hitap etmektedir.
4. Matematikte argümantasyon ve ispat bir alana aittir.

Argümantasyon ve İspat Süreci Arasındaki İlişkiler

Matematik eğitimi alanında yapılmış çalışmalar incelendiğinde argümantasyon ve ispat süreci iki açıdan karşılaştırılmıştır: içerik ve yapı. Pedemonte (2007b), çalışmasında bir hipotezi destekleyen argümantasyonu ve ispatı analiz etmek ve karşılaştırmak için teorik bir çerçeve geliştirmiştir. Pedemonte’ye (2007b) göre bu karşılaştırma, argümantasyon ile ispat arasındaki sürekliliği veya mesafeyi iki bakış açısıyla analiz ederek gerçekleştirilebilir: referanssal sistem ve yapı. Pedemonte (2007b) burada referanssal sistem ile (aynı zamanda diğer matematik eğitimi araştırmacılarına göre içerik ile), argümantasyon ve ispatın hem temsil sistemlerini (dil, çizim) hem de bilgi sistemlerini (kavramlar, teoremler) kastetmektedir. Yapıyla ise ifadeler arasındaki mantıksal bilişsel bağlantıyı (abdüktif, dedüktif, indüktif) kastetmektedir. Örneğin; bir hipotezi destekleyen argümantasyonda kullanılan bazı kelimeler, çizimler, teoremler ispatta da kullanılmışsa argümantasyon ve ispat arasında bir süreklilik vardır. Argümantasyonda kullanılan bazı abdüktif adımlar ispatta da mevcutsa argümantasyon ve ispat arasında yapısal bir süreklilik vardır. Aksi halde, argümantasyon yapısı abdüktif, ispat yapısı dedüktif ise ikisi arasında yapısal bir mesafe vardır.

Araştırmacılar argümantasyon ve ispat arasındaki ilişkileri ilk olarak içerik açısından analiz etmişlerdir. Çünkü argümantasyon ve ispat süreci analiz edildiğinde ispatı başarı ile tamamlayan öğrencilerin argümantasyon ve ispat sürecinde benzer dilsel öğeleri kullanmaları araştırmacıların dikkatini ilk çeken durum olmuştur (Bülbül ve Urhan, 2016).

Hipotezin üretimi esnasında, öğrenci kendi seçimlerinin olasılığının doğrulanması ile işlevsel olarak yoğun bir argümantasyon etkinliği yoluyla kademeli olarak kendi ifadesini üretir. Bir sonraki ispatlama aşamasında, öğrenci üretmiş olduğu argümanların bazılarını mantıksal bir

zincir halinde organize ederek tutarlı bir şekilde ispatlama süreci ile argümantasyon sürecini birbirine bağlar (Boero, Garuti, Mariotti, 1996).

Bu durum araştırmacılar (Boero, Garuti, Mariotti, 1996) tarafından “bilişsel süreklilik” veya “bilişsel bütünlük” olarak adlandırılmıştır.

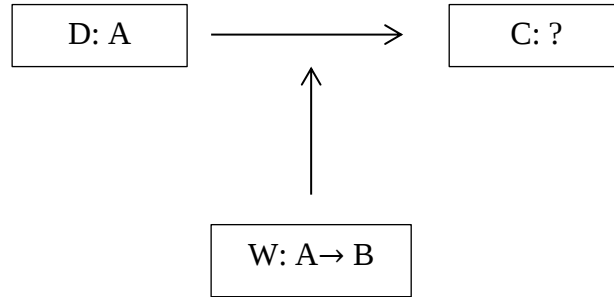
Bir problem çözme işlemi sırasında bir hipotez oluşturmak için genellikle bir argümantasyon etkinliği geliştirilir. “Bilişsel süreklilik hipotezi, bazı durumlarda bir argümantasyonu öğrencinin daha önce ürettiği argümanlardan bazılarını mantıksal bir zincir halinde organize ederek ispatı inşa etmede kullanabileceği hipotezidir” (Pedemonte, 2007b). Bilişsel süreklilik ile ilgili bir deneysel araştırma, bir hipotez oluşturmak için bir argümantasyon etkinliği geliştirildiğinde ispatın öğrenciler için daha “erişilebilir” olduğunu gösterir (Boero, Garuti, Mariotti, 1996).

Bilişsel süreklilik, öğrencilerin ispatın yapımında karşılaştıkları bazı zorlukları öngörmek ve analiz etmek için de kullanılabilmektedir (Güneş, 2013, s. 57). Buna yönelik olarak Pedemonte (2005) argümantasyon ve ispat arasındaki bilişsel sürekliliği analiz etmek için bir araç bulmanın gerekli ve önemli olduğunu düşünmüş ve bu ihtiyaca yönelik olarak çalışmasında Toulmin modeli içerisine cık modelini entegre ederek argümantasyonun ve ispatın içerik açısından kıyaslaması için bir araç ortaya koymuştur (Pedemonte’den aktaran Pedemonte, 2007a).

Matematik eğitiminde argümantasyon ve ispat arasındaki ilişkileri inceleyen araştırmalarda, deneyler sırasında, bazı öğrencilerin ispatın inşası için bir teorem bilmeleri halinde bile bir ispat oluşturamadıkları görülmüştür (Pedemonte, 2007a). Bu gerçek, bilişsel süreklilik hipoteziyle eşleşmemektedir. Pedemonte (2007a), bilişsel süreklilik çalışmasının bazı öğrencilerin ispat oluşturamamalarını açıklamak için yeterli olmadığını belirtmiştir. Bu nedenle çalışmasını, analizi daha ayrıntılı olarak incelemek ve özellikle de daha önce dikkate alınmayan bir sürekliliği göz önüne almak için yapmıştır. Bu süreklilik yapısal sürekliliktir. Araştırmacılara göre eğer argümantasyon ispatla aynı yapıya (abdüktif, dedüktif, indüktif) sahipse aralarında yapısal süreklilik vardır. Muhakeme (ya da çıkarım) tarzı olan bu yapılar tek başına dedüksiyon, abdüksiyon ve indüksiyon olarak da adlandırılmaktadır (Güneş, 2013, s. 58).

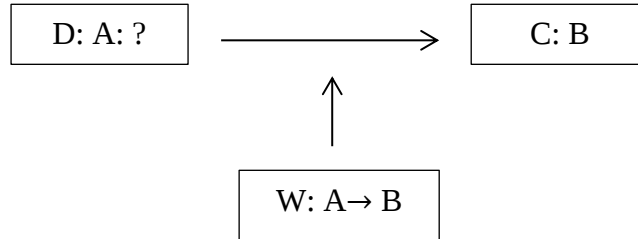
Dedüksiyon, bazı verilerden ve bir kuraldan yola çıkılarak bir iddia oluşturulmasına izin veren bir çıkarımdır (Pedemonte, 2007a). Dedüktif bir argümantasyonda, ifade verilerden bir ilke aracılığıyla çıkartılır (Pedemonte, 2002). Toulmin modeline göre dedüktif argümatasyonun analizi şu şekilde temsil edilmektedir. Toulmin modelinde D ile veri, C ile

iddia, W ile de gerekçe simgelenmiştir. Bunların detaylı anlatımı ilerleyen sayfalarda “Toulmin Modeli” başlığı altında yapılmıştır.



Şekil 1. Toulmin modeline göre dedüktif argümantasyonun analizi. Güneş, S. (2013). *Matematik eğitiminde argümantasyon ve kanıt süreçlerinin analizi ve karşılaştırılması*. Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Abdüksiyon, gözlenen bir gerçekten başlayarak, bir iddianın yapımını sağlayan bir çıkarımdır (Magnani; Peirce; Polya’dan aktaran Pedemonte, 2007a). Abdüktif bir argümantasyonda, ifade veri tanımlanmadan önce ortaya konulur (Arzarello’dan aktaran Pedemonte, 2002). Bu durumda bir gerçek, verilerin tümüne ulaşılsa bile bir ifadenin elde edilmesini sağlar. Toulmin modeline göre abdüktif argümantasyonun analizi şu şekilde temsil edilmektedir.

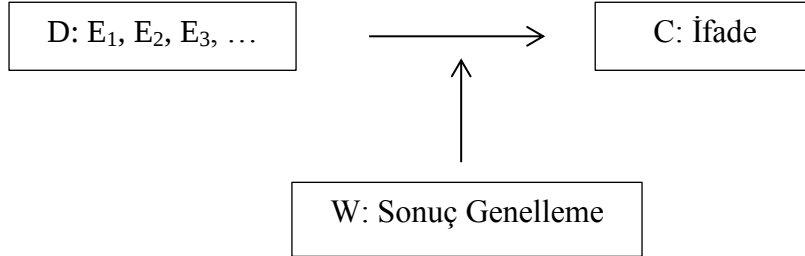


Şekil 2. Toulmin modeline göre abdüktif argümantasyonun analizi. Güneş, S. (2013). *Matematik eğitiminde argümantasyon ve kanıt süreçlerinin analizi ve karşılaştırılması*. Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

İndüksiyon, bazı özel durumlardan genellemenin yapılmasına olanak sağlayan bir çıkarımdır (Pedemonte, 2007a). İndüktif bir argümantasyonda ifade belirli durumlardan sonra yapılan genel bir durumla elde edilir (Pedemonte, 2002).

Genelleme, indüktif argümantasyonlarda önemli bir rol oynamaktadır. İndüktif bir süreçte rol oynayan iki farklı genelleme tanımlanmıştır: Sonuç genelleme (result pattern generalisation) ve süreç genelleme (process pattern generalisation) (Harel, G., 2001. s. 11).

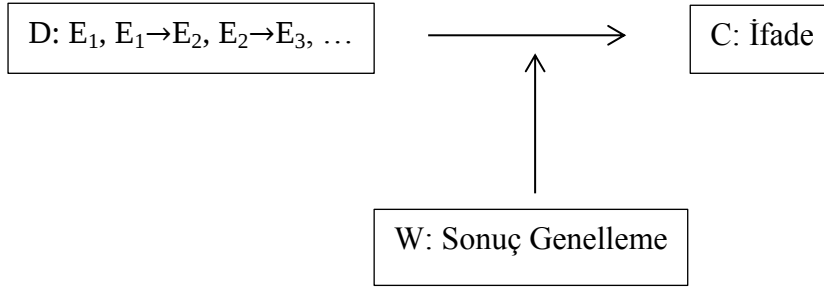
Sonuç genellemede sonuçlardaki düzene odaklanılmaktadır. Toulmin modeline göre sonuç genelleme şu şekilde temsil edilmektedir: $E_1, 2, 3, \dots$ durumları üzerine genellenen bir özellik olmak üzere $E_1, E_2, E_3, \dots$



Şekil 3. Toulmin modeline göre sonuç genelleme. Pedemonte, B. (2007a). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematic*, 66, 23-41.

Burada $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$ bir önceki adımın iddialarıdır. Veriler arasında bir çıkarım yoktur; birlikte ifadeyi oluştururlar.

Süreç genellemede ise süreçteki düzene odaklanılır. Genelleme bir durumu bir sonraki duruma bağlayan çıkarım ile yapılır. Toulmin modeline göre süreç genelleme şu şekilde temsil edilmektedir.



Şekil 4. Toulmin modeline göre süreç genelleme. Pedemonte, B. (2007a). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematic*, 66, 23-41.

$E_1, E_1 \rightarrow E_2, E_2 \rightarrow E_3, \dots$ önceki argümanlardır. Veriler arasında zincirleme bir çıkarım vardır.

Pedemonte (2007a), argümantasyon sürecinde hipotezin ortaya konma şekline göre açığa çıkan iki argümantasyon çeşidinden söz etmiştir: Yapılandırıcı (constructive) argümantasyon ve yapısal (structurant) argümantasyon. Yapılandırıcı argümantasyon bir

hipotez oluşturmaya karşılık gelmektedir (Pedemonte, 2002). Yapılandırıcı argümantasyon bazen yalnızca sayısal örneklerle yapılan bir genellemedir. Cebirsel kuralların sistematik bir şekilde uygulanmasını gerektiren ispat aşamasında, ispatın her basamağı bir önceki basamağın belirli bir kurala göre dönüştürölmesidir (Pedemonte, 2007b). Yapısal argümantasyon ise, özellikle bir hipotezin bir “gerçek” olarak verildiğı durumlarda hipotezi doğrulamak için üretilmektedir (Pedemonte, 2002). Pedemonte (2007b), bu tip argümantasyonların cebirde açık uçlu problemlerin çözümünde önemli bir rol oynayabileceğini düşünmüştür.

Hipotezin argümantasyon sürecinin başında bir gerçek olarak ortaya konması ya da bir takım ifadelerin oluşturulmasından ya da sayısal denemelerin yapılmasının ardında argümantasyon sürecinin sonunda ortaya konmasına bağı olarak belirlenen yapısal ve yapılandırıcı argümantasyon çeşitleri farklı yapıda argümantasyon süreçlerinde yer alabilirler. Doğası gereğı yapısal argümantasyon abdükatif ya da indükatif; yapılandırıcı argümantasyon ise dedükatif ya da indükatif argümantasyon sürecinin içine girebilmektedir (Güneş, 2013, s. 87).

Pedemonte (2007a), matematikte argümantasyon ve ispat arasındaki yapısal süreklilik ya da mesafenin analizinde Toulmin modelinin kullanılabileceğinden söz etmiştir.

Toulmin Modeli

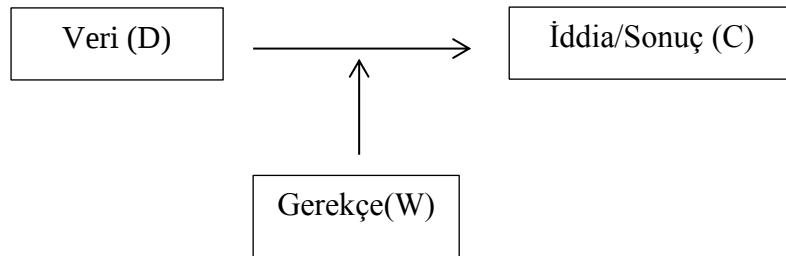
Toulmin (1958), tartışmaları analiz etmek için var olan formel mantık yaklaşımlarından uzaklaşan yaklaşımını “The Uses of Argument (Argümanların Kullanımı)” adlı kitabında savunmuştur. Toulmin bir tartışmanın mantıksal geçerliliğinden daha çok argümanın mantıksal içeriğine ve yapısına odaklanmıştır. (Inglis, Mejia-Ramos, Simpson, 2007). Dolayısıyla Toulmin “Toulmin’in anti-mantıksal kitabı” olarak bilinen The Uses of Argument (Argümanların Kullanımı) kitabında çağdaş bir yol betimlemiştir (Toulmin 2001 tarafından bildirilen bir açıklama) (Inglis, Mejia-Ramos, Simpson, 2007).

Toulmin belli bir alan ya da konu üzerine yapılan tartışmanın yapısını analiz etmek için altı bileşenli bir yapı oluşturmuştur. Zamanla bu model “Toulmin Modeli” adını almıştır. Toulmin (1958), bu modeli hukuki davaların temele alındığı durumlar için geliştirmiştir. Sonraları bu model farklı araştırmacılar tarafından farklı alanlarda kullanılmıştır.

Tartışma Modeli: Veri, Gerekçeler, İddia ve Yardımcı Bileşenler

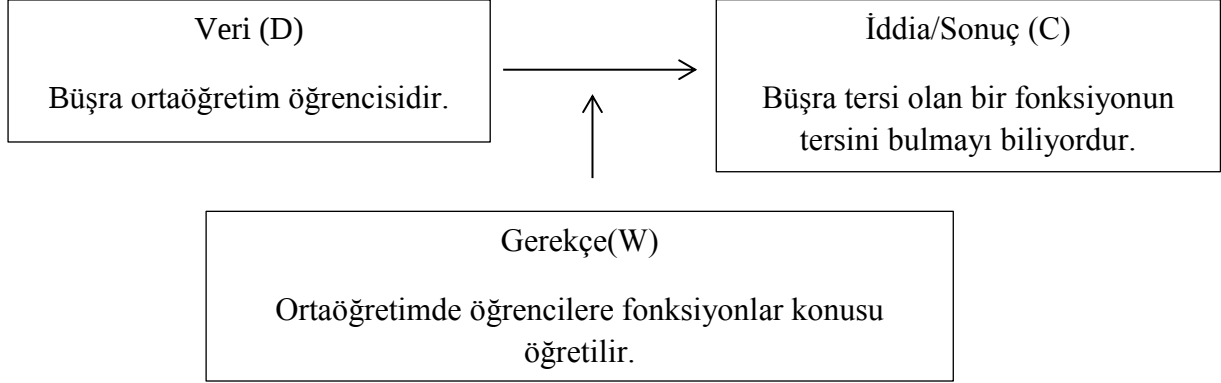
Toulmin, modelinin sahip olduğu bileşenlerin birbirinden nasıl ayırt edileceğine “The Uses of Argument” kitabında değinmiştir ve ilk olarak veri ile gerekçe bileşenleri arasındaki ayrımı ortaya koymuştur. Toulmin’e göre aradığımız sonuç/iddia (Claim (C)) ile sonucumuza bir temel olması için başvurduğumuz gerçekler arasında (Toulmin bu gerçekleri “veri (Data (D))” olarak adlandırmıştır) kesin bir ayrım vardır. Eğer tartışmadaki muhatabımızın sorusu “İlerlemek için neye sahipsın? (What have you got to go on ?)” ise, sonucun dayandığı bilgiyi veya veriyi üretmemiz muhatabımıza cevap verebilir; ancak bu, sonuca itirazda bulunulabilecek yollardan yalnızca biridir. Verilerimizi ürettikten sonra bile, bize başka sorular sorulabilir. Şimdi daha önce yaptığımız gibi gerçeklere dayalı bir bilgi vermek yerine, veriden sonuca nasıl gittiğimizi göstermeliyiz. Yani, bize sorulan soru “ilerlemek için neye sahipsın? (What have you got to go on ?)” yerine “oraya nasıl gidiyorsun? (How do you get there ?)” olabilir. Yeni bir meydan okumayla karşılaştığımızı düşünürsek, daha fazla veri değil, veriler için aynı sorgu daha da artırılabilir. Bu durumda verimize bir takım maddeler eklemek yerine, kurallar, prensipler, çıkarımlar veya istediğimiz başka bir şey sunarız. Amacımız, tartışmamız için temel görevi gören verimizi savunmak değil bu veriyi bir başlangıç noktası olarak alıp, sonucumuza giden bir adımın uygun olduğunu göstermektir. Bu noktada genel olarak ihtiyacımız olan şey veri ile sonuç arasında köprü görevi görecek olan varsayımsal ifadelerdir. Toulmin, bu tür ifadeleri “gerekçe (Warrant(W))” olarak adlandırmıştır.

Şimdi, Toulmin’e göre bir tartışmayı incelemek için gerekli olan modelin ilk iskeletini çıkarabilecek bileşenlere sahibiz. Veri ile sonuç arasındaki ilişkiyi yönlü bir ok ile veriden sonuca giden adımı yani gerekçeyi de çizdiğimiz oka doğru yönlendirilmiş olan başka bir yönlü ok ile sembolize edeceğiz.



Şekil 5. Toulmin modelinin temel yapısı. Toulmin, S. (1958). *The uses of argument*. UK: Cambridge University.

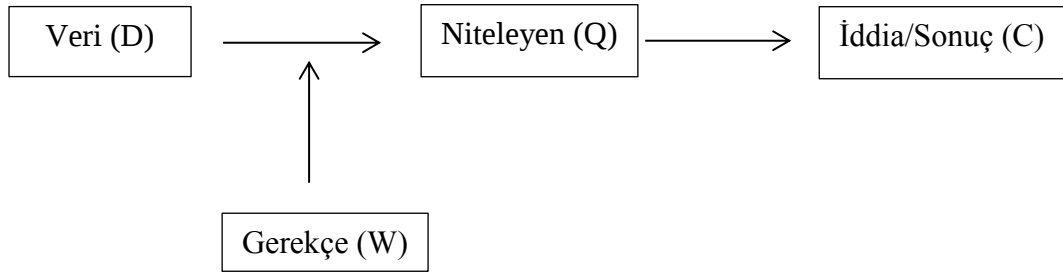
“Büşra ortaöğretim öğrencisidir. Ortaöğretimde öğrencilere fonksiyonlar konusu öğretildiğinden Büşra, tersi olan bir fonksiyonun tersini bulmayı biliyordur.” ifadesini yukarıdaki modele göre bileşenlerine ayıralım.



Şekil 6. Toulmin modelinin temel yapısının örneği

Bu örüntüden açıkça belli olduğu üzere sonuç, veriden direkt olarak çıkmaktadır. Burada gerekçe bir anlamda açıklayıcı ve isteğe bağlıdır. Gerekçenin görevi veriden sonuca doğru atılan adımın geçerliğini göstermektir (Toulmin, 1958). Toulmin (1958) gerekçeyi ilk olarak, veri ile sonuç arasında köprü görevi görecek olan varsayımsal ifadeler şeklinde tanımlamasına rağmen, gerekçenin açıklayıcı bir ifade olabileceğini de ifade etmiştir.

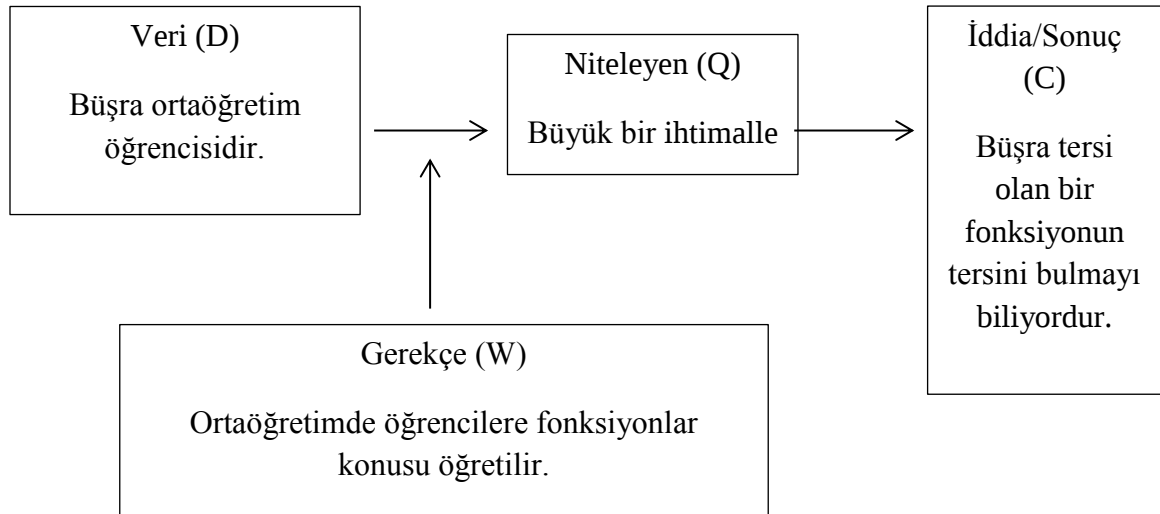
Toulmin (1958)’in belirttiği üzere yukarıda tanımlanan örüntünün iskeleti sadece bir başlangıçtır. Bunun dışında dikkat edilmesi gereken başka soruların da ortaya çıkması mümkündür. Farklı türde gerekçeler vardır ve savundukları sonuçlar üzerinde farklı derecede güce (etkiye) sahiptirler. Bazı gerekçeler bizi açıkça sonuca götürür. Bu tür gerekçeler bize sonucumuzu “kesinlikle, mutlaka” gibi zarflarla değerlendirmemize olanak tanır. Bazı gerekçeler bizi kesin olmayan bir şekilde veya koşullara, istisnalara, sınırlamalara bağlı olarak sonuca götürür. Bu gibi durumlarda sonucumuzu “muhtemelen, büyük ihtimalle, galiba” gibi zarflarla değerlendiririz. Bu yüzden tartışma analizi için olan bir örüntüde sadece veri, gerekçe ve sonuç gibi bileşenlerin olması yeterli değildir. Verimizin, gerekçe vasıtasıyla elde edilen sonuç üzerindeki etkisinin (gücünün) derecesini ifade eden bir ifadeye ihtiyaç vardır ve bu ifadeyi Toulmin “niteleyen (Qualifier (Q))” olarak isimlendirmiştir. Niteleyen bileşeninin de eklenmesiyle yeni modelin şekli aşağıdaki gibi olur.



Şekil 7. Toulmin modelinde niteleyen bileşeni. Toulmin, S. (1958). *The uses of argument*. UK: Cambridge University.

Burada niteleyen bileşeninden sonra çizilen yönlü ok, sonucun niteleyenden çıktığı anlamında değil, niteleyenin, gerekçeye dayanarak verinin sonuç üzerindeki etkisinin derecesini gösterdiği anlamında kullanılmıştır.

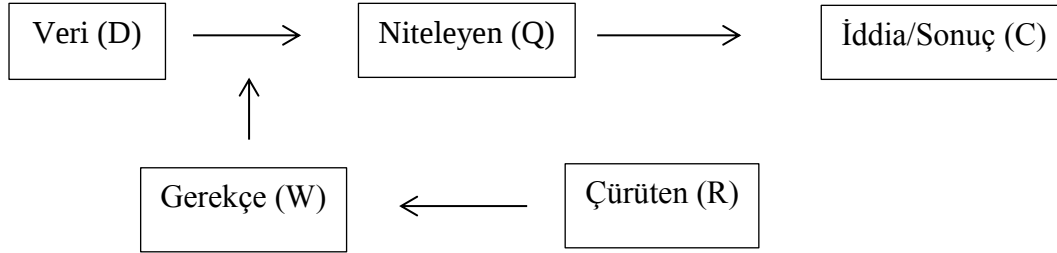
Örneğin, “Büşra ortaöğretim öğrencisidir. Ortaöğretimde öğrencilere fonksiyonlar konusu öğretildiğinden Büşra, büyük bir ihtimalle tersi olan bir fonksiyonun tersini bulmayı biliyordur.” ifadesini yukarıdaki modele göre bileşenlerine ayıralım.



Şekil 8. Toulmin modelinde niteleyen bileşeninin örneği

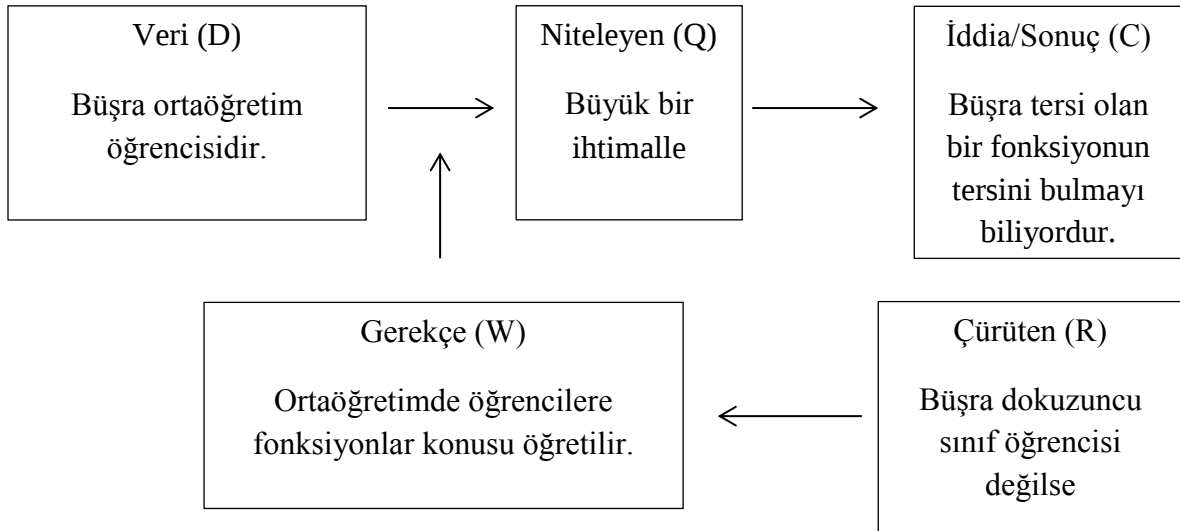
Bir davada sadece verilen bir kanuna ya da genel hukuk doktrinine başvurulmaz, kanunun söz konusu davaya hangi oranda uyduğu, davaya uygulanıp uygulanamayacağı, bazı özel gerçeklerin davayı o kanun için bir istisna haline getirip getirmediği veya kanunun belli niteleyenlere bağlı olarak uygulanıp uygulanmayacağı açık bir şekilde tartışılır (Toulmin, 1958). Eğer tartışmanın bu özellikleri modelin yapısına katılacak olunursa, model daha karmaşık bir yapıya bürünecektir. Bu özellikler için modelde ayrı bir yer vermek gerekir. Toulmin gerekçenin genel gücünü, etkisini zayıflatan ya da geçersiz kılan istisnai koşulları

“çürüten (Rebuttal (R))” olarak adlandırılmıştır. Çürüten bileşeninin de eklenmesiyle aranan modelin şekli aşağıdaki gibi olur.



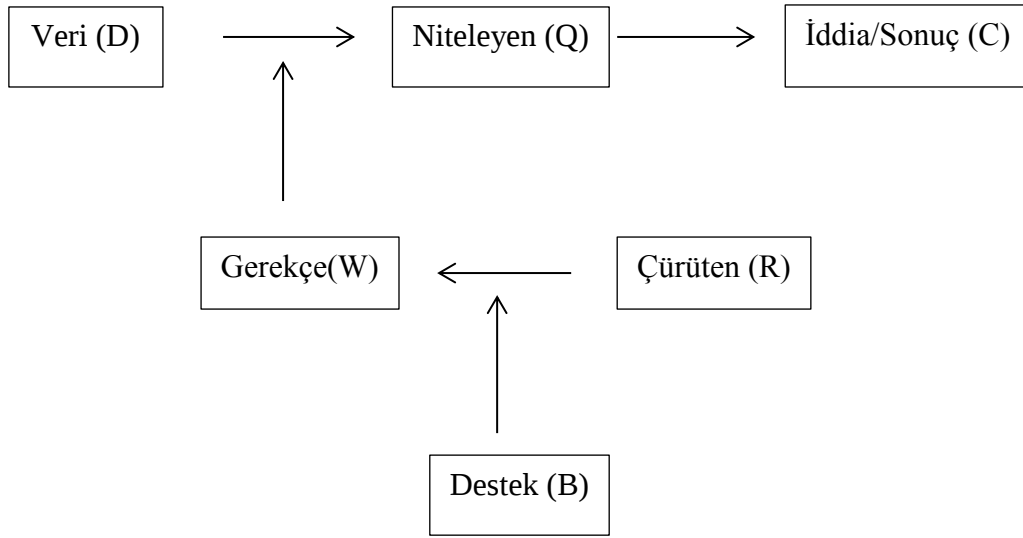
Şekil 9. Toulmin modelinde çürüten bileşeni. Toulmin, S. (1958). *The uses of argument*. UK: Cambridge University.

Örneğin, “Büşra ortaöğretim öğrencisidir. Ortaöğretimde öğrencilere fonksiyonlar konusu öğretildiğinden ve Büşra dokuzuncu sınıf öğrencisi değilse büyük bir ihtimalle tersi olan bir fonksiyonun tersini bulmayı biliyordur.” ifadesini yukarıdaki modele göre bileşenlerine ayıralım.



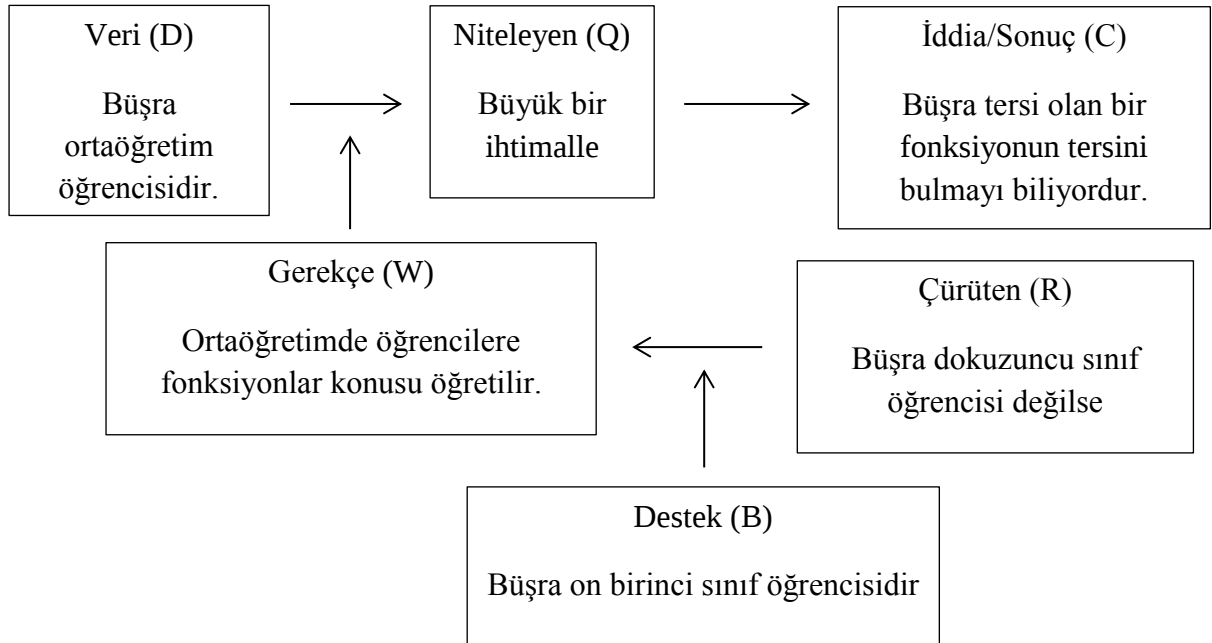
Şekil 10. Toulmin modelinde çürüten bileşeninin örneği

Gerekçelerin arkasında duran başka güvenceler vardır ve bunlar olmaksızın gerekçelerin tek başına geçerliği yoktur (Dinçer, 2011, s. 11). Toulmin bu söz konusu güvencelere “gerekçenin desteği (Backing (B))” adını vermiştir. Bu modelde destek, niteleyen ve çürüten bileşenleri yardımcı öğeler olarak tanımlanmaktadır. Destek bileşeninin de eklenmesiyle model son şeklini alır.



Şekil 11. Toulmin modelinde destek bileşeni. Toulmin, S. (1958). *The uses of argument*. UK: Cambridge University.

Örneğin, “Büşra ortaöğretim öğrencisidir. Ortaöğretimde öğrencilere fonksiyonlar konusu öğretildiğinden ve Büşra dokuzuncu sınıf öğrencisi değilse büyük bir ihtimalle tersi olan bir fonksiyonun tersini bulmayı biliyordur. Doğru, Büşra büyük bir ihtimalle tersi olan bir fonksiyonun tersini bulmayı biliyordur. Çünkü Büşra on birinci sınıf öğrencisidir.” ifadesini yukarıdaki modele göre bileşenlerine ayıralım.



Şekil 12. Toulmin modelinde destek bileşeninin örneği

Toulmin'in (2006) kendisinin de belirttiği gibi "Argümanın Kullanımları " kitabını yayınladığında ilk olarak meslektaşları kitaptaki fikirleri benimsememiş ve muhalif olmuşlardır. Toulmin'in fikirleri hukuk ve psikoloji gibi alanlardaki uzmanlar tarafından ele alınmış ve Toulmin modelinin tartışmalara tam olarak uyduğunu görmüşlerdir. Toulmin modeli Amerika Birleşik Devletlerinde konuşma iletişimi (speech communication) alanında kabul görmüş ve argümantasyon üzerine olan ders kitaplarında Toulmin modeli zorunlu bir bölüm olarak yer almıştır. Bunların dışında, bu model bilgisayar bilimi ve yapay zeka, hukuk ve tıp gibi alanlarda da kullanılmaya başlamıştır. Dolayısıyla birçok filozof Toulmin'in fikirlerini ciddiye almak durumunda kalmıştır (Toulmin'den aktaran Dinçer, 2011, s. 19).

Toulmin Modeline Entegre Edilmiş Ckç Modeli

Pedemonte (2005), argümantasyon ve ispat arasındaki ilişkinin içerik açısından karşılaştırılmasını Toulmin modeline ckç modelini entegre ederek (Balacheff; Balacheff & Margolinas'dan aktaran Pedemonte, 2007a) yapmaktadır (Pedemonte'den aktaran Pedemonte, 2007a). Burada ckç modeli, argümantasyon sürecinde kullanılan bilgi ile ispat sürecinde kullanılan teoremlerin karşılaştırılmasına izin verir (Pedemonte, 2008). Pedemonte (2008)'in belirttiği üzere "ispat sürecinde gerekçe bir aksiyom, tanım veya teoremdir. Destek ise, gerekçeyi doğrulayan teorik sistemdir. Hipotezi destekleyen argümantasyon sürecinde bu unsurların teorik bir sisteme ait olması gerekmez. Bu sebeple, argümantasyon sürecinde kullanılan bilgi sistemini göz önüne almayı sağlayan ckç modeli kullanılmaktadır".

Pedemonte (2008), sayıların özelliklerini içeren açık uçlu problemleri çözerken, bir hipotezi destekleyen argümantasyon ile cebirsel ispatları arasındaki bilişsel süreklilikleri ve mesafeleri analiz eden çalışmasında Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modelini aşağıdaki şekilde açıklamıştır:

Ckç modelinde bir düşünce/kavrama dörtlü yapı ile temsil edilmektedir. Burada

P: Problemler kümesini temsil eder. Bu bölüm düşüncenin/kavramanın olduğu uygulama alanıdır.

R: P'nin problemlerinin çözümünde kullanılan işlemler/işlemciler (operatör) kümesini temsil eder.

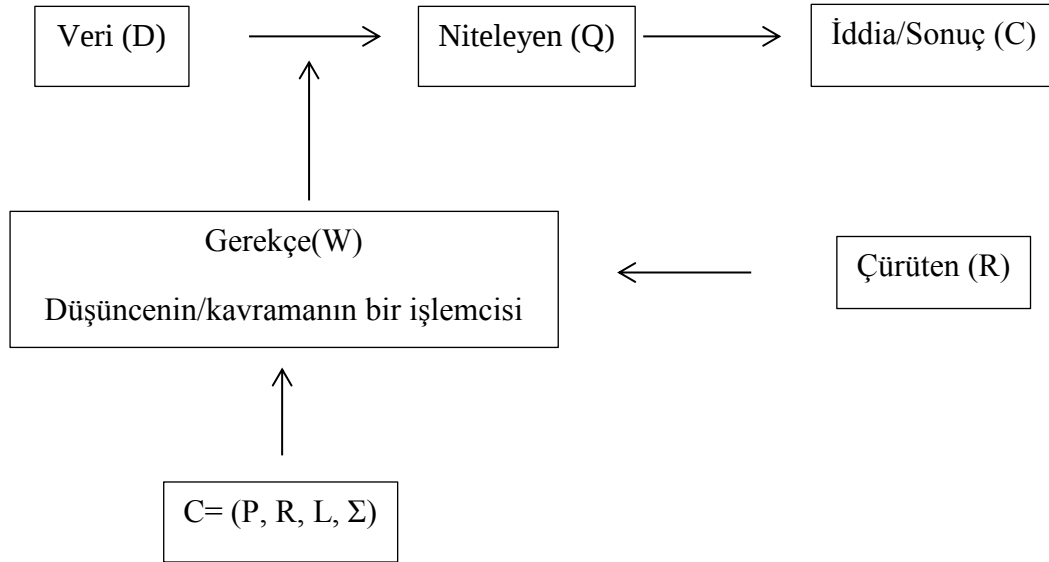
L: Temsil kümesidir. Planlanmış, yapılandırılmış işaretler kümesinden, dile ait yapıdan meydana gelir. (Örneğin; cebirsel dil, geometrik çizimler, doğal dil, matematiksel yazılımlar...)

Σ: Kontrol yapısıdır. Bu bölüm düşüncenin/kavramanın geçerliliğini açıklar.

Bu dörtlü yapı öğrencilerin çözüm sürecinde harekete geçirdiği düşüncülerinin tanımlanmasına olanak sağlar (Balacheff & Gaudin, 2002; Miyakawa, 2002).

Bu model referans sisteminin (içeriğin) analizi için önemlidir. Çünkü argümantasyon süreci öğrencilerin düşüncelerinin/kavramalarının üzerine yapılandırılmıştır (Pedemonte, 2008). Ckç modeli, öğrencinin ispat sürecindeki düşüncelerinin/kavramalarının argümantasyondaki düşüncelerine/kavramalarına benzer şekilde analizinin yapılması ile argümantasyon ve ispat süreçlerinin içerik açısından karşılaştırılmasını sağlar. (Güneş, 2013, s. 127). “Düşüncelerin, kullanılan argümanların ve bunların kontrol alanlarının aynı olup olmamasına bakılarak, argümantasyon ve ispat süreçleri arasında ‘bilişsel bütünlük’ olup olmadığına karar verilir” (Güneş, 2013, s. 127).

Ckç modelinin Toulmin modeline aşağıdaki şekilde entegre edilmektedir:



Şekil 13. Toulmin modeline ckç modelinin entegre edilmesi. Pedemonte, B. (2008). Argumentation and algebraic proof. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 40, 385-400.

İlgili Araştırmalar

Bülbül ve Urhan (2016) lise son sınıf öğrencilerinin argümantasyon ve matematiksel ispat yapma süreçlerini Toulmin modeline göre analiz etmek ve karşılaştırmak amacıyla çalışma yürütmüştür. Çalışmaya Ankara’da bir özel okulda lise son sınıfa devam eden dört öğrenci katılmıştır. Nitel araştırma olarak tasarlanan bu çalışmada veri toplamak için literatürden alınan bir problem kullanılmış ve ikili gruplar halinde çalışması sağlanan öğrencilerden problemin çözümü ile ilgili üretecekleri hipotezin ispatını yapmaları istenmiştir. Analiz

sonuçlarına göre, öğrencilerin abdüktif argümantasyon ile dedüktif ispat arasındaki yapısal boşluğu tamamlayarak dedüktif ispata geçebildikleri durumda, ispat sürecini başarıyla tamamladıkları; yapısal boşluğu tamamlayamadıkları durumda ise argümantasyondaki abdüktif yapıyı devam ettirdikleri ve dedüktif ispat yapamadıkları görülmüştür. Matematik eğitiminde argümantasyon ve matematiksel ispat süreçlerinin karşılaştırmalı olarak analiz edilmesi ve aralarındaki ilişkilerin belirlenmesinin, öğrenciler için ispatlama sürecini kolaylaştırmak adına gerekli ve önemli olduğunu belirtmişlerdir.

Doruk (2016) ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının analiz alanındaki argümantasyon ve ispat süreçlerinin ortaya çıkarılması amacıyla çalışma yürütmüştür. Ayrıca, çalışmada bu süreçleri ayrıntılı olarak açıklayabilmek için öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşlerini ve analizin temel tanımlarını anlama şekillerini de incelemiştir. Çalışmanın araştırma grubunu bir devlet üniversitesinin üçüncü sınıfında öğrenim gören sekiz ilköğretim matematik öğretmeni adayı oluşturmaktadır. Nitel araştırma yaklaşımının benimsendiği çalışmanın verileri etkinlik temelli klinik mülakatlar yardımıyla toplanmıştır. Öğretmen adaylarının argümantasyonlarını ortaya çıkarabilmek adına öğretmen adaylarının matematiksel önermelerin doğruluğuna ikna olmak ve matematiksel iddialarını savunmak için ürettikleri tüm argümanlar Toulmin modeline göre analiz edilmiştir. Çalışma sonucunda öğretmen adaylarının tamamının ispatın anlamı, amacı ve önemine yönelik olumlu görüşlere sahip olmalarına karşın, öğretmen adaylarının bir kısmı öğrendikleri ispatların kendilerine faydalı olmadığı ve ispatların öğretiminin anlamsız olduğunu ifade etmişlerdir. Öğretmen adaylarının analiz alanındaki argümantasyon ve ispat süreci arasındaki ilişkinin yapısal incelenmesi sonucunda, iki süreç arasındaki yapısal boşluk ve spontane sürekliliğin geçerli bir ispat yapmanın önündeki engellerden biri olduğu tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının iki süreç arasındaki yapısal süreklilik ise ispatlama sürecini kolaylaştırmıştır.

Güneş (2013), yüksek lisans tez çalışmasında argümantasyon ve matematiksel ispat süreci karşılaştıran ve bu iki süreç arasındaki ilişki ya da ilişkileri Toulmin modeline göre analiz eden çalışmaları derlemiştir. Çalışmanın sonucunda Türkiye’de matematik eğitiminde doğrudan bu konu ile ilgili yapılmış, argümantasyon ile matematiksel ispat arasındaki ilişkiyi ya da ilişkileri analiz eden ve bu ilişkileri karşılaştıran bir çalışmaya rastlanmadığını ifade etmiştir. Öğrencilerin argümantasyon ile ispat arasındaki mesafeyi kapatmaları, bu bilişsel köprüyü kuvvetlendirmeleri ve daha kolay biçimde matematiksel ispata ulaşabilmeleri adına argümantasyon ile matematiksel ispat arasındaki ilişkilerin

analiz edildiği çalışmaların artırılmasının gerekli olduğunu dile getirmiştir. Yapılacak bu tür çalışmalar ile öğrencilerin matematiksel ispat yaparken yaşadıkları başka olası olumsuzlukların saptanmasının mümkün olacağını vurgulamıştır.

Pedemonte (2002), argümantasyon ve ispat arasındaki ilişkileri analiz etmeyi amaçladığı bu çalışmada argümantasyon ve ispatın içerik ve yapı açısından karşılaştırılabileceği varsayımında bulunmuştur. Çalışmada Toulmin modeli argümantasyon ve ispatı karşılaştırabilmek için araç olarak kullanılmıştır. Çalışma İtalya ve Fransa'daki 12. Sınıf öğrencileri ile yapılmış olup veri toplamak için öğrencilere açık uçlu bazı sorular verilmiş ve öğrencilerin bilgisayarda Cabri Geometri yazılımı ile ikili gruplar halinde çalışması istenmiştir. Araştırmacı öğrencilerin argümantasyon ve ispat sürecinde kullandıkları kelimelerin ve ifadelerin çoğu zaman aynı olduğunu; ancak argümantasyonun yapısı abdüktif iken ispatta bu yapının dedüktif yapıya dönüştüğünü gözlemlemiştir. Öğrencilerin verileri üzerinde yapılan analiz, bir varsayım inşası sırasında sağlanan argümanlar ile daha sonra üretilen ispat arasındaki derin benzerlikleri vurgulamıştır. Sonuç olarak araştırmacı, bu gibi benzerliklerin esas olarak argümanların içeriği ile ilgili olduğunu aksine argümanların kuruluş yapısı bakımından dikkatli bir analizin ilginç tutarsızlıkları açığa çıkarabileceğini belirtmiştir.

Pedemonte (2003), çalışmada bir hipotezi destekleyen abdüktif argümantasyon ile söz konusu ifadenin ispatının karşılaştırılmasına odaklanmıştır. Özellikle araştırmanın amacı abdüktif argümantasyon ile söz konusu ifadenin ispatı arasındaki yapısal bir analizin önemini göstermektir (abdüktif argümantasyondan dedüktif bir ispata geçiş durumu, abdüktif argümantasyondan abdüktif bit ispata geçiş durumu). Pedemonte bu çalışmada, Toulmin modelini, argümantasyon ile argümantasyonun ardından yapılan ispat arasındaki bazı yapısal süreklilikleri ve bazı yapısal kopmaları tespit etmek ve analiz etmek için kullanılabilecek bir araç olarak önermiştir. Çalışmada analizine yer verilen ilk örnek, argümantasyon ve matematiksel ispat süreci arasındaki yapısal boşluk (mesafe) durumunu temsil eden bir örnektir. İkinci örnek, argümantasyon ve matematiksel ispat süreci arasındaki yapısal süreklilik durumunu temsil etmektedir. Bu örnekte abdüktif argümantasyondan abdüktif ispata geçiş durumu analiz edilmektedir. Pedemonte çalışmasının sonucunda, öğrenciler argümantasyon ve ispat arasındaki yapısal mesafeyi doldurabilirlerse ve ispatın yapısını dedüktif yapıya geçirebilirlerse ispat yapma konusunda başarılı olma olasılıklarını arttırabildiklerini söylemiştir.

Pedemonte (2007a), çalışmasında matematikte argümantasyon ve ispat hakkında bir karakterizasyon sunmaktadır. Çalışmanın amacı, argümantasyon ve ispat arasındaki yapısal analizin önemini vurgulamaktır. Araştırmacıya göre bu analiz, bir hipotezi destekleyen argümanlar ile onun ispatı arasında bilişsel açıdan bir süreklilik olmasına rağmen, ikisi arasında sık sık yapısal bir mesafenin olduğunu göstermektedir. Araştırmacı ‘içeriğin’ sürekliliğinin bilişsel birlik olgusunu yorumlamak için yeterli olmadığı hipotezini doğrulamak ve argümantasyon ile ispat arasında yapısal analizin önemini göstermek için çalışmasında öğretim deneyi yöntemini kullanmıştır. Bu yöntemi Fransa ve İtalya’daki on ikinci ve on üçüncü sınıf derslerinde gerçekleştirmiştir. Çalışmasında geometri alanından 3 adet açık uçlu problem kullanmış ancak analizinde bunlarda yalnızca 2 tanesini göz önüne almıştır. İki problem için Cabri Geometri yazılımı ile çift olarak çalışan 102 öğrencinin verileri analiz edilmiştir. Veri analizinde öğrencilerin argümantasyon ve ispat sürecini analiz etmek için önemli bir araç olan Toulmin modelini kullanmıştır. Deney, içerik analizinin argümantasyon ve ispat arasındaki ilişkide tüm bilişsel yönleri analiz etmek için yeterli olmadığını göstermiştir. Araştırmacı, argümantasyon ve ispat arasındaki süreklilik durumlarının yanı sıra ikisi arasında genellikle yapısal bir mesafe olduğu; bilişsel bütünlüğün, yapısal sürekliliğin hatalı ispatlara yol açtığı durumları hesaba katmadığı ve bu durumda, ispat oluşturmak için argümantasyon ve ispat arasındaki yapısal mesafeyi kapatmanın gerekli olduğu sonucuna ulaşmıştır.

Pedemonte’nin (2007b) bu çalışması cebirde açık uçlu problemlerin çözümünde ortaya çıkan ispat ve bir hipotezi destekleyen argümantasyon arasındaki bilişsel süreklilikleri ve/veya kopmaları analiz eden önceki bir araştırmanın uzantısıdır. Genellikle bu argümanlar ile cebirsel ispatlar arasında, yalnızca yapıda değil (cebirsel ispatlar genellikle güçlü bir dedüktif yapıyla tanımlanır) aynı zamanda “içerik” de de bilişsel boşluk vardır. Bu çalışmanın amacı, bu boşluğu azaltmak için bilişsel boşluk ve abdüktif argümantasyonun rolünü göstermektir. Pedemonte bu çalışmasında yapısal ve yapılandırıcı argümantasyonlardan söz etmektedir. Yapılandırıcı argümantasyon bir hipotez oluşturmaya karşılık gelirken yapısal argümantasyon, özellikle hipotezin bir gerçek olarak verilmiş olduğu durumlarda hipotezi doğrulamak adına üretilmektedir. Bu çalışma bir durum çalışması olup deney Cenova’daki Formation Science University’de matematik dersine katılan ilkokul öğretmen adaylarıyla gerçekleştirilmiştir. Sadece iki öğrencinin çözümü göz önüne alınarak onların argümantasyon ve ispatları Toulmin modeli ile analiz edilmiştir. Analiz edilen her iki örnekte de yapısal argümantasyon kullanıldığı

görülmüştür. Birincisinde yapısal argümantasyon ispatın yapımına yardımcı olurken; ikincisinde ispatın yapımına zorluk çıkardığı görülmüştür. Araştırmancının bu aşamasında yazar, cebirde açık uçlu problemlerin çözümünde yapısal argümantasyon eğer yapılandırıcı argümantasyon ve ispat arasında içerik sistemi yönünden bir süreklilik sağlıyorsa ispatın yapımında yardımcı olabileceği sonucuna ulaşmıştır. Yapısal argümantasyonun bu görevin yerine getirebilmesi, hem aritmetik hem de cebirsel elemanlar içermesi ile mümkündür. Dahası, geometri ile ilgili problemlerin çözümünün aksine, yapısal argümantasyondaki abdüktif yapı öğrencilerin ispat yaparken karşılaştıkları zorluklardan biri değildir. Tersine abdüktif adımlar sayesinde öğrenci argümantasyon süreci ve cebirsel ispat süreci arasındaki bilişsel boşluğu doldurabilmektedir.

Inglis, Mejia-Ramos ve Simpson (2007), başarılı lisansüstü öğrencilerin sayılar teorisi konusundaki argümantasyonlarını incelemişlerdir. Çalışmanın verileri etkinlik temelli klinik mülakatlar yardımıyla toplanmış olup bu mülakatlarda öğrencilere özel sayıların tanımları verilmiş ve yedi önerme için önermelerin doğruluğu hakkında değerlendirme yapmaları istenmiştir. Araştırmacılar bu çalışmalarında, matematiksel argümantasyonun kapsamlı bir analizini yapabilmek için Toulmin'in tam argümantasyon şemasını kullanmanın önemli olduğunu belirtmişlerdir. İspat şemalarından yararlanarak tümevarımsal (inductive), dedüktif (deductive) ve yapısal-sezgisel (structural-intuitive) olmak üzere üç çeşit gerekçe tipini ortaya atmışlardır. Araştırmacılar tümevarımsal gerekçe tipini Harel ve Sowder'ın (1998) tümevarımsal ispat şemasını kullanarak tanımlamışlardır. Tümevarımsal gerekçe, bir argümanın sonuçlanmasıyla ilgili belirsizliği azaltmak için benzer bir strateji kullanır. Yapısal-sezgisel gerekçe tipi terimi bir katılımcıyı, bir çeşit zihinsel yapı hakkındaki gözlemler veya deneylerle, görsel olarak veya başka türlü bir sonuca varmaya ikna etmek için kullanır. Dedüktif gerekçe tipini Harel'in (2001) en etkili ispat şeması olarak belirlediği dedüktif-modern-aksiyomatik ispat şemasına göre tanımlamışlardır. Yani, dedüktif gerekçe, öne sürülen argümanın sonucunu doğrulamak için formel matematiksel gerekçelerin kullanılmasıdır. Araştırmacılar çalışma sonucunda, matematiksel argümantasyonlarda Toulmin modelindeki niteleyen bileşenin önemli bir role sahip olduğunu belirtmişlerdir.

Pedemonte (2008), sayıların özelliklerini içeren açık uçlu problemleri çözerken, bir hipotezi destekleyen argümantasyon ile cebirsel ispatlar arasındaki bilişsel süreklilikleri ve mesafeleri analiz eden bir çalışma yapmıştır. Bu çalışmanın amacı, geometri ile ilgili problemlerin çözümünün aksine, argümantasyon ve ispat arasındaki yapısal mesafenin

(abdüktif bir argümantasyondan dedüktif bir ispata kadar), öğrencilerin bu tür problemleri çözmede karşılaşılabilecekleri zorluklardan biri olmadığını göstermektedir. Aksine cebirsel ispat güçlü bir dedüktif yapıyla karakterize edildiğinden argümantasyon aktivitesindeki abdüktif basamaklar, cebirsel ispatta kullanılan harflerin anlamını argümantasyonda kullanılan sayılarla bağlantılandırmada faydalı olabilir. Bu çalışmada verilerin analizi ckg modeli ile birleştirilmiş Toulmin modeli ile yapılmıştır. Veri toplamak için iki açık uçlu problem verilmiş, veriler bir üniversitedeki ilköğretim matematik öğretmeni adaylarından toplanmıştır. İki problem için toplam 14 öğretmen adayının çözüm süreci analiz edilmiştir (ilk problem için 7, ikinci problem için 7 öğretmen adayı). Bunlardan yalnızca 4 tanesine çalışmada yer verilmiştir. Bu örneklerin analizi sonucunda yapısal argümantasyonun, yapılandırıcı argümantasyon ve ispat arasındaki sürekliliği sağlayarak önemli bir rol oynadığı gözlemlenmiştir. Araştırmacı geometri alanındaki ispat ile cebir alanındaki ispatın farklılık gösterdiğini, geometri alanında yapılan ispatların aksine argümantasyon ve cebirsel ispat arasındaki yapısal mesafenin öğrenciler için engel oluşturmadığı sonucuna ulaşmıştır. Pedemonte, düşünceleri hem aritmetik hem de cebirsel alanda geçerli olan öğrencilerin ispat yapmakta başarılı olduklarını, yani argümantasyondaki aritmetik alanın, ispatta cebirsel alana genelleştirilmesi ile ispatın başarıyla yapılabildiğini belirtmiştir.

Dinçer (2011) matematik lisans dersindeki tartışmaların Toulmin modeline göre analizini incelemiştir. Bu çalışmanın amacı, matematik lisans derslerinde gerçekleştirilen tartışmalarda, öğrencilerin attıkları adımların yapısını özellikle yaptıkları muhakemeleri, birbirleriyle ve öğretmenleriyle olan etkileşimlerini incelemek ve Toulmin tarafından alandan bağımsız olarak önerilen Toulmin tartışma modelinin söz konusu tartışmaların yapısını incelemek için nasıl kullanılacağını araştırmaktır. Çalışma Ankara’da bir üniversitenin matematik öğretmenliği programı ikinci ve üçüncü sınıfında öğrenim görmekte olan öğrencilerle gerçekleştirilmiştir. Çalışma sonunda Toulmin modeline eklenebilecek yeni bileşenler bulunmuş ve bu bileşenler arasında etkileşim gözlemlenmiştir. Bunun dışında gerekçeler dedüktif ve referans olmak üzere iki sınıfa ayrılmıştır. Dedüktif gerekçe her tartışma türünde ortaya çıkabilirken, referans gerekçe tanım koyma haricindeki tartışmalarda gözlemlenmektedir.

Martinez ve Pedemonte (2014), çalışmasında indüktif aritmetik argümantasyon ve dedüktif cebirsel ispat arasındaki ilişkiyi incelemişlerdir. Çalışmalarında öğretim deneyini kullanıp, verileri cebir dersi öğretimi sırasında toplamışlardır. Cebir problemlerini çözmek için öğrenciler iki potansiyel zorluk ile karşılaşırlar: birincisi argümantasyonda aritmetik

alandan cebirsel alana geçiş, diğeri ise indüktif argümantasyondan dedüktif ispat yapısına geçiştir. Dolayısıyla bu makalenin amacı, bu bilişsel zorlukları tanımlamak ve öğrencilerin bunların üstesinden nasıl geldiğini göstermektir. Bu çalışmada, makalenin yazarlarından biri (Martinez) tarafından yönetilen ve cebir dersine katılan üç dokuzuncu / onuncu sınıf öğrencisinin çalışması açıklanmakta ve analiz edilmektedir. İlgili derste öğrencilere 17 adet problem sunulmuştur. Cebir dersinin ilk dört dersinden elde edilen veriler analiz edilmiştir. Verilerin analizinde Toulmin modeli kullanılmıştır. Çalışma sonucunda öğrencilerin hepsinin aritmetik alanda ve indüktif olarak doğru hipotezler ürettikleri belirlenmiştir. Tüm öğrenciler bilişsel mesafenin üstesinden gelmeyi öğrenmişlerdir. Bu güçlüklerin üstesinden gelebilmek için öğretmen müdahaleleri ve verilerin yeniden düzenlenmesi önemli adımlar olmuştur. Çalışmada indüktif argümantasyonlarında süreç örnek genellemesi yapan öğrencilerin dedüktif ispatlara ulaşabildikleri ortaya çıkmıştır.

Bu tez araştırması ile ilgili yukarıda yazılanlardan başka çalışmalarda yapılmıştır. Ancak okuyucuya konu ile ilgili fikir vermesi için bu çalışmalara yer vermek yeterli görölmüştür.

BÖLÜM III

YÖNTEM

Bu bölümde araştırmanın modeli, katılımcılar, veri toplama aracı, veri toplama süreci ve verilerin analizi ile ilgili açıklamalara yer verilmiştir.

Araştırmanın Modeli

Matematik öğretmen adaylarının argümantasyon ve ispat süreci arasındaki ilişkilerin incelenmesinin amaçlandığı bu çalışmada, öğretmen adaylarının bu iki süreç arasındaki ilişkileri belirlemeye yönelik zihinlerinden geçenleri nicel verilere dayalı yöntemlerle anlamak mümkün olmadığından nitel araştırma yöntemi esas alınmıştır.

Araştırma Grubu

Araştırmanın katılımcıları, 2017-2018 eğitim öğretim yılının bahar yarıyılında, Ankara’da bir devlet üniversitesinin matematik eğitimi bilim dalının ikinci ve üçüncü sınıfında öğrenim gören 4 öğretmen adayından oluşmaktadır. Araştırmanın pilot uygulaması ise 2017-2018 eğitim öğretim yılının güz yarıyılında aynı üniversitenin matematik eğitimi anabilim dalının üçüncü ve dördüncü sınıfında öğrenim gören 3 öğretmen adayı ile yapılmıştır. Pilot ve asıl uygulamada farklı öğretmen adayları araştırmaya dahil edilmiştir. Katılımcılar danışman öğretim üyesi ile birlikte seçilmiştir. Katılımcıların seçiminde alan bilgisinin orta veya iyi düzeyde olmasına, derslerde aktif olmalarına ve araştırmaya gönüllü olmalarına dikkat edilmiştir.

Veri Toplama Aracı

Nitel araştırmalarda veri toplamada gözlem, görüşme ve doküman analizi en sık kullanılan yöntemlerdir. Bu araştırmada da veri toplama aracı olarak görüşme ve doküman analizi kullanılmıştır.

Görüşmelerde çalışma kağıdı kullanılmış olup bu çalışma kağıdı farklı ispat yöntemlerinin kullanılabileceği dört farklı matematiksel problemten oluşmaktadır. Araştırmada katılımcıların argümantasyon ve ispat süreçlerinde problemin çözümüne dair fikirleri, gerekçeleri veya kullanılmış oldukları ifadeler çalışma kağıdına yazılanlar ile birlikte asıl veriyi oluşturacağından görüşmeler sırasında katılımcılardan yüksek sesle düşünmeleri istenmiş ve katılımcıların onayı ile ses kaydı alınmıştır.

Görüşmeler esnasında öğretmen adaylarının yaptıkları ispatlar doküman olarak kabul edilmiş ve bu bağlamda doküman incelemesi yapılmıştır.

Veri Toplama Süreci

Araştırmanın verileri çalışma kağıtları aracılığıyla toplanmıştır. Öğretmen adaylarına görüşmeler öncesi çalışmaya dair gerekli bilgiler verilmiş olup çalışmanın gönüllülük esasına göre yürütüleceği ve istedikleri zaman çalışmadan ayrılacakları söylenmiştir. Ayrıca çalışmada katılımcıların düşünceleri verinin bir kısmını oluşturduğundan öğretmen adaylarından görüşmeler sırasında sesli düşünmeleri istenmiştir. Bu nedenle öğretmen adaylarına isimlerinin gizli tutulacağı bilgisi verilip onayları dahilinde görüşme esnasında ses kaydı alınmıştır.

Görüşmeler sırasında araştırmacı, adayları yönlendirici sorulardan ve adayların sorularına onay vermekten kaçınmaya çalışmıştır.

Verilerin Analizi

Çalışmada elde edilen verilerin (çalışma kağıdındaki veriler ile birlikte ses kaydı ile toplanacak veriler) analizi, argümantasyon ve ispat süreci arasındaki ilişkinin açığa çıkarılmasını sağlayan Toulmin modeli kullanılarak yapılmıştır. Bu model, bir hipotezi destekleyen bir argümanın yapısını ve ispatının yapısını tespit etmek ve analiz etmek için önemli bir araçtır (Pedemonte, 2007). Ayrıca argümantasyon ve ispat süreci arasındaki

ilişkinin içerik açısından analizi Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeli ile yapılmıştır. Çünkü ckç modeli argümantasyon sürecinde kullanılan bilgi ile ispat sürecinde kullanılan teoremlerin karşılaştırılmasını sağlar (Pedemonte, 2008).

BÖLÜM IV

BULGULAR

Bu bölümde araştırma alt problemlerine ait bulgulara ve yorumlara yer verilmiştir.

Analiz esnasında $D_1, D_2, \dots$ ve $C_1, C_2, \dots$ gibi kısaltmalar kullanılmış olup Toulmin modelinde D ile veri, C ile iddia kastedilmektedir. Alt indisler ise süreçteki adımları göstermektedir.

ÖA1'in Problem 1'e Yönelik Bulgularının Analizi

ÖA1'in Problem 1 de Tercih Ettiği Birinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi

Problem 1: Tüm negatif olmayan n tamsayıları için $5^n + 6 \cdot 7^n + 1$ ifadesinin 8 ile bölünüp bölünmediği hakkında ne söyleyebilirsiniz? Varsayımınızı ispatlayınız.

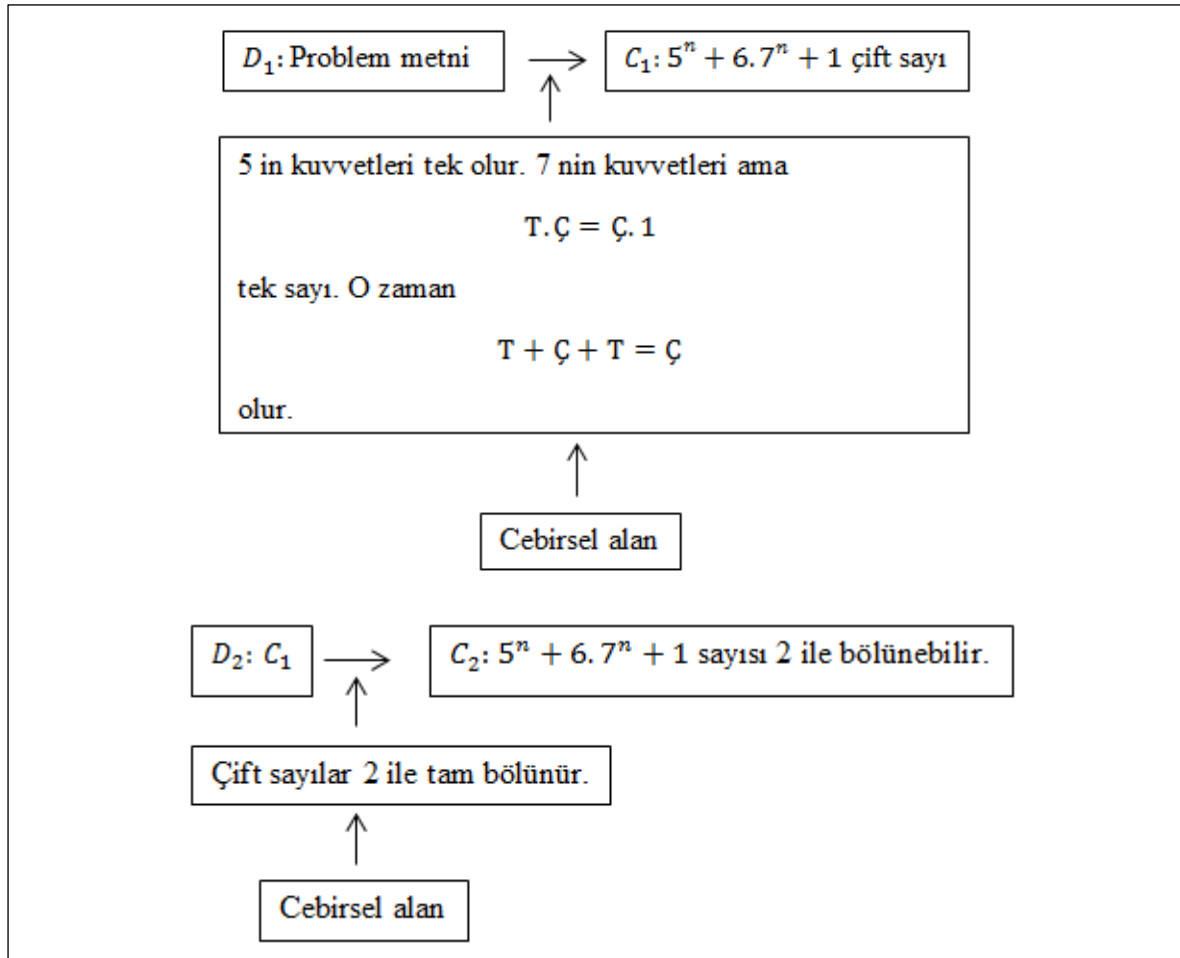
Şekil 14. Birinci matematiksel problem

ÖA1 öncelikle verilen probleme dair bir hipotez oluşturmaya çalışmıştır.

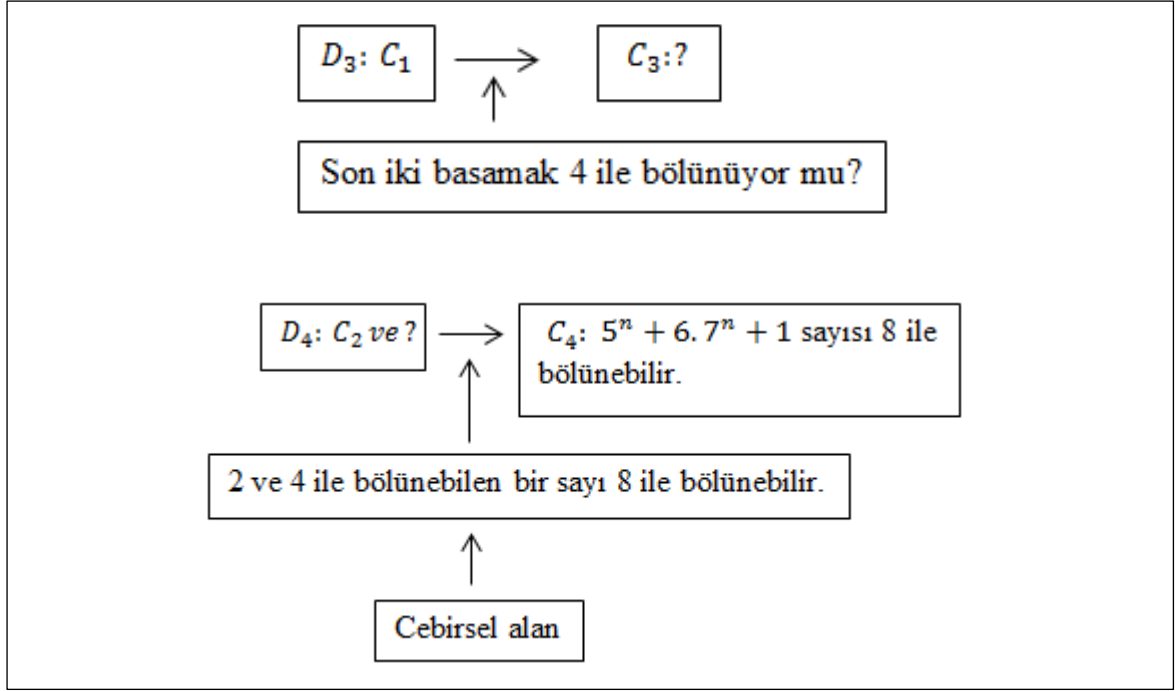
8 ile bölünebilmesi için 4 ve 2 ile bölünebilmesi gerekiyor. 2 ile bölünebilmesi için sayının çift sayı olması gerek. 4 ile bölünebilmesi için de sayının son iki rakamının 4 ile bölünebilmesi gerek. 5 in kuvvetlerinde rakamların sonu hep 5 olur yani tek olur. 7 nin kuvvetleri de hep tek ama 6 ile çarpılınca çift olur. 1 zaten tek sayı. O zaman $T + \text{Ç} + T = \text{Ç}$ olur. Yani $5^n + 6 \cdot 7^n + 1$ çift olacağından 2 ile bölünebilecek. Son iki rakamın 4 ile bölünebilmesi durumuna gelirsek onu tam bilmiyorum. Ama ifadenin 8 ile bölünebileceğini düşünüyorum. Yani $5^n + 6 \cdot 7^n + 1$ 8 ile bölünebilir.

Şekil 15. ÖA1'in birinci problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyon

ÖA1'in hipotez oluşturduğu argümantasyonun Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi şöyledir;



Şekil 16. ÖA1'in birinci problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyonun Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (1)



Şekil 17. ÖA1'in birinci problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyonun Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (2)

ÖA1 in hipotezini oluştururken ortaya koyduğu iddiaların gerekçeleri cebirsel alana ait kurallar ve teoremler olduğundan argümantasyonunun içerik sistemi cebirsel alan üzerine temellendirilmiştir. Ayrıca ÖA1 elinde yeterli veri bulunmamasına rağmen hipotezini oluşturmuştur. Bu nedenle argümantasyonunun yapısı yapısal argümantasyon olup bu süreçte abdüktif argümantasyon gözlemlenmiştir.

ÖA1 hipotezini doğrulamak için ispat yapmaya başlamış ve ispat tekniğini tümevarımla ispat olarak seçmiştir. Dolayısıyla ispatın yapısı indüktiftir. Buradan anlaşılmaktadır ki argümantasyon ve ispat sürecinin yapısı farklı olduğundan iki süreç arasında yapısal mesafe vardır. Yani ÖA1 in argümantasyon ve ispat süreci sırasında yapmış olduğu muhakemelerin yapısı farklıdır.

$n = 0$ için $1 + 6 + 1 = 8$ olup 8 ile bölünebilir. n için bölünebildiğini kabul edip $n+1$ için bölünüp bölünemediğine bakalım.

$$5^{n+1} + 6 \cdot 7^{n+1} + 1 = 5 \cdot 5^n + 42 \cdot 7^n + 1$$

5 parantezine almayı denesem alınmaz. $n = 3$ versem

$$5^3 + 6 \cdot 7^3 + 1 = ?$$

3 için doğru olabilir (yani bölünebilir) ama 5 için belki bölünemez.

$$A = 5^n + 6 \cdot 7^n + 1$$

dersek. O zaman

$$5^{n+1} + 6 \cdot 7^{n+1} + 1 = A + 4 \cdot 5^n + 36 \cdot 7^n$$

olur. A , 8 ile bölünebilir.

$$4 \cdot 5^n + 36 \cdot 7^n$$

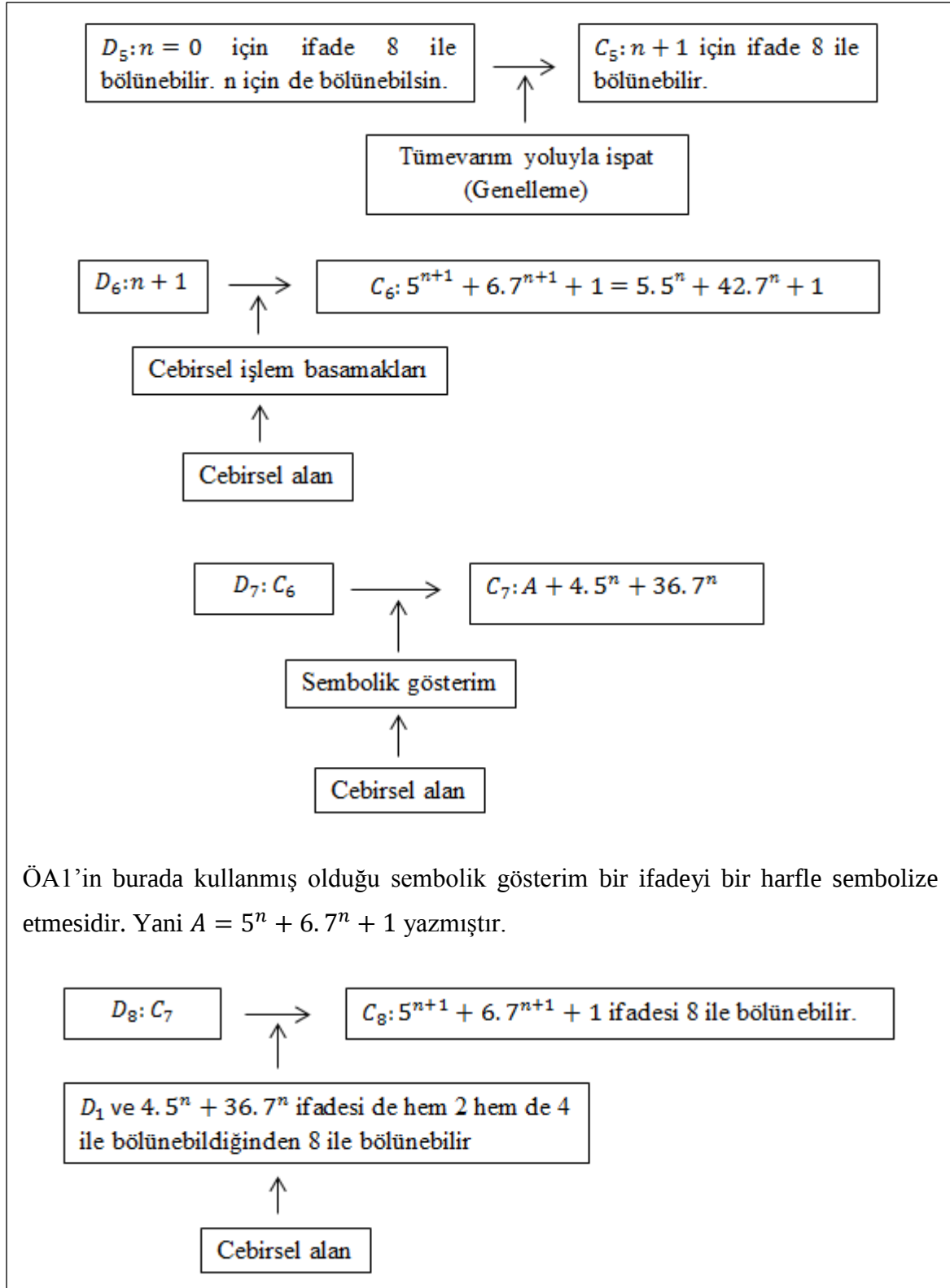
ifadesi de hem 2 hem de 4 ile bölünebildiğinden 8 ile bölünebilir. O halde

$$5^{n+1} + 6 \cdot 7^{n+1} + 1$$

ifadesi 8 ile bölünebilir.

Şekil 18. ÖA1'in birinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarım yoluyla ispat tekniğini kullanarak yaşadığı ispat süreci

ÖA1'in ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi şöyledir;



Şekil 19. ÖA1'in birinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullanarak yaşadığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeli ile analizi

ÖA1'in ispat sürecinde attığı adımların kontrol alanı cebirsel olduğundan ispat sürecinin içerik sistemi cebirsel alan üzerine temellendirilmiş olup iki süreç arasında bilişsel süreklilik vardır. Öncesinde söz edildiği üzere iki süreç arasında yapısal mesafe mevcuttur. Pedemonte (2008)' e göre cebirsel problemlerin çözümünde iki süreç arasındaki yapısal mesafe ispatın tamamlanmasında engel oluşturmamaktadır. Burada ÖA1 ispatı tamamlamış ancak yanlış tamamlamıştır. Görülmektedir ki süreç arasında yalnızca bilişsel süreklilik olması her zaman ispatın başarıyla tamamlanması için yeterli değildir. Adayın ispatı yanlış tamamlamış olmasının nedeni bölünebilme kuralları ile ilgili yanlış bilgi kullanmış olmasıdır.

ÖA1'in Problem 1 de Tercih Ettiği İkinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi

ÖA1'den hipotezini doğrulaması için farklı bir ispat tekniği seçmesi istendiğinde çelişkiyle ispatı seçmiştir. Dolayısıyla ispatın yapısı abdüktiftir. Buradan anlaşılmaktadır ki iki sürecin yapısı aynı olduğundan aralarında yapısal süreklilik vardır.

$$5^n + 6 \cdot 7^n + 1$$

ifadesi 8 ile bölünemez olsun. Bölünemezse ne olacak çift bir sayı olmayacak ve son iki rakamı 4 ün bir katı olmayacak. Biraz önce yaptığım işlemleri yapsam. Mesela ifade çift bir sayı olmasın. 5^n tek bir sayı, 7^n sayısının 6 çift sayısı ile çarpımı da çift sayı o zaman

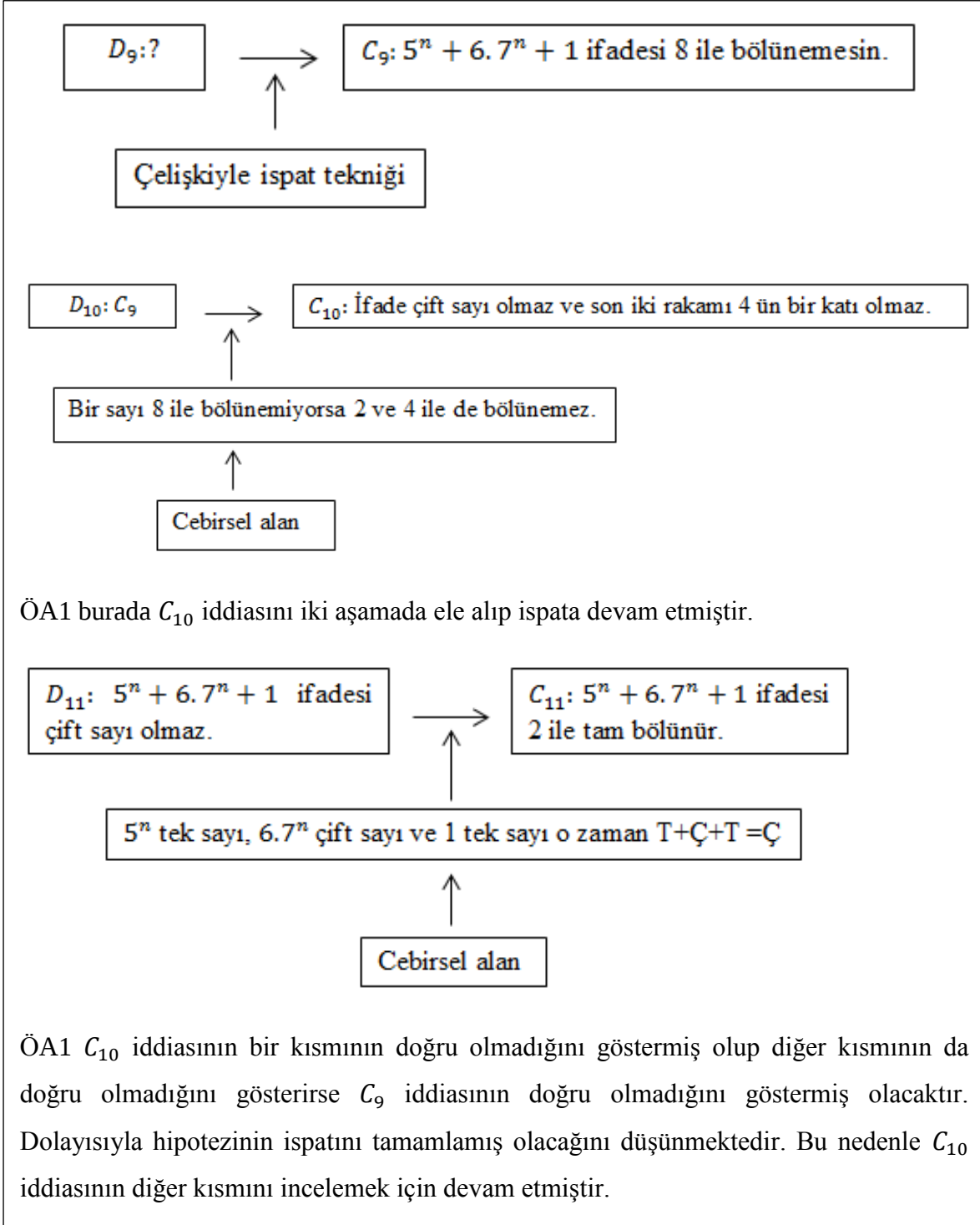
$$T + Ç + T = T + T = Ç$$

olur. O halde çelişki oldu. Bu durumda kabul yanlış olur. Yani ifade 8 ile bölünür. Ama bunu hemen söyleyemem. Çünkü iki durumu da gerektirmesi gerek. Bunun sonucunda çelişki demeliyim.

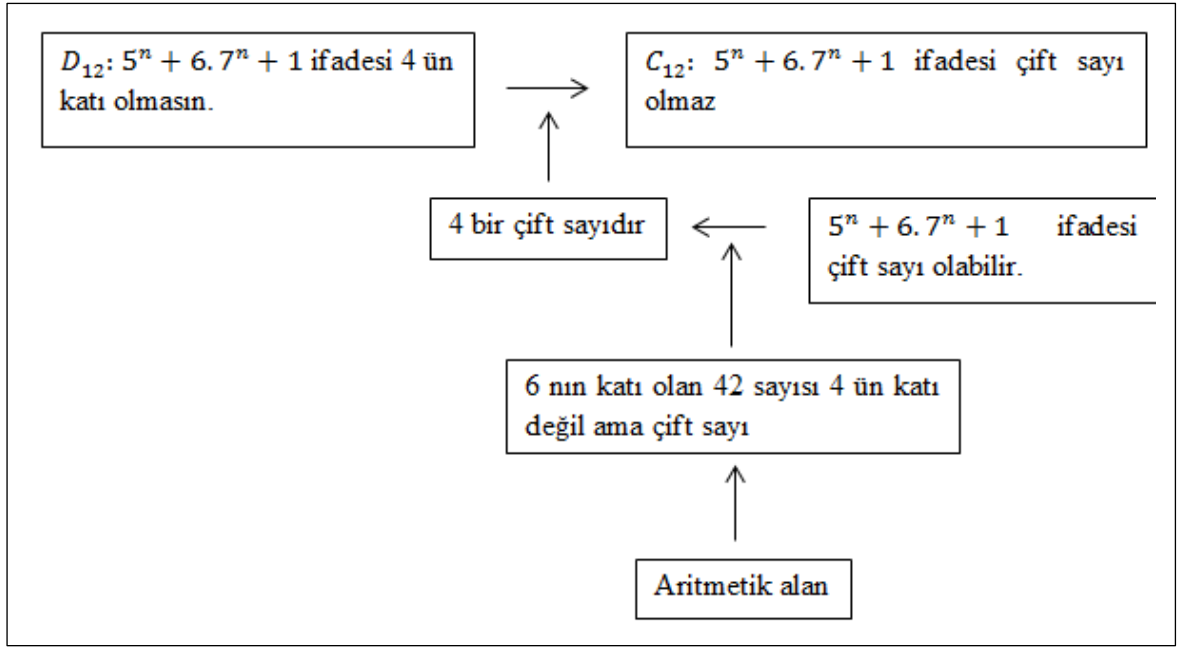
Şimdi çift bir sayı olup 4 ün bir katı olmayan 8 in bir katı yok. Çünkü 4, 8 e bölünüyor. Anlatamadım galiba düşüncemi. Bence ikisinin de sağlanması gerekiyor. Yani ifade hem 4 hem de 2 nin bir katı olmayacak. 4 ün bir katı olup 2 ile bölünemeyen 8 in katı olan bir sayı olduğunu düşünmüyorum. O yüzden son iki rakamı 4 ün bir katı olmayacak ifadesini de ispatlamam gerekiyor.

Şekil 20. ÖA1'in birinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullanarak yaşadığı ispat süreci

ÖA1'in ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi şöyledir;



Şekil 21. ÖA1'in birinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullanarak yaşadığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (1)



Şekil 22. ÖA1'in birinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullanarak yaşadığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (2)

ÖA1 ispat sürecini burada sonlandırmıştır. Argümantasyon ve ispat süreci arasında yapısal süreklilik olduğundan daha önce söz edilmiştir. Ayrıca argümantasyon ve ispat süreci arasında bilişsel süreklilik de mevcuttur. Çünkü ispat sürecinin içerik sistemi cebirsel alan üzerine temellendirilmiştir. ÖA1 iki süreç arasındaki yapısal ve bilişsel sürekliliğe rağmen ispatı tamamlayamamıştır. Bu durumun sebebi cebirsel problemlerin güçlü dedüktif yapısı olup ÖA1'in ispat sırasında dedüktif adımlardan oluşan zincirin zorluğunu aşamamış olabileceği gibi seçilen ispat tekniğinin, problemin çözümü için uygun teknik olmaması da olabilir.

ÖA1'in Problem 1 de Tercih Ettiği Üçüncü İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi

ÖA1'den hipotezini doğrulaması için farklı bir ispat tekniği seçmesi istendiğinde doğrudan ispat tekniğini seçmiştir. Dolayısıyla ispatın yapısı dedüktiftir. Buradan anlaşılmaktadır ki argümantasyon ve ispat sürecinin yapısı farklı olduğundan iki süreç arasında yapısal mesafe vardır.

Eğer ifade 8 ile bölünüyorsa;

$$\frac{5^n + 6 \cdot 7^n + 1}{8} = k \text{ olacak şekilde } k \in \mathbb{Z} \text{ vardır. Buradan}$$

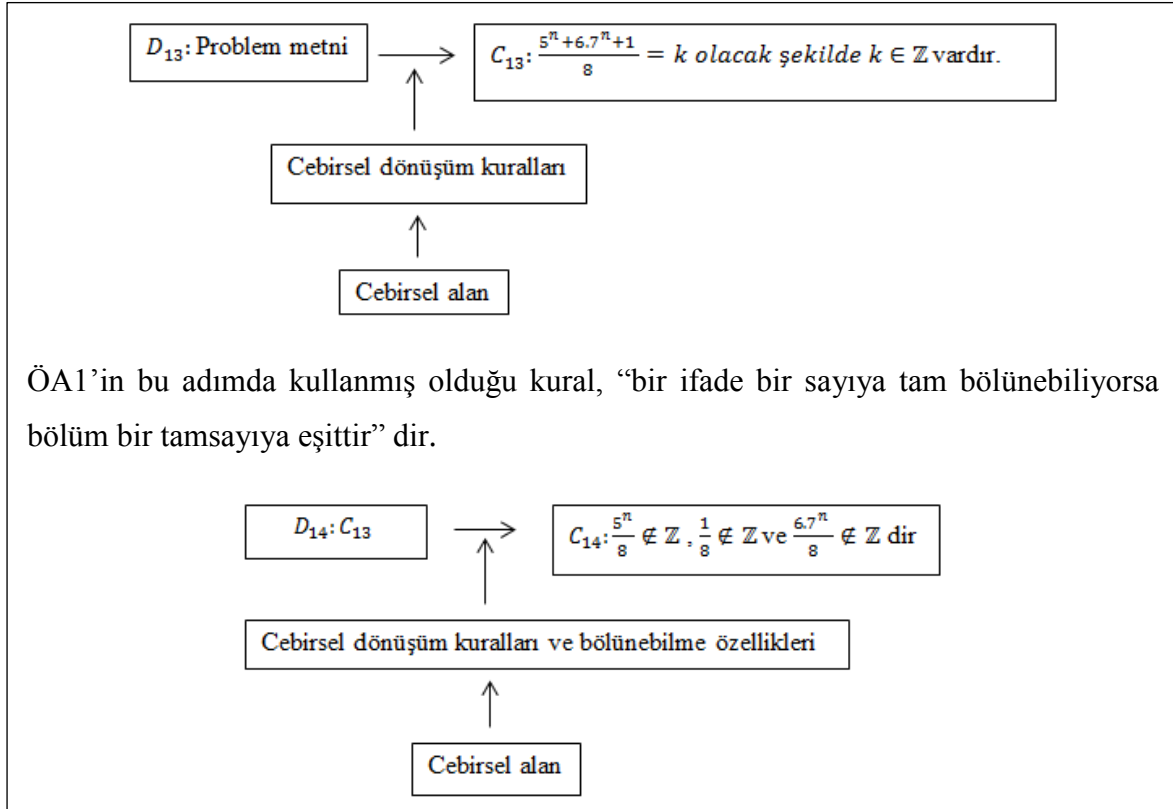
$$\frac{5^n}{8} + \frac{6 \cdot 7^n}{8} + \frac{1}{8} = k$$

dır.

$\frac{5^n}{8} \notin \mathbb{Z}$ ve $\frac{1}{8} \notin \mathbb{Z}$ dir. $\frac{6 \cdot 7^n}{8} = t \in \mathbb{Z}$ olması için 7^n nin 4 ün bir katı olması gerekir. Ama 7 bir asal sayı olduğundan 7^n sayısı 4 ün bir katı olmaz. Dolayısıyla $\frac{6 \cdot 7^n}{8} \notin \mathbb{Z}$ dir. Ama şöyle bir şey var. 3 tane tamsayı olmayan tamsayıların toplamı tamsayı olur mu? Bunu bilmiyorum. Kesin bir şey söyleyemiyorum.

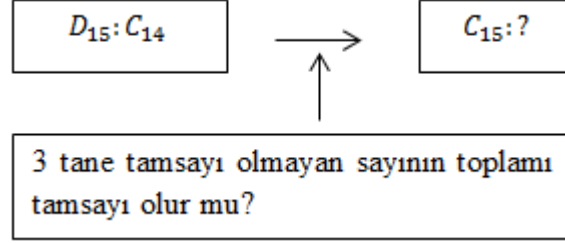
Şekil 23. ÖA1'in birinci problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullanarak yaşadığı ispat süreci

ÖA1'in ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi şöyledir;



Şekil 24. ÖA1'in birinci problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullanarak yaşadığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi

ÖA1'in burada kullandığı kural, "rasyonel sayılarda paydaki toplam biçiminde ifade edilen sayıyı rasyonel ifadeler biçiminde ayırma" dır.



Şekil 25. ÖA1'in birinci problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullanarak yaşadığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizinin devamı

ÖA1 son attığı dedüktif adımda gerekçesinin doğruluğundan emin olamadığı için bir iddia oluşturamamıştır. Dolayısıyla ispatı tamamlayamamıştır.

ÖA1'in ispat sürecinin içerik sistemi cebirsel alan üzerine temellendirilmiş olduğundan argümantasyon ve ispat süreci arasında bilişsel süreklilik vardır. Ancak yukarıda söz edildiği üzere argümantasyon ve ispat süreci arasında yapısal mesafe vardır. Pedemonte (2008)'e göre cebirsel problemlerin çözümü sırasında iki süreç arasındaki yapısal mesafe engel oluşturmadığından ÖA1'in ispatı tamamlayamamasının nedeni cebirsel problemlerin çözümünün güçlü dedüktif yapısı olabilir. ÖA1 çözümdeki dedüktif adımlardan oluşan zincirin zorluğunu aşamamış olabilir.

ÖA1'in Problem 2'e Yönelik Bulgularının Analizi

ÖA1'in Problem 2 de Tercih Ettiği Birinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi

Problem 2: Her $n \geq 2$ tamsayısı için $n^4 + 4$ sayısının asal sayı olup olmadığı hakkında ne söyleyebilirsiniz? Varsayımınızı ispatlayınız.

Şekil 26. İkinci matematiksel problem

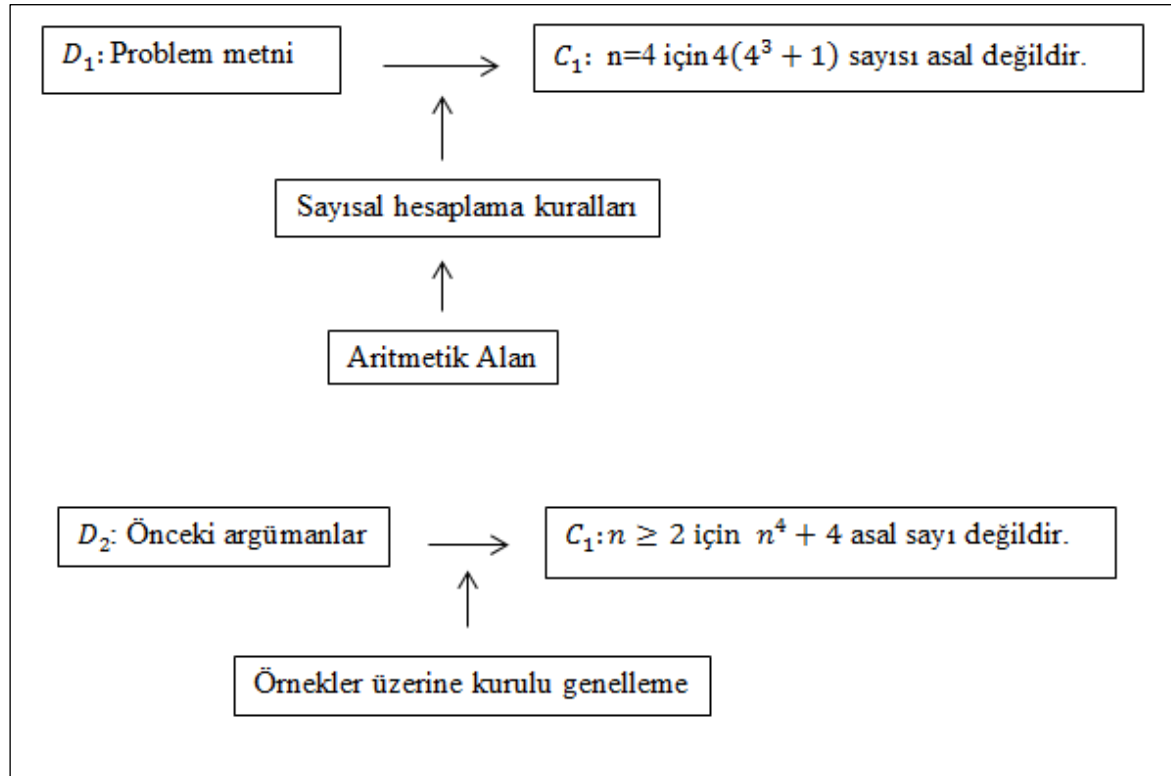
ÖA1 hipotezini oluştururken sayısal hesaplamalar yapmıştır. Bunun üzerine $n^4 + 4$ sayısının asal sayı olmadığı hipotezini oluşturmuştur. ÖA1, hipotezini sayısal örneklerin genellemesi olarak yapılandığından argümantasyonun içerik sistemi aritmetik alan

üzerine kuruludur. Ayrıca ÖA1'in argümantasyonunun yapısı yapılandırıcı argümantasyon olup bu süreçte indüktif argümantasyon gözlemlenmiştir.

$n=4$ için $4^4 + 4 = 4(4^3 + 1)$ sayısı 4 ile bölünebildiğinden asal sayı değildir.
 $n=2$ için $2^4 + 4=20$ sayısı asal değildir.
 $n=3$ için $3^4 + 4=85$ sayısı asal değildir.
 O halde $n \geq 2$ için $n^4 + 4$ sayısı asal değildir.

Şekil 27. ÖA1'in ikinci problemin çözümünü sırasında yaşadığı argümantasyon

ÖA1'in argümantasyonunun Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi şöyledir;



Şekil 28. ÖA1'in ikinci problemin çözümünü sırasında yaşadığı argümantasyonun Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi

ÖA1 hipotezini doğrulamak için ispat yapmaya başlamış ve ispat tekniğini tümevarımla ispat olarak seçmiştir. Dolayısıyla ispatın yapısı indüktiftir. Buradan anlaşılmaktadır ki argümantasyonun ve ispat sürecinin yapısı aynı olduğundan iki süreç arasında yapısal süreklilik vardır.

$n = 2$ için asal sayı değil. n için de asal sayı olmadığını kabul edelim. $n + 1$ için;

$$\begin{aligned}(n + 1)^4 + 4 &= (n^2 + 2n + 1)(n^2 + 2n + 1) + 4 \\ &= n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 5 \\ &= n^4 + 4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1\end{aligned}$$

$n^4 + 4$ asal değil. Hepsini için ayrı mı inceleyeceğim?

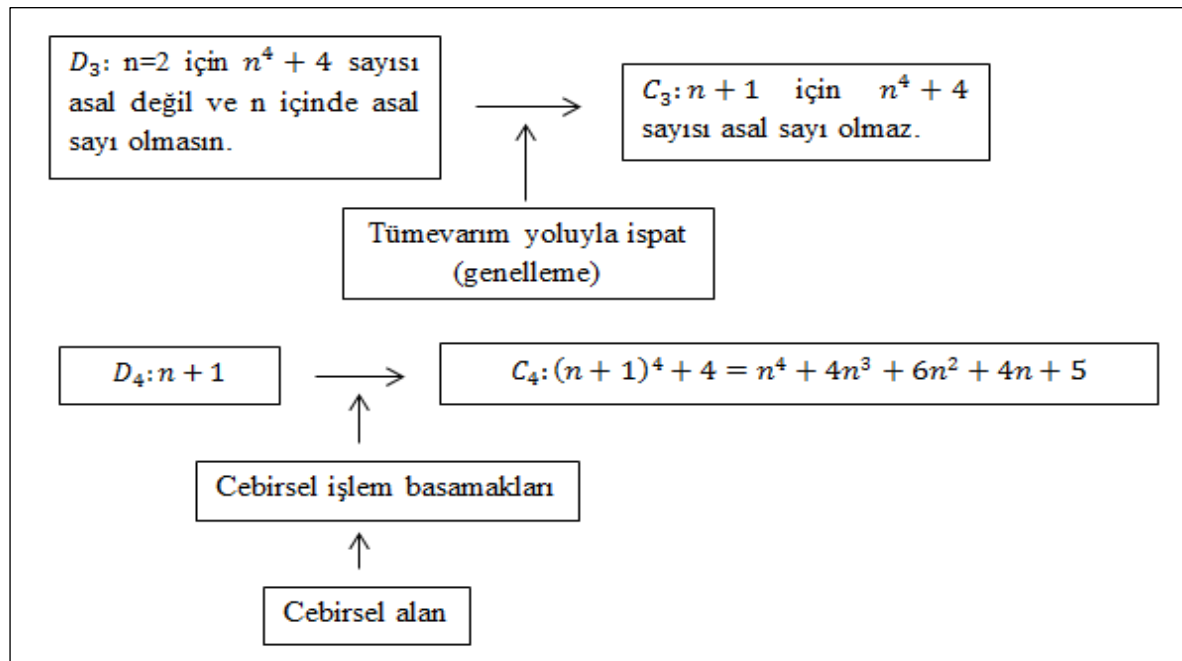
$$n^4 + 4 = kt \Rightarrow n^4 = kt - 4 \Rightarrow n = \sqrt[4]{kt - 4}$$

Desem ve hepsinde n yerine bunu yazsam. Olmaz ki...

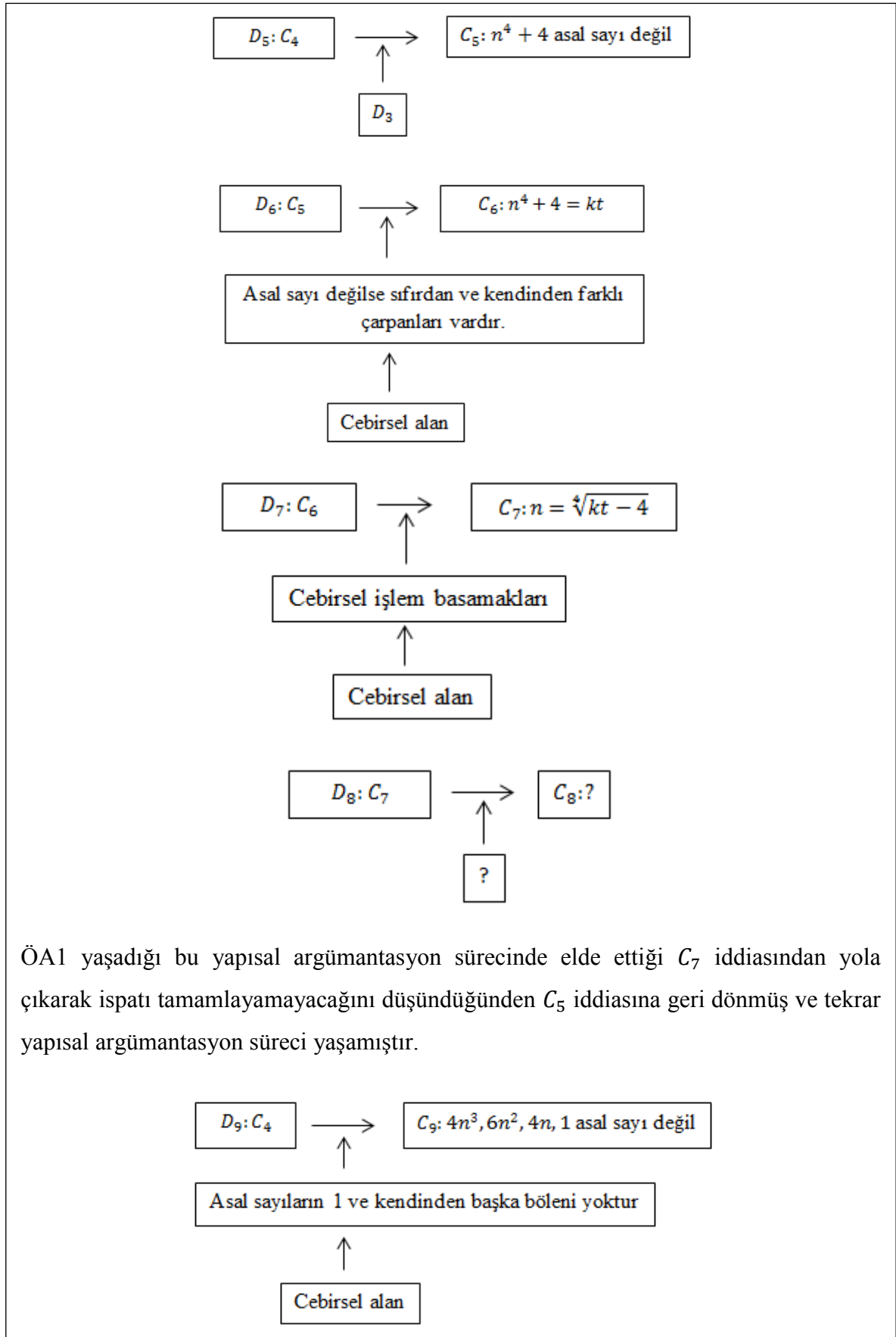
Asal sayı olması için 1 ve kendinden başka hiçbir çarpanının olmaması gerek o zaman $4n^3, 6n^2, 4n$ asal değil 1 zaten asal sayı değil. O zaman asal olmayan sayıların toplamı asal sayı olur mu? Mesela $6 + 8 + 21 + 14 = 49$ asal değil ama bu özel örnek. Kesin bir şey yapamıyorum şu an. Hiç merak etmemiştim asal olmayan sayıların toplamı asal olur mu olmaz mı? Net bir şey söylemem lazım işte.

Şekil 29. ÖA1'in ikinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullanarak yaşadığı ispat süreci

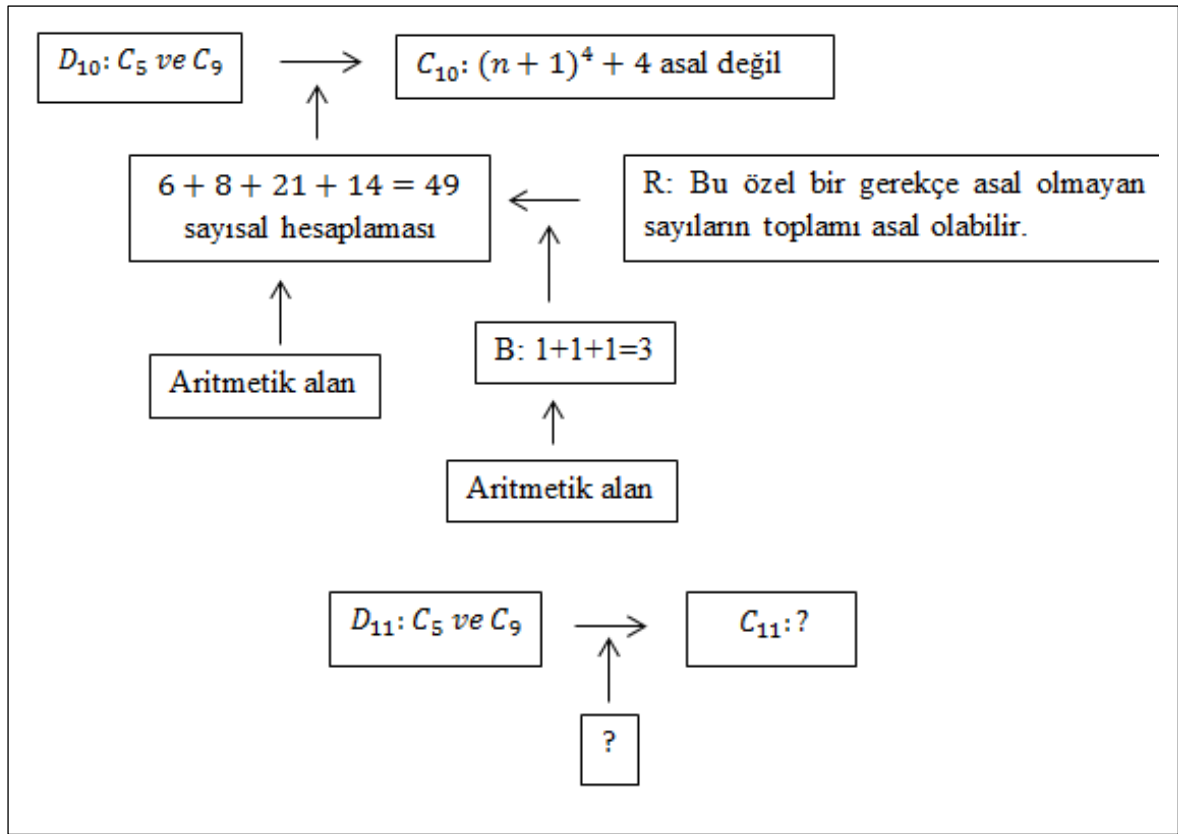
ÖA1'in ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi şöyledir;



Şekil 30. ÖA1'in ikinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullanarak yaşadığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (1)



Şekil 31. ÖA1'in ikinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullanarak yaşadığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (2)



Şekil 32. ÖA1'in ikinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullanarak yaşadığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (3)

ÖA1 C_{10} iddiasından emin olmadığını düşünmektedir. Çünkü ortaya koyduğu gerekçe özel bir durum olup bu özel durumu da başka bir özel durumla çürütmüştür. Bu nedenle ispatı tamamlayamamıştır.

ÖA1'in ispat sürecinin içerik sistemi cebirsel alan üzerine kurulu olduğundan argümantasyon ve ispat süreci arasında bilişsel mesafe vardır. ÖA1, C_{10} iddiasını oluştururken ortaya koyduğu gerekçenin kontrolünü aritmetik alan ile sağlamıştır. Ancak bu adım iki süreç arasındaki bilişsel mesafeyi kapatmak için yeterli olmamıştır. Çünkü ÖA1 bu adım ile aslında C_{10} iddiasını oluşturup oluşturamayacağını kontrol etmiş neticede böyle bir iddia ortaya koyamayacağına karar vermiştir. Daha öncesinde belirtildiği üzere iki süreç arasında yapısal süreklilik mevcuttur. Ancak ÖA1 yapısal sürekliliğe rağmen ispatı tamamlayamamıştır. Çünkü C_3 iddiasına ulaşabilecek gerekçeler bulamamış dolayısıyla da dedüktif adımı tamamlayamamıştır. ÖA1'in ispatı tamamlayamamasının bir diğer nedeni de seçilen ispat tekniğinin problemin çözümü için kullanılabilecek doğru teknik olmaması olabilir.

ÖA1'in Problem 2 de Tercih Ettiği İkinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi

ÖA1'in hipotezini doğrulaması için farklı bir ispat tekniği seçmesi istendiğinde çelişkiyle ispatı seçmiştir. Dolayısıyla ispatın yapısı abdüktiftir. Buradan anlaşılmaktadır ki argümantasyon ve ispat süreci arasında yapısal mesafe vardır.

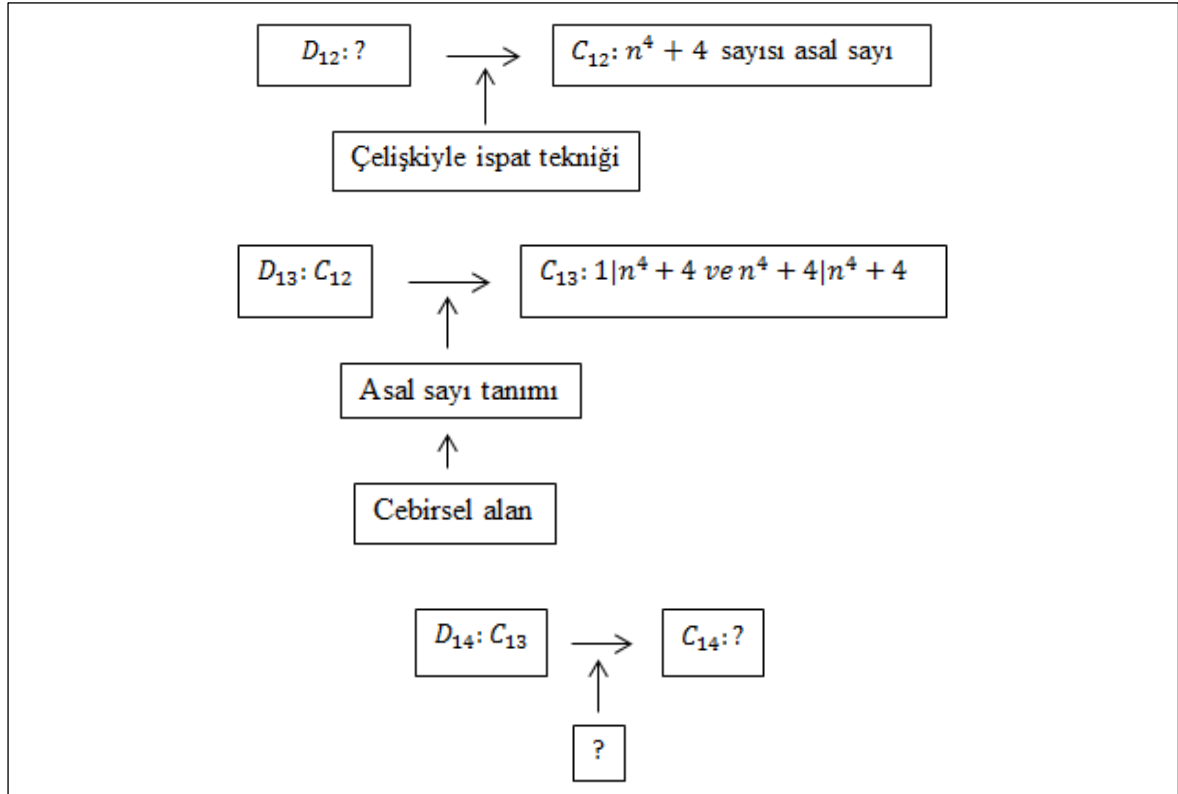
$n^4 + 4$ sayısı asal sayı olsun. O zaman $n^4 + 4$ sayısı hiçbir sayıya bölünmez. Hayır sadece 1 ve kendine bölünebilir. Yani;

$$1|n^4 + 4 \text{ ve } n^4 + 4|n^4 + 4$$

Ama her sayı hem 1 hem de kendisine bölünür. Başka bir sayıya bölünebildiğini göstermem lazım.

Şekil 33. ÖA1'in ikinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullanarak yaşadığı ispat süreci

ÖA1'in ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi şöyledir;



Şekil 34. ÖA1'in ikinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullanarak yaşadığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi

ÖA1 bu ispat tekniğini kullanarak ispatı tamamlayamamıştır. D_{14} verisinden sonra bir iddia oluşturamamıştır. Yani C_{12} iddiasının yanlışlığını gösterebilecek gerekçeler bulamamıştır.

ÖA1'in ispat sürecinin içerik sistemi cebirsel alan üzerine temellendirilmiştir. Bu nedenle argümantasyon ve ispat süreci arasından bilişsel mesafe vardır. ÖA1'in ispatı tamamlayamamasının nedeni iki süreç arasındaki yapısal ve bilişsel mesafe olabilir. İspat sırasında yaşanan yapısal argümantasyonda ÖA1 dedüktif adımlar atmış ve bu adımları tamamlayamamıştır. Dedüktif adımlar ÖA1'in iki süreç arasındaki yapısal ve bilişsel mesafeyi azaltamamıştır. Ayrıca ispatın tamamlanamamasının bir nedeni de cebirsel problemlerin güçlü dedüktif yapısı olabileceği gibi seçilen ispat tekniğinin doğru teknik olmaması da olabilir.

ÖA1'in Problem 2 de Tercih Ettiği Üçüncü İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi

ÖA1 denediği ikinci ispat tekniğinden sonra ispat yöntemini değiştirmek istemiştir. Bunun üzerine doğrudan ispat tekniğini seçmiştir. Dolayısıyla ispatın yapısı dedüktiftir. Buradan anlaşılmaktadır ki argümantasyon ve ispat sürecinin yapısı farklı olduğundan iki süreç arasında yapısal mesafe vardır.

$n^4 + 4$ asal sayı olmasın. $k \neq 1$ ve $k \neq n^4 + 4$ olmak üzere bir $k \in \mathbb{Z}$ için $k|n^4 + 4$ diyelim.

$$n^4 + 4 = k.t, t \in \mathbb{Z}$$

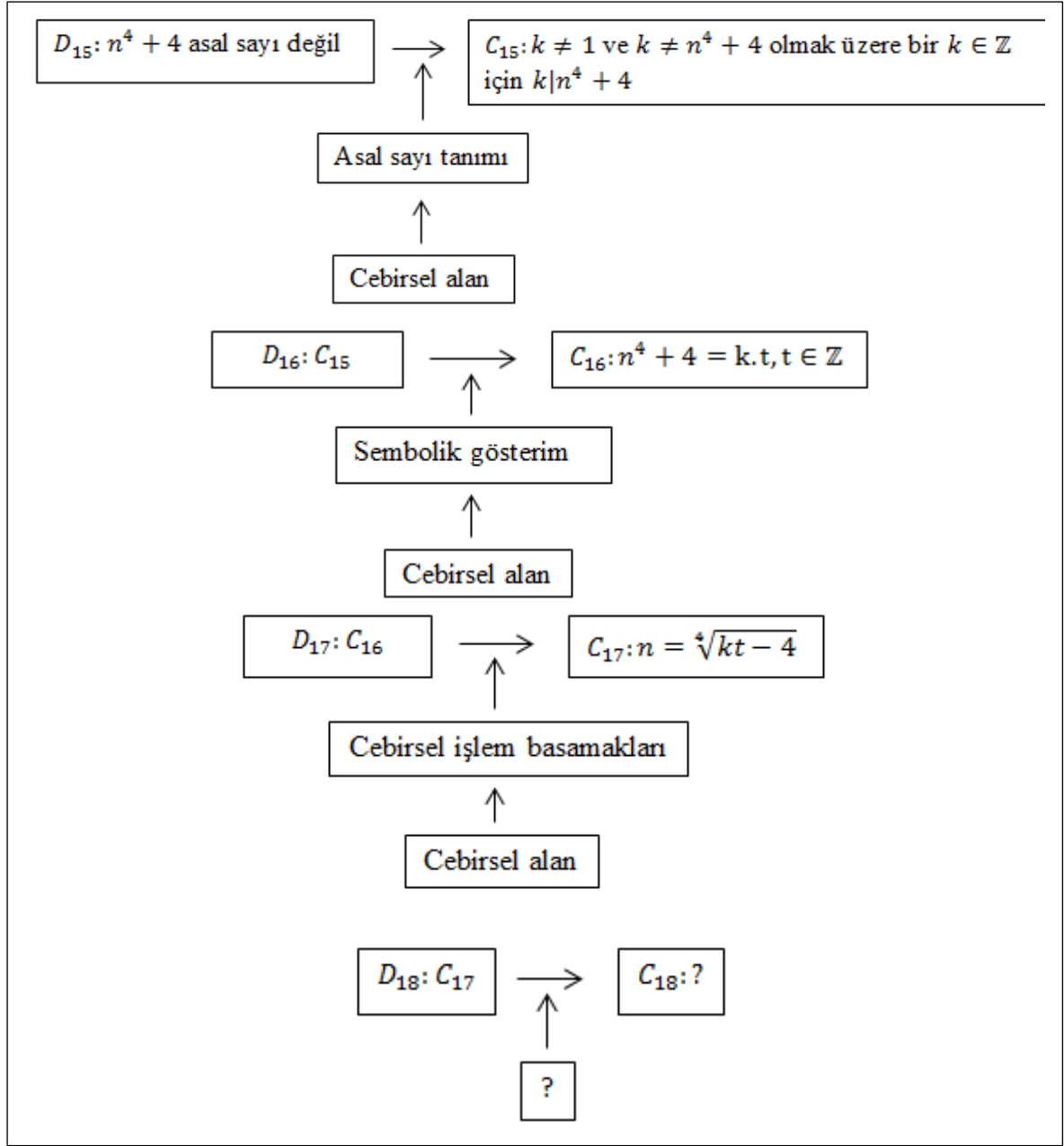
Ben bu k için özel bir değer bulsam. Bulamam ki.

$$n^4 = k.t - 4 \Rightarrow n = \sqrt[4]{kt - 4}$$

Bu buradan da olmaz bence.

Şekil 35. ÖA1'in ikinci problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullanarak yaşadığı ispat süreci

ÖA1'in ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi şöyledir;



Şekil 36. ÖA1'in ikinci problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullanarak yaşadığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi

ÖA1 son attığı dedüktif adımda bir iddia oluşturabilecek gerekçe bulamadığından adımı tamamlayamamıştır. Dolayısıyla ispatı tamamlayamamıştır.

ÖA1'in ispat sürecinin içerik sistemi cebirsel alan üzerine temellendirildiğinden iki süreç arasında bilişsel mesafe vardır. Öncesinde de söz edildiği üzere iki süreç arasında yapısal mesafe mevcuttur. Dolayısıyla ÖA1 iki süreç arasındaki bilişsel ve yapısal mesafeyi kapatacak adımlar atamadığından ispatı tamamlayamamış olabilir. Bu adımlar ispat

sırasında gözlemlenen yapısal argümantasyonda atılması gereken abdükatif adımlardır. ÖA1 yapısal argümantasyonu yaşamış olmasına rağmen bu süreçte abdükatif değil dedükatif adımlar gözlemlenmiştir. ÖA1 cebirsel problemlerin güçlü dedükatif yapısından da kaynaklı olarak ispatı tamamlayamamış olabilir. Çünkü ispat sırasında atılan dedükatif adımlar ÖA1'i sonuca ulaştıramamıştır.

ÖA1'in Problem 3'e Yönelik Bulgularının Analizi

ÖA1'in Problem 3 de Tercih Ettiği Birinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi

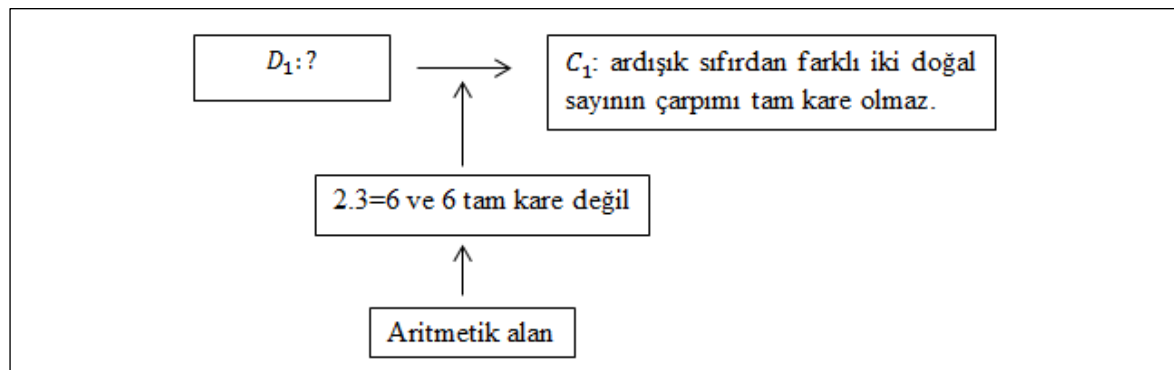
Problem 3: Ardışık ve sıfırdan farklı her iki doğal sayının çarpımının bir tam kare olup olmadığı hakkında ne söyleyebilirsiniz? Varsayımınızı ispatlayınız.

Şekil 37. Üçüncü matematiksel problem

2 ve 3 için denersek $2 \cdot 3 = 6$ olur bu da tam kare olmaz. Ama tüm ardışık doğal sayılar için böyle midir? Belki vardır tam kare olan ama bence tam kare olmaz.

Şekil 38. ÖA1'in üçüncü problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyon

ÖA1 hipotezini oluştururken elinde bir veri yokken bir iddia oluşturmuş, yaptığı sayısal hesaplamayı ise iddiasını oluştururken gerekçe olarak kullanmıştır. Bu nedenle ÖA1'in argümantasyonunun yapısı yapısal argümantasyon olup bu süreçte abdükatif argümantasyon gözlemlenmiştir. Ayrıca hipotezini oluştururken sayısal hesaplamalar yaparak gerekçe olarak bir örnek sunduğundan içerik sistemi aritmetik alan üzerine temellendirilmiştir.



Şekil 39. ÖA1'in üçüncü problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyonun Toulmin modeline entegre edilmiş ckc modeline göre analizi

ÖA1 hipotezini doğrulamak için ispat yapmaya başlamış ve ispat tekniğini tümevarımla ispat olarak seçmiştir. Dolayısıyla ispatın yapısı indüktiftir. Buradan anlaşılmaktadır ki argümantasyonun ve ispat sürecinin yapısı farklı olduğundan iki süreç arasında yapısal mesafe vardır.

a, a+1 sıfırdan farklı olmak üzere a=1 olsun. $1.2 = 2$ ise $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$ olduğundan tam kare değildir. n için de

$$n(n+1) = n^2 + n$$

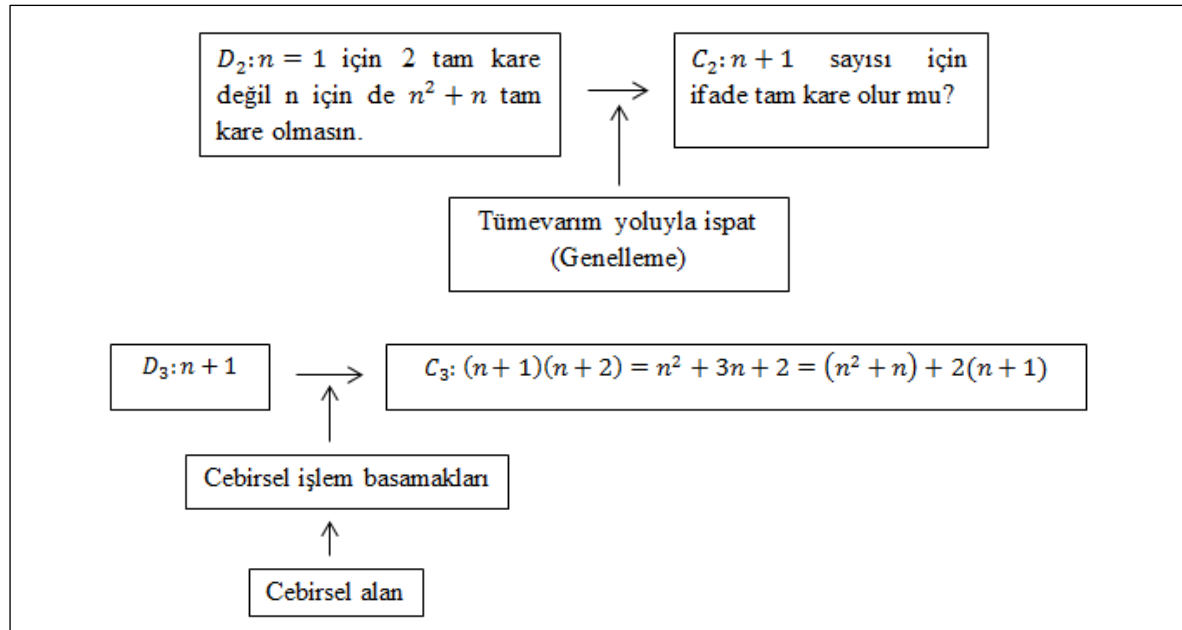
olmak üzere $\sqrt{n^2 + n} \notin \mathbb{N}$ olsun. n+1 için tam kare olmadığını gösterelim.

$$(n+1)(n+2) = n^2 + 3n + 2 = (n^2 + n) + 2(n+1)$$

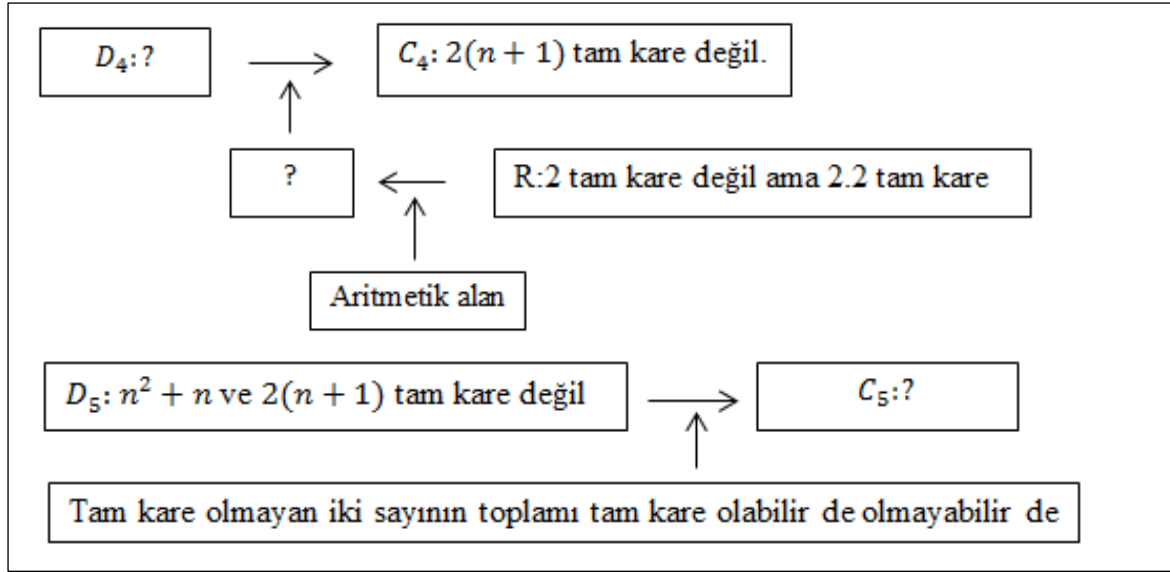
$(n^2 + n)$ bir tam kare değil $2(n+1)$ de bir tam kare değil. Belki toplanınca bir tam kare olur. Mesela 5 ile 20 toplanınca 25 olur. Nasıl göstereceğim? Bu tam kare değil ama nasıl? Mesela $2(n+1)$ in de tam kare olup olmadığını bilmiyoruz. 2 tam kare değil ama $(n+1)$ ile çarpınca tam kare olur belki. ... Bence ispatı buradan yapamayız.

Şekil 40. ÖA1'in üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullanarak yaşadığı ispat süreci

ÖA1'in ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi şöyledir;



Şekil 41. ÖA1'in üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullanarak yaşadığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (1)



Şekil 42. ÖA1'in üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullanarak yaşadığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (2)

ÖA1 ispatı burada sonlandırmıştır.

ÖA1 ispat sırasında yapısal argümantasyon süreci yaşamıştır. Bu süreçte abdüktif bir adım atmış olup sonrasında bu adımdaki iddiasının özel örnek yardımıyla doğru olmayabileceğini görmüştür. Buna rağmen başlangıçtaki iddiasını doğru olarak almış ve dedüktif bir adım atmıştır. Ancak bu dedüktif adımda bir iddia oluşturabilmek için bulduğu gerekçenin doğruluğundan emin olamadığı için bir iddia oluşturamamıştır. Dolayısıyla ispatı tamamlayamamıştır.

ÖA1'in ispat sürecinde içerik sistemi cebirsel alan üzerine temellendirilmiş olup attığı abdüktif adımda iddianın çürütenini sayısal örnek yardımıyla ortaya koyduğundan attığı adımın kontrolü aritmetik alan üzerinedir. Bu nedenle bu adım iki süreç arasındaki bilişsel mesafeyi azaltmıştır. Pedemonte (2008)'e göre iki süreç arasındaki yapısal mesafe ispatın tamamlanmasına engel olmamaktadır. Buna rağmen ÖA1 ispatı tamamlayamamıştır. Bu durumun sebebi ÖA1'in problemin çözümündeki dedüktif adımlardan oluşan zinciri devam ettirememiş olması olabileceği gibi seçilen ispat tekniğinin doğru teknik olmaması da olabilir.

ÖA1'in Problem 3 de Tercih Ettiği İkinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi

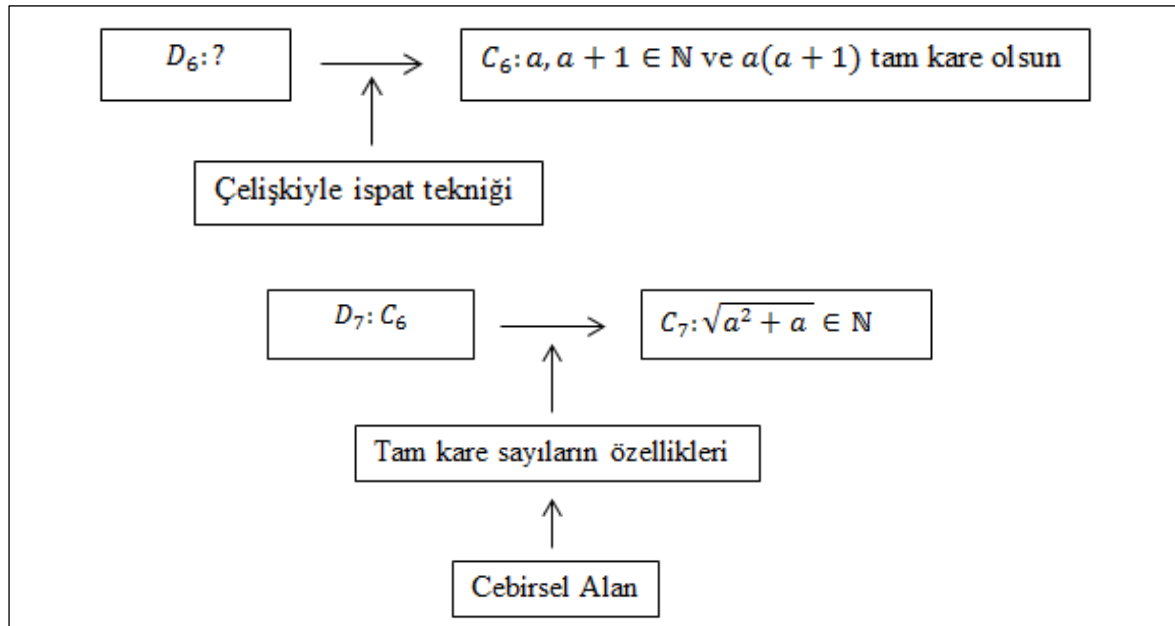
ÖA1 hipotezini doğrulamak için ispat yapmaya başlamış ve ispat tekniğini çelişkiyle ispat olarak seçmiştir. Dolayısıyla ispatın yapısı abdükiftir. Buradan anlaşılmaktadır ki argümantasyonun ve ispat sürecinin yapısı aynı olduğundan iki süreç arasında yapısal süreklilik vardır.

ÖA1 bu ispat tekniği ile ispat yaparken üç farklı yapısal argümantasyon süreci yaşamıştır. Yaşadığı ilk yapısal argümantasyon süreci ve bu sürecin Toulmin modeline göre analizi şöyledir:

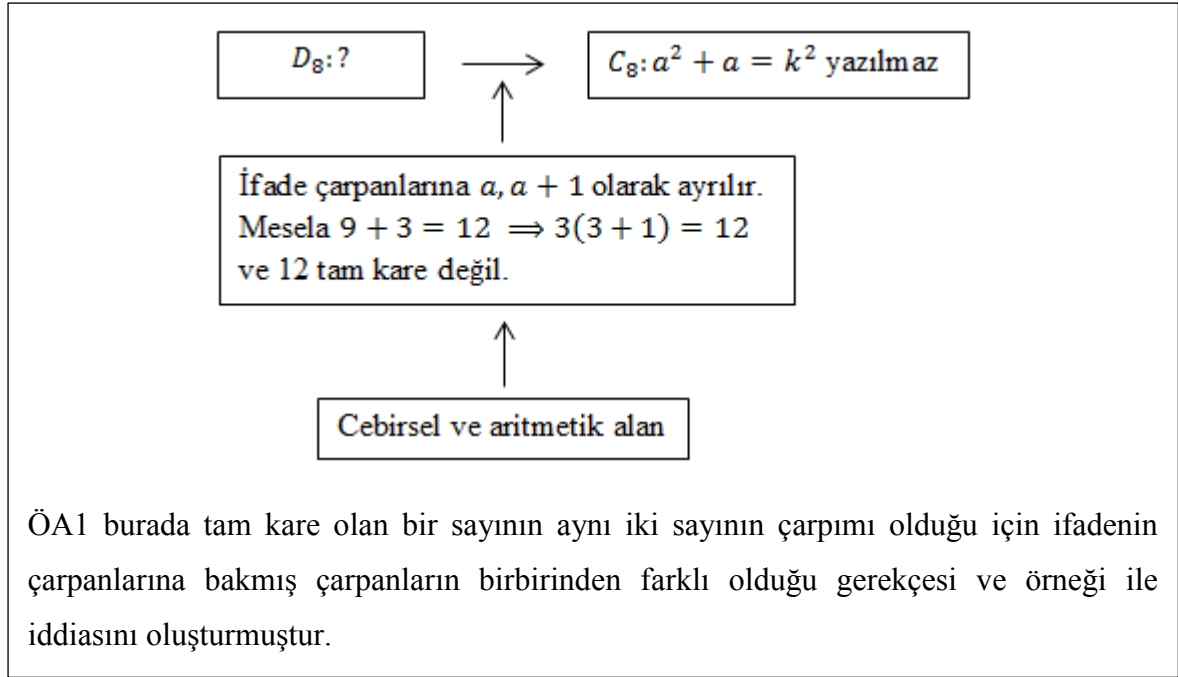
$a, a + 1 \in \mathbb{N}$ olsun ve $a(a + 1)$ tam kare olsun. $a(a + 1) = a^2 + a$ ve bunun tam kare olduğunu göstermem için $\sqrt{a^2 + a} \in \mathbb{N}$ olması gerek. Ama ben sanmıyorum bunun olduğunu da nasıl diyeceğim. $a^2 + a = k^2$ olacak şekilde yazamam. Çünkü çarpanlarına ayırmam lazım ve çarpanları da $a, a + 1$ dir. Mesela $9 + 3 = 12$ ve 12 tam kare değil. $a(a + 1) = a^2 + a = k.k$

Şekil 43. ÖA1'in üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı birinci yapısal argümantasyon süreci

ÖA1'in yaşadığı yapısal argümantasyon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş $ck\check{c}$ modeline göre analizi şöyledir;



Şekil 44. ÖA1'in üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı birinci yapısal argümantasyon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş $ck\check{c}$ modeline göre analizi (1)



Şekil 45. ÖA1'in üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı birinci yapısal argümantasyon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (2)

ÖA1 ispat sürecine seçtiği ispat tekniği gereği abdükatif adım atarak başlamıştır. Ardından bir abdükatif adım daha atmış ve bu adımdaki iddiasını özel bir örnekle gerekçelendirmiştir. ÖA1 bu gerekçeyi genelleylememiş ve attığı son adımı dedüktif adıma dönüştürememiştir. Dolayısıyla C_6 iddiasının yanlış olduğunu gösterebilecek geçerli adımlar atamadığından ispatı tamamlayamamıştır. Bu nedenle ÖA1 ispat tekniğini değiştirmeden yeniden yapısal argümantasyon süreci yaşamıştır. Bu sürecin Toulmin modeline göre analizi şöyledir;

$a, a + 1 \in \mathbb{N}$. Burada a ve $a + 1$ in bir k çarpanı olması lazım. Mesela $a = 2.2$ ve $a + 1 = 2.3$ ama olmaz ardışık değil. Olsa bile $4.6 = 24$ yine tam kare değil. Tam kare olması için iki ifadenin de aynı olması gerek. Yani iki aynı sayının çarpılması gerek. O zaman

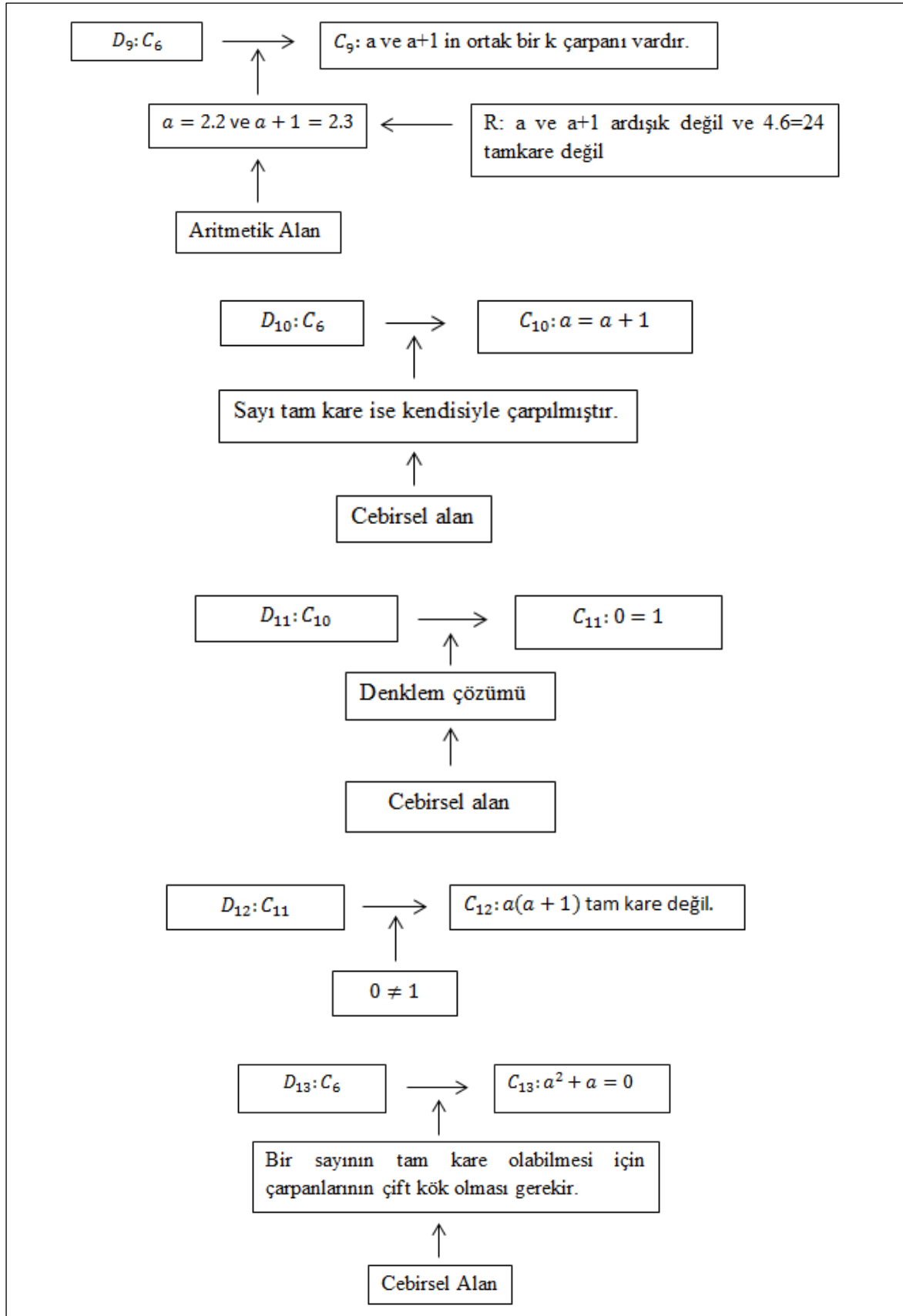
$$a = a + 1 \Rightarrow 0 = 1$$

olur ki bu çelişki. Bir diğer durum çarpanlarının çift kök olması gerekiyor. Mesela

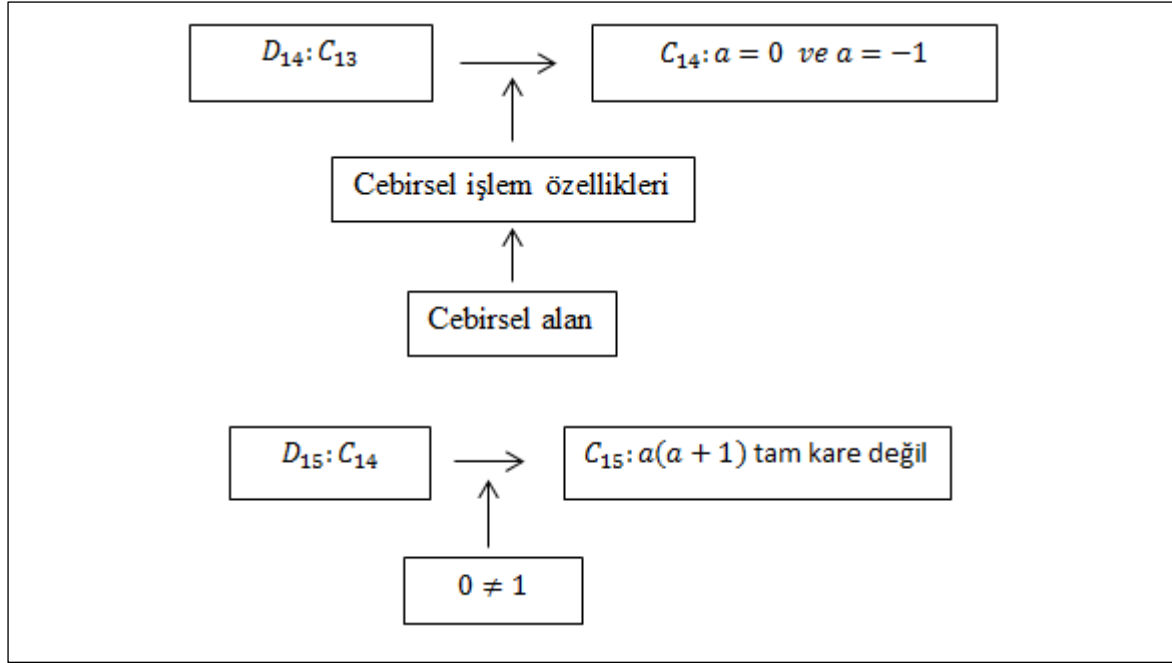
$$a^2 + a = 0$$

olsun. $a = 0$ ve $a = -1$ olur ki $0 \neq -1$ olduğundan bu da yanlış. O zaman tam kare değildir derim.

Şekil 46. ÖA1'in üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı ikinci yapısal argümantasyon süreci



Şekil 47. ÖA1'in üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı ikinci yapısal argümantasyon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (1)



Şekil 48. ÖA1'in üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı ikinci yapısal argümantasyon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (2)

ÖA1 burada ispatı tamamladığını düşünmüştür. Ancak yanlış tamamlamıştır. Çünkü ilk durumda sayının tam kare olması için kendisiyle çarpılması gerektiğini düşünmüş ona göre adımlar atmıştır. Ancak burada sayıların ardışık doğal sayılar olması gerektiğini göz ardı etmiştir. İkinci durumda ise çift kök olması gerektiğini düşünüp $a^2 + a = 0$ almış ve $a = 0$ bulmuştur. Ancak burada da ardışık doğal sayıların sıfırdan farklı olması gerektiğini göz ardı etmiştir. ÖA1'in ispat sürecinde attığı adımların kontrol alanı hem aritmetik hem de cebirsel olduğundan iki süreç arasında bilişsel süreklilik vardır. Ancak ÖA1 iki süreç arasındaki bilişsel sürekliliğe rağmen ispatı yanlış tamamlamıştır. Çünkü argümantasyondaki düşüncesini ispat sürecinde devam ettirememiş, ispat sürecinde yanlış bir düşünce etrafında adımlar atmıştır.

ÖA1 araştırmacının bu sonuca ikna olmaması üzerine tekrar yapısal argümantasyon süreci yaşamıştır. Bu sürecin Toulmin modeline göre analizi şöyledir;

Ardışık iki sayıda hiç ortak çarpan yok. Çünkü biri tek biri çift sayı. Sayı çift ise 2 çarpanı vardır. Ancak tek sayılarda 2 çarpanı yoktur.

A: Belki çift sayıda iki tane 2 çarpanı var.

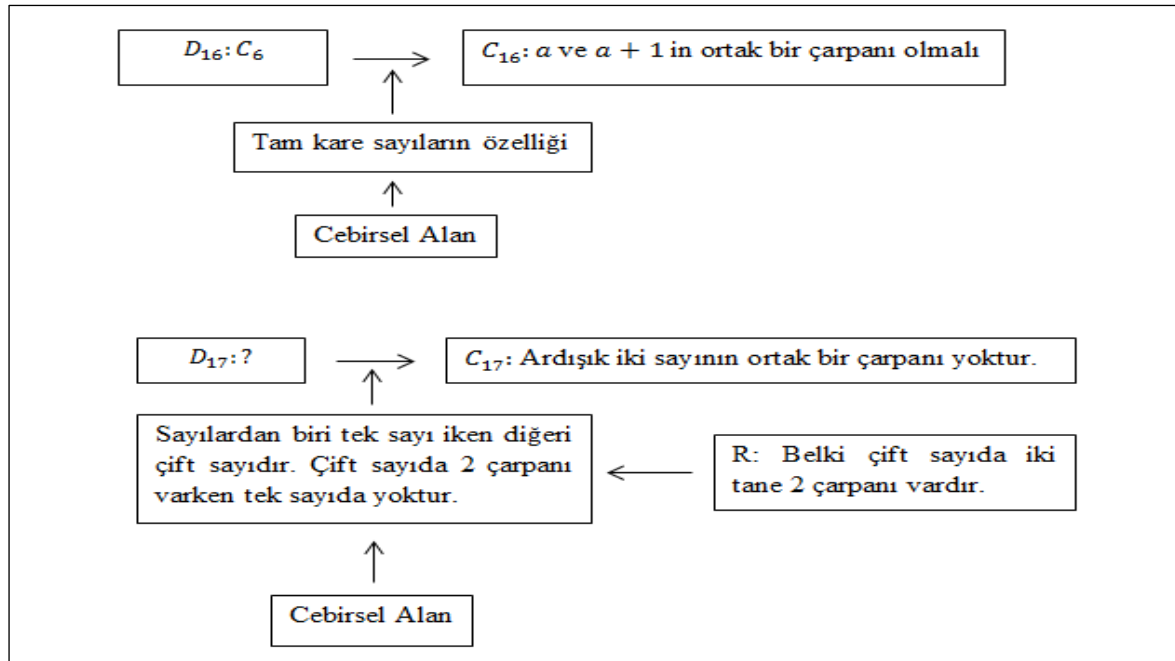
Hmm.. Tek sayı tam kare olmalı. Var mı? Evet var 49. 48 de de 4 tane 2 bir de 3 çarpanı var. 3 çarpanı tek olduğundan tam kare olmaz işte. Ama nasıl genellerim bunu? Kabul edelim ki $a, a + 1 \in \mathbb{N}$ olsun ve $a(a + 1)$ tam kare olsun. $a, a + 1$ in ortak çarpanı olması gerek. $\text{Ebob}(a, a + 1) = 1$ olduğundan yani aralarında asal olduğundan ortak çarpanı yoktur. O yüzden de tam kare olmaz çünkü ortak çarpanı yok. Yani k , a nın bir çarpanı olsun. $k \nmid (a + 1)$ olduğundan $a(a + 1)$ tam kare olmaz.

$$8.9 = 2^3 3^2 = 2.2.3.3.2$$

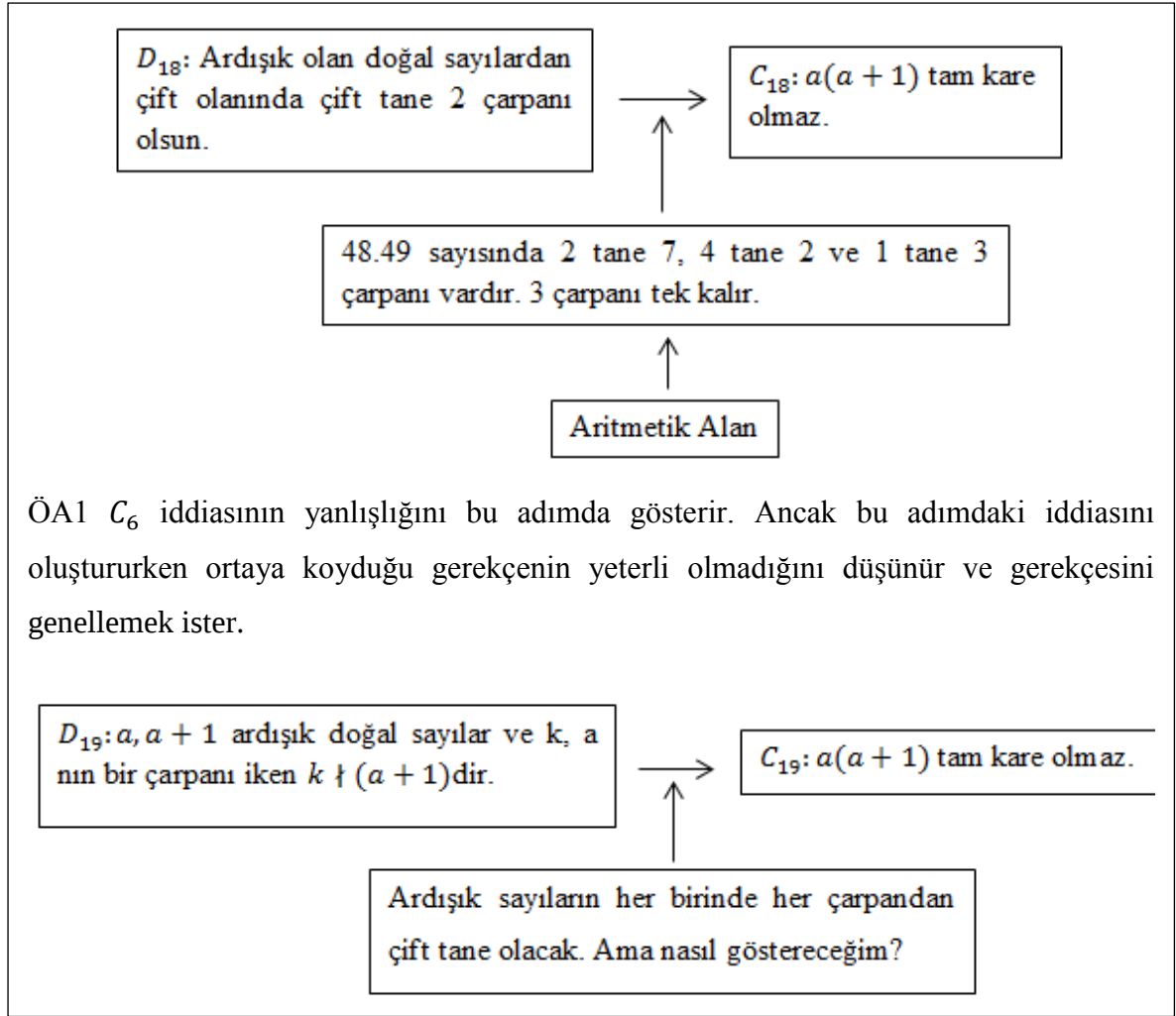
2 çarpanı tek kaldı. İşte $a(a + 1)$ in de tam kare olması için her çarptandan çift tane olacak. Ama nasıl göstereceğim?

Şekil 49. ÖA1'in üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı üçüncü yapısal argümantasyon süreci

ÖA1'in yaşadığı yapısal argümantasyon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckg modeline göre analiz şöyledir;



Şekil 50. ÖA1'in üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı üçüncü yapısal argümantasyon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckg modeline göre analizi (1)



Şekil 51. ÖA1'in üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı üçüncü yapısal argümantasyon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş $ck\phi$ modeline göre analizi (2)

ÖA1 bu yapısal argümantasyon sürecinde abdükatif bir adım atmıştır. Sonrasında bu abdükatif adımı dedükatif adıma dönüştürerek C_6 iddiasını yanlışılayabilmıştır. Ancak bu dedükatif adımda iddiasını oluşturmak için ortaya koyduğu gerekçenin yetersiz olduğunu düşünmüş ve ispatı tamamlayabilmek için işe yarayacak geçerli elemanlar aramaya koyulmuştur. Ancak bulamamıştır. Bu durum da son attığı dedükatif adımdan anlaşılmaktadır. Sonuç olarak ÖA1 ispatı tamamlayamamıştır.

ÖA1'in yaşamış olduğu yapısal argümantasyon süreçlerine genel olarak bakacak olursak; öncesinde de söz edildiği üzere argümantasyon ve ispat süreci arasında yapısal süreklilik mevcuttur. Ayrıca ÖA1'in ispatı sırasında gözlemlenen yapısal argümantasyon süreçlerinde attığı bazı adımların kontrol alanı cebirsel iken bazılarının kontrol alanı aritmetiktir. Bazı adımların aritmetik alan üzerine temellendirilmiş olması argümantasyon

ve ispat süreci arasındaki bilişsel mesafeyi azaltmıştır. Ancak iki süreç arasındaki yapısal süreklilik ve azalan bilişsel mesafeye rağmen ÖA1 ispatı tamamlayamamıştır. Bu durumun sebebi cebirsel problemlerin güçlü dedüktif yapısı olabilir. ÖA1 problemin çözümündeki dedüktif zincirin zorluğunu aşamamış olabilir.

ÖA1'in Problem 4'e Yönelik Bulgularının Analizi

ÖA1'in Problem 4 de Tercih Ettiği Birinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi

Problem 4: $0 \neq x \in \mathbb{R}$ için $x + \frac{1}{x} < 2$ ise o zaman x in negatif ya da pozitifliği hakkında ne söyleyebilirsiniz? Varsayımınızı ispatlayınız.

Şekil 52. Dördüncü matematiksel problem

ÖA1 hipotezini oluştururken sayısal hesaplamalar yapmış ve bunun üzerine $x \in \mathbb{R}^-$ hipotezini oluşturmuştur. ÖA1 hipotezini oluşturduğu argümantasyonda sayısal hesaplamalar yaptığından bu sürecin içerik sistemi aritmetik alan üzerine temellendirilmiştir. Ayrıca ÖA1 argümantasyonda hipotezini sayısal örnekleri genelleyerek elde ettiğinden sürecin yapısı yapılandırıcı argümantasyon olup bu süreçte indüktif argümantasyon gözlemlenmiştir.

$$1 < x < 2 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \text{ iken } \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{13}{6} > 2$$

$$x = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} \text{ iken } \frac{6}{5} + \frac{5}{6} = \frac{61}{30} > 2$$

$$x = \frac{11}{10} \text{ iken } \frac{11}{10} + \frac{10}{11} = \frac{221}{110} > 2$$

$$0 < x < 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ iken } \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} > 2$$

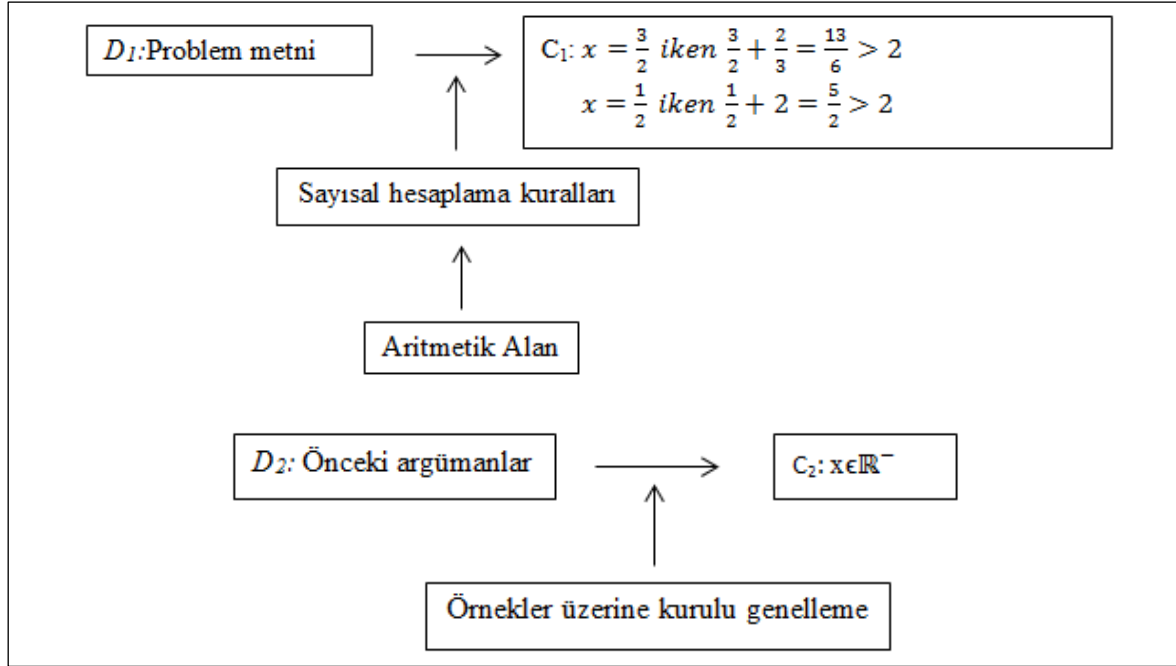
$$x = \frac{6}{10} \text{ iken } \frac{6}{10} + \frac{10}{6} = \frac{136}{60} > 2$$

$$x = \frac{2}{10} \text{ iken } \frac{1}{5} + 5 = \frac{26}{5} > 2$$

O zaman $x < 0$ dır.

Şekil 53. ÖA1'in dördüncü problemin çözümüne yönelik hipotez oluşturduğu argümantasyonu

ÖA1'in argümantasyonunun Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi şöyledir;



Şekil 54. ÖA1'in dördüncü problemin çözümüne yönelik hipotez oluşturduğu argümantasyonun Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi

ÖA1 hipotezini doğrulamak için ispat yapmaya başlamış ve ispat tekniğini çelişkiyle ispat olarak seçmiştir. Dolayısıyla ispatın yapısı abdüktiftir. Buradan anlaşılmaktadır ki argümantasyonun ve ispat sürecinin yapısı farklı olduğundan iki süreç arasında yapısal mesafe vardır.

Kabul edelim ki $x \in \mathbb{R}^+$ olsun.

$$x + \frac{1}{x} < 2 \Rightarrow \frac{x^2 + 1}{x} < 2$$

$$\Rightarrow x^2 + 1 < 2x$$

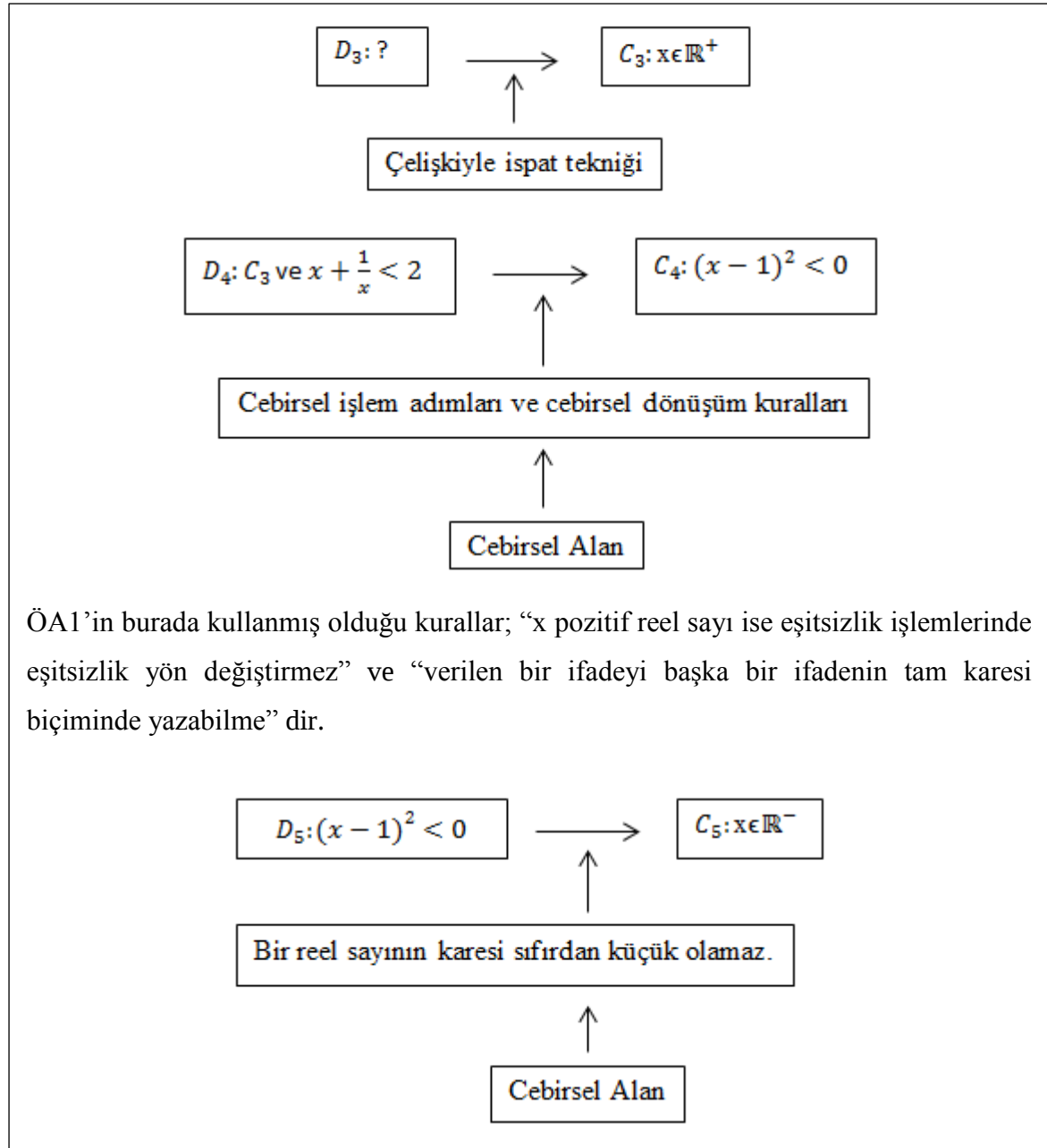
$$\Rightarrow x^2 + 1 - 2x < 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 < 0$$

Fakat bir reel sayının karesi sıfırdan küçük olamayacağından bu çelişkidir. Dolayısıyla $x \in \mathbb{R}^-$ dir.

Şekil 55. ÖA1'in dördüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat süreci

ÖA1'in ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi şöyledir;



Şekil 56. ÖA1'in dördüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi

ÖA1 ispat sürecinin başlangıcında seçtiği ispat tekniği gereği abdükatif adım atmıştır. Sonrasında ise bu abdükatif adımdaki iddianın yanlışlığını göstermek için dedükatif adımlar atmıştır. ÖA1 bu dedükatif adımlar sonucunda abdükatif adımdaki iddianın yanlış olduğunu göstermiş ve ispatı tamamlamıştır.

ÖA1'in argümantasyonunun içerik sistemi aritmetik alan üzerine temellendirilmişken ispatın içerik sistemi cebirsel alan üzerine temellendirilmiştir. Bu nedenle iki süreç arasında bilişsel mesafe vardır. ÖA1 iki süreç arasındaki bilişsel ve yapısal mesafeye rağmen ispatı başarıyla tamamlayabilmiştir. Bunun sebebi cebirsel problemlerin çözümünün güçlü dedüktif yapısı ve ispat sürecinin başlangıcında atılan abdükatif adımın dedüktif adıma dönüştürülebilmesi olabilir.

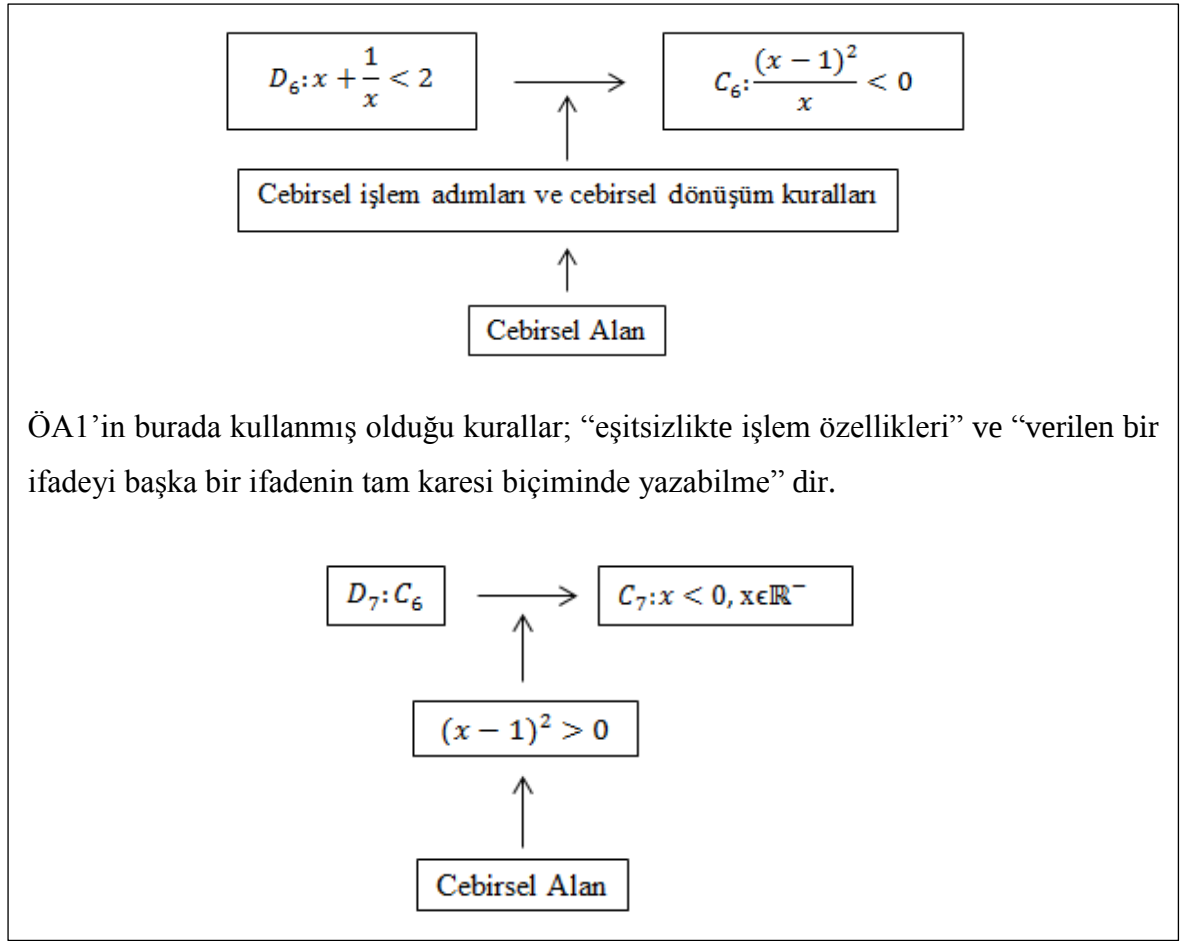
ÖA1'in Problem 4 de Tercih Ettiği İkinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi

ÖA1'den hipotezini doğrulaması için farklı bir ispat yöntemi seçmesi istendiğinde doğrudan ispat tekniğini seçmiştir. Dolayısıyla ispatın yapısı dedüktiftir. Buradan da görülmektedir ki argümantasyon ve ispatın yapısı farklı olduğundan iki süreç arasında yapısal mesafe vardır.

$$\begin{aligned}
 x + \frac{1}{x} < 2 &\Rightarrow x < 2 - \frac{1}{x} \Rightarrow x < \frac{2x-1}{x} \\
 &\Rightarrow x - \frac{2x-1}{x} < 0 \\
 &\Rightarrow \frac{x^2+1-2x}{x} < 0 \\
 &\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{x} < 0 \\
 (x-1)^2 > 0 &\text{ olacağından } \frac{(x-1)^2}{x} < 0 \text{ olması için } x \text{ negatif reel sayı olmalıdır.}
 \end{aligned}$$

Şekil 57. ÖA1'in dördüncü problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat süreci

ÖA1'in ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi şöyledir;



Şekil 58. ÖA1'in dördüncü problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi

ÖA1 ispat sürecinde attığı dedüktif adımlar sonucu ispatı başarıyla tamamlamıştır.

ÖA1'in argümantasyonunun içerik sistemi aritmetik alan üzerine temellendirilmişken ispatın içerik sistemi cebirsel alan üzerine temellendirilmiştir. Bu nedenle iki süreç arasında bilişsel mesafe vardır. ÖA1 iki süreç arasındaki bilişsel ve yapısal mesafeye rağmen ispatı başarıyla tamamlayabilmiştir. Bu durum cebirsel problemlerin çözümünün güçlü dedüktif yapısından kaynaklanabilir.

ÖA2'nin Problem 1'e Yönelik Bulgularının Analizi

ÖA2'nin Problem 1 de Tercih Ettiği Birinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi

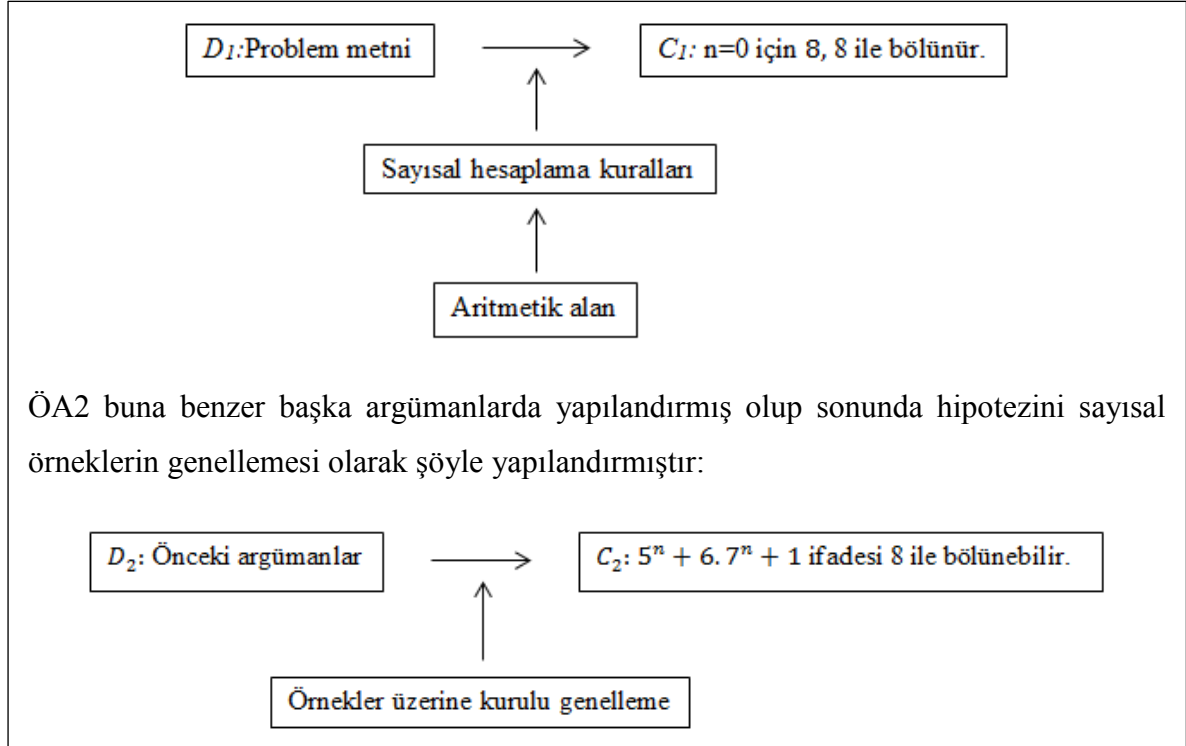
Problem 1: Tüm negatif olmayan n tamsayıları için $5^n + 6 \cdot 7^n + 1$ ifadesinin 8 ile bölünüp bölünmediği hakkında ne söyleyebilirsiniz? Varsayımınızı ispatlayınız.

Şekil 59. Birinci matematiksel problem

ÖA2 hipotezini oluştururken $n=0$ ve $n=1$ için sayısal hesaplama yapmıştır. Bunun üzerine $5^n + 6 \cdot 7^n + 1$ ifadesinin 8 ile bölünebildiği hipotezini oluşturmuştur. Bu hipotezin oluşturulduğu argümantasyon aşamasında ÖA2, hipotezini sayısal örneklerin genellemesi olarak yapılandığından argümantasyonun içerik sistemi aritmetik alan üzerine temellendirilmiştir.

Önce $n=0$ için ifadede yerine koydum ve 8 ile bölünebiliyor. $n=1$ için de baktığımda 48 de 8 ile bölünebiliyor. O zaman diğerlerinde de bölünebilir bence...

Şekil 60. ÖA2'nin birinci problemin çözümüne yönelik hipotez oluşturduğu argümantasyonu



Şekil 61. ÖA2'nin birinci problemin çözümü için yaşadığı argümantasyonunun Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi

Bu süreçte ÖA2'nin yapılandırıcı argümantasyonu sonuç genelleme temelli indüktif argümantasyon olduğu gözlemlenmektedir.

ÖA2 hipotezini doğrulamak için ispat yapmaya başlamış ve ispat tekniğini doğrudan ispat olarak seçmiştir. Dolayısıyla ispatın yapısı dedüktiftir. Buradan anlaşılmaktadır ki argümantasyonun yapısı indüktifken ispatın yapısı dedüktif olduğundan iki süreç arasında yapısal mesafe vardır.

Modüler aritmetikten gidebiliriz bence.

$$5^1 \equiv 5 \text{ ve } 5^2 \equiv 1$$

$$7^1 \equiv 7 \text{ ve } 7^2 \equiv 1$$

Olur. n tek ve çift ise diye inceleyebiliriz o zaman.

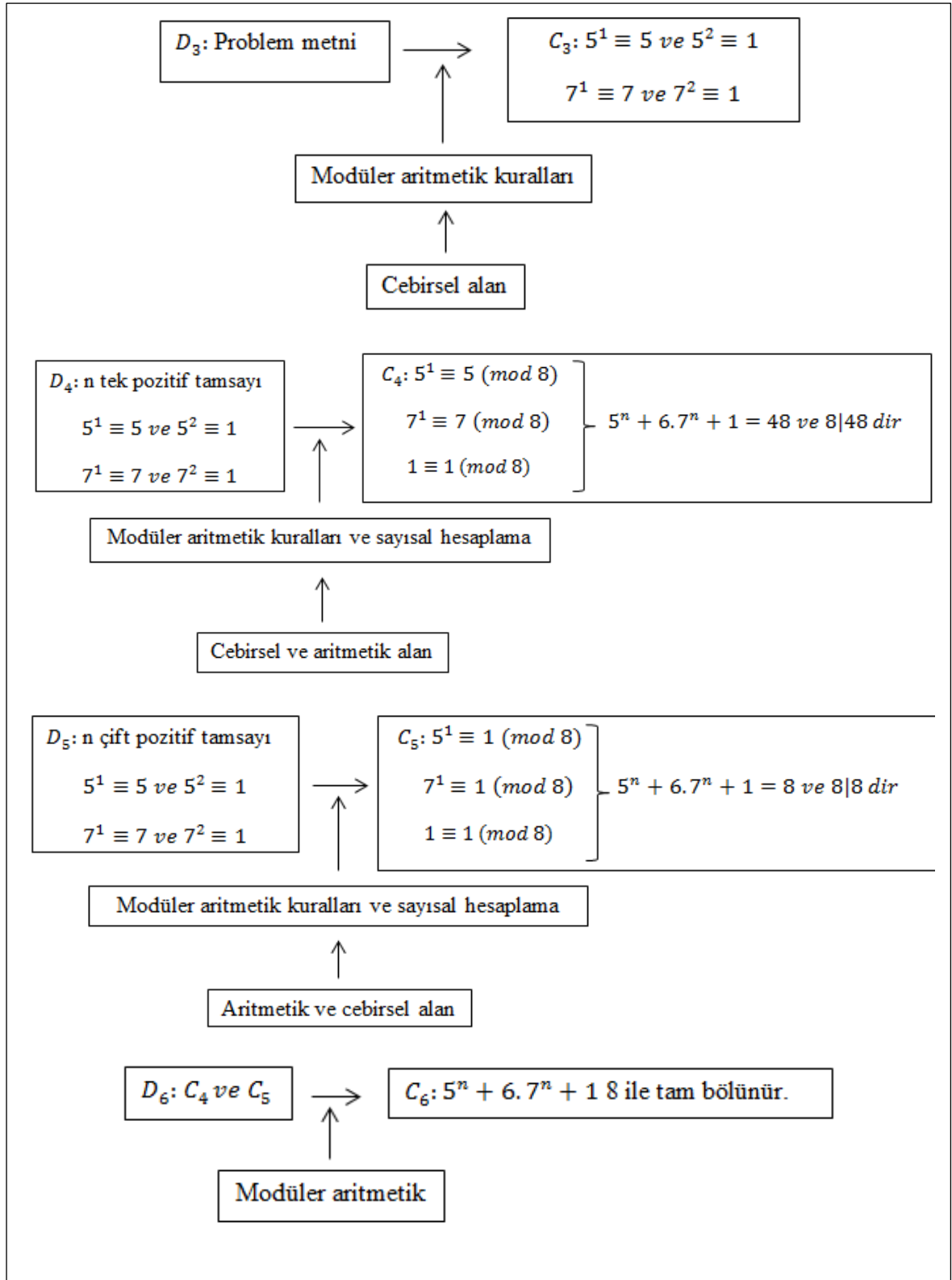
n tek ise $5^1 \equiv 5, 7^1 \equiv 7$ ve 1 zaten 1 e denktir. O zaman $5 + 6.7 + 1 = 48$ olur ve bu toplamda mod8 de 0 a denktir.

n çift ise $5^1 \equiv 1, 7^1 \equiv 1$ ve 1 zaten 1 e denktir. O zaman $1 + 6.1 + 1 = 8$ olur ve bu toplamda mod8 de 0 a denktir.

O halde ifade 8 ile bölünebilir.

Şekil 62. ÖA2'nin birinci problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat süreci

Öğretmen adayının ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeli ile analizi şöyledir;



Şekil 63. ÖA2'nin birinci problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi

ÖA2 ispat sürecinde dedüktif adımlar atarak ispatı başarıyla tamamlamıştır. İspat sürecinde atılan adımların kontrolü hem cebirsel alan hem de aritmetik alan ile sağlanmıştır. Bu durum argümantasyon ve ispat süreci arasında bilişsel süreklilik sağlamıştır. Öncesinde söz edildiği üzere iki süreç arasında yapısal mesafe mevcuttur. Fakat yapısal mesafeye rağmen ÖA2 ispatı başarıyla tamamlayabilmiştir. Bu durumun sebebi, Pedemonte (2008)'e göre cebirsel problemlerin çözümünde iki süreç arasındaki yapısal mesafenin engel oluşturmaması ve iki süreç arasındaki bilişsel sürekliliktir. İspatın başarıyla tamamlanabilmesindeki bir diğer sebep de cebirsel problemlerin güçlü dedüktif yapısı olabilir.

ÖA2'nin Problem 1 de Tercih Ettiği İkinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi

ÖA2'den hipotezini doğrulaması için farklı bir ispat tekniği seçmesi istendiğinde tümevarımla ispat tekniğini seçmiştir. Dolayısıyla ispatın yapısı indüktiftir. Buradan anlaşılmaktadır ki argümantasyon ve ispat sürecinin yapısı aynı olduğundan iki süreç arasında yapısal süreklilik vardır.

$n=1$ için $5^1 + 6 \cdot 7^1 + 1 = 48$ yani 8 in katı ve 8 ile bölünür. n içinde doğru olduğunu (yani 8 ile bölünebildiğini) kabul edelim. O zaman $5^n + 6 \cdot 7^n + 1 = 8k$ olacak şekilde $k \in \mathbb{Z}^+$ vardır. $n+1$ içinde ifade 8 in katı olur mu?

$$5^{n+1} + 6 \cdot 7^{n+1} + 1 = 5 \cdot 5^n + 42 \cdot 7^n + 1$$

Şimdi buradan 8 in katına nasıl geçebilirim onu düşünüyorum. Çünkü $n+1$ için 8 in katı olduğunu göstermem gerekiyor. Şöyle bir şey denesem yukarıdaki ifadenin her tarafını 7 ile çarpayım.

$$7 \cdot 5^n + 42 \cdot 7^n + 7 = 8k \cdot 7$$

Bunu da şöyle parçalayayım.

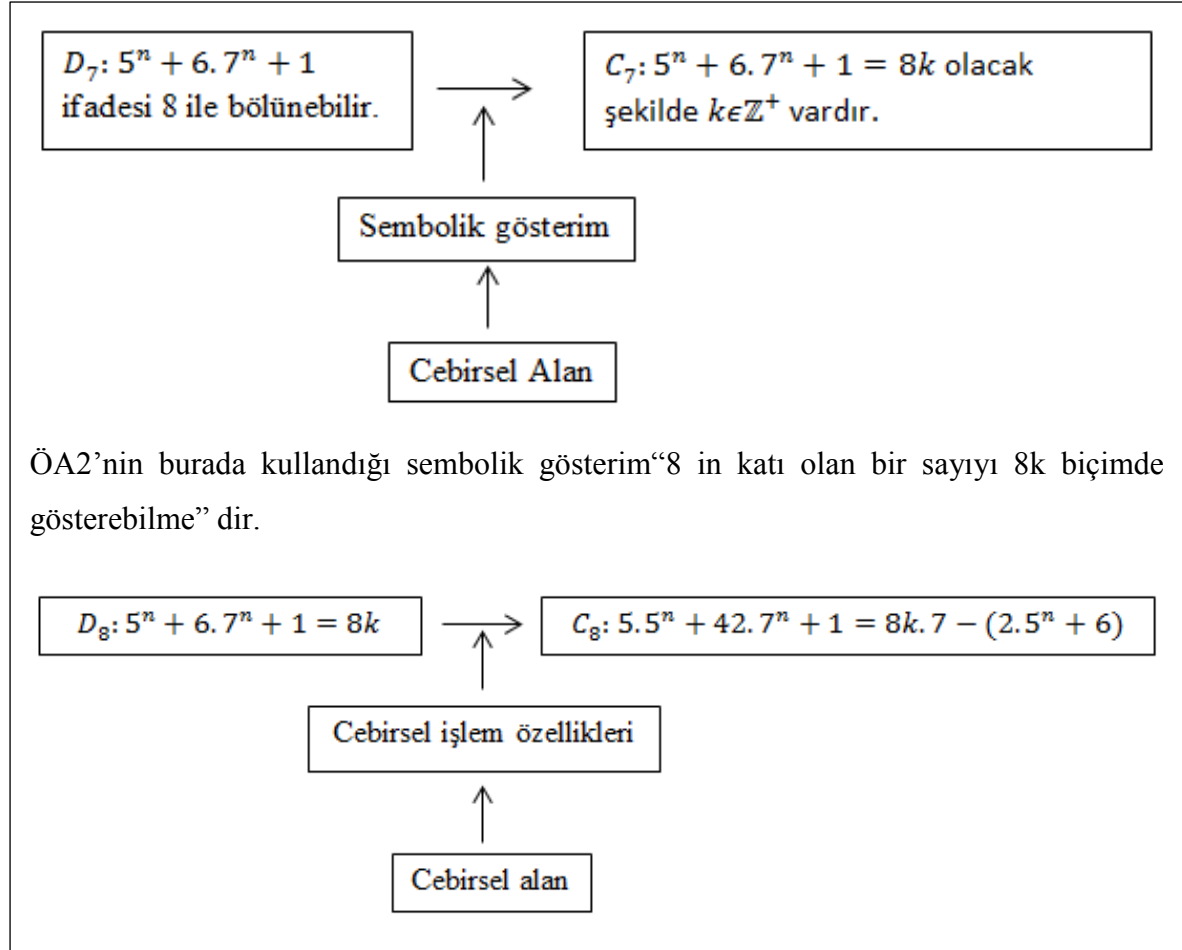
$$2 \cdot 5^n + 6 + 5 \cdot 5^n + 42 \cdot 7^n + 1 = 8k \cdot 7$$

$$5 \cdot 5^n + 42 \cdot 7^n + 1 = 8k \cdot 7 - (2 \cdot 5^n + 6)$$

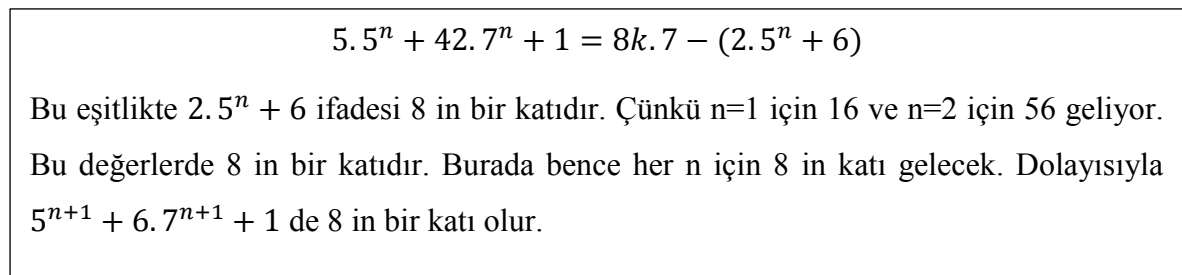
Şekil 64. ÖA2'nin birinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinde yaşadığı yapısal argümantasyon süreci

ÖA2 hipotezini doğrulamak için ispat sırasında yapısal argümantasyon süreci yaşamıştır. $5^n + 6 \cdot 7^n + 1$ ifadesinin 8 ile bölünebildiğinden yola çıkarak $5^{n+1} + 6 \cdot 7^{n+1} + 1$ ifadesinin 8 e bölünüp bölünemediğini analiz etmeye çalışmıştır.

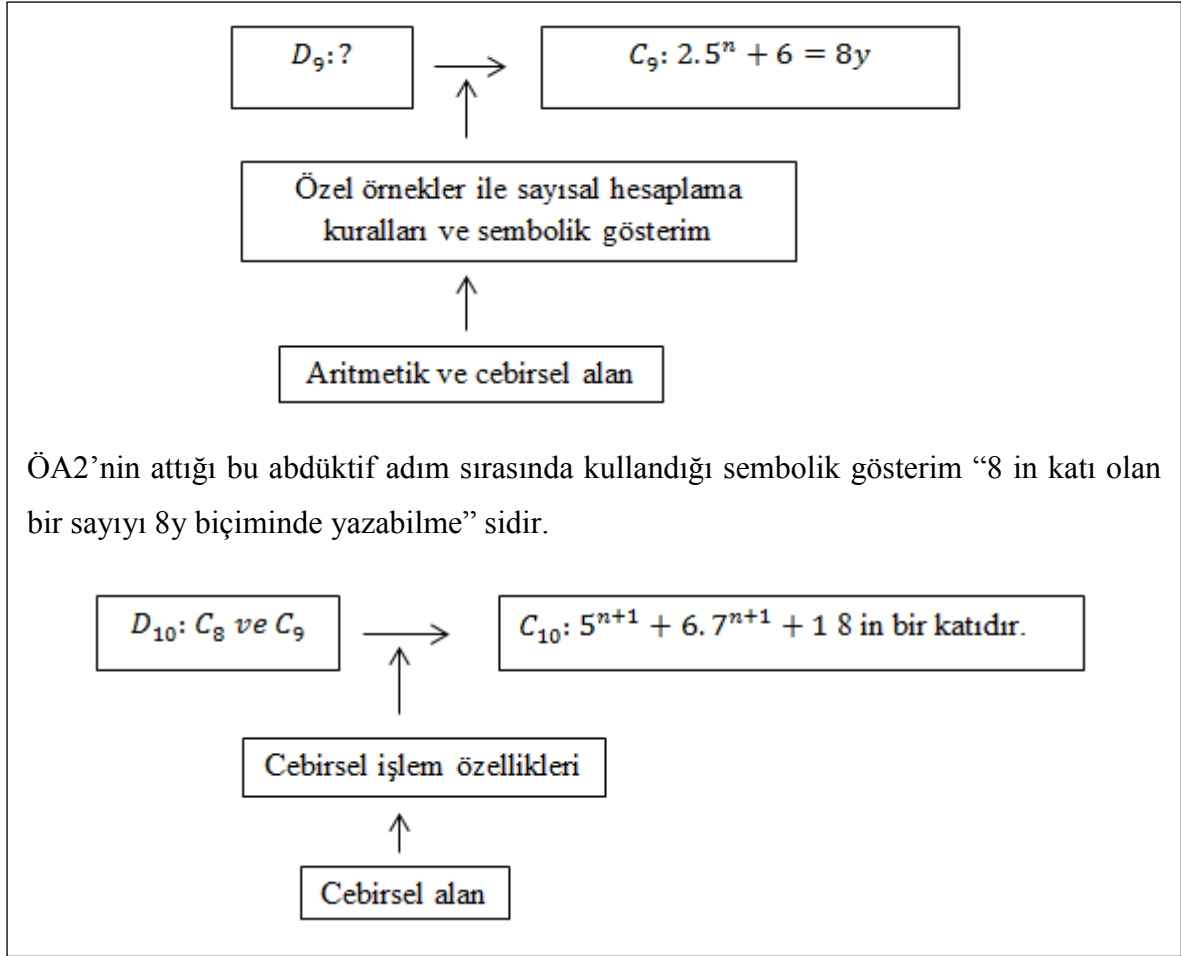
ÖA2'nin ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi şöyledir;



Şekil 65. ÖA2'nin birinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinde yapısal argümantasyon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi



Şekil 66. ÖA2'nin birinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat süreci



Şekil 67. ÖA2'nin birinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi

ÖA2 hipotezini doğrulamak için C_9 iddiasının yeterli olmadığını düşünmektedir. Dolayısıyla C_{10} iddiasının doğru olup olmayacağına da henüz karar veremeyeceğini düşünmektedir. Bu nedenle ÖA2 yeniden yapısal argümantasyon süreci yaşamış ve bu süreçte tekrar tümevarımla ispat tekniğine başvurmuştur.

$n=1$ için $2 \cdot 5^n + 6 = 16$ 8 in katıdır. n için de doğru olduğunu kabul edelim. Yani $2 \cdot 5^n + 6 = 8l$ ($l \in \mathbb{Z}^+$) dir. $n+1$ için de ifadenin 8 in katı olup olmadığını gösterelim.

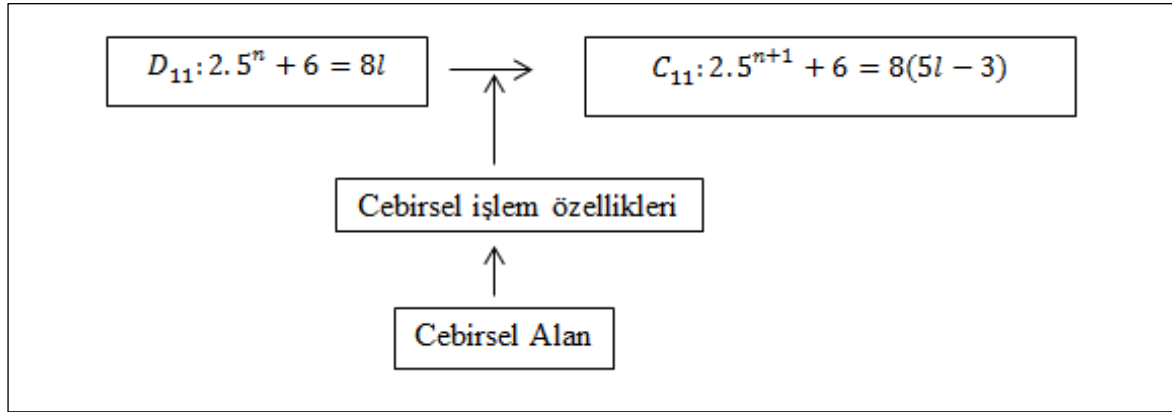
$$2 \cdot 5^{n+1} + 6 = 10 \cdot 5^n + 6 = 10 \cdot 5^n + 30 - 24$$

$$2 \cdot 5^{n+1} + 6 = 5(2 \cdot 5^n + 6) - 24$$

$$= 8(5l - 3)$$

O halde $2 \cdot 5^n + 6 = 8l$ olacak şekilde $l \in \mathbb{Z}^+$ vardır.

Şekil 68. ÖA2'nin birinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinde yaşanan ikinci yapısal argümantasyon süreci



Şekil 69. ÖA2'nin birinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinde yaşanan ikinci yapısal argümantasyon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckc modeline göre analizi

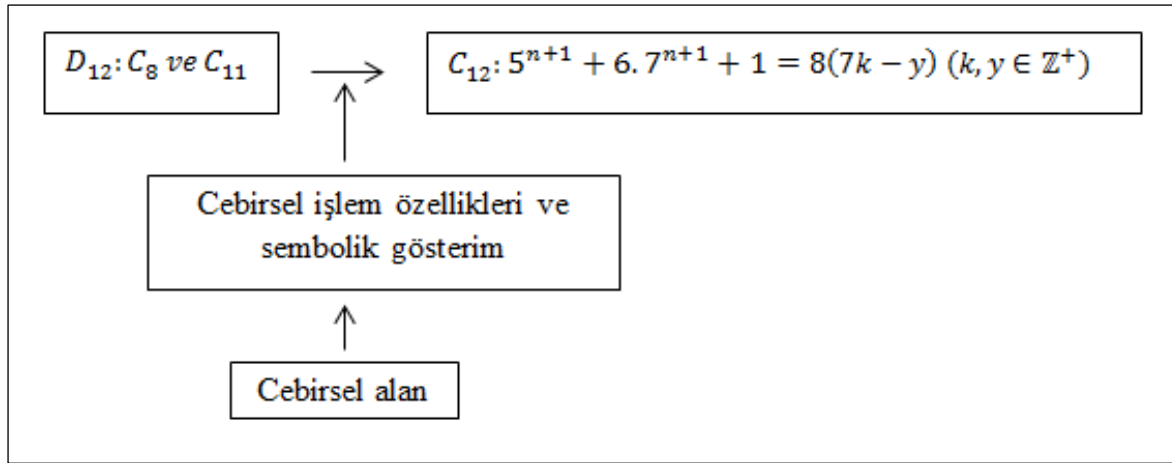
$$5 \cdot 5^n + 42 \cdot 7^n + 1 = 8k \cdot 7 - (2 \cdot 5^n + 6)$$

$$= 8k \cdot 7 - 8y$$

$$= 8(7k - y) \quad (k, y \in \mathbb{Z}^+)$$

O halde ifade 8 ile bölünebilir.

Şekil 70. ÖA2'nin birinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat süreci (2)



Şekil 71. ÖA2'nin birinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin (2) Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi

Yukarıda belirtildiği üzere ÖA2'nin argümantasyon ve ispat süreci arasında yapısal süreklilik vardır. Argümantasyonun içerik sistemi ise aritmetik alan üzerine temellendirilmiştir. ÖA2'nin hipotezini doğrulamaya çalıştığı ispat sürecinin içerik sistemi ise cebirsel alan üzerine temellendirilmiştir. Dolayısıyla iki süreç arasında bilişsel mesafe vardır. Ancak ÖA2 bu bilişsel mesafeye rağmen ispatı başarıyla tamamlayabilmiştir. Bunun nedeni ispat sırasında gözlenen yapısal argümantasyon sürecinde atılan abdüktif adım ve bu adımda kontrol alanının aritmetik olması olabilir. Çünkü bu durum iki süreç arasındaki bilişsel mesafeyi azaltmıştır.

ÖA2'nin Problem 2'e Yönelik Bulgularının Analizi

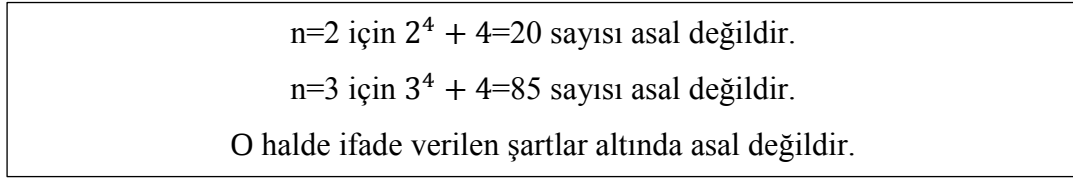
ÖA2'nin Problem 2 de Tercih Ettiği Birinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi

Problem 2: Her $n \geq 2$ tamsayısı için $n^4 + 4$ sayısının asal sayı olup olmadığı hakkında ne söyleyebilirsiniz? Varsayımınızı ispatlayınız.

Şekil 72. İkinci matematiksel problem

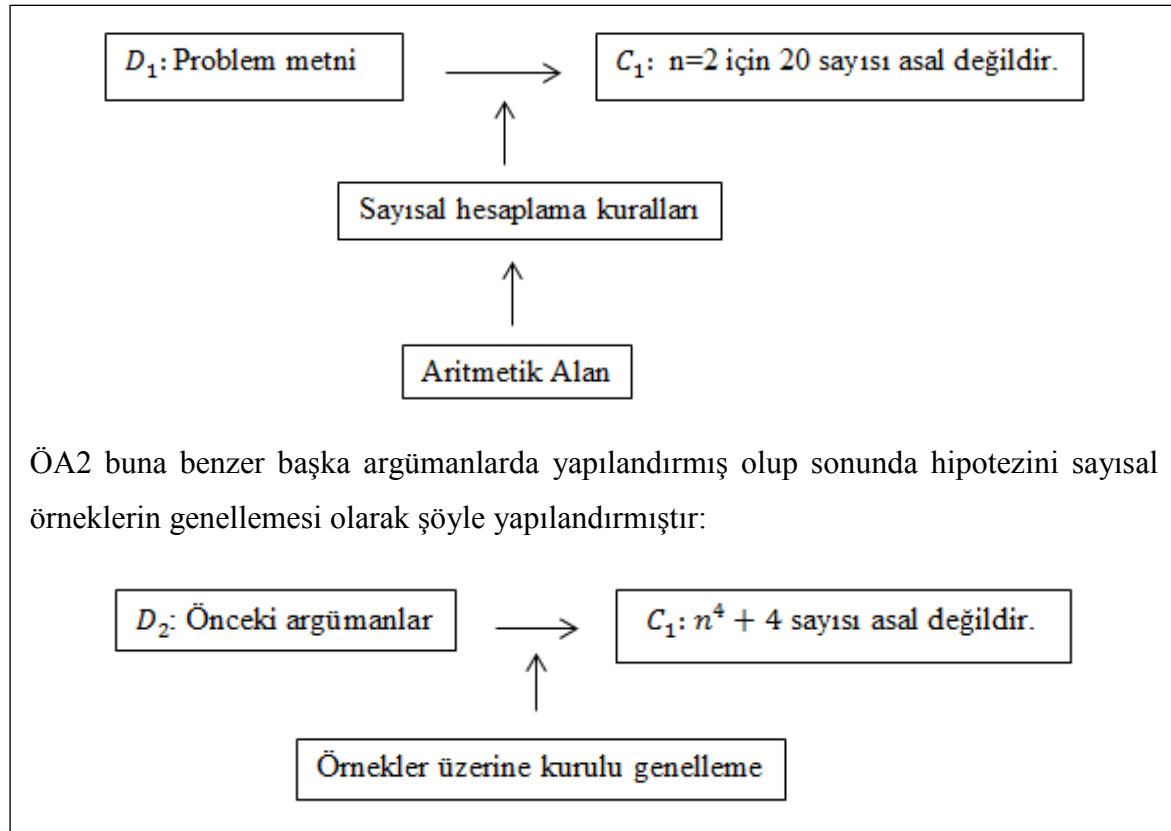
ÖA2 hipotezini oluştururken sayısal hesaplamalar yapmıştır. Bunun üzerine $n^4 + 4$ sayısının asal sayı olmadığı hipotezini oluşturmuştur. ÖA2, hipotezini sayısal örneklerin

genellemesi olarak yapılandırdığından argümantasyonun içerik sistemi aritmetik alan üzerine kuruludur. Ayrıca ÖA2'nin yapılandırıcı argümantasyonu indüktif yapıdadır.



Şekil 73. ÖA2'nin ikinci problemin çözümüne yönelik hipotez oluşturduğu argümantasyonu

ÖA2'nin argümantasyonunun Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeli ile analizi şöyledir;



Şekil 74. ÖA2'nin ikinci problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyonun Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi

ÖA2 hipotezini doğrulamak için ispat yapmaya başlamış ve ispat tekniğini doğrudan ispat olarak seçmiştir. Dolayısıyla ispatın yapısı dedüktiftir. Buradan anlaşılmaktadır ki argümantasyonun yapısı indüktif iken ispatın yapısı dedüktif olduğundan iki süreç arasında yapısal mesafe vardır.

Tam kareye benzetmeye çalışıyorum. Yani belki

$$(n^2 + 2)^2 - 4n^2 = n^4 + 4$$

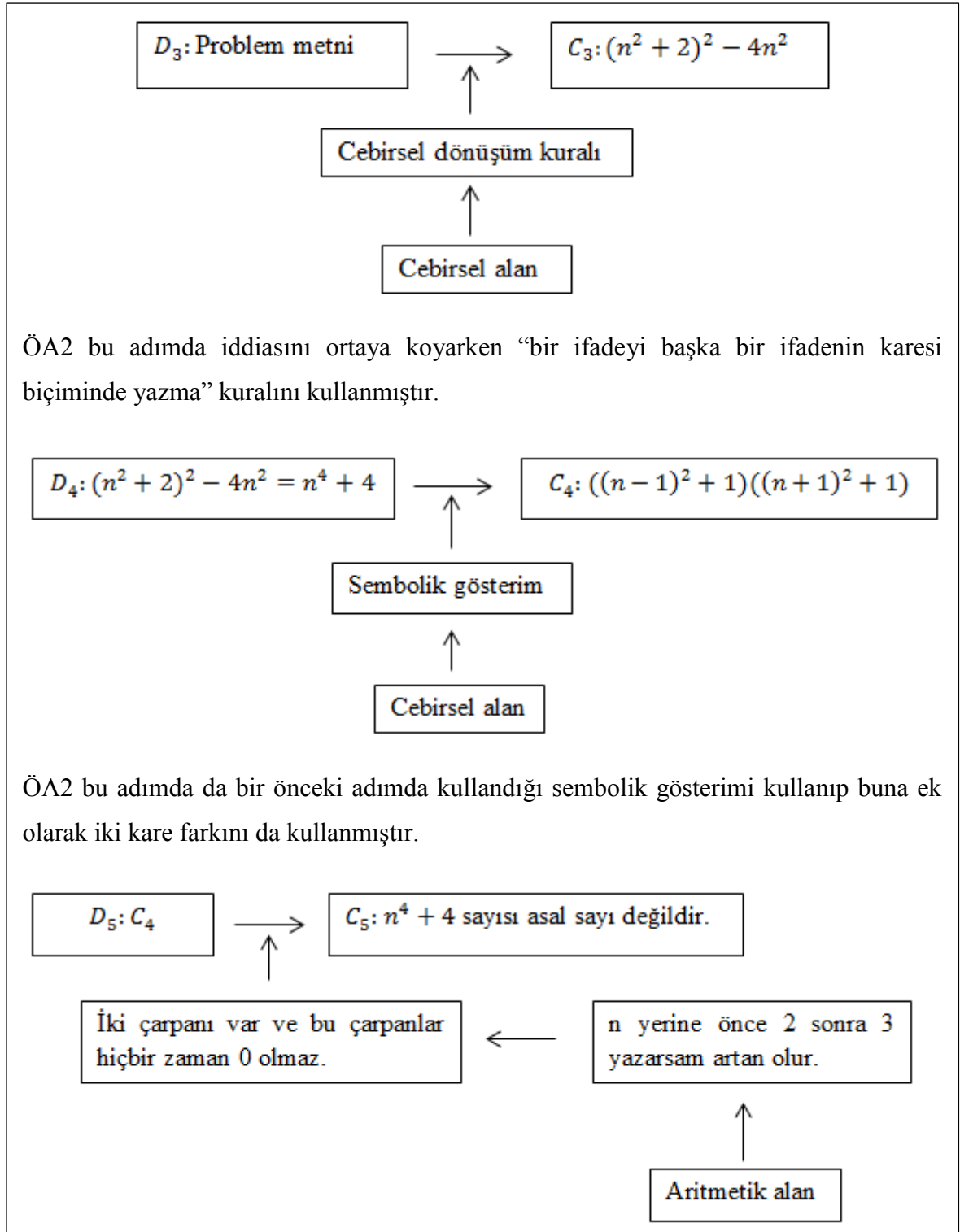
Bu işe yarar mı? Bunu da iki kare farkı olarak yazabilir miyiz ki? Yazalım belki çıkar. Çıkıyor galiba.

$$(n^2 + 2)^2 - 4n^2 = (n^2 + 2 - 2n)(n^2 + 2 + 2n) = ((n - 1)^2 + 1)((n + 1)^2 + 1)$$

Buradan sonra ne çıkabilir? $n \geq 2$ olduğundan zaten iki tane çarpan bulmuş olmadık mı? Farklı. Ama bu çarpanların 1 den farklı olduğunu ispatlamam lazım. Onu artan azalanlıktan söylesek. Önce n yerine 2 sonra 3 koysam bu artan zaten.

Şekil 75. ÖA2'nin ikinci problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat süreci

ÖA2 hipotezini doğrulamak için ispat yaparken bu süreçte yapısal argümantasyon üretmiştir.



Şekil 76. ÖA2'nin ikinci problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi

ÖA2 burada özel örneklerle sayısal hesaplamalar yapıp bir iddia oluşturmuştur. Başlangıçta ispatı tamamladığını düşünen ÖA2 sonradan ikna olmayarak gerekçesini özel örneklerle değil de genelleyerek ortaya koymasına gerektiğini düşünmüştür. Bunun üzerine ÖA2;

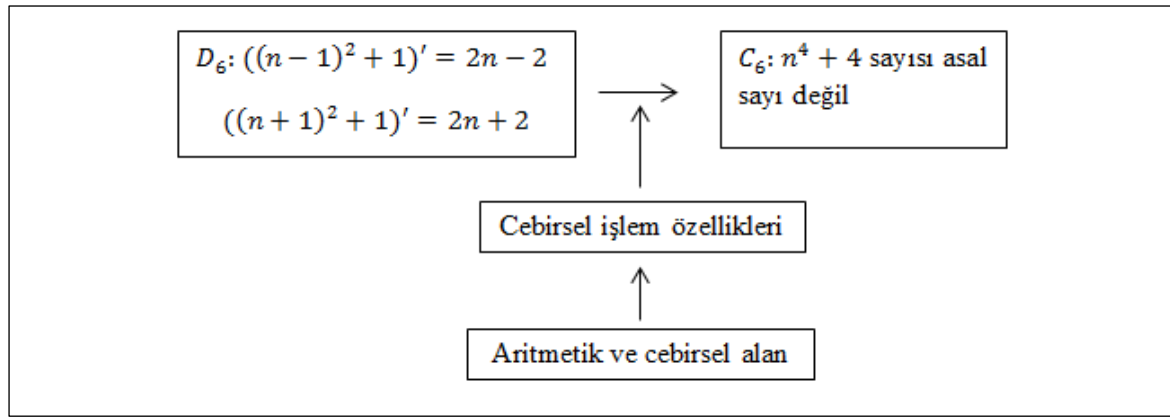
Türev ile artan/azalan olup olmadığına bakabiliriz.

$((n - 1)^2 + 1)' = 2n - 2$ bu ifade $n \geq 2$ olduğundan artandır.

$((n + 1)^2 + 1)' = 2n + 2$ bu ifade $n \geq 2$ olduğundan artandır.

Burada en küçük değerine bakmak yeterli bence $n=2$ yazdığımızda $n^4 + 4 = 2.10$ biçiminde iki tane çarpan elde ederiz.

Şekil 77. ÖA2'nin ikinci problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat süreci (2)



Şekil 78. ÖA2'nin ikinci problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin (2) Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi

ÖA2 bu adımla ispatı tamamladığını söylemiştir. Ancak yine de başka yollar aramaya devam etmiştir. Bunun üzerine eşitsizlik işlem kurallarını kullanarak ispatı başka bir yolla tamamlamıştır.

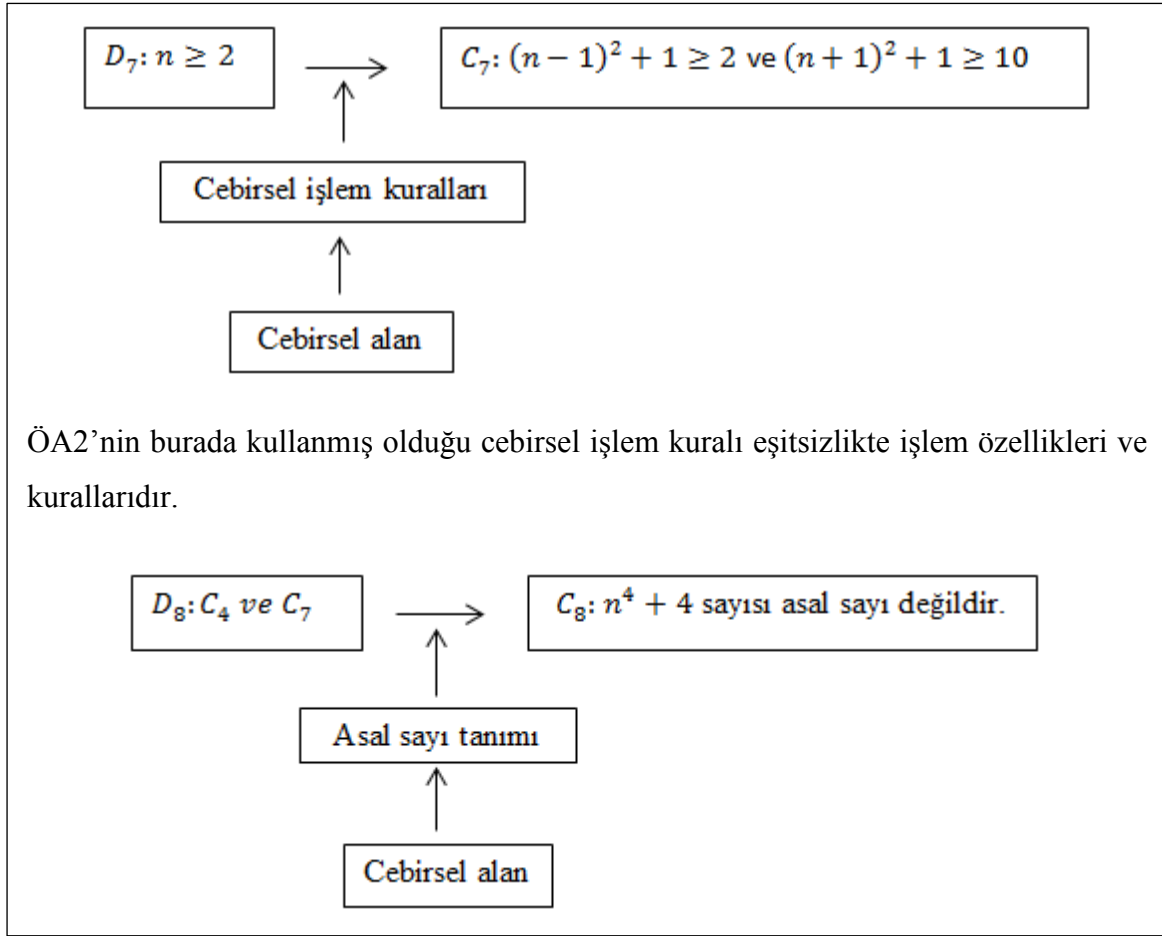
Eğer türevle artan/azalanlığa bakmasaydım ispatı tamamlamak için eşitsizlikle uğraşırdım. Yani;

$$n \geq 2 \Rightarrow n - 1 \geq 1 \Rightarrow (n - 1)^2 \geq 1 \Rightarrow (n - 1)^2 + 1 \geq 2$$

$$n \geq 2 \Rightarrow n + 1 \geq 3 \Rightarrow (n + 1)^2 \geq 9 \Rightarrow (n + 1)^2 + 1 \geq 10$$

olurdu. Bir sayının asal olması için bir çarpanın 1 olması gerek ve bu durumda çarpanı 1 den farklı sayılar elde edilebildiğinden asal olmaz.

Şekil 79. ÖA2'nin ikinci problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat süreci (3)



Şekil 80. ÖA2'nin ikinci problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin (3) Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi

ÖA2 ispatı başarıyla tamamlamıştır. ÖA2'nin argümantasyon ve ispat süreci arasında yapısal mesafe mevcuttur. İspat sürecinin içerik sistemi cebirsel alan üzerine temellendirilmiştir. Argümantasyonun içerik sistemi aritmetik alan üzerine temellendirildiğinden iki süreç arasında bilişsel mesafe vardır. Ancak ispat sürecinde atılan bazı adımların kontrol alanı aritmetik alan üzerine olduğundan iki süreç arasındaki bilişsel mesafe azalmıştır. ÖA2'nin ispatı başarıyla tamamlamasının nedeni iki süreç arasında azalan bilişsel mesafe olabileceği gibi cebirsel problemlerin güçlü dedüktif yapısı da olabilir. ÖA2 ispat sırasında yaşadığı yapısal argümantasyon sürecinde attığı dedüktif adımlarla cebirsel problemlerin çözümündeki dedüktif zinciri başarıyla aşmış ve ispatı tamamlamıştır.

ÖA2'nin Problem 2 de Tercih Ettiği İkinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi

ÖA2'den hipotezini doğrulaması için farklı bir ispat tekniği seçmesi istendiğinde tümevarımla ispat tekniğini seçmiştir. Dolayısıyla ispatın yapısı indüktiftir. Buradan anlaşılmaktadır ki argümantasyon ve ispat sürecinin yapısı aynı olduğundan iki süreç arasında yapısal süreklilik vardır.

$n = 2$ için $2^4 + 4 = 20 = 10 \cdot 2$ olduğundan asal değil. n için de $n^4 + 4$ sayısının asal sayı olmadığını kabul edelim. $n+1$ için asal olup olmadığını gösterelim.

$$(n + 1)^4 + 4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 + 4$$

$$= n^2(n^2 + 6) + 4n(1 + n^2) + 5$$

$$= n^2(n^2 + 1 + 5) + 4n(1 + n^2) + 5$$

$$= n^2(n^2 + 1) + 5n^2 + 4n(n^2 + 1) + 5$$

$$= (n^2 + 1)(n^2 + 4n) + 5(n^2 + 1)$$

$$= (n^2 + 1)(n^2 + 4n + 5)$$

İki farklı çarpan bulduk. Daha fazla sadeleşmez. İki çarpanda artan.

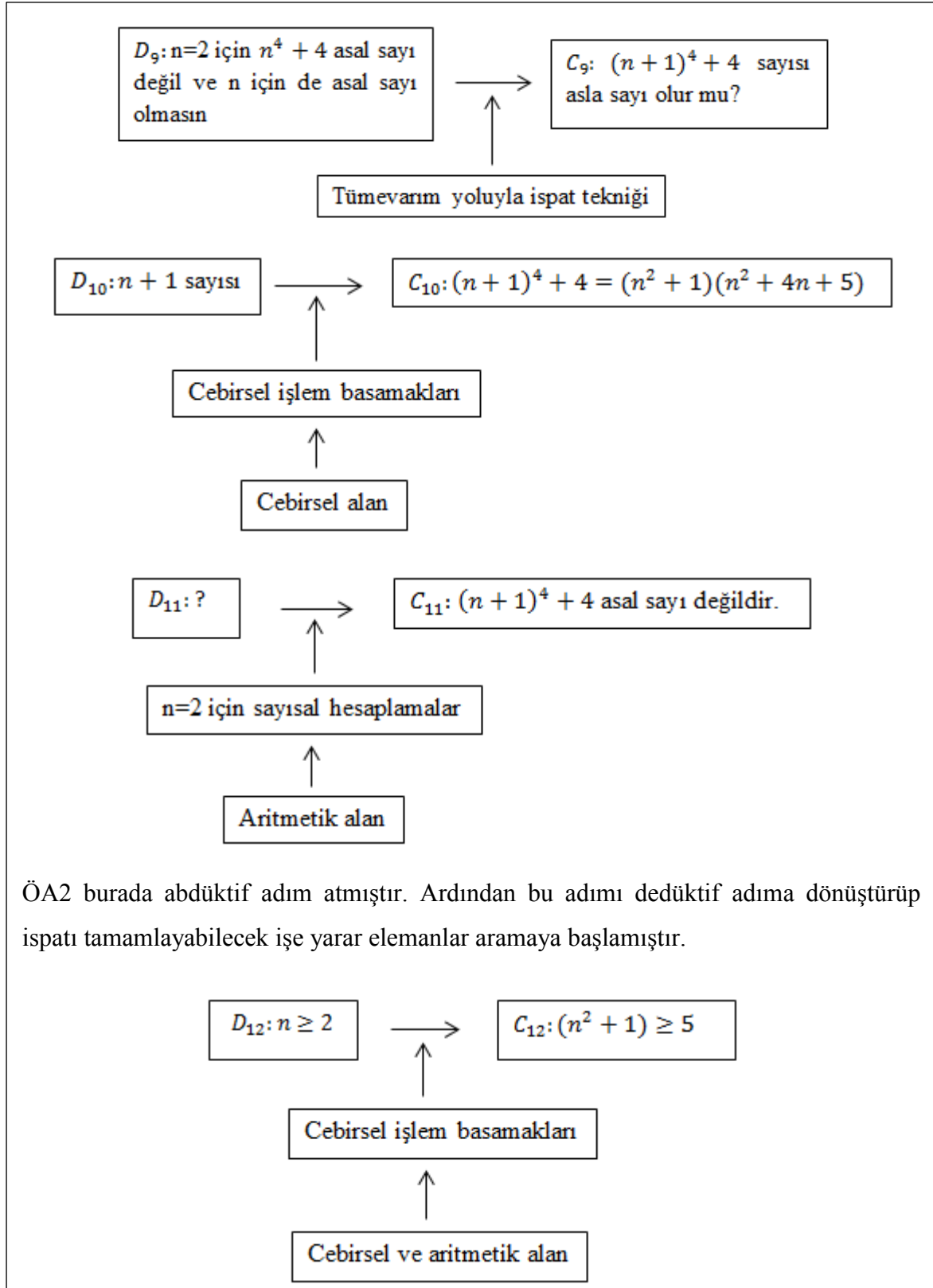
$$n \geq 2 \Rightarrow n^2 \geq 4 \Rightarrow n^2 + 1 \geq 5$$

$$n \geq 2 \Rightarrow n + 2 \geq 4 \Rightarrow (n + 2)^2 \geq 16 \Rightarrow (n + 2)^2 + 1 \geq 17$$

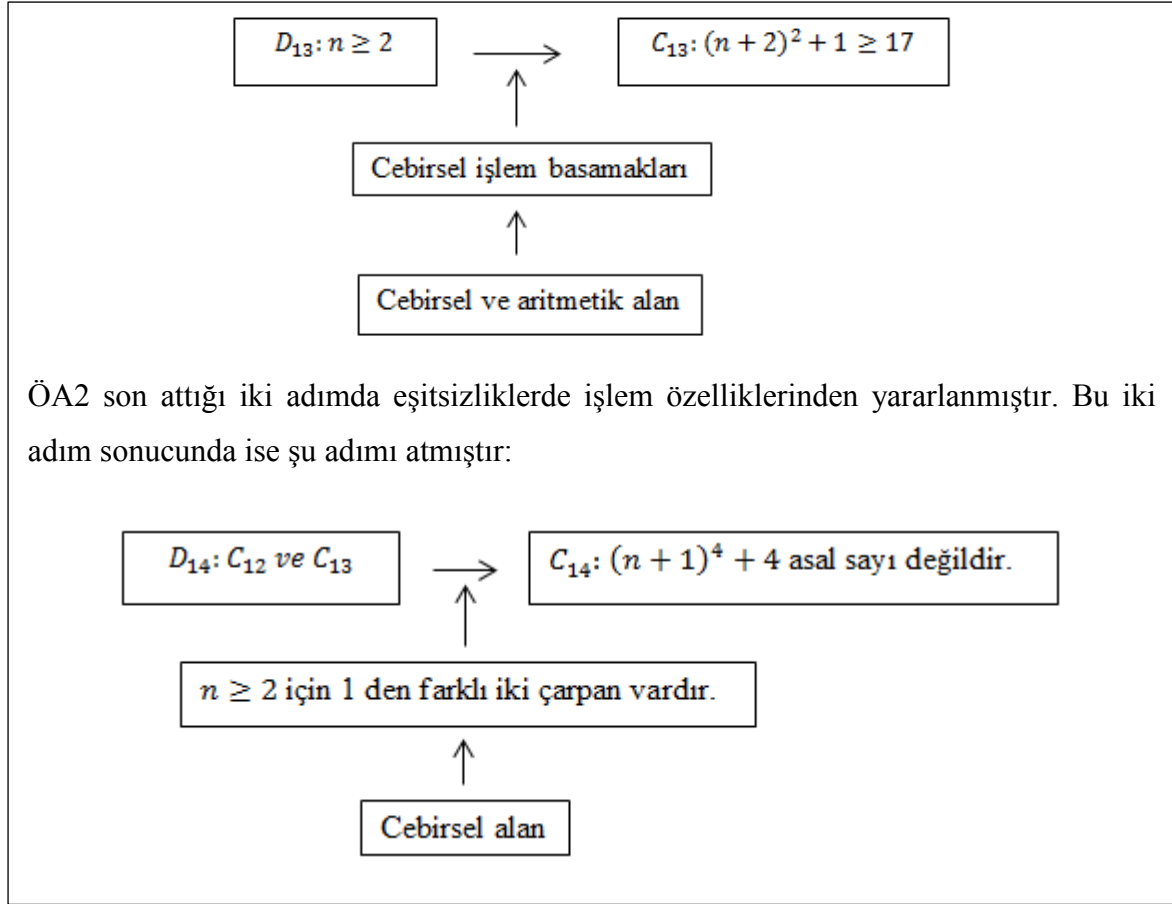
Dolayısıyla asal değildir.

Şekil 81. ÖA2'nin ikinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat süreci

ÖA2 hipotezini doğrulamak için ispat yapmaya başlamış ve bu sırada yapısal argümantasyon süreci yaşamıştır. Bu süreçte n için $n^4 + 4$ ün asal sayı olmadığını kabul edip $n+1$ için $(n + 1)^4 + 4$ sayısının asal olup olmadığını incelemeye çalışmıştır.



Şekil 82. ÖA2'nin ikinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (1)



Şekil 83. ÖA2'nin ikinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş cıkç modeline göre analizi (2)

ÖA2 attığı son adımla ispatı tamamladığını söylemiştir. Ancak sonradan bu ispatla tatmin olmadığını dile getirmiştir. Sebebi ise tümevarım yoluyla ispat gereği n için $n^4 + 4$ ifadesinin asal olmadığını kabul etmiş ancak $n+1$ için $(n + 1)^4 + 4$ ifadesinin asal olmadığı sonucuna ulaşırken bu kabulden yararlanmamıştır. Bu nedenle ÖA2 ispatı yanlış bir biçimde tamamladığını düşünmektedir.

ÖA2'nin argümantasyon ve ispat süreci arasındaki ilişkiyi inceleyecek olursak iki süreç arasında yapısal süreklilik ve bilişsel mesafe vardır. Şöyle ki; öncesinde söz edildiği üzere iki süreç arasında yapısal süreklilik mevcuttur. Argümantasyonun içerik sistemi aritmetik alan üzerine temellendirilmişken ispat sürecinin içerik sistemi cebirsel alan üzerine temellendirilmiştir. Ancak ispat sırasında gözlemlenen yapısal argümantasyon sürecinde atılan abdüktif adım iki süreç arasındaki bilişsel mesafeyi azaltmıştır. İki süreç arasındaki ilişki analiz edildiğinde ÖA2'nin ispatı başarıyla tamamlaması beklenmektedir. Ama ÖA2 ispatı yanlış tamamlamıştır. Bu durumun sebebi ÖA2'nin ispatı doğru şekilde değil de nasıl olursa olsun tamamlamak istemesi olabilir. Ayrıca ÖA2'den kaynaklı olmayarak,

verilen problem için oluşturulan hipotezin ispatının tümevarımla ispat tekniği kullanılarak yapılamaması olabilir. Yani bir ispatın başarıyla tamamlanabilmesi için seçilen ispat tekniğinin doğru teknik olması önemlidir.

ÖA2'nin Problem 3'e Yönelik Bulgularının Analizi

ÖA2'nin Problem 3 de Tercih Ettiği Birinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi

Problem 3: Ardışık ve sıfırdan farklı her iki doğal sayının çarpımının bir tam kare olup olmadığı hakkında ne söyleyebilirsiniz? Varsayınızı ispatlayınız.

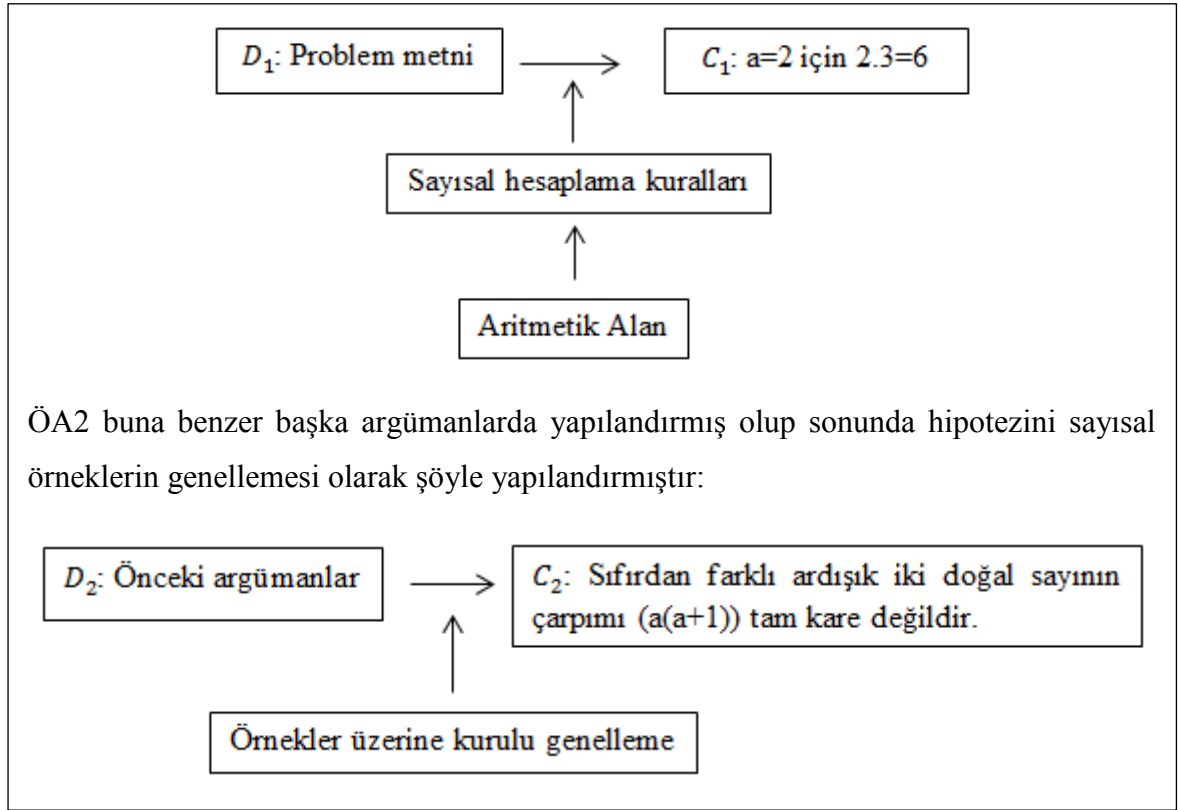
Şekil 84. Üçüncü matematiksel problem

ÖA2 hipotezini oluştururken 1, 2, 3, 4, 5, 6 ardışık sayılarını sırasıyla ikili olarak çarpmıştır ve bunun üzerine ardışık iki tamsayının çarpımının tam kare olmadığı hipotezini oluşturmuştur. Hipotez sayısal hesaplamaların genellemesi olarak yapılandırıldığında argümantasyonun içerik sistemi aritmetik alan üzerine temellendirilmiştir. ÖA2'nin argümantasyonunun yapısı yapılandırıcı argümantasyon olup bu süreçte indüktif argümantasyon gözlemlenmiştir.

Tam kare olup olmadığını söylemek için denesem. a sıfırdan farklı bir doğal sayı olsun.
a=2 için $2.3=6$
a=5 için $5.6=30$
a=6 için $6.7=42$
O zaman ardışık iki tamsayının çarpımı tam kare değildir.

Şekil 85. ÖA2'nin üçüncü matematiksel problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyon

ÖA2'nin argümantasyonunun Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeli ile analizi şöyledir;



Şekil 86. ÖA2'nin üçüncü problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyonun Toulmin modeline entegre edilmiş ckc modeline göre analizi

ÖA2 hipotezini doğrulamak için ispat yapmaya başlamış ve ispat yöntemini doğrudan ispat olarak seçmiştir. Dolayısıyla ispatın yapısı dedüktiftir. Buradan anlaşılmaktadır ki argümantasyonun yapısı indüktif iken ispat sürecinin yapısı dedüktif olduğundan iki süreç arasında yapısal mesafe vardır.

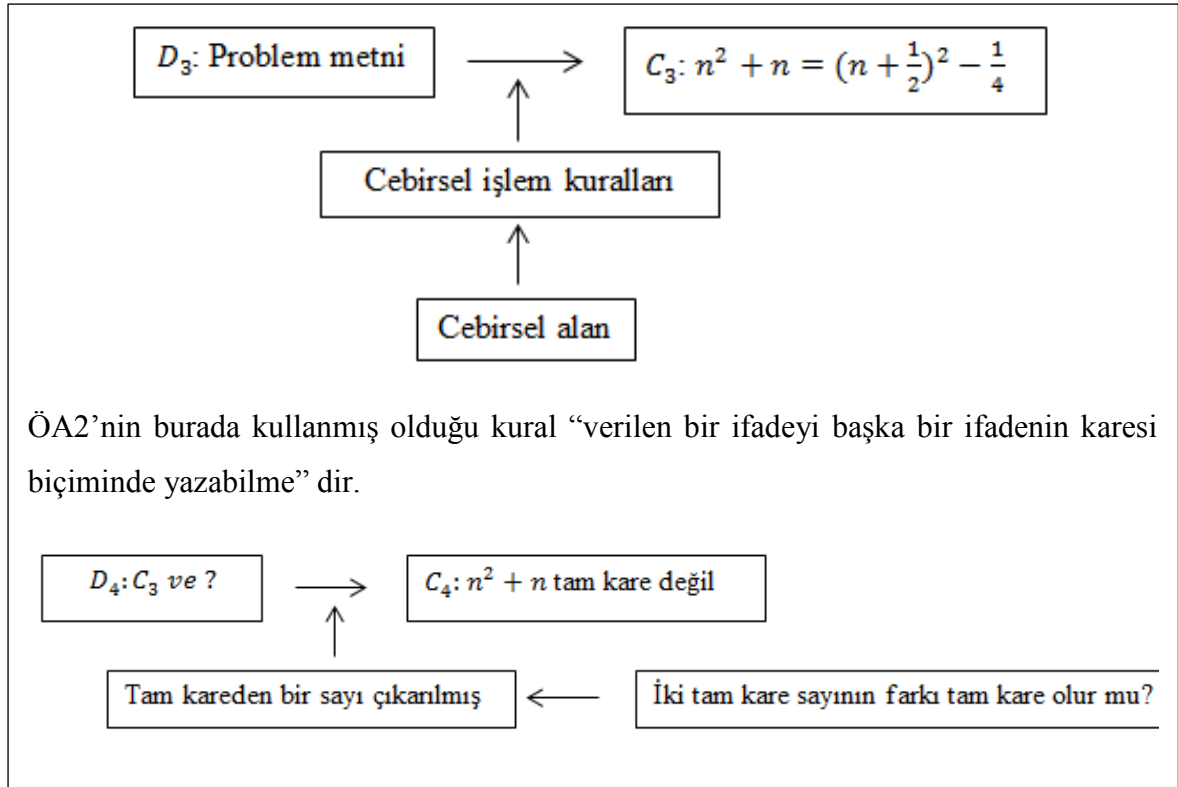
ÖA2 ispat yapmaya başladığında 4 farklı yapısal argümantasyon süreci yaşamıştır.

$n(n + 1)$ desek $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Tam kareye benzetmeye çalışsak.

$$n^2 + n = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

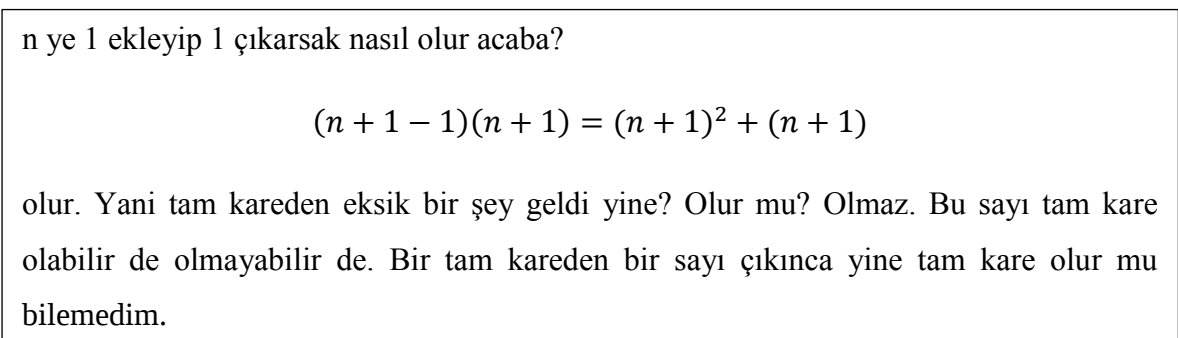
Böyle desek olmaz mı? Böyle olunca tam kare değil. Tam kareden bir sayı çıkarmış sonuçta. Ama olur mu işte böyle? $\frac{1}{4}$ de tam kare $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ dir. İki tam kare sayının farkı tam kare olur mu?

Şekil 87. ÖA2'nin üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinde yaşadığı birinci yapısal argümantasyon süreci

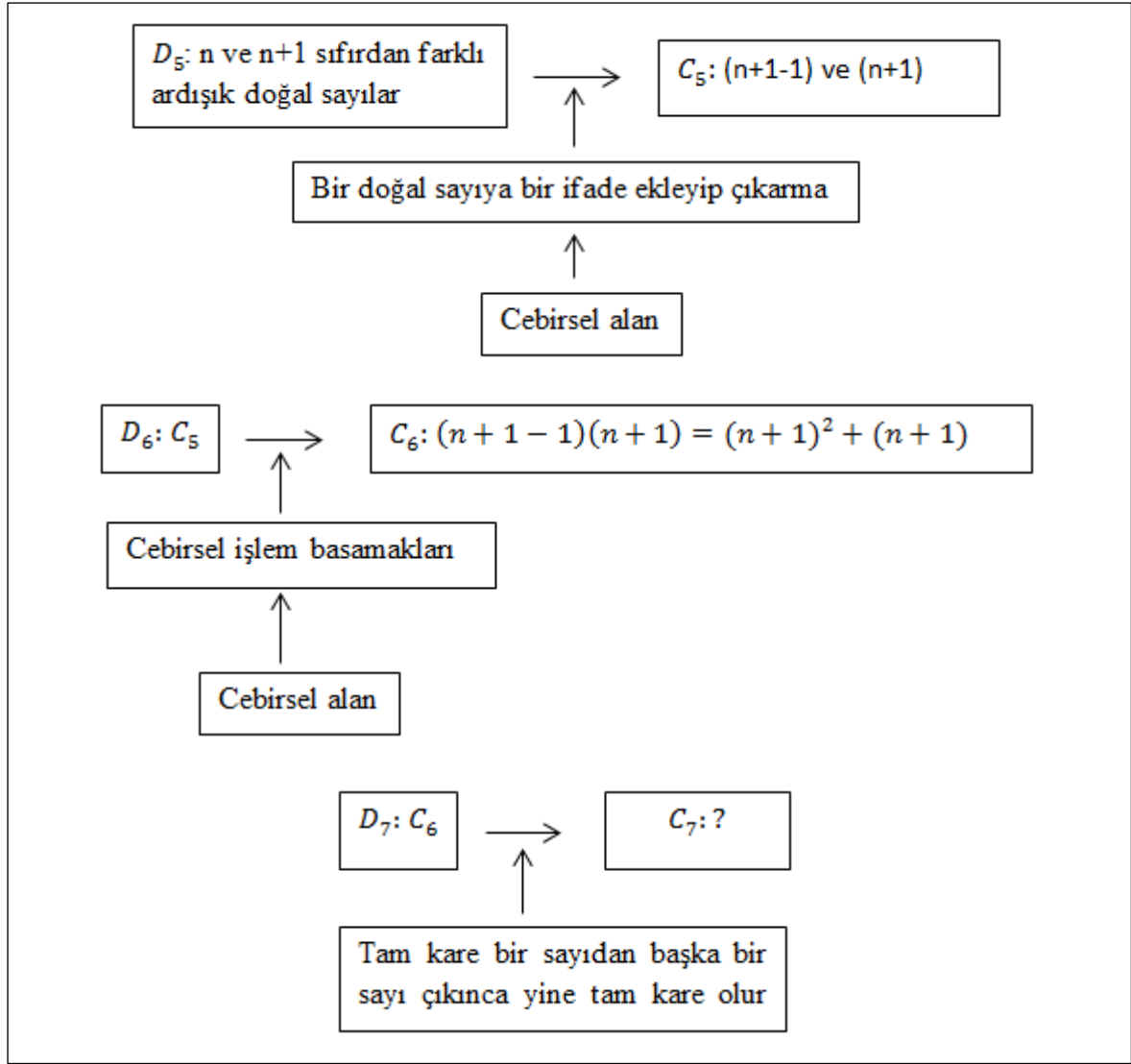


Şekil 88. ÖA2'nin üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinde yaşadığı birinci yapısal argümantasyon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckc modeline göre analizi

ÖA2 birinci yapısal argümantasyon sürecinde bir abdükatif adım atmıştır. Ancak sonra iddiası için ortaya koyduğu gerekçenin doğruluğundan şüpheye düşmüştür. Dolayısıyla iddiasını doğrulayacak elemanlar bulamamış ve başka yöntemler düşünmeye başlamıştır.



Şekil 89. ÖA2'nin üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinde yaşadığı ikinci yapısal argümantasyon süreci



Şekil 90. ÖA2'nin üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinde yaşadığı ikinci yapısal argümantasyon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş $ck\phi$ modeline göre analizi

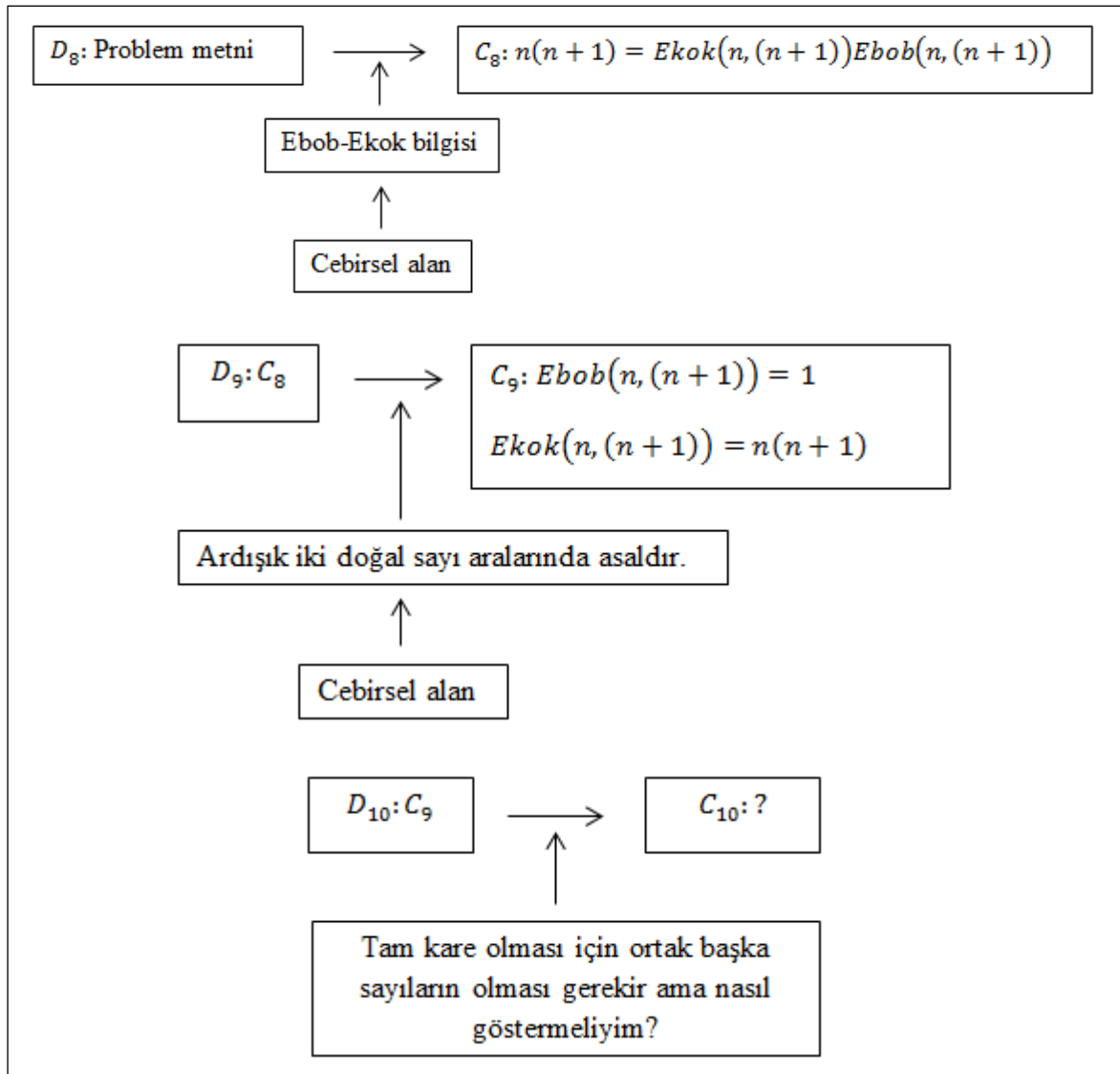
ÖA2 ikinci yapısal argümantasyon sürecinde dedüktif adımlar atmıştır. Ancak son attığı dedüktif adımda gerekçesinin doğruluğundan emin olamadığı için bir iddia ortaya koyamamıştır. Yine ispatı tamamlayabilmek için farklı yöntemler düşünmüştür. Bu kez ardışık iki doğal sayının aralarında asal olması bilgisine yönelmiştir.

Ardışık iki sayı aralarında asal oluyordu. O zaman ortak bölenleri 1 değil mi? Sayıların çarpımı eboblar ile ekoklar çarpımı.

$$n(n+1) = Ekok(n, (n+1))Ebob(n, (n+1))$$

Yine aynıysa geldi. Aralarında asalsa $Ebob(n, (n+1)) = 1$ olacak. Ebobdan devam etmek mantıklı geliyor ama... Tam kare olması için ortak bir şeylerin olması gerekiyor değil mi? Evet ama o nasıl gösterilir?

Şekil 91. ÖA2'nin üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinde yaşadığı üçüncü yapısal argümantasyon süreci



Şekil 92. ÖA2'nin üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinde yaşadığı üçüncü yapısal argümantasyon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckk modeline göre analizi

ÖA2 üçüncü yapısal argümantasyon sürecinde de bir öncekinde olduğu gibi dedüktif adımlar atmıştır. Ancak son dedüktif adımda bir iddia oluşturabilmek için yeterli elemanlar bulamamış bulduklarıyla da nasıl bir yol izleyeceğini kestirememiştir. Dolayısıyla bu yöntemle de ispatı tamamlayamamıştır.

ÖA2 son yapısal argümantasyon sürecinde ardışık iki doğal sayıdan birinin tek birinin çift olması gerektiğini düşünmüştür. Ama bu düşüncesiyle de ispatı tamamlayamayacağını öngörüp hemen vazgeçmiştir. Sonuç olarak ÖA2 ispatı tamamlayamamıştır.

ÖA2'nin argümantasyonunun içerik sistemi aritmetik alan üzerine temellendirilmiştir. İspat sürecinin içerik sistemi cebirsel alan üzerine temellendirilmiştir. Bu nedenle iki süreç arasında bilişsel mesafe vardır. ÖA2 ispat sırasında, iki süreç arasındaki yapısal ve bilişsel mesafeyi azaltabilecek adımlar atamadığından ispatı tamamlayamamıştır. Yaşanan 4 farklı yapısal argümantasyon sürecinin sadece ilkinde abdüktif adım atılmıştır. Bu adım da mesafeleri azaltmak için yeterli olmamıştır. ÖA2'nin ispatı tamamlayamamasının bir diğer nedeni de cebirsel problemlerin güçlü dedüktif yapısından kaynaklı olabilir. Çünkü ÖA2 problemin çözümündeki dedüktif adımlardan oluşan zincirin zorluğuna takılmıştır.

ÖA2'nin Problem 3 de Tercih Ettiği İkinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi

ÖA2'den hipotezini doğrulaması için farklı bir ispat tekniği seçmesi istendiğinde tümevarımla ispat tekniğini seçmiştir. Dolayısıyla ispatın yapısı indüktiftir. Buradan anlaşılmaktadır ki argümantasyon ve ispat sürecinin yapısı aynı olduğundan iki süreç arasında yapısal süreklilik vardır.

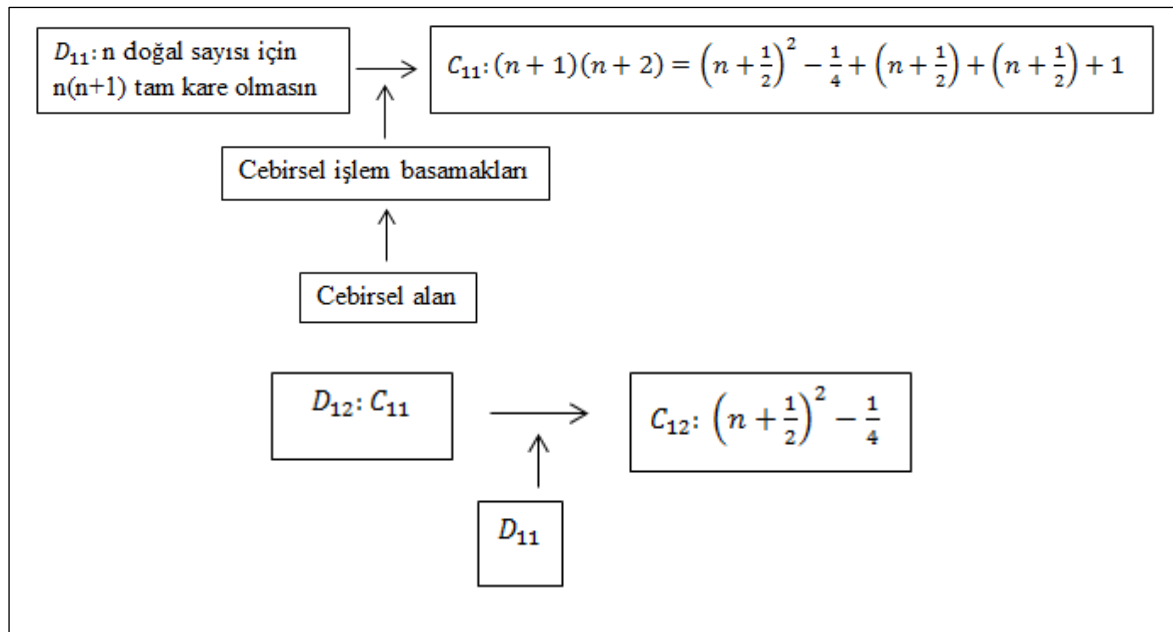
Tam kare olmadığını göstereceğiz.

$n=1$ için $1 \cdot 2=2$ tam kare değil. n için de $n(n+1)$ tam kare olmasın. $n+1$ için tam kare olmadığını gösterelim.

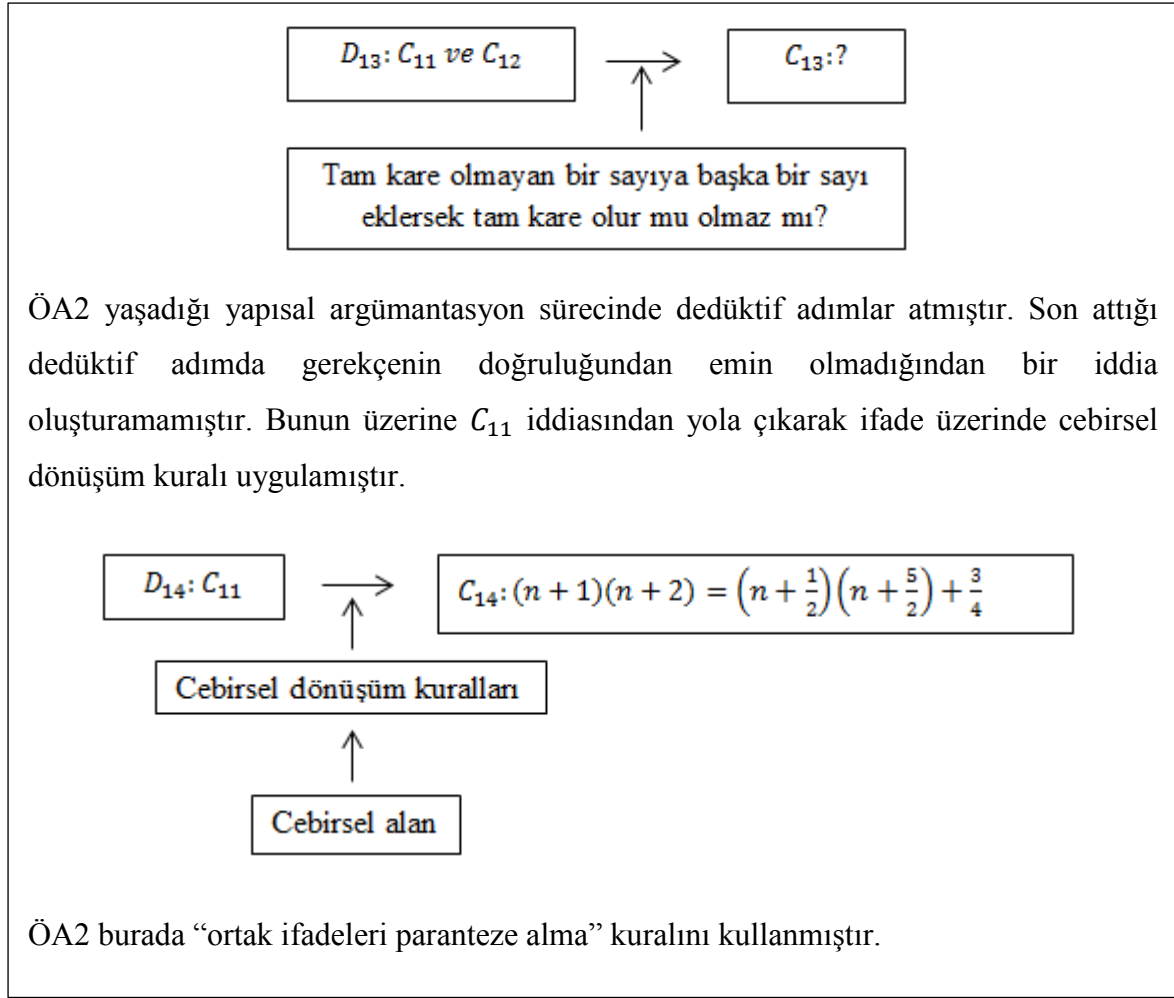
$$\begin{aligned}
 (n+1)(n+2) &= n^2 + n + 2n + 2 \\
 &= n^2 + 3n + 2 \\
 &= \left(n + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \\
 &= \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(n + \frac{1}{2}\right) + \left(n + \frac{1}{2}\right) + 1 \\
 &= \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(n + \frac{5}{2}\right) + \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

Şekil 93. ÖA2'nin üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat süreci

ÖA2 n doğal sayısı için ardışık n , $n+1$ doğal sayılarının çarpımının tam kare olmadığını kabul edip $n+1$ doğal sayısı için $(n+1)(n+2)$ nin tam kare olup olmadığını araştırdığı ispat sırasında yapısal argümantasyon süreci yaşamıştır.



Şekil 94. ÖA2'nin üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (1)



Şekil 95. ÖA2'nin üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (2)

ÖA2 bu adımı atmıştır ancak iddiasını bir sonuca bağlayamamıştır. Dolayısıyla ispatı tamamlayamamıştır.

ÖA2'nin argümantasyonunun içerik sistemi aritmetik alan üzerine kuruludur. Ancak ispat sürecinin içerik sistemi cebirsel alan üzerine kuruludur. Bu nedenle iki süreç arasında bilişsel mesafe vardır. Öncesinde belirtildiği üzere iki süreç arasında yapısal süreklilik mevcuttur. ÖA2'nin iki süreç arasındaki yapısal sürekliliğe rağmen ispatı tamamlayamamasının nedeni bilişsel mesafe olabilir. Eğer ÖA2 yapısal argümantasyon sürecinde abdüktif adımlar atsaydı bu adımlar bilişsel mesafenin azalmasını sağlayabilirdi. Ancak ÖA2 yapısal argümantasyon sürecinde dedüktif adımlar atmıştır. İspatın tamamlanamamasının bir nedeni de cebirsel problemlerin güçlü dedüktif yapısı olabilir. Yani ÖA2'nin ispatı yapmak için seçtiği teknik doğru olmayabilir.

ÖA2'nin Problem 3 de Tercih Ettiği Üçüncü İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi

ÖA2'den hipotezini doğrulaması için farklı bir ispat tekniği seçmesi istendiğinde çelişkiyle ispatı seçmiştir. Dolayısıyla ispatın yapısı abdüktiftir. Buradan anlaşılmaktadır ki argümantasyon ve ispat sürecinin yapısı farklı olduğundan iki süreç arasında yapısal mesafe vardır.

ÖA2'nin hipotezini doğrulamak için seçtiği bu ispat tekniğini kullandığı sırada 3 farklı yapısal argümantasyon süreci gözlemlenmiştir.

$n(n + 1) = A^2$ olacak şekilde A arıyoruz. $A \in \mathbb{N} - \{0\}$.

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 = A^2 + \frac{1}{4} = \frac{4A^2 + 1}{4}$$

$A^2 + \frac{1}{4}$ bir tam kareye eşit. Çünkü $n + \frac{1}{2}$ nin karesine eşit.

$A^2 + \frac{1}{4} = B^2$. Böyle A ve B var mı acaba?

$$n^2 + n + \frac{1}{4} = B^2 \Rightarrow \frac{4n^2 + 4n + 1}{4} = B^2$$

$$\Rightarrow 4n^2 + 4n + 1 = 4B^2$$

$$\Rightarrow (2n + 1)^2 = (2B)^2$$

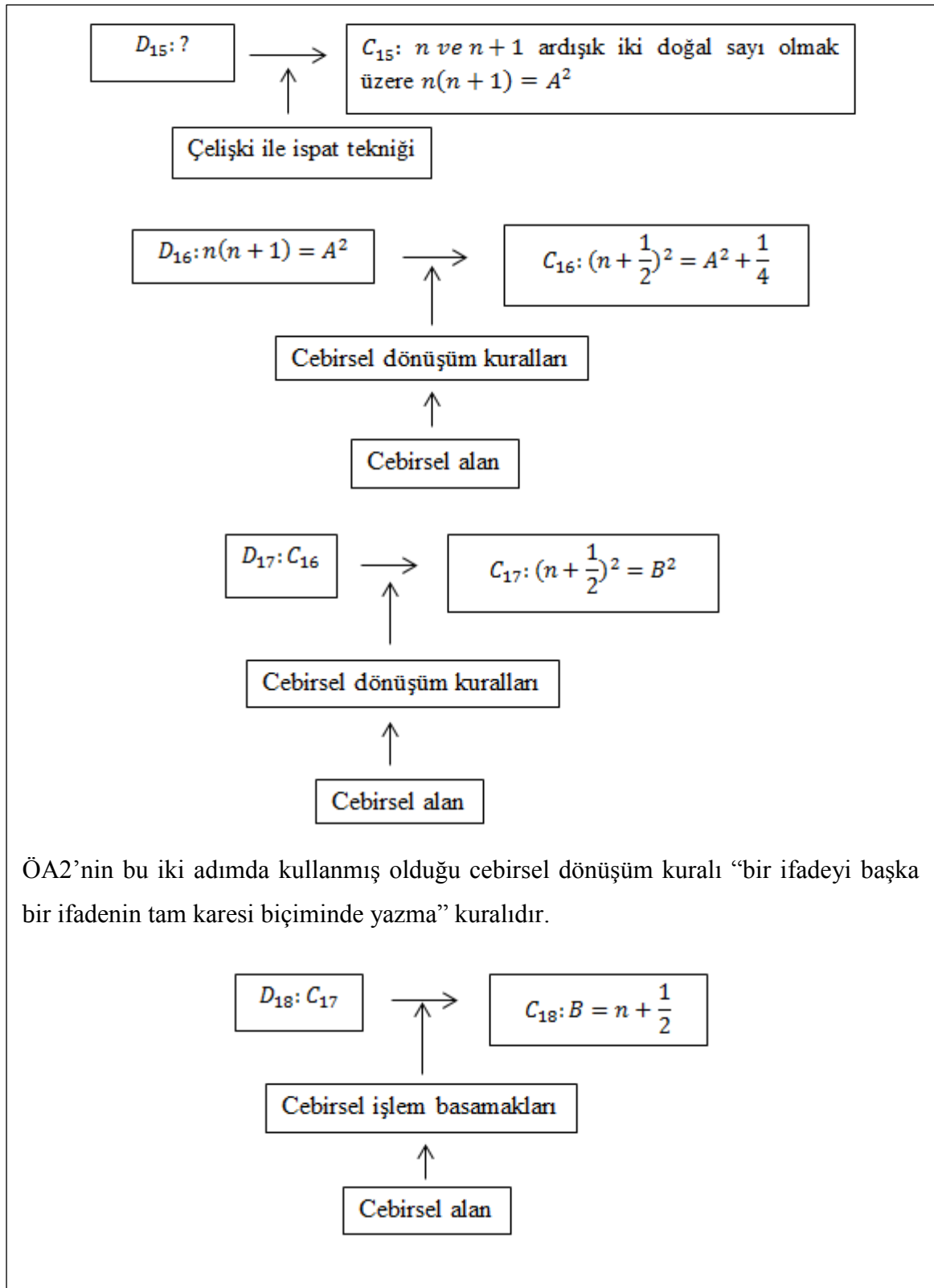
$$\Rightarrow 2B = 2n + 1$$

$$\Rightarrow B = n + \frac{1}{2}$$

Dönüp dolaşıp aynı sayıyı buluyoruz.

Şekil 96. ÖA2'nin üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı birinci yapısal argümantasyon süreci

ÖA2'nin ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi şöyledir;



Şekil 97. ÖA2'nin üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı birinci yapısal argümantayon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi

ÖA2 ilk yapısal atgümantasyon sürecinde seçtiği ispat tekniği gereği attığı abdüktif adımdaki iddiasının yanlışlığını göstermek için dedüktif adımlar atmıştır. Son attığı dedüktif adımdaki iddiayı ÖA2 devam etmek için yeterli bulmamıştır. Çünkü yaptığı işlemlerde hep başa döndüğünü, aynı sayıya ulaştığını düşünmektedir. Bu nedenle ÖA2 ispatı tamamlayabilmek için başka elemanlar aramaktadır.

Bir de $\frac{1}{2}$ -inci kuvvetten gidelim.

$$(n^2 + n)^{\frac{1}{2}} = A$$

$$\sqrt{n(n+1)} = A \Rightarrow \sqrt{n} \sqrt{n+1} = A$$

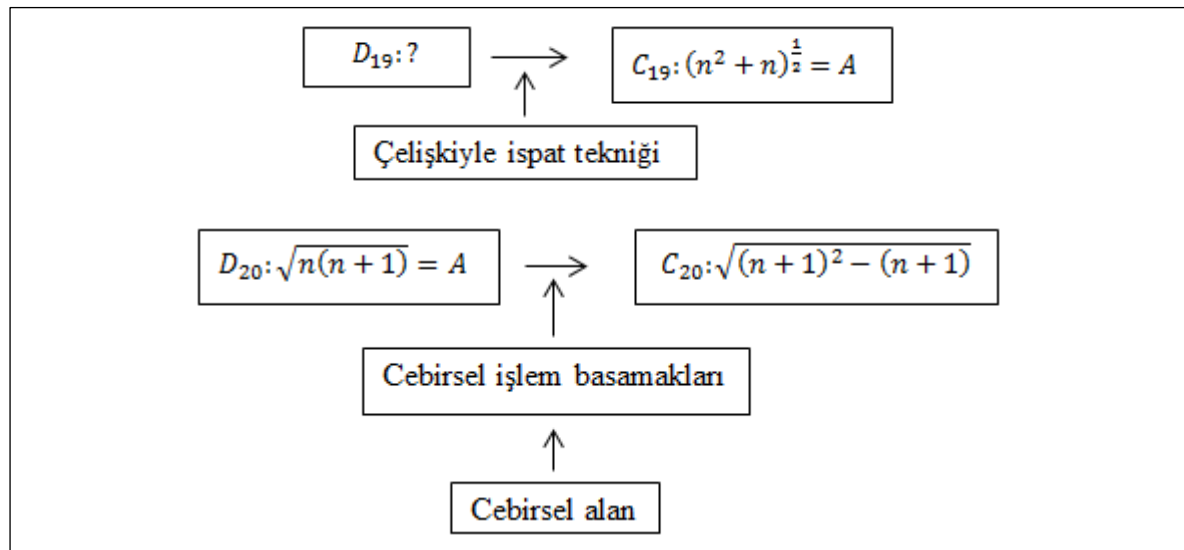
$$\Rightarrow \sqrt{(n+1-1)(n+1)} = \sqrt{(n+1)^2 - (n+1)}$$

$\Rightarrow ?$

$$\sqrt{n^2(1 + \frac{1}{n})} = \sqrt{A^2} \Rightarrow n \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = A$$

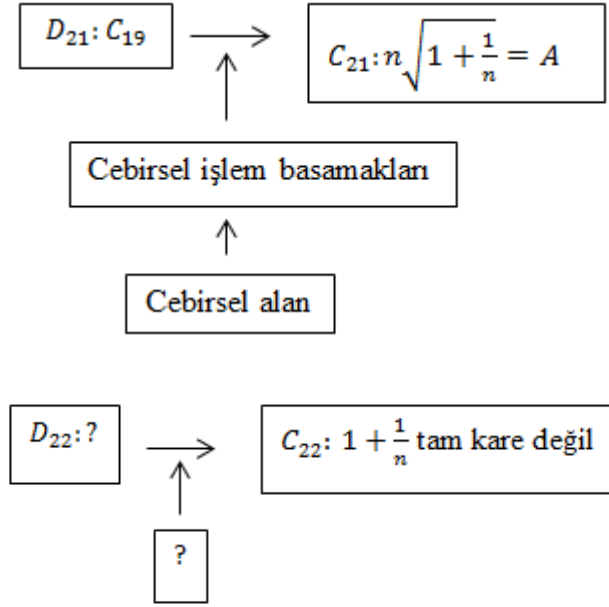
Tamam çıktı işte. $1 + \frac{1}{n}$ tam kare olmaz. Ama neden olmaz? $1 + \frac{1}{n}$ nin tam kare olmadığını göstersek ispatı yapmış olacağız da...

Şekil 98. ÖA2'nin üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı ikinci yapısal argümantasyon süreci



Şekil 99. ÖA2'nin üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı ikinci yapısal argümantasyon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (1)

ÖA2 bu cebirsel işlem basamakları sonucunda elde ettiği iddia ile sonuca ulaşamayacağını fark edip yine C_{19} iddiasından yola çıkarak düşünmeye devam etmiştir.



Şekil 100. ÖA2'nin üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı ikinci yapısal argümantasyon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (2)

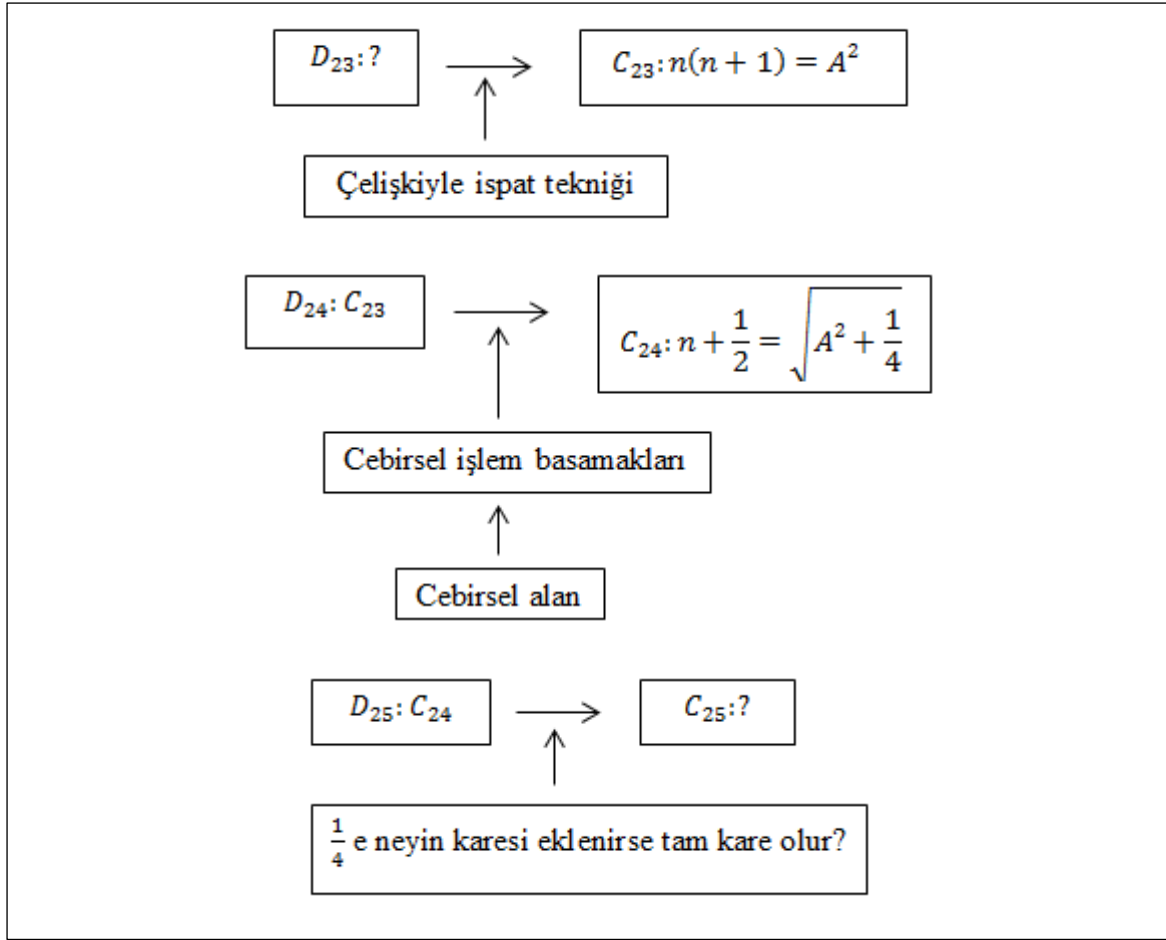
ÖA2 ikinci yapısal argümantasyon sürecinin de başlangıcında seçtiği ispat tekniği gereği abdükatif adım atmış ardından bu adımdaki iddiasının yanlışlığını göstermek amacıyla dedükatif adımlar atmıştır. En son adımı ise yine bir abdükatif adımdır. Ancak bu adımdaki iddiasının doğruluğundan emin olmadığından ve iddiasının doğruluğunu gösterecek gerekçeler bulamadığından devam edememiştir. Bu nedenle ispatı tamamlayamamış olup tamamlamak için başka yöntemler düşünmeye başlamıştır.

$n(n + 1) = A^2$ olacak şekilde A arıyoruz.

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = A^2 \Rightarrow \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 = A^2 + \frac{1}{4} \Rightarrow n + \frac{1}{2} = \sqrt{A^2 + \frac{1}{4}}$$

$\frac{1}{4}$ e neyin karesini eklersem tam kare olur?

Şekil 101. ÖA2'nin üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı üçüncü yapısal argümantasyon süreci



Şekil 102. ÖA2'nin üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı üçüncü yapısal argümantasyon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckc modeline göre analizi

ÖA2 üçüncü yapısal argümantasyon sürecinde de seçtiği ispat tekniği gereği abdükatif adımla başlamış ve bu abdükatif adımdaki iddiasının yanlışlığını göstermek için dedüktif adımlarla devam etmiştir. Son attığı dedüktif adımda gerekçe ortaya koyamadığından bir iddia oluşturamamıştır. Dolayısıyla ispat tamamlanamamıştır.

ÖA2'nin argümantasyonunun içerik sistemi aritmetik alan üzerine temellendirilmişken ispat sürecinin içerik sistemi cebirsel alan üzerine temellendirilmiştir. Çünkü ÖA2'nin ispat sürecinde attığı adımların kontrol alanı cebirseldir. Bu nedenle iki süreç arasında bilişsel mesafe vardır. ÖA2'nin ispatı tamamlayamamasının nedeni iki süreç arasındaki bilişsel mesafe olabilir.

ÖA2'nin Problem 4'e Yönelik Bulgularının Analizi

ÖA2'nin Problem 4 de Tercih Ettiği Birinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi

Problem 4: $0 \neq x \in \mathbb{R}$ için $x + \frac{1}{x} < 2$ ise o zaman x in negatif ya da pozitifliği hakkında ne söyleyebilirsiniz? Varsayımınızı ispatlayınız.

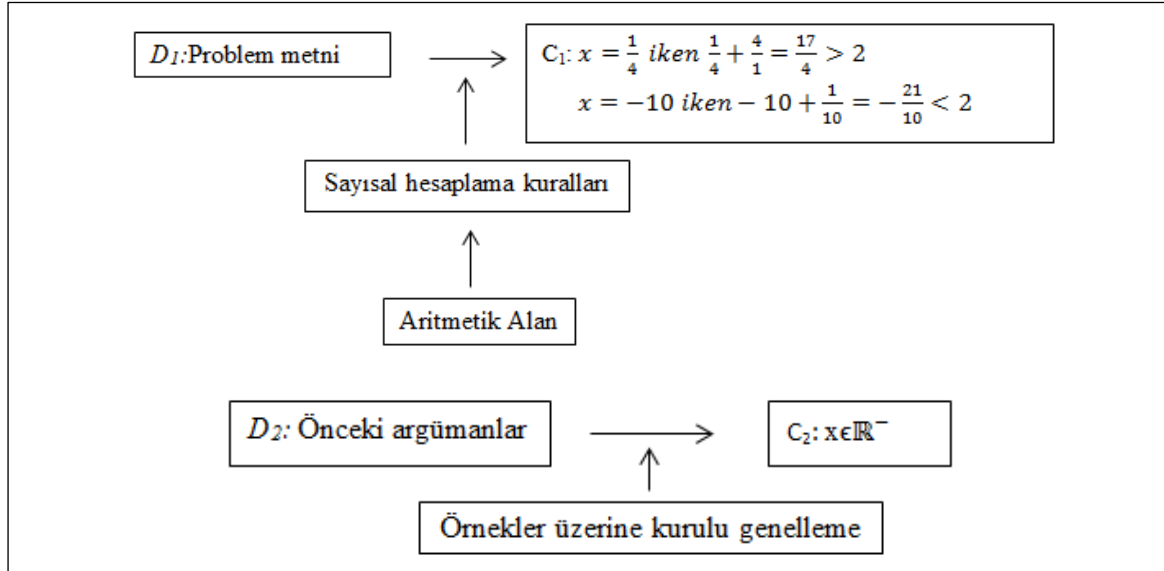
Şekil 103. Dördüncü matematiksel problem

ÖA2 hipotezini oluştururken öncelikle x in negatif veya pozitif değerde olabileceğini düşünmüş ve buna yönelik x e dair aralıklar belirlemiştir. Bu aralıklardan $0 < x < 1$ ve $x < 0$ aralıklarını baz alarak x e sayısal değerler vermiştir. Bunun üzerine önce $x = \frac{1}{4}$ için ve ardından $x = -10$ için sayısal hesaplamalar yapmıştır. Yapılan işlemler sonucunda “ x in negatif reel sayıların bir elemanı olabileceği” hipotezini oluşturmuştur.

x in negatif ya da pozitif reel sayı olup olmadığını inceleriz. $0 < x < 1$, $-1 < x < 0$ ya da $-1 < x < 1$ mi diyeceğiz? O şekilde diyebiliriz aslında. Mesela $x = \frac{1}{4}$ için $\frac{1}{4} + 4 < 2$ değildir. O zaman x negatif sayı. $x = -10$ için $-10 - \frac{1}{10} < 2$ olur. Tahminimce negatiflerin hepsi sağlar. Yani $x < 0$ diyebiliriz.

Şekil 104. ÖA2'nin dördüncü problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyon

ÖA2'nin argümantasyonunun Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi şöyledir;



Şekil 105. ÖA2'nin dördüncü problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyonun Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi

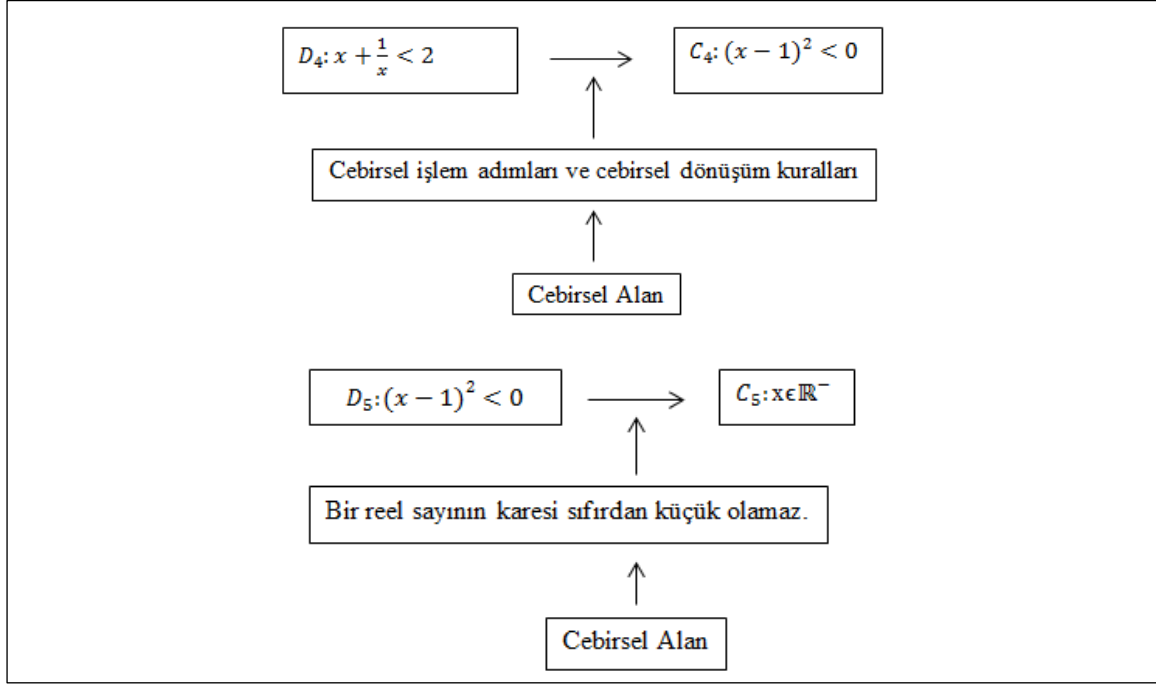
ÖA2 hipotezini oluşturduğu argümantasyon sırasında sayısal hesaplamalar yaptığından bu sürecin içerik sistemi aritmetik alan üzerine temellendirilmiştir. Ayrıca ÖA2 argümantasyon sırasında hipotezini sayısal örnekleri genelleyerek elde ettiğinden sürecin yapısı yapılandırıcı argümantasyon olup bu süreçte induktif argümantasyon gözlemlenmiştir.

ÖA2 hipotezini doğrulamak için ispat yapmaya başlamış ve ispat tekniğini doğrudan ispat olarak seçmiştir. Dolayısıyla ispatın sürecinin yapısı dedüktiftir. Buradan anlaşılmaktadır ki ÖA2'nin argümantasyon ve ispat sürecinin yapısı farklı olduğundan iki süreç arasında yapısal mesafe vardır.

$$\begin{aligned}
 x + \frac{1}{x} < 2 &\Rightarrow \frac{x^2 + 1}{x} < 2 \\
 &\Rightarrow x^2 + 1 < 2x \\
 &\Rightarrow x^2 + 1 - 2x < 0 \\
 &\Rightarrow (x - 1)^2 < 0
 \end{aligned}$$

Bir reel sayının karesi sıfırdan küçük olamaz. Dolayısıyla $x \in \mathbb{R}^-$ olacak ki eşitsizlik yön değiştirsin ve doğru sonuç elde edilebilsin.

Şekil 106. ÖA2'nin dördüncü problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat süreci



Şekil 107. ÖA2'nin dördüncü problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi

ÖA2 ispat sürecinde attığı dedüktif adımlar sonucu ispatı başarıyla tamamlamıştır.

ÖA2'nin argümantasyonunun içerik sistemi aritmetik alan üzerine temellendirilmişken ispatın içerik sistemi cebirsel alan üzerine temellendirilmiştir. Bu nedenle iki süreç arasında bilişsel mesafe vardır. ÖA2 iki süreç arasındaki bilişsel ve yapısal mesafeye rağmen ispatı başarıyla tamamlayabilmiştir. Bu durum cebirsel problemlerin çözümünün güçlü dedüktif yapısından kaynaklanabilir.

ÖA2'nin Problem 4 de Tercih Ettiği İkinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi

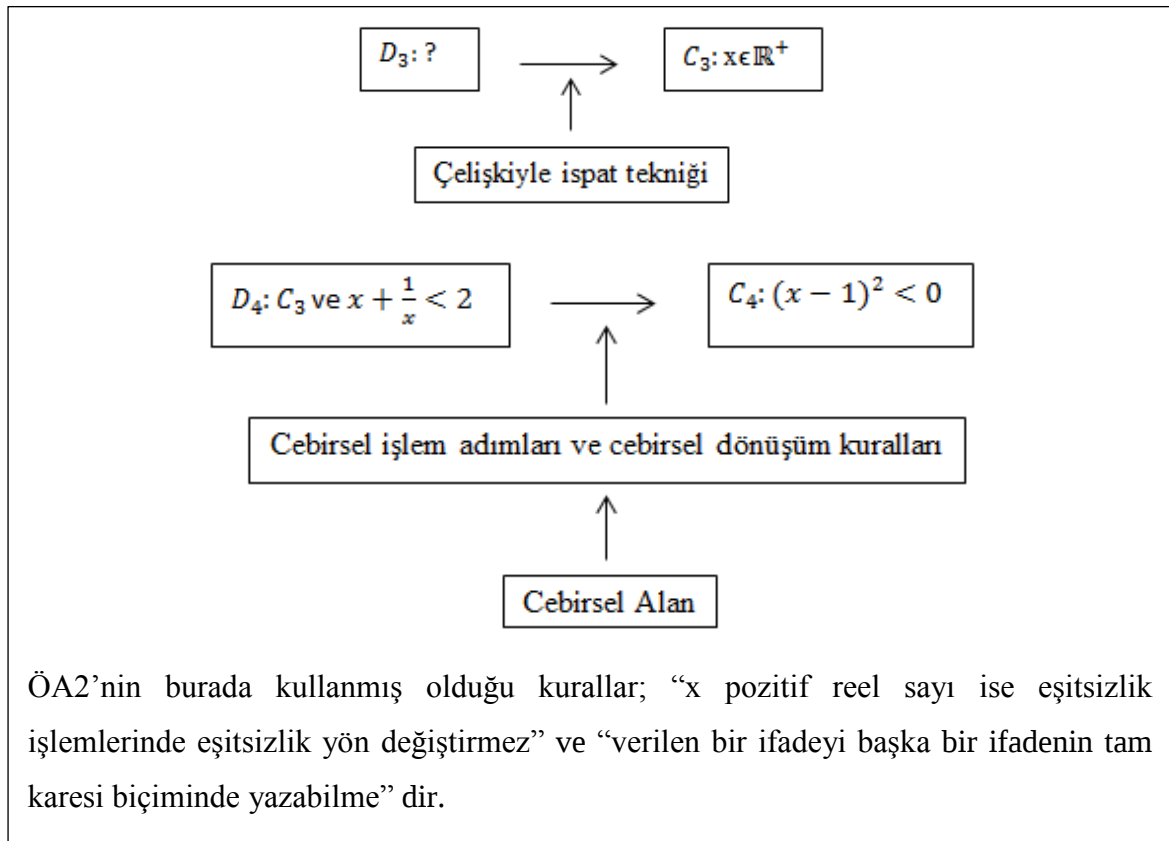
ÖA2'den hipotezini doğrulaması için farklı bir ispat tekniği seçmesi istendiğinde çelişkiyle ispatı seçmiştir. Dolayısıyla ispatın yapısı abdükiftir. Buradan da görülmektedir ki argümantasyon ve ispatın yapısı farklı olduğundan iki süreç arasında yapısal mesafe vardır.

Kabul edelim ki $x \in \mathbb{R}^+$ olsun.

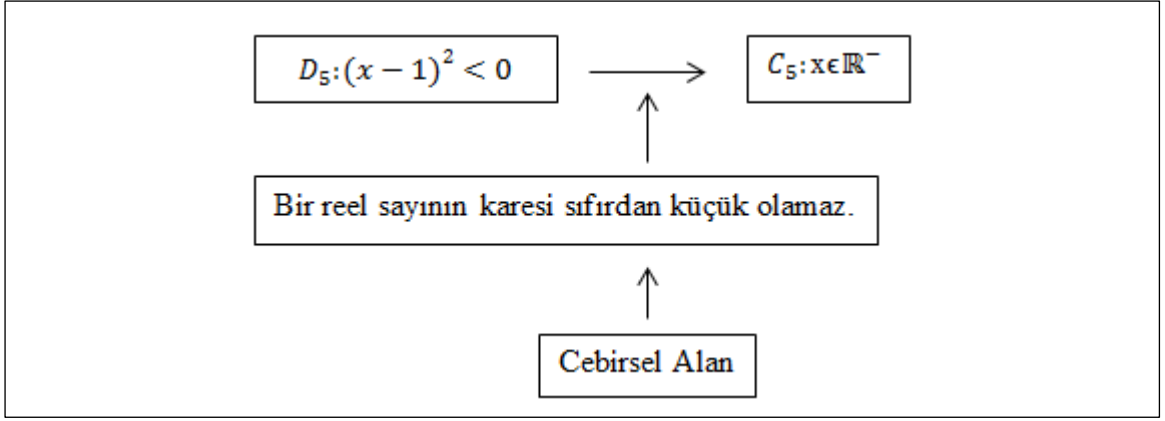
$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} < 2 &\Rightarrow \frac{x^2 + 1}{x} < 2 \\ &\Rightarrow x^2 + 1 < 2x \\ &\Rightarrow x^2 + 1 - 2x < 0 \\ &\Rightarrow (x - 1)^2 < 0 \end{aligned}$$

Fakat bir reel sayının karesi sıfırdan küçük olamayacağından bu çelişkidir. Dolayısıyla $x \in \mathbb{R}^-$ dir.

Şekil 108. ÖA2'nin dördüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat süreci



Şekil 109. ÖA2'nin dördüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (1)



Şekil 110. ÖA2'nin dördüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (2)

ÖA2 ispat sürecinin başlangıcında seçtiği ispat tekniği gereği abdükatif adım atmıştır. Sonrasında ise bu abdükatif adımdaki iddianın yanlışlığını göstermek için dedükatif adımlar atmıştır. ÖA2 bu dedükatif adımlar sonucunda abdükatif adımdaki iddianın yanlış olduğunu göstermiş ve ispatı tamamlamıştır.

ÖA2'nin argümantasyonunun içerik sistemi aritmetik alan üzerine temellendirilmişken ispatın içerik sistemi cebirsel alan üzerine temellendirilmiştir. Bu nedenle iki süreç arasında bilişsel mesafe vardır. ÖA2 iki süreç arasındaki bilişsel ve yapısal mesafeye rağmen ispatı başarıyla tamamlayabilmiştir. Bunun sebebi cebirsel problemlerin çözümünün güçlü dedükatif yapısı ve ispat sürecinin başlangıcında atılan abdükatif adımın dedükatif adıma dönüştürülebilmesi olabilir.

ÖA2 bu problemin çözümünde iki ispat yöntemi kullanmış olup ikisinde de aynı süreci yaşamıştır. Sonuç olarak ikisinde de ispatı başarıyla tamamlayabilmiştir.

ÖA3'ün Problem 1'e Yönelik Bulgularının Analizi

ÖA3'ün Problem 1 de Tercih Ettiği Birinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi

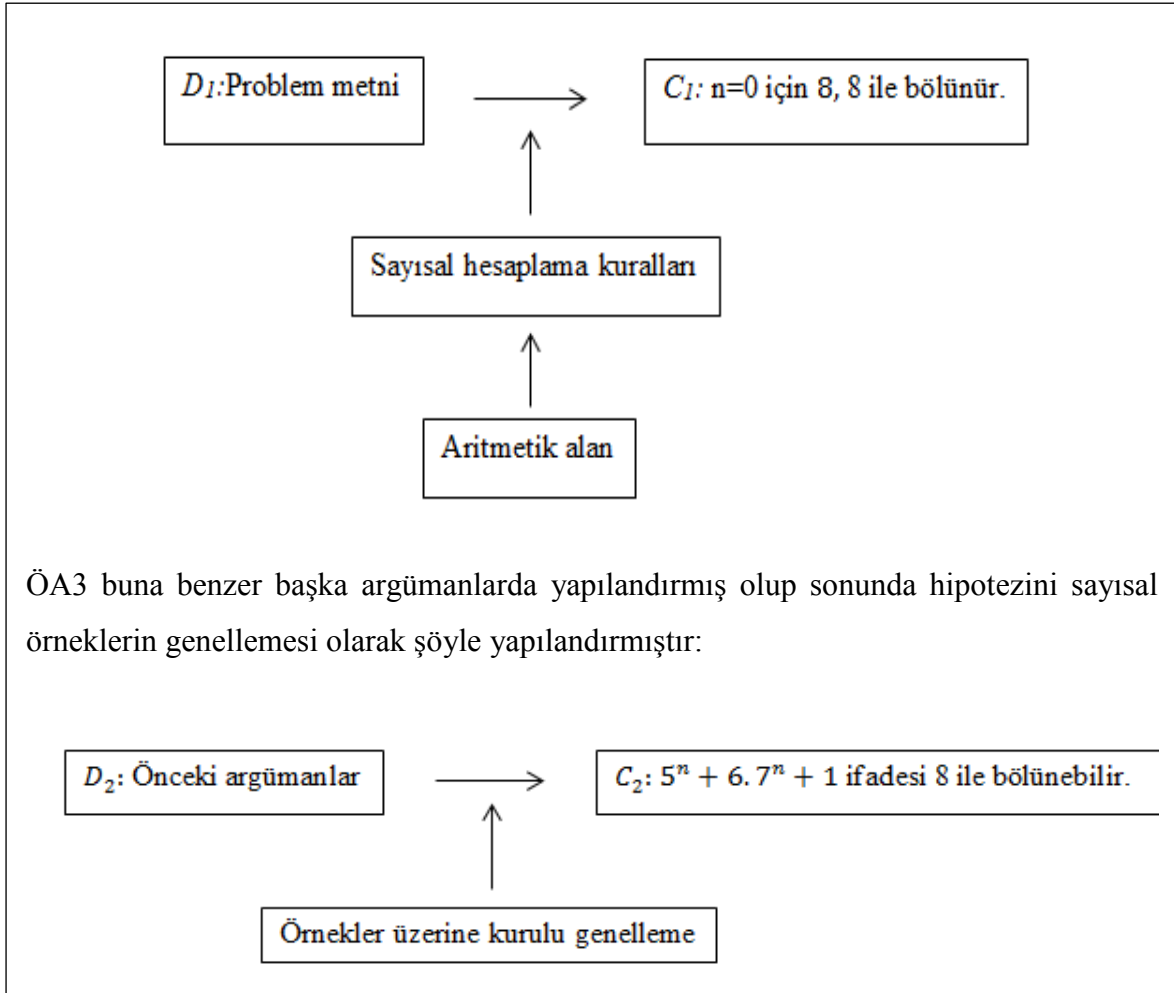
Problem 1: Tüm negatif olmayan n tamsayıları için $5^n + 6 \cdot 7^n + 1$ ifadesinin 8 ile bölünüp bölünmediği hakkında ne söyleyebilirsiniz? Varsayımınızı ispatlayınız.

Şekil 111. Birinci matematiksel problem

ÖA3 hipotezini oluştururken $n=0$ ve $n=1$ için sayısal hesaplamalar yapmış ve bunlar üzerine $5^n+6.7^n+1$ ifadesinin 8 ile bölünebildiği hipotezini oluşturmuştur. ÖA3, hipotezini sayısal örneklerin genellemesi olarak yapılandırdığından argümantasyonun içerik sistemi aritmetik alan üzerine kuruludur. Ayrıca ÖA3'ün argümantasyonunun yapısı yapılandırıcı argümantasyon olup yapılandırıcı argümantasyonu indüktif yapıdadır.

Ben burada öncelikle $n=0$ için baksam. $n=0$ olduğu durumda $5^0 + 6 \cdot 7^0 + 1 = 8$ sayısı 8 ile bölünür. Bir de 1 için deneyeyim. $5^1 + 6 \cdot 7^1 + 1 = 48$. 48 de aynı şekilde 8 ile bölünecektir. O zaman ben buradan negatif olmayan her n tamsayıları için 8 ile bölündüğünü kabul edebilirim.

Şekil 112. ÖA3'ün birinci problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyon



Şekil 113. ÖA3'ün birinci problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyonun Toulmin modeline entegre edilmiş cıkç modeline göre analizi

ÖA3 hipotezini doğrulamak için ispat yapmaya başlamış ve ispat yöntemini tümevarımla ispat olarak seçmiştir. Dolayısıyla ispatın yapısı indüktiftir. Buradan anlaşılmaktadır ki hem argümantasyonun hem de ispatın yapısı indüktif olduğundan argümantasyon ve ispat süreci arasında yapısal süreklilik vardır.

ÖA3 yapılandırıcı argümantasyonun ardından ispat sürecine başladığında yapısal argümantasyon süreci yaşamıştır.

$n = 0$ için bölünebildiğini gördük. Kabul edelim ki $5^n + 6 \cdot 7^n + 1$ ifadesi 8 ile bölünsün. $(n + 1)$ için bakalım. $(n + 1)$ için bölündüğünü bulabilirsem kanıtlamış olurum. Ne olacak?

$$5^{n+1} + 6 \cdot 7^{n+1} + 1 = 5 \cdot 5^n + 6 \cdot 7 \cdot 7^n + 1$$

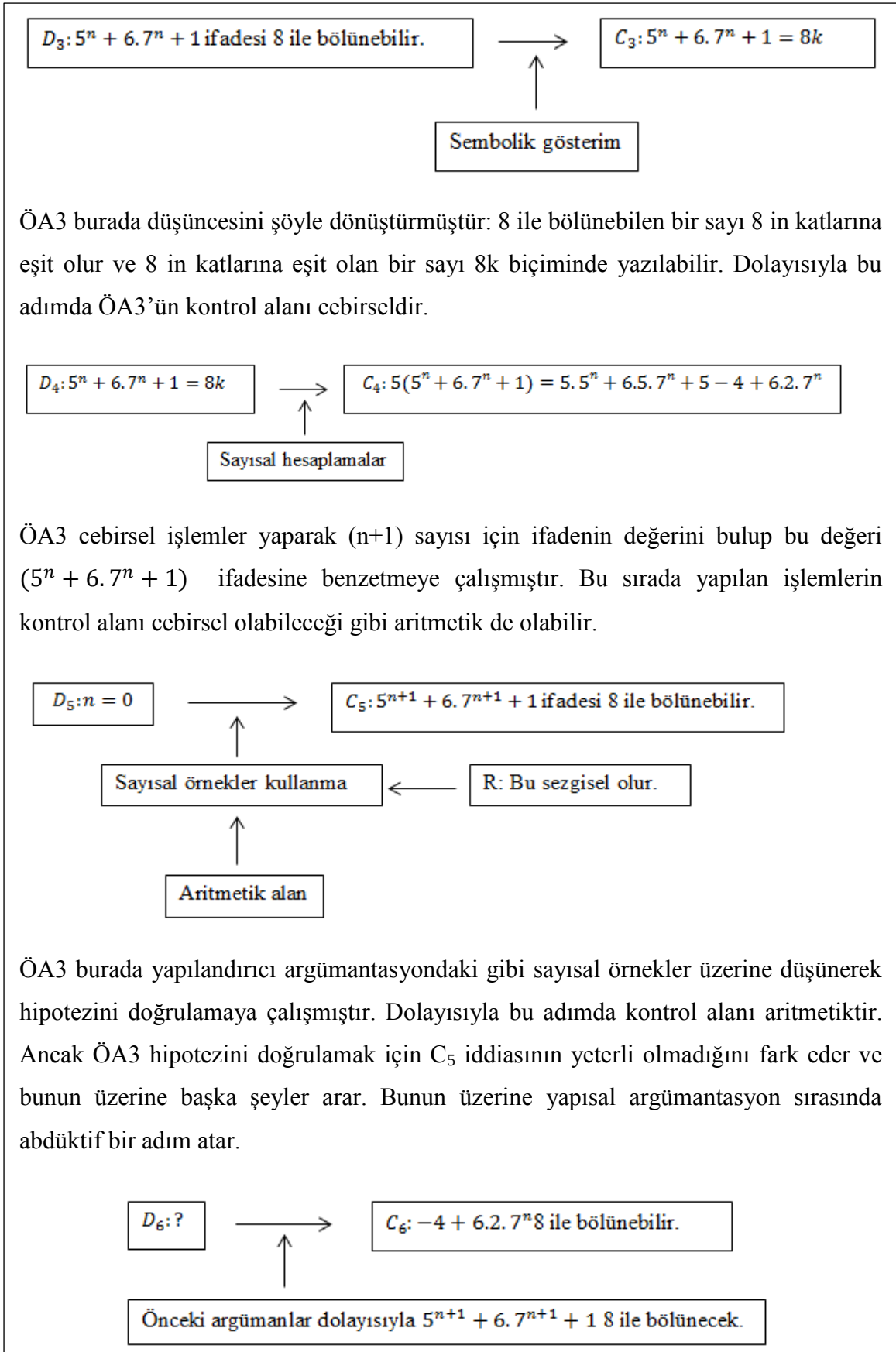
Burada ne yapabilirim? n için doğru olduğunu kabul etmiştim. Acaba burada da $5 \cdot 5^n$ ifadesinde aynı şekilde $n = 0$ için 48 olduğunu ve bunda 8 ile bölünüp bölünmediğine baksam nasıl olur? Buradan bir şey görebilir miyim? Evet burada mesela ben benzer şekilde 8 ile bölündüğünü görüyorum. Nasıl? Yok. Görüyor muyum? $n = 0$ için yine yukarıdaki ifadenin aynısının oluştuğunu görüyorum. Aslında bu şey $n = 1$ iken bulduğum şey. Bölünüyor. Ama... Sonrasında.... Bu sezgisel oluyor aslında. 5 işe çarpım bana bir şey verir mi? Hayır. Bunu bunun içinde aradığıma göre ona benzetmem lazım. Benzetmek için ne yaparım diye düşünüyorum. Ben buna bir şeyler ekleyip çıkarsam diğer ifadenin eğer 8 e bölündüğünü gösterebilirsem olur mu acaba? Bakalım. Kalan ifade 8 in katı olur bence.

$$5(5^n + 6 \cdot 7^n + 1) = 5 \cdot 5^n + 6 \cdot 5 \cdot 7^n + 5$$

$$= 5 \cdot 5^n + 6 \cdot 5 \cdot 7^n + 5 - 4 + 6 \cdot 2 \cdot 7^n$$

$-4 + 6 \cdot 2 \cdot 7^n$ ifadesinin 8 ile bölünebildiğini göstermem gerek.

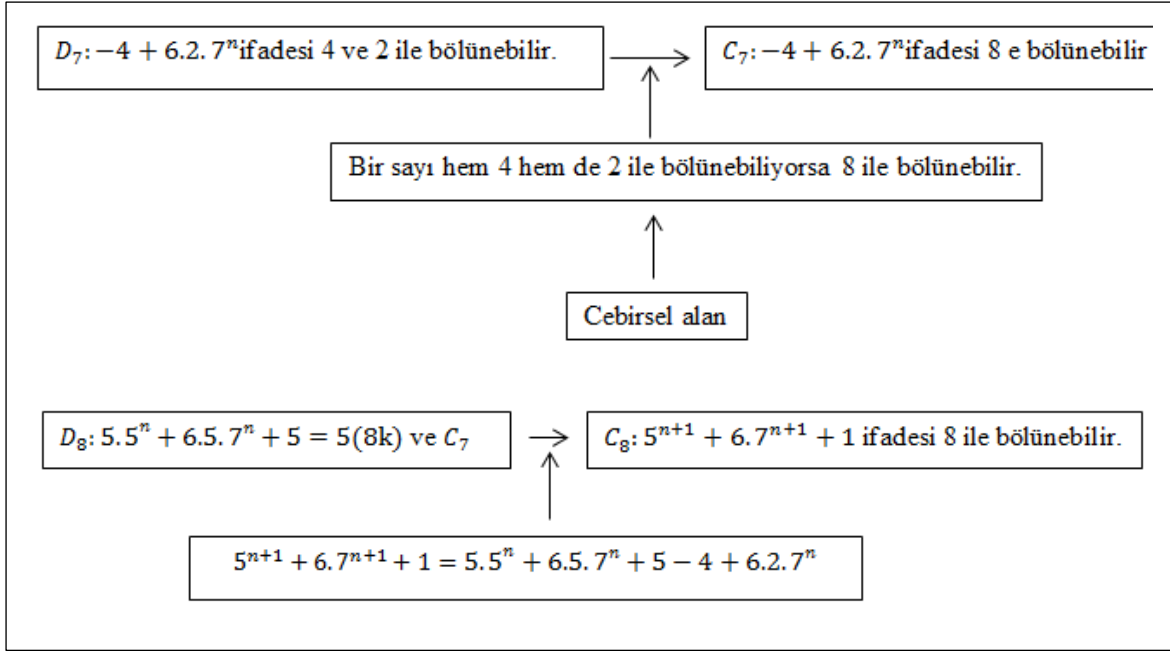
Şekil 114. ÖA3'ün birinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat süreci (1)



Şekil 115. ÖA3'ün birinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin (1) Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi

Bir sayı hem 4 hem de 2 ile bölünebiliyorsa 8 ile bölünebiliyordur. O zaman $-4 + 6.2.7^n$ ifadesi 4 e bölünebilir. Aynı şekilde 2 ye de bölünebilir. O zaman 8 e bölünebilir. Böylece $5^{n+1} + 6.7^{n+1} + 1$ ifadesi de 8 e bölünür.

Şekil 116. ÖA3'ün birinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat süreci (2)



Şekil 117. ÖA3'ün birinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin (2) Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi

ÖA3'ün ispat yapım sürecinde attığı adımların kontrol alanı cebirseldir. Yapısal argümantasyon sırasında attığı abdüktif adımın ardından ÖA3 bazı matematiksel elemanlar bulup ispat sürecini tamamlamıştır. Bu ispat sürecinde abdüktif adımı dedüktif adımlara dönüştürebilmiştir. Ancak aday ispatı yanlış tamamlamıştır.

ÖA3'ün argümantasyon ve ispat sürecinin her ikisinin de yapısı indüktif olduğundan iki süreç arasında yapısal süreklilik vardır. Ancak argümantasyonun içerik sistemi aritmetik alan üzerine temellendirilmişken ispatın içerik sistemi cebirsel alan üzerine temellendirildiğinden iki süreç arasında bilişsel mesafe vardır. İki süreç arasındaki bilişsel mesafe adayın ispatı yanlış tamamlamışının nedeni olabilir. Çünkü aday argümantasyon sürecindeki düşüncesini ispat sürecinde cebirsel alana genellerken matematiksel olarak doğru gerekçeler ortaya koyamamıştır.

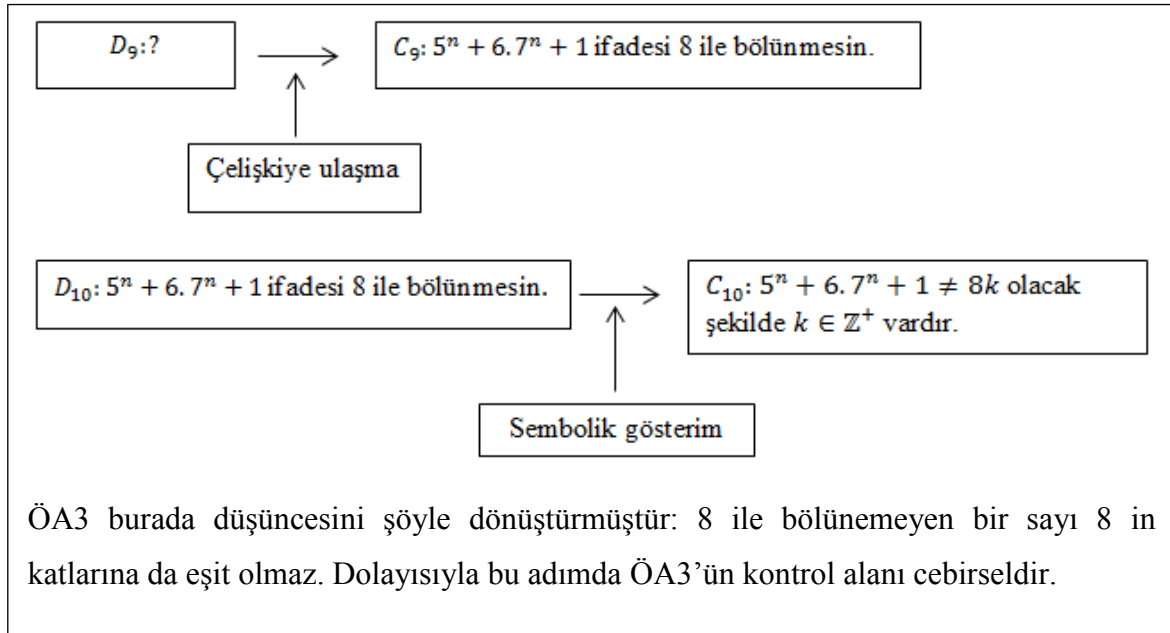
ÖA3'ün Problem 1 de Tercih Ettiği İkinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi

ÖA3'den hipotezini doğrulaması için farklı bir ispat tekniği seçmesi istendiğinde çelişkiyle ispatı seçmiştir. Dolayısıyla ispatın yapısı abdüktiftir. Buradan anlaşılmaktadır ki argümantasyon ve ispatın yapısı farklı olduğundan iki süreç arasında yapısal mesafe vardır.

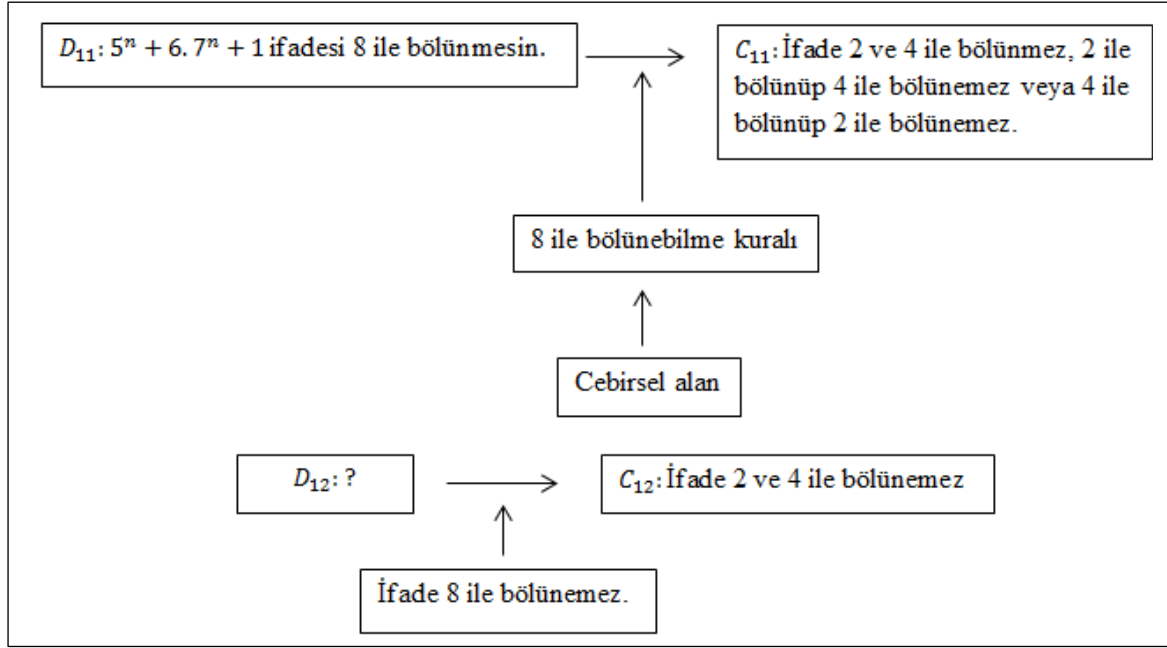
ÖA3'ün ispat yapmaya başladığında yaşadığı yapısal argümantasyon süreci şöyledir:

$5^n + 6 \cdot 7^n + 1$ ifadesi kabul edelim ki $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ tamsayısı için bu ifade 8 ile bölünmesin. O zaman $5^n + 6 \cdot 7^n + 1 \neq 8k$ olacak şekilde $k \in \mathbb{Z}^+$. O zaman bu ifade 8 ile bölünmüyorsa 2 ve 4 ile bölünme kurallarını da sağlamaması lazım. Aynı anda sağlamaması lazım. 2 ile bölünüp 4 ile bölünememesi veya 4 ile bölünüp 2 ile bölünememesi durumları da var. Hem 2 hem de 4 ile bölünememesi durumunu inceleyelim.

Şekil 118. ÖA3'ün birinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinin başlangıcında yaşadığı yapısal argümantasyon süreci



Şekil 119. ÖA3'ün birinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinin başlangıcında yaşadığı yapısal argümantasyon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (1)

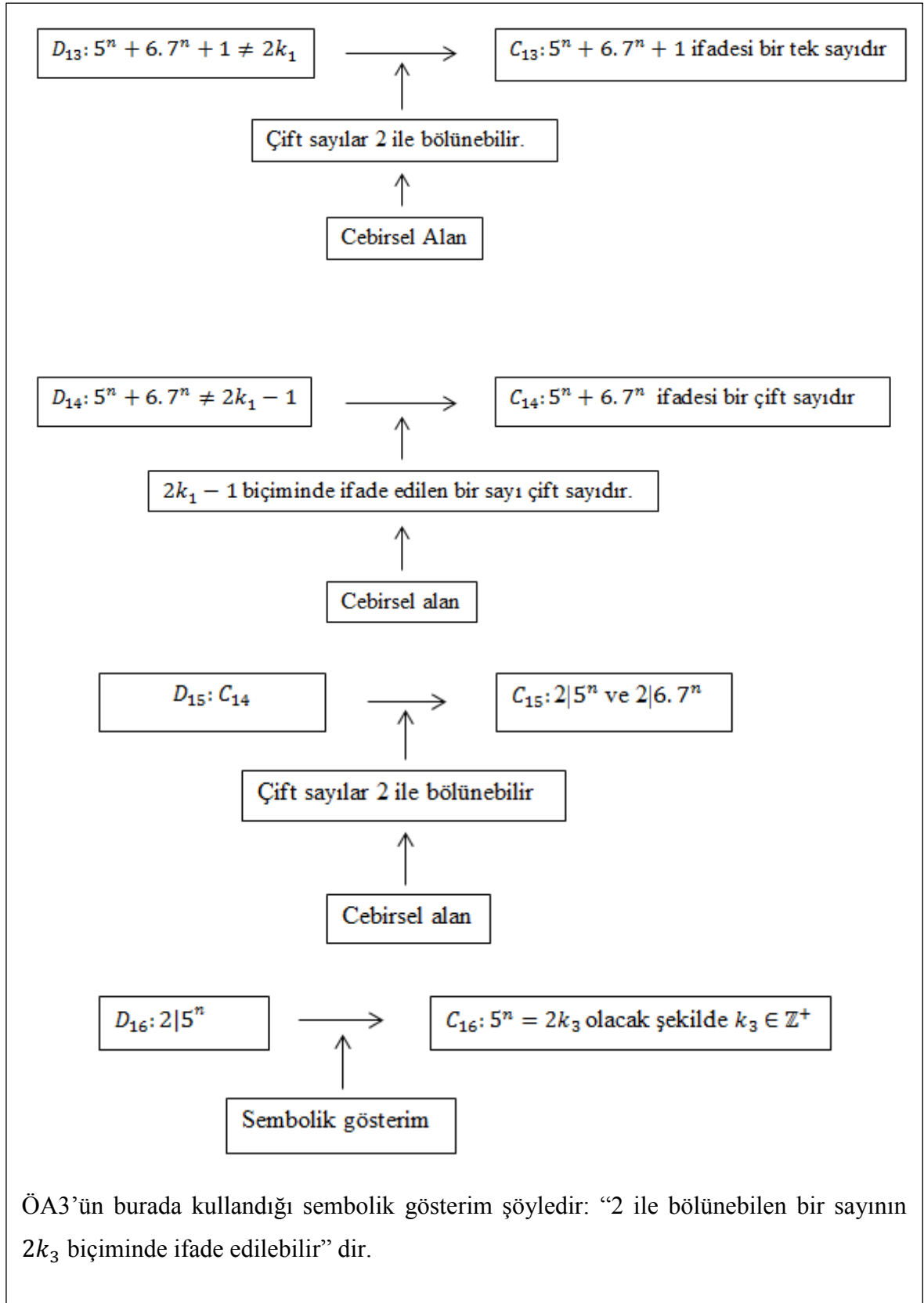


Şekil 120. ÖA3'ün birinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinin başlangıcında yaşadığı yapısal argümantasyon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş çkç modeline göre analizi (2)

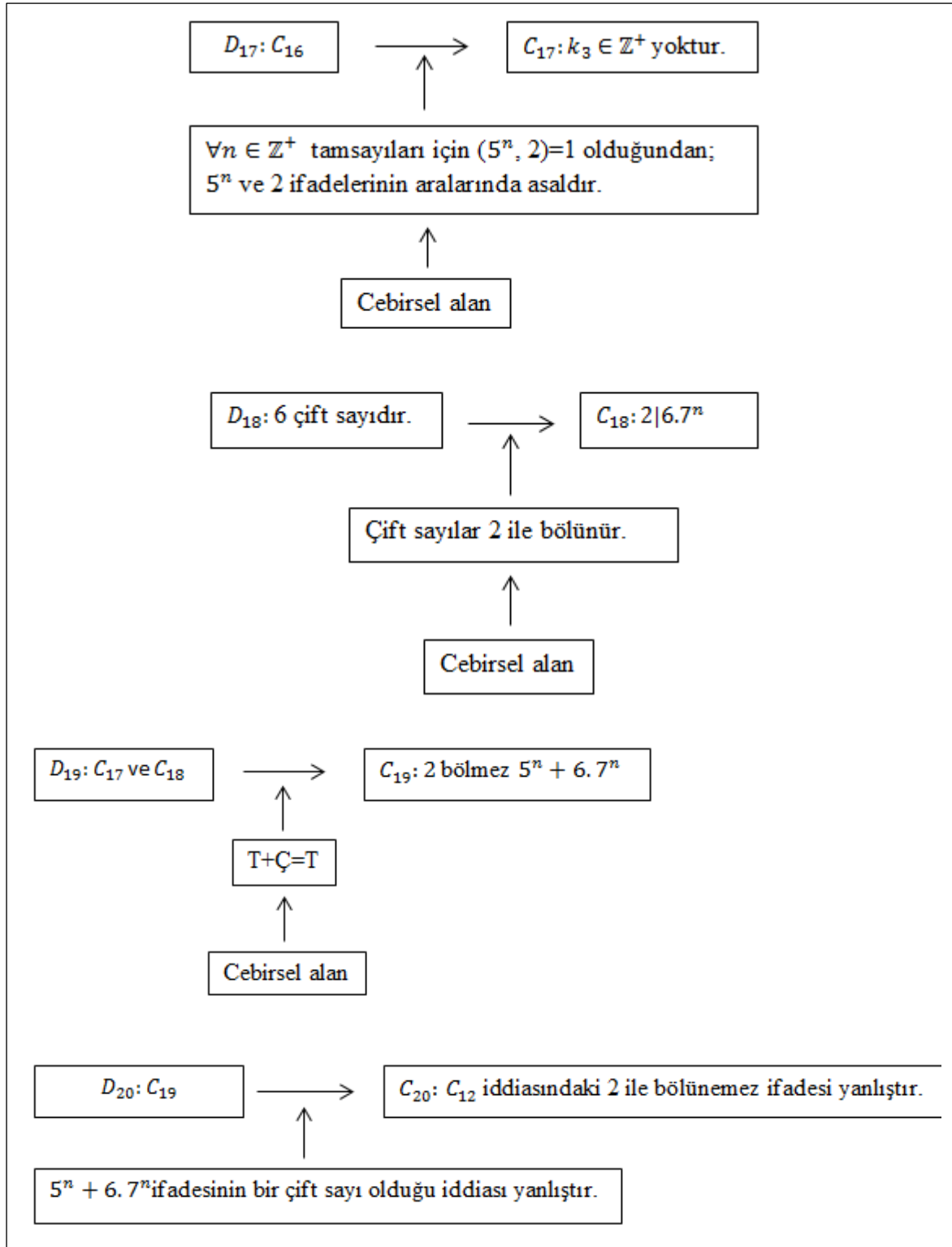
ÖA3 bu yapısal argümantasyon sürecinde abdükatif adım atmıştır. Bu abdükatif adımda ÖA3 C_{12} iddiasının doğruluğunu veya yanlışlığını göstermeye çalışmaktadır. Bu nedenle ÖA3 bu abdükatif adımı dedüktif adıma dönüştürebilecek elemanlar aramakta ve bu sırada ispat sürecinin ilk kısmı ortaya çıkmaktadır.

Hem 2 ile hem de 4 ile bölünmemesi lazım demiştim. $5^n + 6 \cdot 7^n + 1 \neq 2k_1$ olacak şekilde $k_1 \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Eğer şu ifade 2 ile bölünmüyorsa ifade tek olmalı. $5^n + 6 \cdot 7^n \neq 2k_1 - 1$ tek olduğundan o zaman $5^n + 6 \cdot 7^n$ çift demiş oluyorum. Yani $5^n + 6 \cdot 7^n = 2k_2$ olacak şekilde $k_2 \in \mathbb{Z}^+$ olmalı mı? $N=0$ dersem $k_2 \notin \mathbb{Z}^+$ olur. 5^n ve $6 \cdot 7^n$ ifadeleri $2|5^n$ ve $2|6 \cdot 7^n$ olur. Sonrasında 2'nin 5^n i bölmemesi lazım. Ama ... o zaman $5^n = 2k_3$ olacak şekilde $k_3 \in \mathbb{Z}^+$ olmalı. $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ tamsayıları için $(5^n, 2)=1$ olduğundan; 5^n ve 2 ifadelerinin aralarında asal olduğu görülür. Böylece; benim istediğim neydi her iki ifadenin de 2 ile bölünmesi. Bu ifadelerden biri bölünmezse $5^n + 6 \cdot 7^n$ de bölünmez. $5^n + 6 \cdot 7^n$ ifadesinin 2 ile bölünmesi için gerek ve yeter şart 5^n ve $6 \cdot 7^n$ ifadelerinin 2 ile bölünmesi olduğundan 5^n ifadesinin 2 ile bölünmemesi durumunda $5^n + 6 \cdot 7^n$ ifadesinin de 2 ye bölünmediği görülür. Böylece; $5^n + 6 \cdot 7^n \neq 2k_2$ olacak şekilde $k_2 \in \mathbb{Z}^+$ olduğu görülür. Böylece yukarıdaki ifade tek olduğundan 1 fazlası $5^n + 6 \cdot 7^n + 1 = 2k_2$ olacak şekilde $k_2 \in \mathbb{Z}^+$ olduğu görülür.

Şekil 121. ÖA3'ün birinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat süreci (1)



Şekil 122. ÖA3'ün birinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinin (1) Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (1)



Şekil 123. ÖA3'ün birinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinin (1) Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (2)

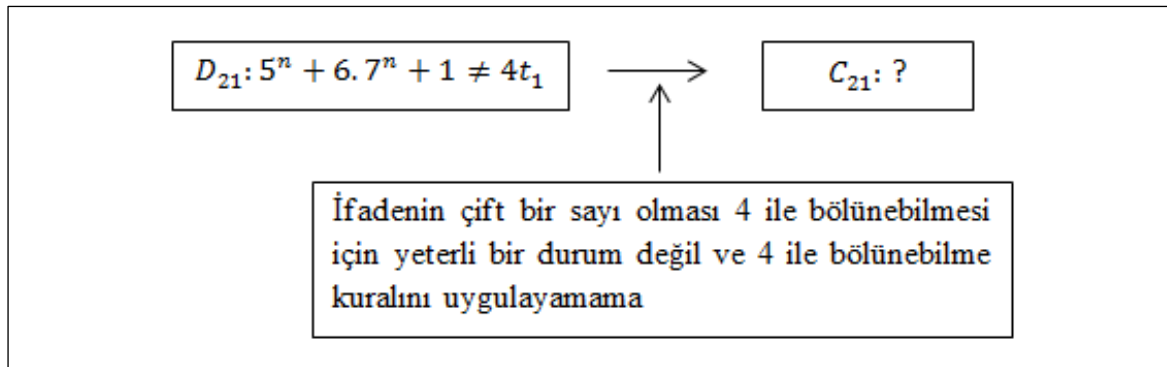
ÖA3 bu süreç ile sadece C_{12} iddiasının bir kısmının yanlışlığını gösterebilmiştir. Devamında ifadenin 4 ile bölünemeyeceği iddiasının da yanlışlığını göstermek için ispat yapmaya devam etmiştir.

Şimdi bir de bunun 4 ile bölündüğünü göstermem lazım.

$$5^n + 6 \cdot 7^n + 1 \neq 4t_1$$

olacak şekilde $t_1 \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Ben 4 ile bölündüğünü nasıl göstermeliyim. 5^n tek bir ifade 1 ile topladığımızda çift olur. Bu çift ise eğer ben bu ifadenin 4 ile bölündüğünü artı $6 \cdot 7^n$ ifadesinin de 4 ile bölündüğünü göstermiş olursam... Nasıl göstereceğim? 4 ile bölünebilme kuralından gitsem. Hayır. 4 ile bölünme durumunda ne yapabilirim?

Şekil 124. ÖA3'ün birinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat süreci (2)



Şekil 125. ÖA3'ün birinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinin (2) Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi

ÖA3 attığı ilk abdükatif adımdaki iddianın yanlışlığını ispat sürecinin ilk kısmında attığı dedüktif adımlar ile gösterebilmiştir. ÖA3 ispatın burada tamamlanmadığını düşündüğünden ispatı tamamlayabilecek başka adımlar atmıştır. Ancak ÖA3 ispat sürecini tamamlayamamıştır. Çünkü attığı dedüktif adımı tamamlayamamıştır. ÖA3 burada cebirsel problemlerin çözümündeki dedüktif yapının zorluğuna takılmış olabilir.

ÖA3'ün argümantasyonun içerik sistemi aritmetik alan üzerine temellendirilmişken ispat sürecinde içerik sistemi cebirsel alan üzerine temellendirilmiştir. ÖA3 yaşadığı yapısal argümantasyon sürecinde attığı adımların kontrolünü cebirsel alan üzerine temellendirdiğinden argümantasyon ve ispat süreci arasındaki bilişsel mesafe azalmamıştır. Cebirsel problemlerin çözümünde yapısal mesafe ispatın tamamlanmasında engel

oluşturmamaktadır. Bu nedenle iki süreç arasındaki bilişsel mesafe ÖA3'ün ispatı tamamlayamamasının sebeplerinden olabilir. Ayrıca ÖA3'ün ispat sürecinde attığı dedüktif adımı tamamlayacak işe yarar elemanlar bulamaması da ispatı tamamlamasını engellemiş olabilir.

ÖA3'ün Problem 2'e Yönelik Bulgularının Analizi

ÖA3'ün Problem 2 de Tercih Ettiği Birinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi

Problem 2: Her $n \geq 2$ tamsayısı için n^4+4 sayısının asal sayı olup olmadığı hakkında ne söyleyebilirsiniz? Varsayımınızı ispatlayınız.

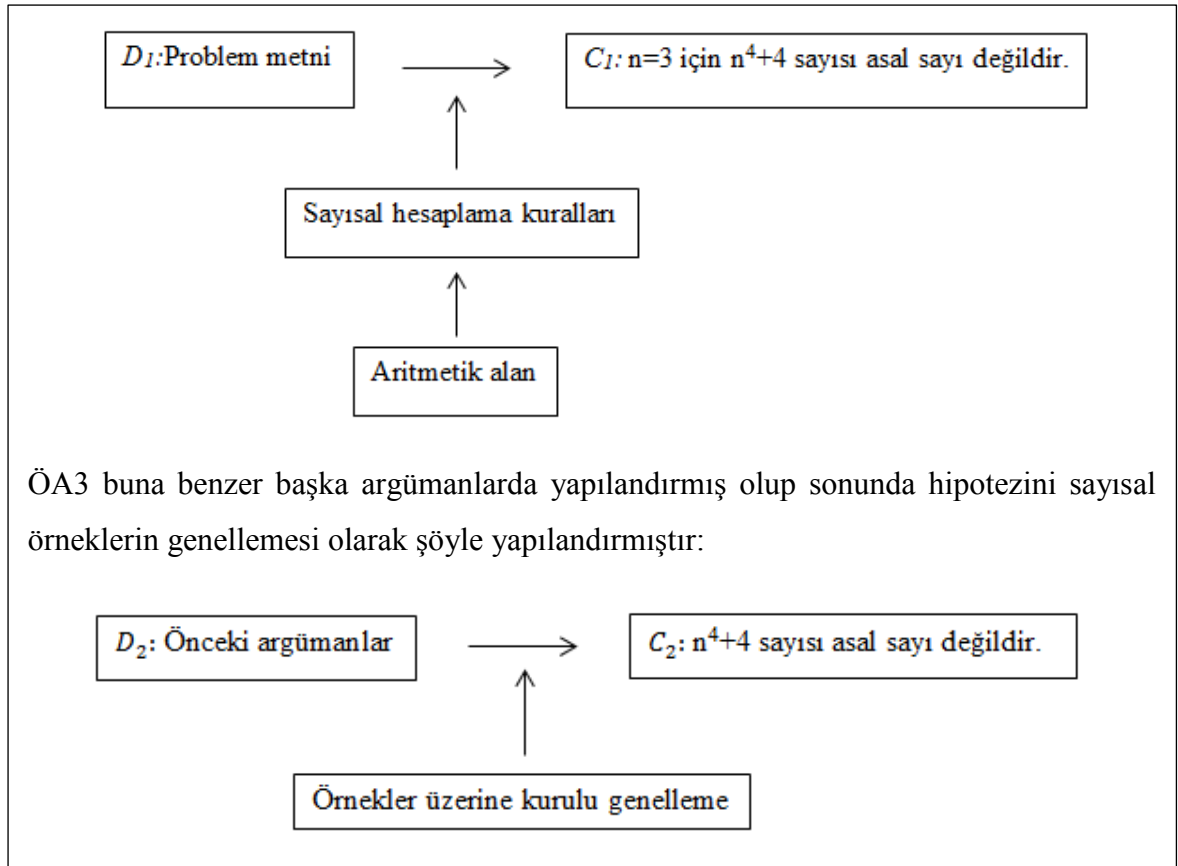
Şekil 126. İkinci matematiksel problem

ÖA3 hipotezini oluştururken sayısal hesaplamalar yapmış ve bunun üzerine n^4+4 sayısının asal sayı olmadığı hipotezini oluşturmuştur. Hipotezini sayısal hesaplamaların genellemesi olarak yapılandığından argümantasyonun içerik sistemi aritmetik alan üzerine temellendirilmiştir. ÖA3'ün argümantasyonunun yapısı yapılandırıcı argümantasyon olup bu süreçte sonuç genelleme temelli indüktif argümantasyon gözlemlenmiştir.

n , 2 ve 2 den büyük çift tam sayılar için n^4+4 sayısı asal sayı değildir. $n=3$ için baktığımızda $3^4 + 4 = 85$ olup $5|85$ olduğundan sayı asal sayı değildir. $n= 4$ için de $4^4 + 4 = 4(4^3 + 4)$ olduğundan n^4+4 sayısı asal sayı değildir.

Şekil 127. ÖA3'ün ikinci problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyon

ÖA3'ün argümantasyonunun Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi şöyledir:



Şekil 128. ÖA3'ün ikinci problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyonun Toulmin modeline entegre edilmiş cıkç modeline göre analizi

ÖA3 hipotezini doğrulamak için ispat yapmaya başlamış ve ispat tekniğini çelişkiyle ispat olarak seçmiştir. Dolayısıyla ispatın yapısı abdükiftir. Buradan anlaşılmaktadır ki argümantasyonun yapısı indüktif iken ispat sürecinin yapısı abdükatif olduğundan iki süreç arasında yapısal mesafe vardır.

$\forall n \geq 2$ tam sayısı için n^4+4 sayısı asal sayı olduğunu kabul edelim. Bir çift sayılar bir de tek sayılar için inceleyelim. $n \in 2\mathbb{Z}$ olacak şekilde $n=2k$, $k \in \mathbb{Z}^+ - \{0\}$ olsun. N yi yerine koyduğumda $(2k)^4 + 4 = 16k^4 + 4$ olur. $4(4k^4 + 1)$ için $4|4(4k^4 + 1)$ olur. Bu durumda bu ifade kendisi ve 1 den farklı bir sayı olan 4 ile bölündüğünden asal sayı değildir. o halde çelişki oluşur.

Şimdi n tek olsun. $n=2k+1$ olacak şekilde $k \in \mathbb{Z}^+ - \{0\}$ olsun.

$$\begin{aligned} (2k + 1)^4 + 4 &= (4k^2 + 4k + 1)(4k^2 + 4k + 1) + 4 \\ &= 16k^4 + 16k^3 + 4k^2 + 16k^3 + 16k^2 + 4k + 4k^2 + 4k + 1 + 4 \\ &= 16k^4 + 32k^3 + 24k^2 + 8k + 5 \end{aligned}$$

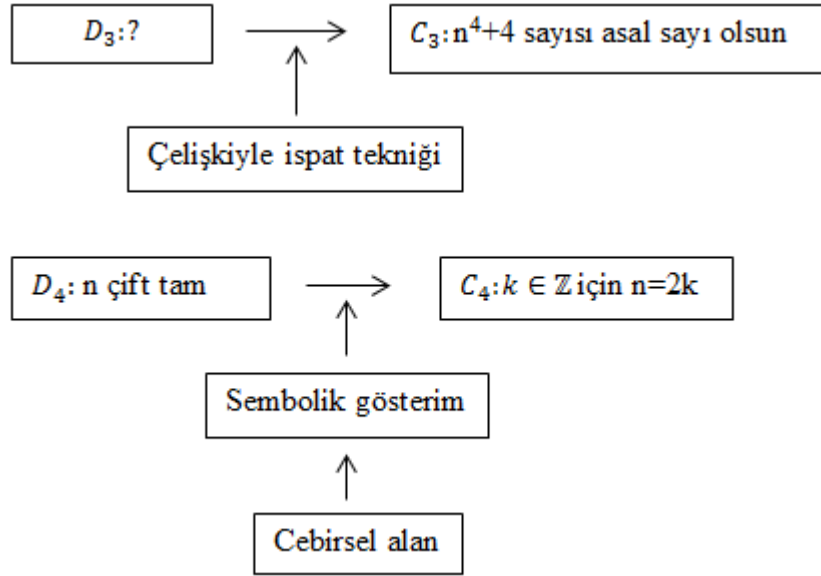
Bu ifadelerin hepsinin tek bir şeye bölündüğünü görmüyorum. k ya bir değer versem ve bu asal olmazsa bu ifadenin asal olmadığına ulaşmış olurum. $k=1$ için ifade 85 olur ve asal değildir. Ama sezgisel oldu. Herhangi bir sayı ile bölünmesi... Her k için sağladığını kabul edip $k+1$ için inceleysem mi acaba? Ama kestiremiyorum. Başka bir şey düşünmem gerekiyor. 4 parantezine almış olsam

$$\begin{aligned} &= 4(4k^4 + 8k^3 + 6k^2 + 2k + 1) + 1 \\ &= 4x + 1 \end{aligned}$$

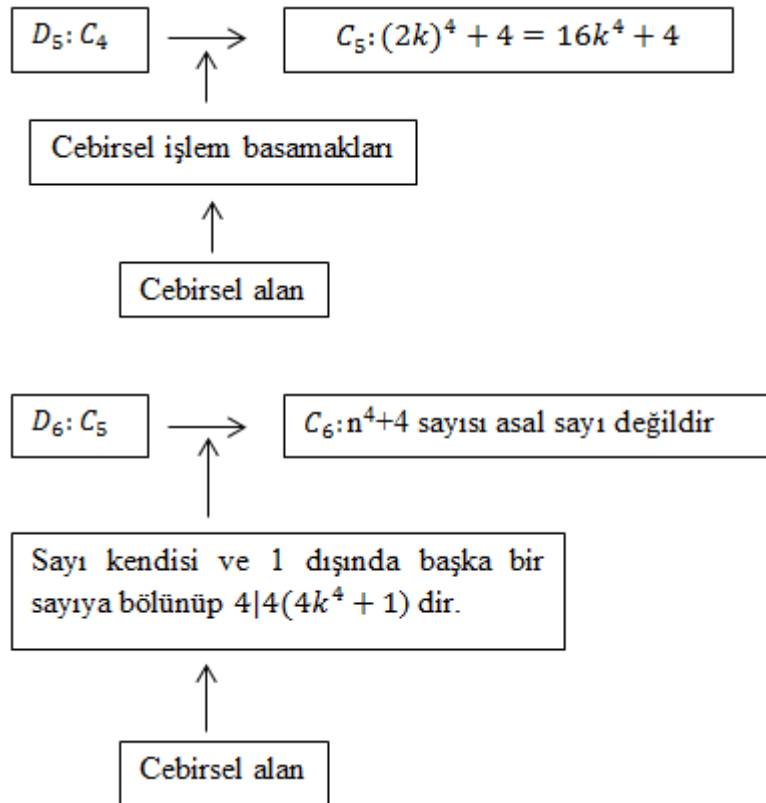
Şimdi bu ifade şurada değişen her k değeri için $4x + 1$ ve katları şeklinde devam edecek. Bu ifade acaba asal mı? x , k ya verdiğim değerler için bir şeye bölünebilir mi?

Şekil 129. ÖA3'ün ikinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat süreci

ÖA3 burada ispatı iki aşamada yapmıştır. İfadenin asal olduğundan yola çıkıp çelişkiye ulaşmak için n değerlerini tek sayılar ve çift sayılar olmak üzere iki aşamada incelemiştir. ÖA3'ün genel olarak ispatının analizi Toulmin modeline entegre edilmiş $ck\phi$ modeline göre şöyledir:

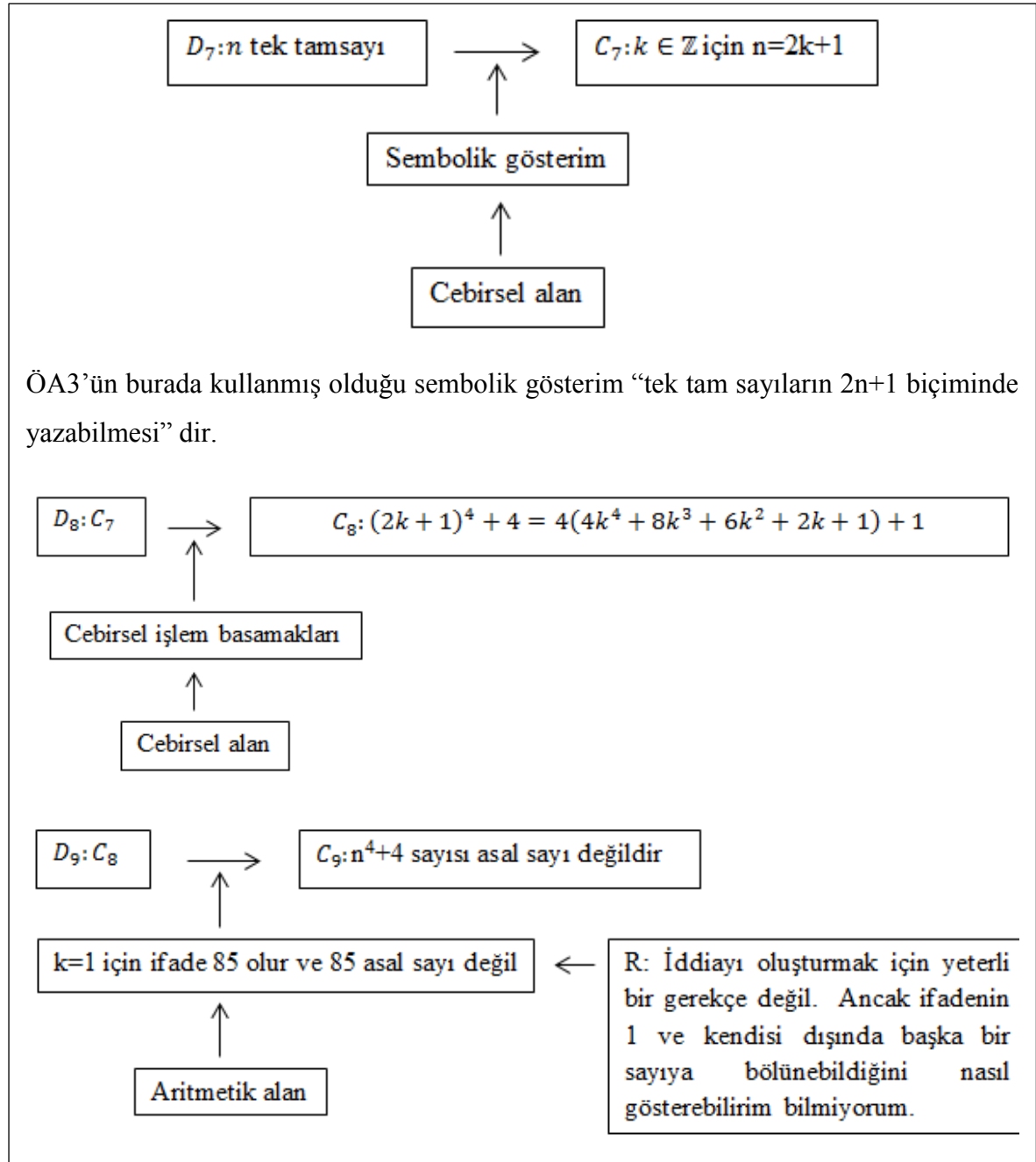


ÖA3'ün burada kullanmış olduğu sembolik gösterim “çift tam sayıların 2 nin katı olan sayılar biçiminde yazabilmesi” dir.



Şekil 130. ÖA3'ün ikinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (1)

ÖA3 burada iddiasını oluştururken asal sayı tanımından yararlanmıştır. Oluşturduğu iddia ile de C_3 iddiasının yanlış olduğu sonucuna ulaşmıştır. Ancak bunun ispatı tamamlamak için yeterli olmadığını söylemiş ve n tam sayısının tek tamsayı değerleri için ifadenin asal sayı olup olmadığını incelemeye başlamıştır. Bu sürecin Toulmin modeline göre analizi şöyledir:



Şekil 131. ÖA3'ün ikinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (2)

ÖA3 ispat sürecini burada sonlandırmıştır. Son adımda iddiasını özel bir değerle ortaya koymuş ancak sonrasında bunun ispatı tamamlamak için yeterli olmadığını söyleyip işe yarar başka elemanlar aramıştır. Fakat ispatı tamamlayabilmek için doğru bir gerekçe bulamamıştır. Bu nedenle ispat tamamlanamamıştır.

Öncesinde söz edildiği üzere ÖA3'ün argümantasyon ve ispat süreçleri arasında yapısal mesafe mevcuttur. Ayrıca ÖA3'ün argümantasyonunun içerik sistemi aritmetik alan üzerine temellendirilmişken ispat sürecinin içerik sistemi cebirsel alan üzerine temellendirilmiştir. Bu nedenle iki süreç arasında bilişsel mesafe vardır. Ancak son adımda gerekçenin kontrolü aritmetik alan ile sağlanmıştır. Bu durum iki süreç arasındaki bilişsel mesafeyi azaltmış olabilir. Buna rağmen ÖA3 ispatı tamamlayamamıştır. Bu durumun sebebi adayın ispat sürecinde dedüktif adımlardan oluşan zinciri tamamlayamamış olması olabilir. İspatın tamamlanamamasının bir diğer nedeni de adayın tercih ettiği ispat tekniğinin bu problemin çözümü için doğru teknik olmaması olabilir.

ÖA3'ün Problem 2 de Tercih Ettiği İkinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi

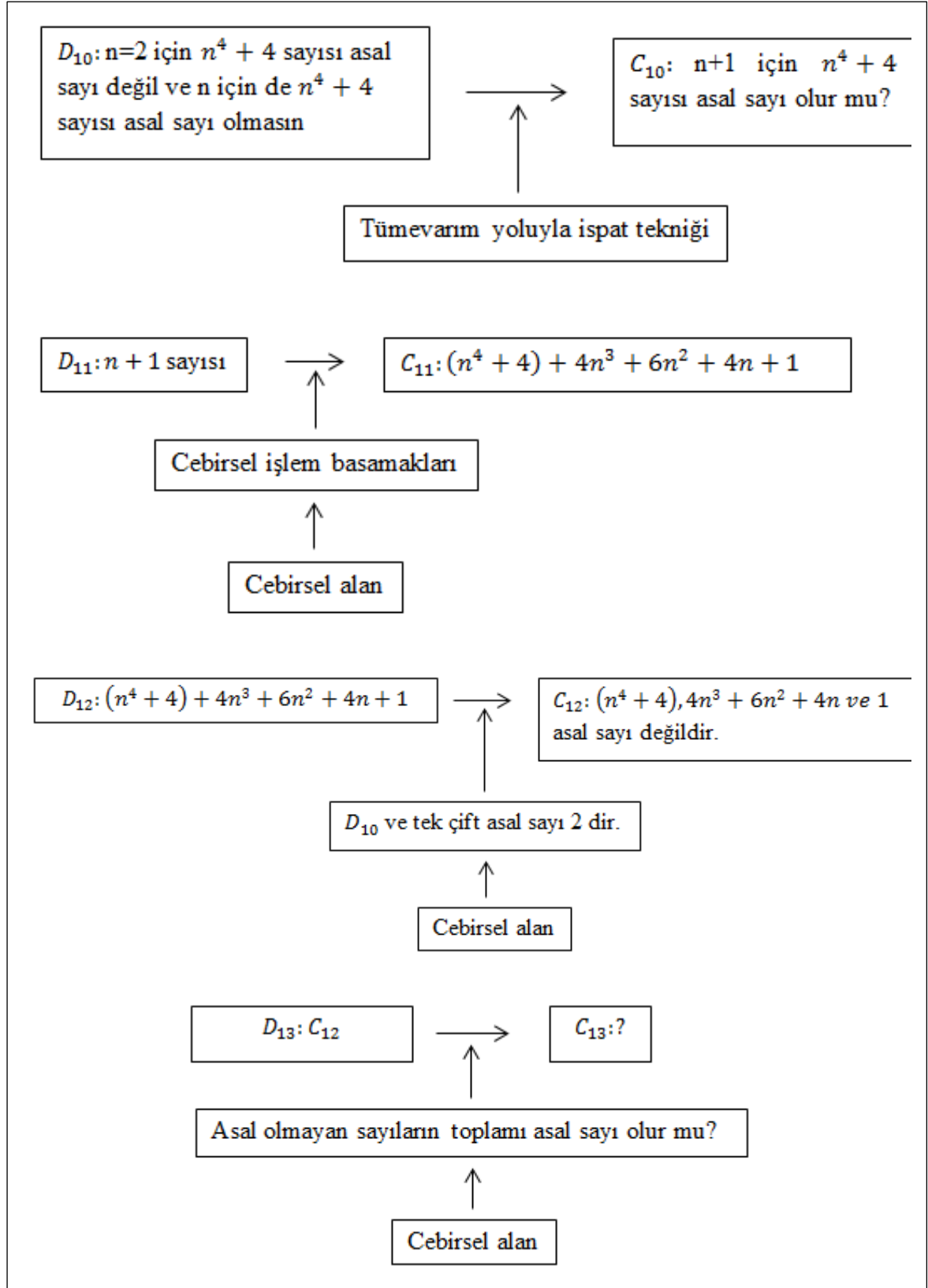
ÖA3'den hipotezini doğrulaması için farklı bir ispat tekniği seçmesi istendiğinde tümevarımla ispat tekniğini seçmiştir. Dolayısıyla ispatın yapısı indüktiftir. Buradan anlaşılmaktadır ki argümantasyon ve ispat sürecinin yapısı aynı olduğundan iki süreç arasında yapısal süreklilik vardır.

$n=2$ için $2^2 + 4 = 8$ ve $4|8$ olmak üzere 8 asal sayı değildir. n için kabul edelim ki $n^4 + 4$ sayısı asal sayı olmasın. $k|n^4 + 4$ olmak üzere $k \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{0,1\}$ vardır. $n+1$ için $(n+1)^4 + 4$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} (n+1)^4 + 4 &= (n^2 + 2n + 1)(n^2 + 2n + 1) + 4 \\ &= n^4 + 2n^3 + n^2 + 2n^3 + 4n^2 + 2n + n^2 + 2n + 1 + 4 \\ &= n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 5 \\ &= (n^4 + 4) + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 \end{aligned}$$

Buradan yine bir şey çıkmaz. Bulamam.

Şekil 132. ÖA3'ün ikinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat süreci



Şekil 133. ÖA3'ün ikinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi

ÖA3 ispat sürecini burada sonlandırmıştır. Son attığı adımda gerekçesinin varlığından emin olamadığı için bir iddia oluşturamamıştır. Dolayısıyla ispatı tamamlayamamıştır. ÖA3'ün burada cebirsel problemlerin çözümünün güçlü dedüktif yapısına takıldığı düşünülebilir.

ÖA3'ün argümantasyonunun içerik sistemi aritmetik alan üzerine temellendirilmişken ispat sürecinin içerik sistemi cebirsel alan üzerine temellendirilmiştir. Bu nedenle iki süreç arasında bilişsel mesafe vardır. Öncesinde bahsedildiği üzere iki süreç arasında yapısal süreklilik mevcuttur. ÖA3 iki süreç arasındaki yapısal sürekliliğe rağmen ispatı tamamlayamamıştır. Bu durumun nedeni iki süreç arasındaki bilişsel mesafe olabilir. ÖA3 ispat sırasında gözlemlenen yapısal argümantasyon sürecinde abdüktif adım atabilseydi bu adım bilişsel mesafeyi azaltarak ÖA3'ün ispatı tamamlamasını sağlayabilirdi.

ÖA3'ün ispatı tamamlayamamasının bir nedeni de seçtiği ispat tekniği olabilir. Seçilen ispat tekniği bu problemin çözümü için doğru bir teknik olmayabilir.

ÖA3'ün Problem 3'e Yönelik Bulgularının Analizi

ÖA3'ün Problem 3 de Tercih Ettiği Birinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi

Problem 3: Ardışık ve sıfırdan farklı her iki doğal sayının çarpımının bir tam kare olup olmadığı hakkında ne söyleyebilirsiniz? Varsayımınızı ispatlayınız.

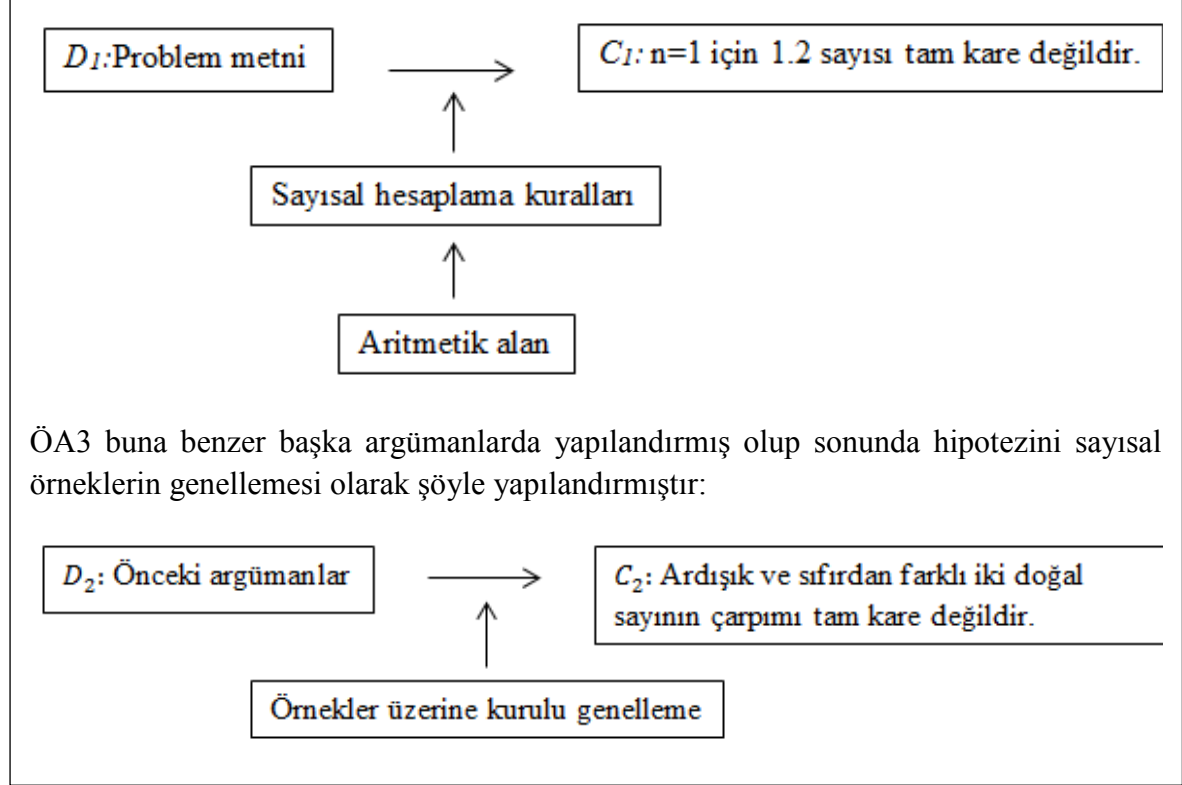
Şekil 134. Üçüncü matematiksel problem

Ardışık iki tamsayıdan biri çift iken diğeri tek olması gerekir ki bu da $n=2k-1$ olacak şekilde $n+1=2k$ olma üzere $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ vardır. $n=1$ iken $n+1=2$ için $n(n+1)=1 \cdot 2=b^2$ olacak şekilde $b \in \mathbb{Z}$ yoktur. $n=5$ iken $n+1=6$ için $n(n+1)=30=a^2$ olacak şekilde $a \in \mathbb{Z}$ yoktur. O halde varsayımın ardışık ve sıfırdan farklı iki doğal sayının çarpımı bir tam kare değildir.

Şekil 135. ÖA3'ün üçüncü problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyon

ÖA3 hipotezini oluştururken $n=1$ ve $n=5$ değerleri için sayısal hesaplamalar yapmış ve bunun üzerine hipotezini oluşturmuştur. ÖA3 hipotezini sayısal hesaplamaların genellemesi olarak yapılandığından argümantasyonun içerik sistemi aritmetik alan

üzerine temellendirilmiştir. Ayrıca ÖA3'ün argümantasyonunun yapısı yapılandırıcı argümantasyon olup bu süreçte sonuç genelleme temelli induktif argümantasyon gözlenmiştir.



Şekil 136. ÖA3'ün üçüncü problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyonun Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi

ÖA3 hipotezini doğrulamak için ispat yapmaya başlamış ve ispat tekniğini doğrudan ispat tekniği olarak seçmiştir. Dolayısıyla ispatın yapısı dedüktiftir. Buradan anlaşılmaktadır ki argümantasyonun yapısı induktif iken ispat sürecinin yapısı dedüktif olduğundan iki süreç arasında yapısal mesafe vardır.

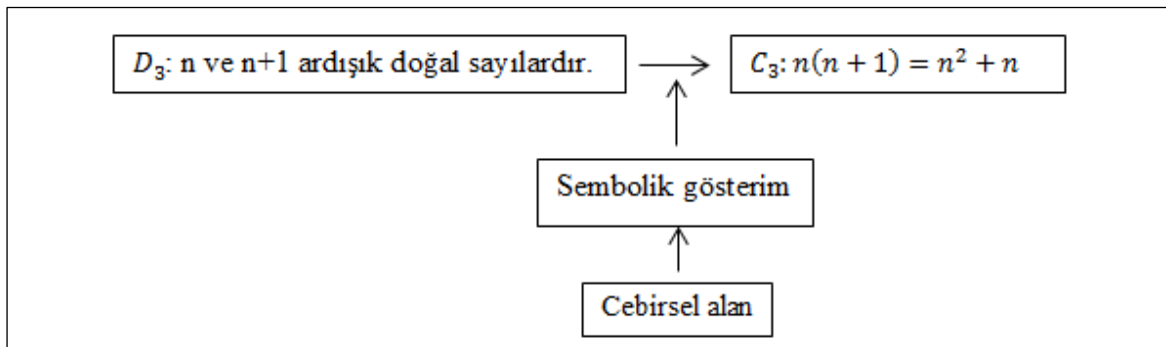
$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere n ve $n+1$ sayılarını alsam. $n(n+1) = n^2 + n$ dir. Ardışık sayılar aralarında asal olduğundan ortak çarpanları yalnızca 1 dir. Ama bu durumda çarpanlarının a^2 şeklinde ifade edilebileceğini sözlü ifade etsem. İspat etmiş olur muyum? Benim bir ifadem tam kare olması için bu ifadenin içindeki her sayının kendisinden bir sayı ile çarpılması gerekir. Böyle bir durumda bu ifadeler aralarında asal olduğundan hiçbir çarpan kendisiyle çarpılmaz. Dolayısıyla tam kare değildir. n nin çarpanları a, b ; $n+1$ in çarpanları c, d olacak şekilde $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ vardır. demiş olsam. Bu ifadelerden ... aynı zamanda a, b, c, d her biri asal sayı.

$n = a.b$ olacak şekilde a ve b , n nin çarpanları olsun. $n+1=c.d$ olacak şekilde c ve d , $(n+1)$ in çarpanları olur. Bu durumda a, b, c, d birbirine eşit değildir demiş olsam. a, b, c, d nin bir tam kare oluşturması için her bir çarpanın kendisini en az iki kere tekrar etmesi gerekir. O zaman a, b, c, d sayılarının ... değil yani bunu seziyorum ama matematiksel olarak?

$a.b.c.d = x^2$ olacak şekilde bir x sayısı bulamam. Mesela, 16 ve 17 sayılarının çarpanları 1, 2 ve 17 dir. 17 kendini tekrar etmiyor. 24 ve 25 sayılarının çarpanlarından 2 ve 5 kendini tekrar ediyor ama 3 etmiyor. 8 ve 9 desem 2 de 3 de kendini tekrar ediyor. Tekrar etmeyen yok ama? 2 kendini 2 nin katı şeklinde aslında en az 2 defa demek yanlış olur. 2 nin çift üsleri? 2 ve katları. Ardışık iki tamsayının çarpanları kendini 2 nin katları şeklinde tekrar etmez.

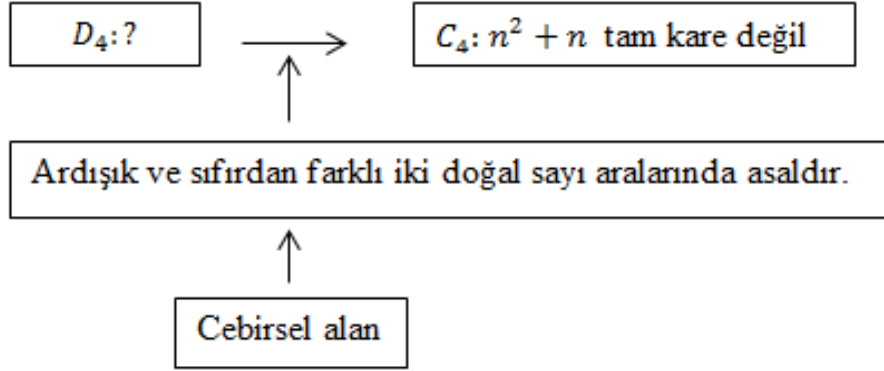
Şekil 137. ÖA3'ün üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat süreci

ÖA3'ün genel olarak ispatının analizi Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre şöyledir;

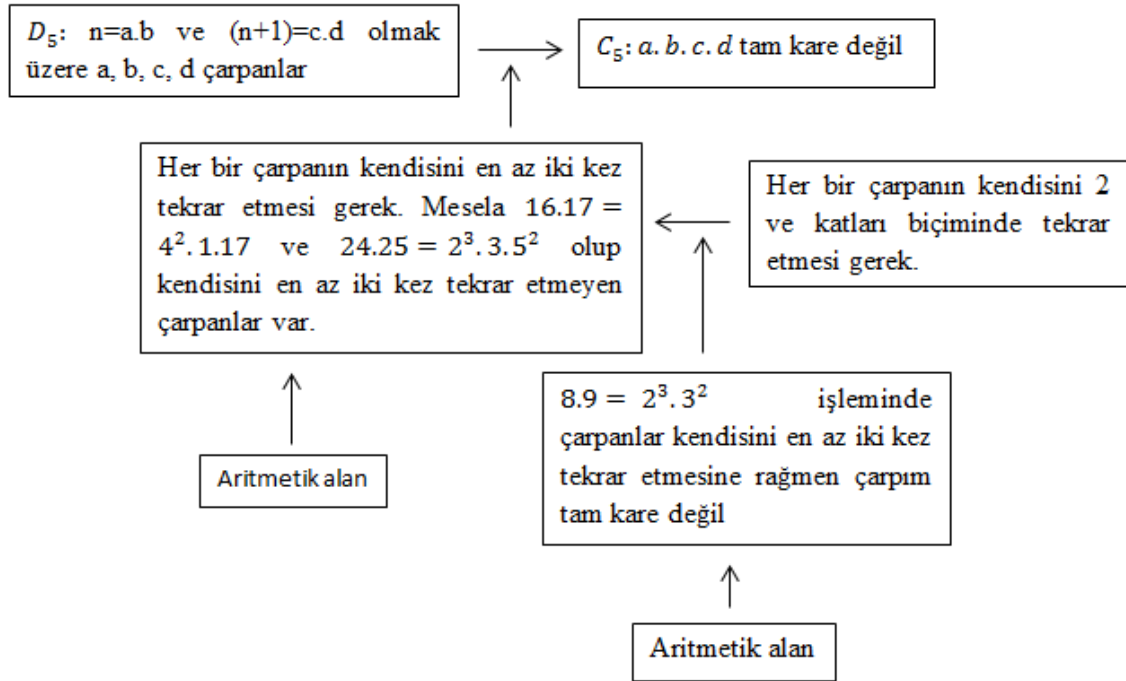


Şekil 138.ÖA3'ün üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (1)

ÖA3'ün burada kullanmış olduğu sembolik gösterim bir doğal sayıyı n ile temsil edip bir fazlasını da $n+1$ ile temsil etmesi ve bu temsillerle çarpma işlemi yapmasıdır.



ÖA3 ispat sırasında yaşadığı yapısal argümantasyon sürecinde abdüktif adım atmıştır. Ancak attığı bu adımın ispatı tamamlamak için yeterli olmadığını düşündüğünden bu adımı dedüktif adımlara dönüştürerek ispatı tamamlayabilmesini sağlayan işe yarar elemanlar aramıştır.



Şekil 139. ÖA3'ün üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş cıkç modeline göre analizi (2)

ÖA3 ispatı bu adımlarla tamamlayamayacağını düşündüğünden burada sonlandırmıştır.

ÖA3'ün argümantasyonunun içerik sistemi aritmetik alan üzerine temellendirilmişken ispat sürecinin içerik sistemi hem aritmetik hem de cebirsel alan üzerine temellendirilmiştir. ÖA3'ün ispat sürecinde attığı bazı adımların kontrol alanının aritmetik alan olması iki süreç arasındaki bilişsel mesafeyi azaltmıştır. Ayrıca atılan abdükatif adımdan sonra ispatı tamamlayabilmek için bulunan elemanlar ispatı tamamlamak için yeterli olmamıştır. ÖA3'ün ispatı tamamlayamamasının bir nedeni de seçilen ispat tekniğinin doğru teknik olmaması olabilir.

ÖA3'ün ispat sırasında yaşadığı yapısal argümantasyon sürecinde attığı abdükatif adımın iki süreç arasındaki yapısal mesafeyi de azaltarak ispatın tamamlanmasını sağlaması beklenirken böyle bir durum gözlemlenmemiştir.

ÖA3'ün Problem 3 de Tercih Ettiği İkinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi

ÖA3'den hipotezini doğrulaması için farklı bir ispat tekniği seçmesi istendiğinde tümevarımla ispat tekniğini seçmiştir. Dolayısıyla ispatın yapısı indüktiftir. Buradan anlaşılmaktadır ki argümantasyon ve ispat sürecinin yapısı aynı olduğundan iki süreç arasında yapısal süreklilik vardır.

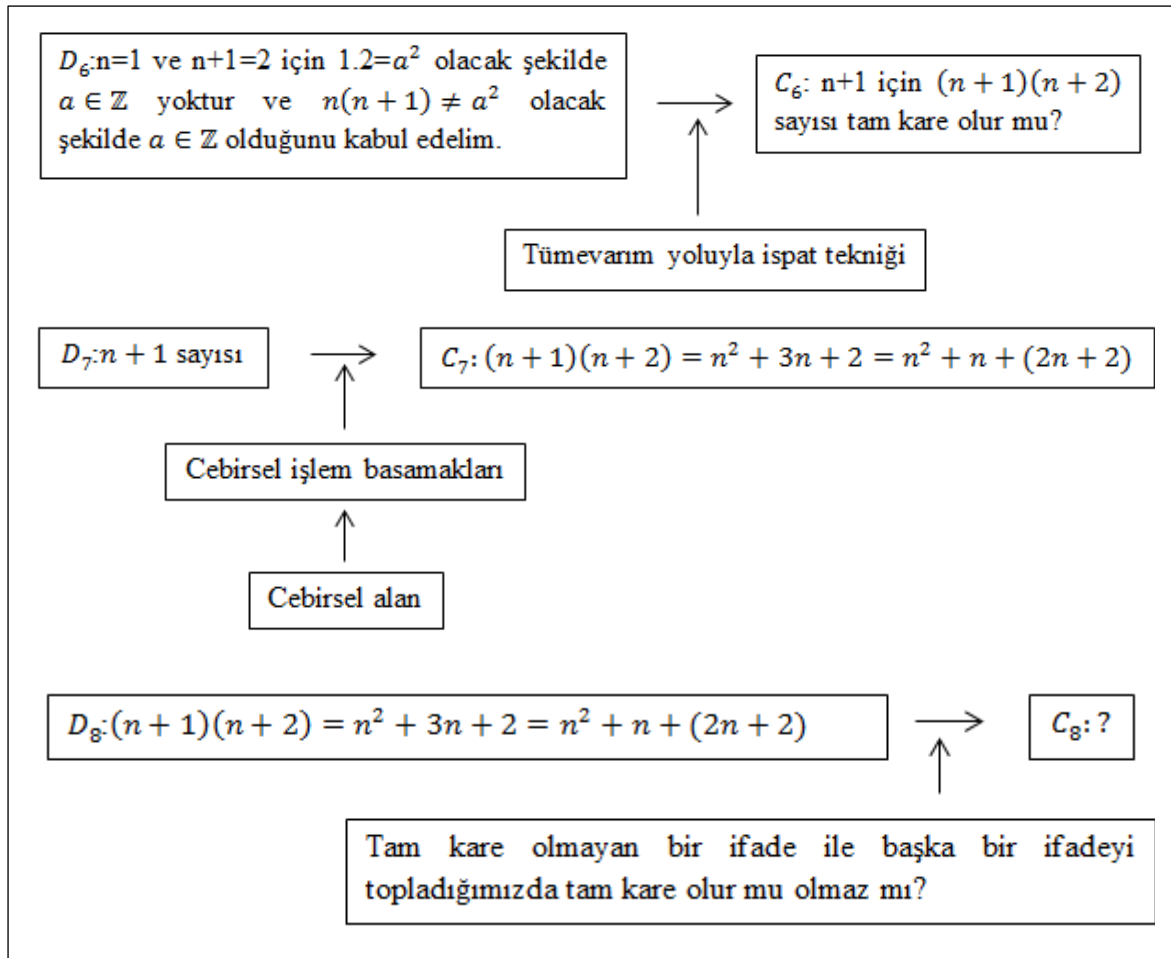
Tümevarımla gelir mi bilmiyorum ama bakalım.

$n=1$ ve $n+1=2$ için $1.2=a^2$ olacak şekilde $a \in \mathbb{Z}$ yoktur. $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$ sayısı için $n(n+1) \neq a^2$ olacak şekilde $a \in \mathbb{Z}$ olduğunu kabul edelim. O zaman $n+1$ sayısı için $(n+1)(n+2)$ tam kare midir?

$$(n+1)(n+2) = n^2 + 3n + 2 = n^2 + n + (2n+2)$$

$n^2 + n$ tam kare değil. Peki tam kare olmayan bir sayı ile başka bir sayıyı topladığımızda tam kare olur mu olmaz mı? Ben bunun hakkında bir şey söyleyemeyeceğim.

Şekil 140. ÖA3'ün üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat süreci



Şekil 141. ÖA3'ün üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş cıkç modeline göre analizi

ÖA3 son adımda gerekçesinin varlığından emin olamadığı için bir iddia oluşturamamıştır. Dolayısıyla ispat tamamlanmamıştır.

ÖA3'ün argümantasyonunun içerik sitemi aritmetik alan üzerine temellendirilmişken ispat sürecinde gözlemlenen yapısal argümantasyon sırasında atılan adımların kontrol alanı cebirsel olduğundan içerik sistemi cebirsel alan üzerine temellendirilmiştir. Dolayısıyla iki süreç arasında bilişsel mesafe vardır. Öncesinde belirtildiği üzere ÖA3'ün argümantasyon ve ispat süreci arasında yapısal süreklilik mevcuttur. ÖA3 iki süreç arasındaki yapısal sürekliliğe rağmen ispatı tamamlayamamasının nedeni iki süreç arasındaki bilişsel mesafe olabilir.

ÖA3'ün Problem 3 de Tercih Ettiği Üçüncü İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi

ÖA3'den hipotezini doğrulaması için farklı bir ispat tekniği seçmesi istendiğinde çelişkiyle ispatı seçmiştir. Dolayısıyla ispatın yapısı abdüktiftir. Buradan anlaşılmaktadır ki argümantasyon ve ispat sürecinin yapısı farklı olduğundan iki süreç arasında yapısal mesafe vardır.

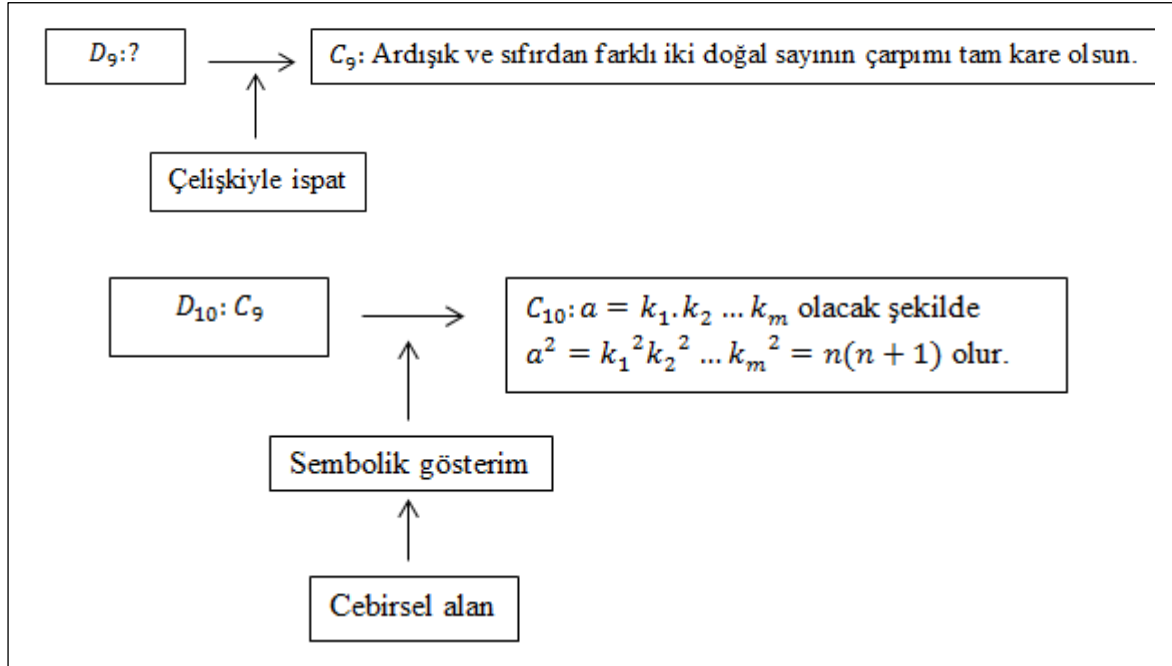
Kabul edelim ki ardışık iki doğal sayının çarpımı tam kare olsun. $a \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $a^2 \in \mathbb{N}$ için;

$a^2 = a \cdot a$ olur. Böylece $a = k_1 \cdot k_2 \dots k_m$ olacak şekilde $k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{N}$ asal çarpanları olsun. $a^2 = k_1^2 k_2^2 \dots k_m^2$ olur. $a^2 = (k_1 \cdot k_2 \dots k_m)^2 = n(n+1)$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ var mı? n ile $n+1$ aralarında asal olduğundan ortak çarpanları yalnızca 1 dir.

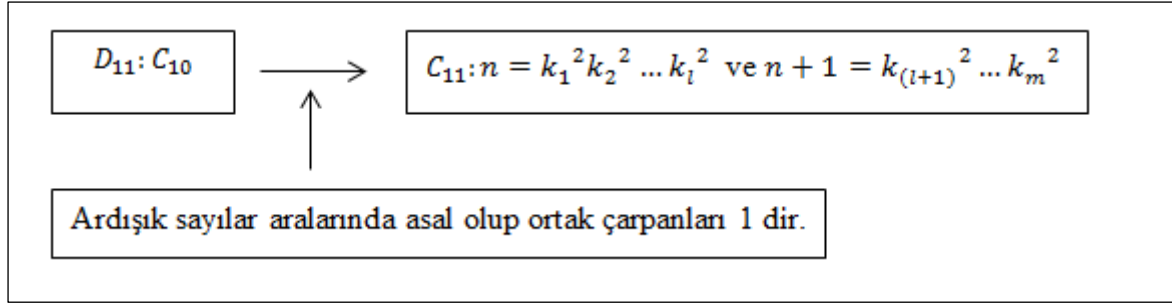
$$n = k_1^2 k_2^2 \dots k_l^2 \text{ ve } n+1 = k_{(l+1)}^2 \dots k_m^2$$

Eğer buna eşitse ortak çarpanları olmadığı için n sayısında k_2 çarpanı varsa $(n+1)$ sayısında k_2 çarpanı olmayacak....

Şekil 142. ÖA3'ün üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat süreci



Şekil 143. ÖA3'ün üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (1)



Şekil 144. ÖA3'ün üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (2)

ÖA2 ispatı burada sonlandırmıştır. Adayın ispat sürecinin içerik sistemi cebirsel alan üzerine temellendirilmiş olduğundan argümantasyon ve ispat süreci arasında bilişsel mesafe vardır. ÖA3 iki süreç arasındaki bilişsel mesafeden kaynaklı olarak ispatı tamamlanamamış olabilir. Ayrıca ÖA3'ün ispat sürecinde attığı dedüktif adımların devamını getirebilecek işe yarar elemanlar bulamaması da ispatın tamamlanması önündeki engeldir. Yani ispatın tamamlanamamasının sebebi cebirsel problemlerin güçlü dedüktif yapısı olabilir.

ÖA3'ün Problem 4'e Yönelik Bulgularının Analizi

ÖA3'ün Problem 4 de Tercih Ettiği Birinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi

Problem 4: $0 \neq x \in \mathbb{R}$ için $x + \frac{1}{x} < 2$ ise o zaman x in negatifliği ya da pozitifliği hakkında ne söyleyebilirsiniz? Varsayımınızı ispatlayınız.

Şekil 145. Dördüncü matematiksel problem

ÖA3 hipotezini oluştururken x sayısını 4 farklı aralıkta incelemiş, sayısal hesaplamalar yapmış ve bunun üzerine $x \in \mathbb{R}^-$ hipotezini oluşturmuştur. ÖA3 hipotezini oluşturduğu argümantasyon sırasında sayısal hesaplamalar yaptığından bu sürecin içerik sistemi aritmetik alan üzerine temellendirilmiştir. Ayrıca öğretmen adayı argümantasyon sırasında hipotezini sayısal örnekleri genelleyerek elde ettiğinden sürecin yapısı yapılandırıcı argümantasyon olup bu süreçte indüktif argümantasyon gözlemlenmiştir.

$x > 2$ değerleri için soruda verilen eşitsizlik sağlanmıyor.

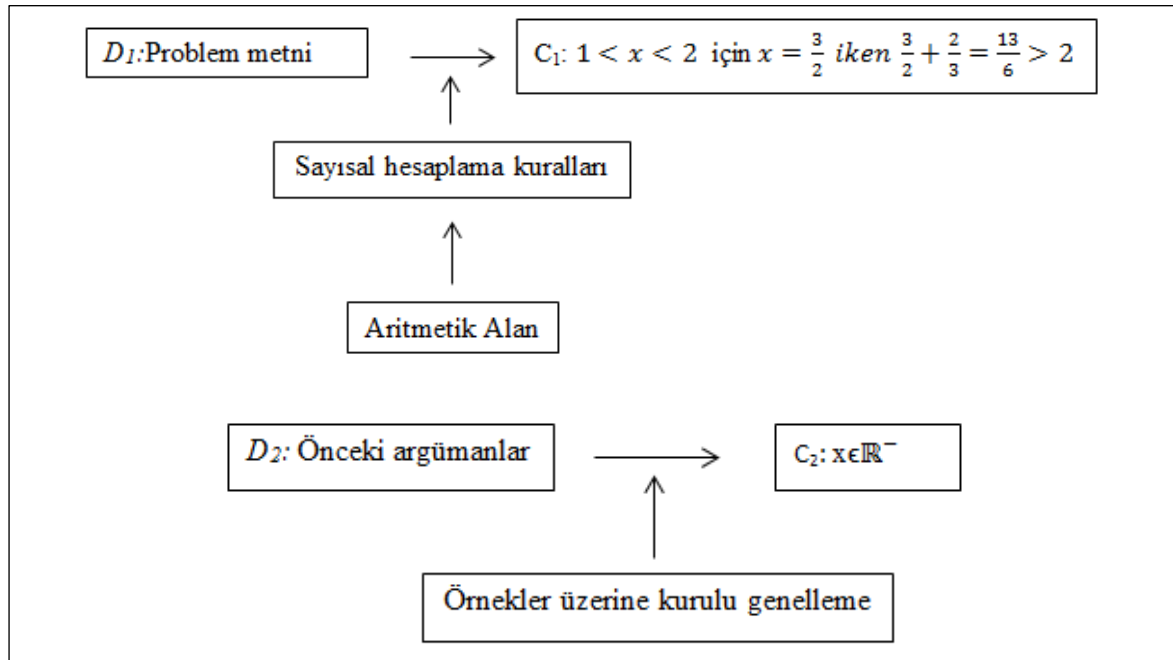
$1 < x < 2$ değerleri için soruda verilen eşitsizlik sağlanmıyor. Mesela; $x = \frac{3}{2}$ olsun;

$$\frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{9+4}{6} = \frac{13}{6} > 2 \text{ olur ki bu yanlıştır.}$$

$0 < x < 1$ değerleri için; $x = \frac{1}{2}$ olsun. $\frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} > 2$ olur ki bu da yanlıştır.

$x < 0$ olsun. $x = -1$ için $-1 - 1 < 2$ olur. O halde $x \in \mathbb{R}^-$ olmalı.

Şekil 146. ÖA3'ün dördüncü problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyon

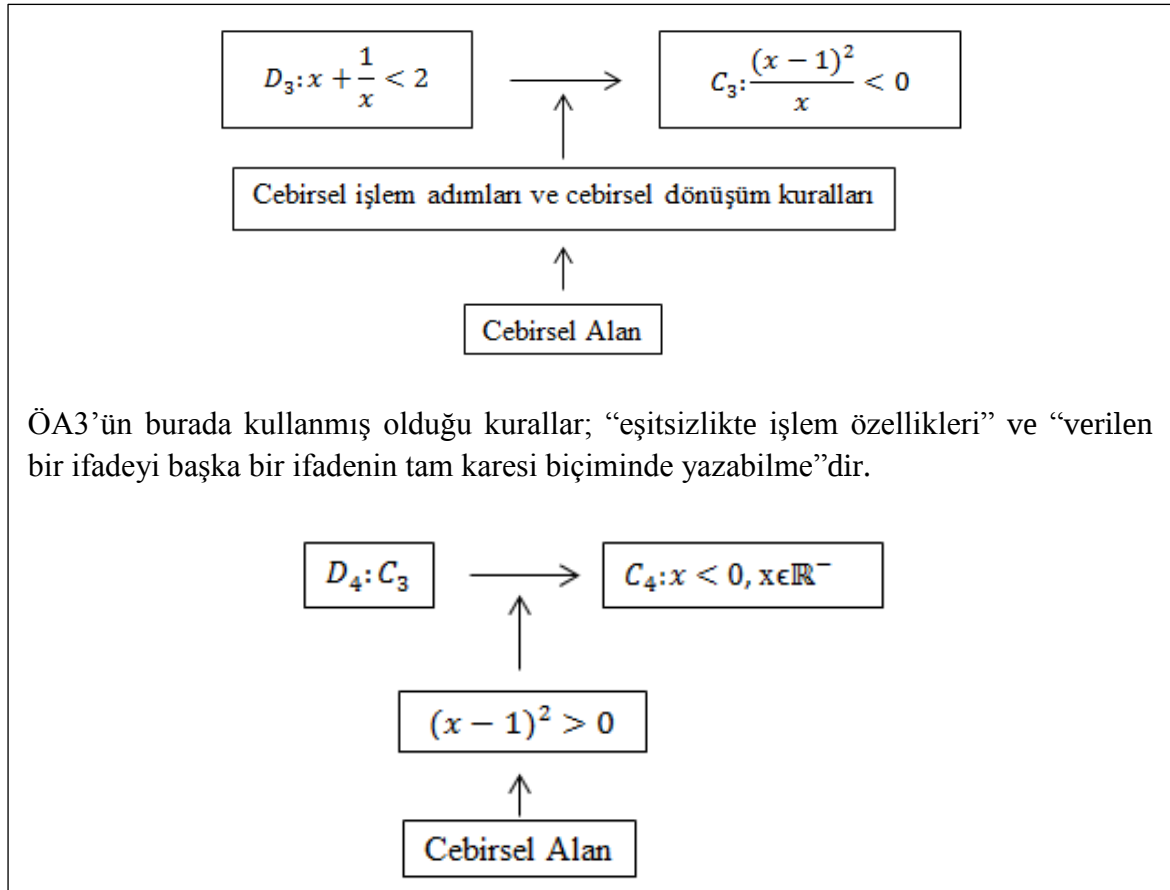


Şekil 147. ÖA3'ün dördüncü problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyonun Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi

ÖA3 hipotezini doğrulamak için ispat yapmaya başlamış ve ispat tekniğini doğrudan ispat olarak seçmiştir. Dolayısıyla ispatın yapısı dedüktiftir. Buradan anlaşılmaktadır ki argümantasyonun ve ispat sürecinin yapısı farklı olduğundan iki süreç arasında yapısal mesafe vardır.

$$\begin{aligned}
x + \frac{1}{x} < 2 &\Rightarrow x < 2 - \frac{1}{x} \Rightarrow x < \frac{2x-1}{x} \\
&\Rightarrow x - \frac{2x-1}{x} < 0 \\
&\Rightarrow \frac{x^2+1-2x}{x} < 0 \\
&\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{x} < 0 \\
(x-1)^2 > 0 \text{ olacağından } \frac{(x-1)^2}{x} < 0 \text{ olması için } x \in \mathbb{R}^- \text{ olmalıdır.}
\end{aligned}$$

Şekil 148. ÖA3'ün dördüncü problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat süreci



Şekil 149. ÖA3'ün dördüncü problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi

ÖA3 ispat sürecinde attığı dedüktif adımlar sonucu ispatı başarıyla tamamlamıştır.

ÖA3'ün argümantasyonunun içerik sistemi aritmetik alan üzerine temellendirilmişken ispatın içerik sistemi cebirsel alan üzerine temellendirilmiştir. Bu nedenle iki süreç

arasında bilişsel mesafe vardır. ÖA3 iki süreç arasındaki bilişsel ve yapısal mesafeye rağmen ispatı başarıyla tamamlayabilmiştir. Bu durum cebirsel problemlerin çözümünün güçlü dedüktif yapısından kaynaklanabilir.

ÖA3'ün Problem 4 de Tercih Ettiği İkinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi

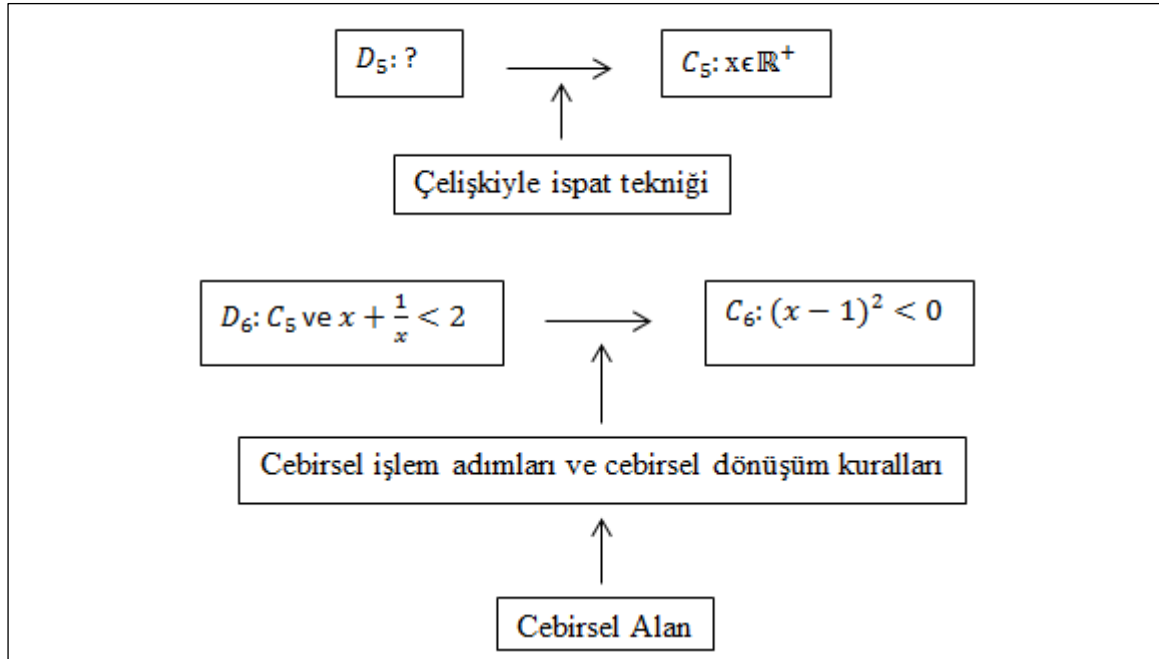
ÖA3'den hipotezini doğrulaması için farklı bir ispat tekniği seçmesi istendiğinde çelişkiyle ispatı seçmiştir. Dolayısıyla ispatın yapısı abdükiftir. Buradan da görülmektedir ki argümantasyon ve ispatın yapısı farklı olduğundan iki süreç arasında yapısal mesafe vardır.

Kabul edelim ki $x \notin \mathbb{R}^-$ olsun. Bu durumda $x \in \mathbb{R}^+$ olur. $x > 0$ olmak üzere

$$x \cdot x + x \cdot \frac{1}{x} < 2 \cdot x \Rightarrow x^2 + 1 < 2x \Rightarrow x^2 - 2x + 1 < 0 \Rightarrow (x - 1)^2 < 0$$

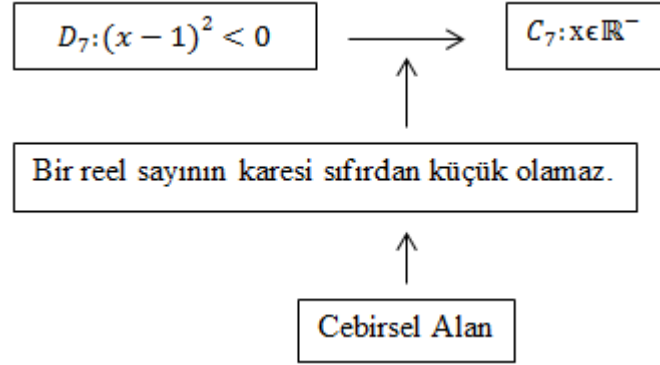
Her reel sayının karesi sıfırdan büyük olacağı için bu durum çelişkidir. Yani $x \in \mathbb{R}^-$ dir.

Şekil 150. ÖA3'ün dördüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat süreci



Şekil 151. ÖA3'ün dördüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (1)

ÖA3'ün burada kullanmış olduğu kurallar; “x pozitif reel sayı ise eşitsizlik işlemlerinde eşitsizlik yön değiştirmez” ve “verilen bir ifadeyi başka bir ifadenin tam karesi biçiminde yazabilme”dir.



Şekil 152. ÖA3'ün dördüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckb modeline göre analizi (2)

ÖA3 ispat sürecinin başlangıcında seçtiği ispat tekniği gereği abdükatif adım atmıştır. Sonrasında ise bu abdükatif adımdaki iddianın yanlışlığını göstermek için dedükatif adımlar atmıştır. ÖA3 bu dedükatif adımlar sonucunda abdükatif adımdaki iddianın yanlış olduğunu göstermiş ve ispatı tamamlamıştır.

ÖA3'ün argümantasyonunun içerik sistemi aritmetik alan üzerine temellendirilmişken ispatın içerik sistemi cebirsel alan üzerine temellendirilmiştir. Bu nedenle iki süreç arasında bilişsel mesafe vardır. ÖA3 iki süreç arasındaki bilişsel ve yapısal mesafeye rağmen ispatı başarıyla tamamlayabilmiştir. Bunun sebebi cebirsel problemlerin çözümünün güçlü dedükatif yapısı ve ispat sürecinin başlangıcında atılan abdükatif adımın dedükatif adıma dönüştürülebilmesi olabilir.

ÖA4'ün Problem 1'e Yönelik Bulgularının Analizi

ÖA4'ün Problem 1 de Tercih Ettiği Birinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi

Problem 1: Tüm negatif olmayan n tamsayıları için $5^n + 6 \cdot 7^n + 1$ ifadesinin 8 ile bölünüp bölünmediği hakkında ne söyleyebilirsiniz? Varsayımınızı ispatlayınız.

Şekil 153. Birinci matematiksel problem

ÖA4 hipotezini oluştururken sayısal hesaplamalar yapmıştır. Bunun üzerine

$$5^n + 6 \cdot 7^n + 1$$

ifadesinin 8 ile bölünebildiği hipotezini oluşturmuştur. ÖA4, hipotezini sayısal örneklerin genellemesi olarak yapılandığından argümantasyonun içerik sistemi aritmetik alan üzerine kuruludur. Cebirde sayısal örnekler üzerine yapılan bir genelleme yapılandırıcı argümantasyon olduğundan ÖA4'ün argümantasyonunun yapısı yapılandırıcı argümantasyondur. ÖA4'ün yapılandırıcı argümantasyonu indüktif yapıdadır.

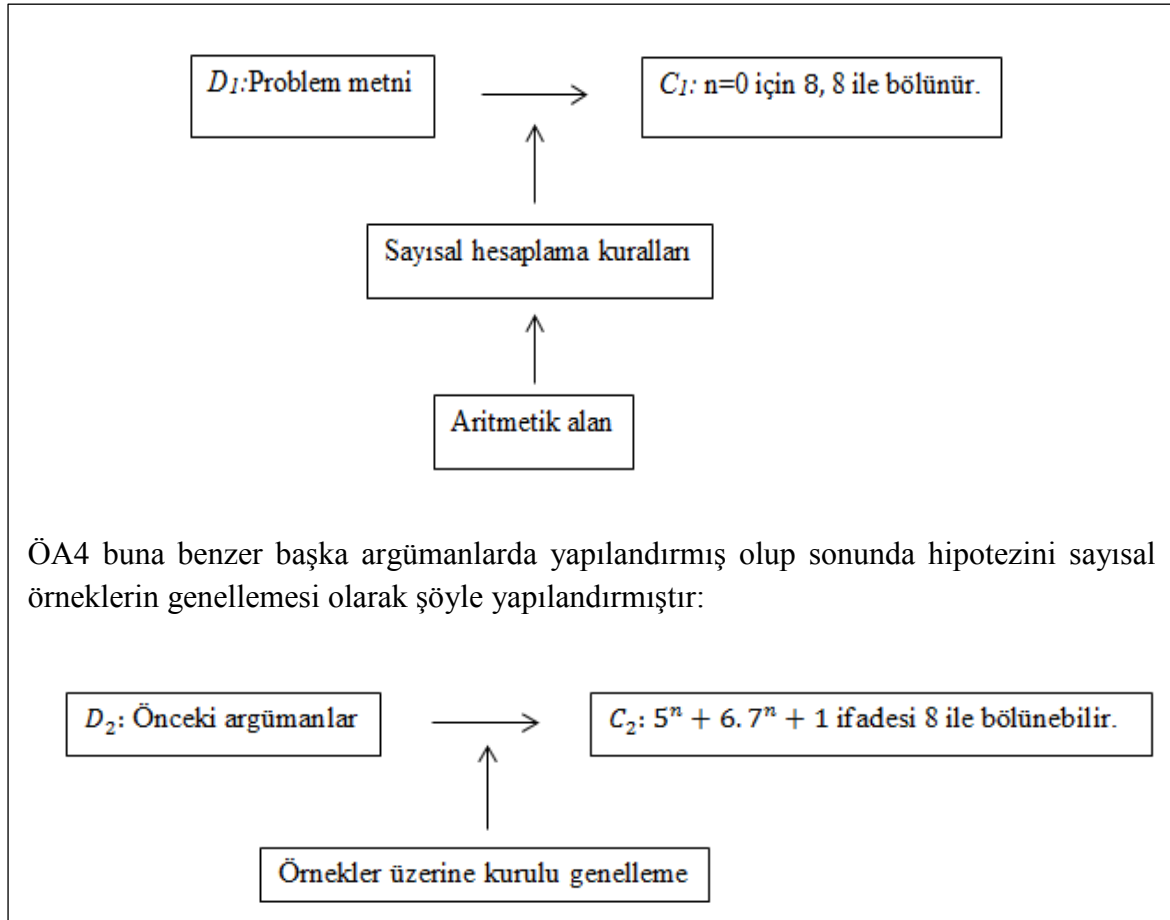
n=0 için $5^0 + 6 \cdot 7^0 + 1 = 8$ sayısı 8 ile bölünür.

n=1 için $5^1 + 6 \cdot 7^1 + 1 = 48$ sayısı 8 ile bölünür.

n=2 için $5^2 + 6 \cdot 7^2 + 1 = 320$ sayısı 8 ile bölünür.

O zaman $5^n + 6 \cdot 7^n + 1$ ifadesi 8 ile bölünebilir.

Şekil 154. ÖA4'ün birinci problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyon



Şekil 155. ÖA4'ün birinci problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyonun Toulmin modeline entegre edilmiş cıkç modeline göre analizi

ÖA4 şimdi hipotezini doğrulamak için ispat yapmak zorundadır ve bunun için ispat yöntemini tümevarımla ispat olarak seçmiştir. Dolayısıyla ispatın yapısı indüktiftir. Buradan anlaşılmaktadır ki hem argümantasyonun hem de ispatın yapısı indüktif olduğundan argümantasyon ve ispat süreci arasında yapısal süreklilik vardır.

ÖA4 yapılandırıcı argümantasyonun ardından ispat sürecine başladığında yapısal argümantasyon yaşamıştır.

$n=0$ için $5^n + 6 \cdot 7^n + 1$ ifadesi 8 ile bölünür. n için doğru olduğunu (8 ile bölünebildiği) kabul edelim. $(n+1)$ için de doğru mudur?

$$5^{n+1} + 6 \cdot 7^{n+1} + 1 = 5 \cdot 5^n + 6 \cdot 7 \cdot 7^n + 1$$

$$= 4 \cdot 5^n + 36 \cdot 7^n + 5^n + 6 \cdot 7^n + 1$$

$$= 3 \cdot 5^n + 30 \cdot 7^n + 5^n + 6 \cdot 7^n + 1 + 5^n + 6 \cdot 7^n + 1 - 1$$

$$= 2 \cdot 5^n + 24 \cdot 7^n + 3(5^n + 6 \cdot 7^n + 1) - 2$$

$$= 5^n + 18 \cdot 7^n + 4(5^n + 6 \cdot 7^n + 1) - 3$$

$$= 12 \cdot 7^n - 4 + 5(5^n + 6 \cdot 7^n + 1)$$

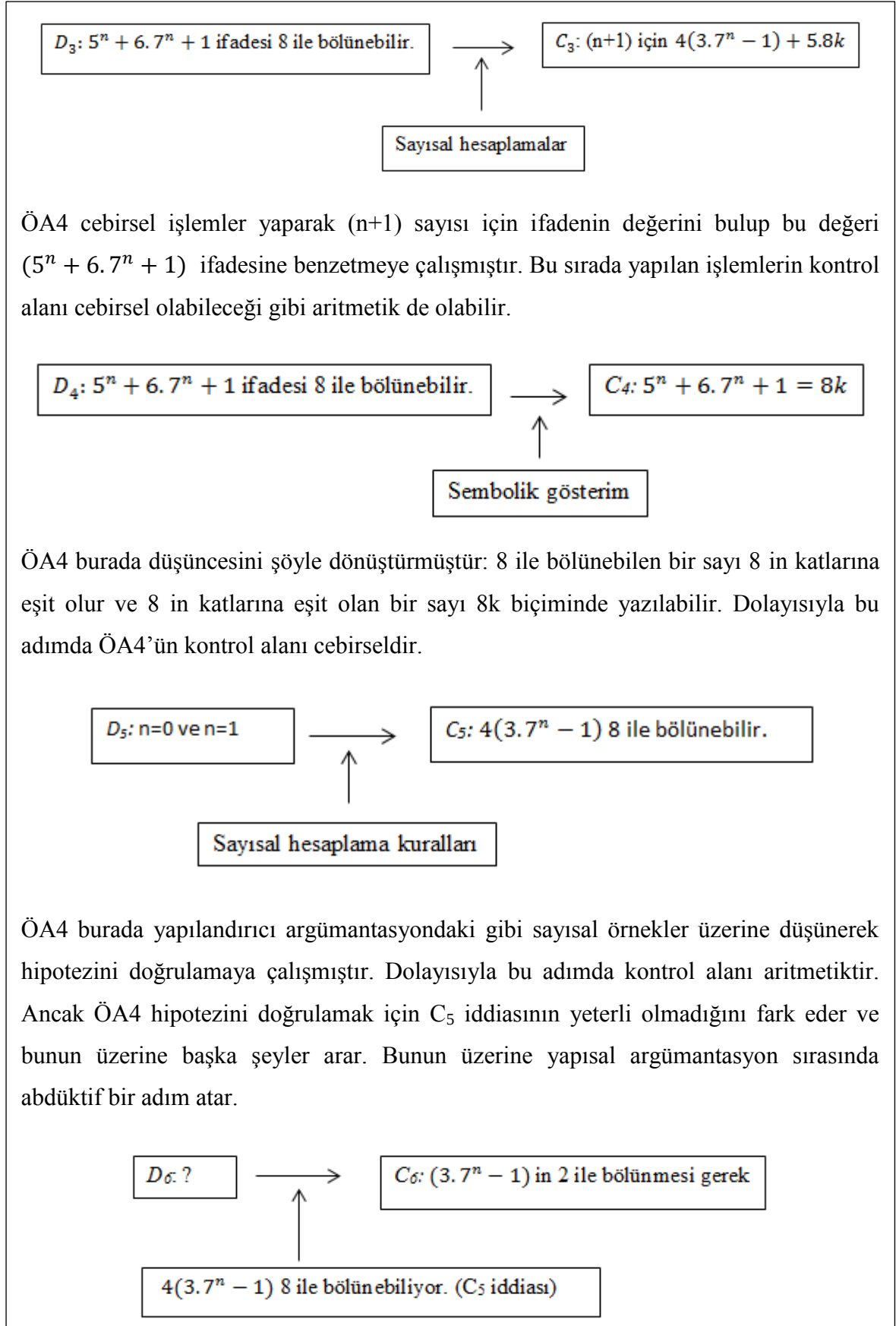
$$= 4(3 \cdot 7^n - 1) + 5(5^n + 6 \cdot 7^n + 1)$$

$5^n + 6 \cdot 7^n + 1 = 8k$ olsun. $4(3 \cdot 7^n - 1)$ $n=0$ için -4 (işlem hatası) ve $n=1$ için 20 oluyor. O zaman bölünüyor.

$$= \frac{4(3 \cdot 7^n - 1) + 40k}{8} = \frac{3 \cdot 7^n - 1}{2} + 5k$$

Burada $(3 \cdot 7^n - 1)$ in 2 ile bölünmesi gerek.

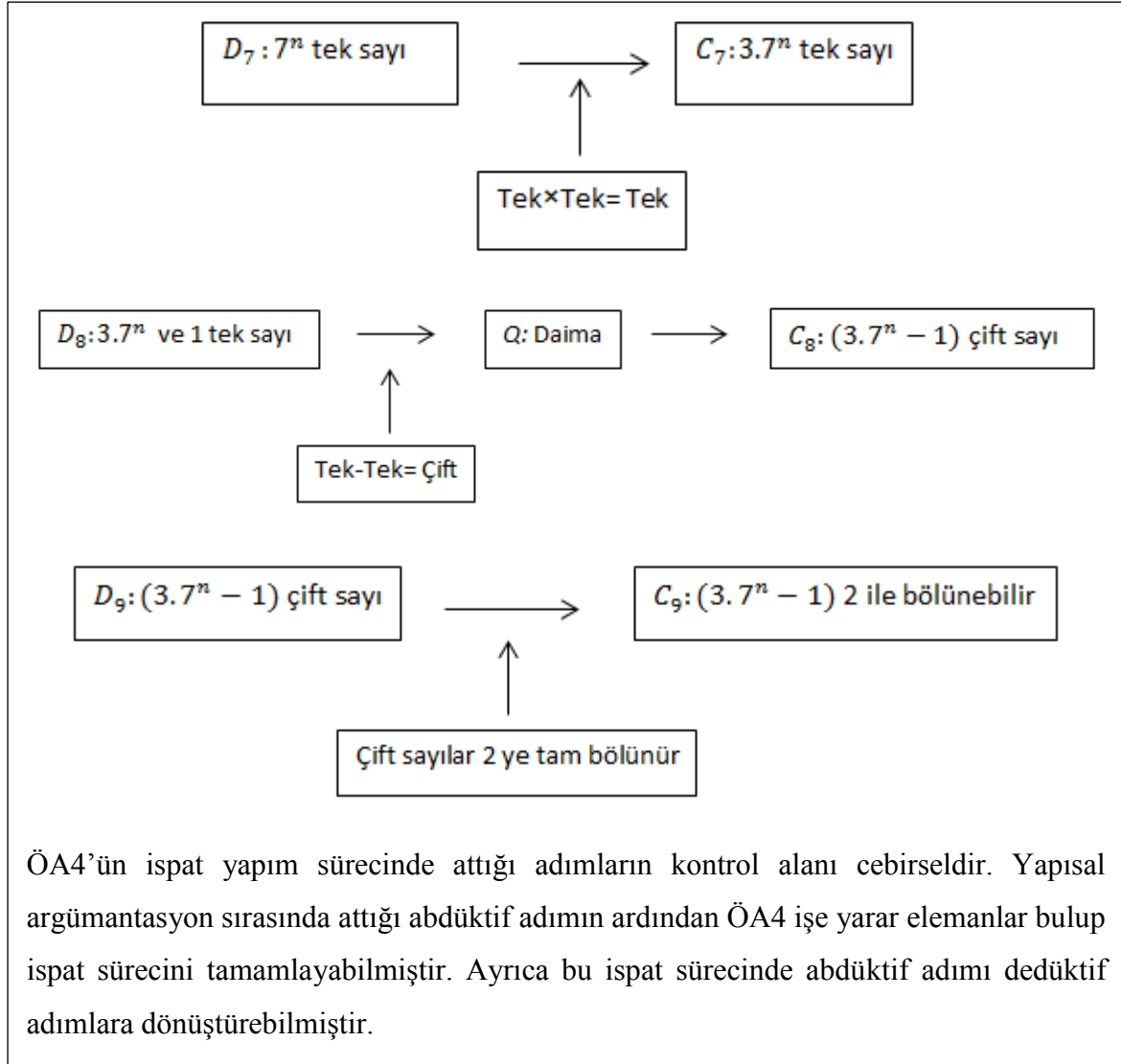
Şekil 156. ÖA4'ün birinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat süreci (1)



Şekil 157. ÖA4'ün birinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin (1) Toulmin modeline entegre edilmiş ekç modeline göre analizi

$(3 \cdot 7^n - 1)$ in 2 ile bölünmesi için sonlu çift sayı olması gerekir. Zaten 3 ile 7 nin kuvvetlerini çarptığımızda tek olur. 1 çıkarınca ifade çift olur. O zaman ifade 2 ye bölünüyor.

Şekil 158. ÖA4'ün birinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat süreci (2)



Şekil 159. ÖA4'ün birinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin (2) Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi

ÖA4'ün argümantasyon ve ispat sürecinin her ikisinin de yapısı indüktif olduğundan iki süreç arasında yapısal süreklilik vardır. Ancak argümantasyonun içerik sistemi aritmetik alan üzerine temellendirilmişken ispatın içerik sistemi cebirsel alan üzerine temellendirildiğinden iki süreç arasında bilişsel mesafe vardır. ÖA4 iki süreç arasındaki bilişsel mesafeye rağmen ispatı başarıyla tamamlayabilmiştir. Çünkü ispat sırasında

gözlemlenen yapısal argümantasyon sürecinde atılan abdüktif adım ve yine yapısal argümantasyon sürecinde atılan adımların kontrol alanının hem aritmetik hem de cebirsel olması iki süreç arasındaki bilişsel mesafeyi azaltmıştır.

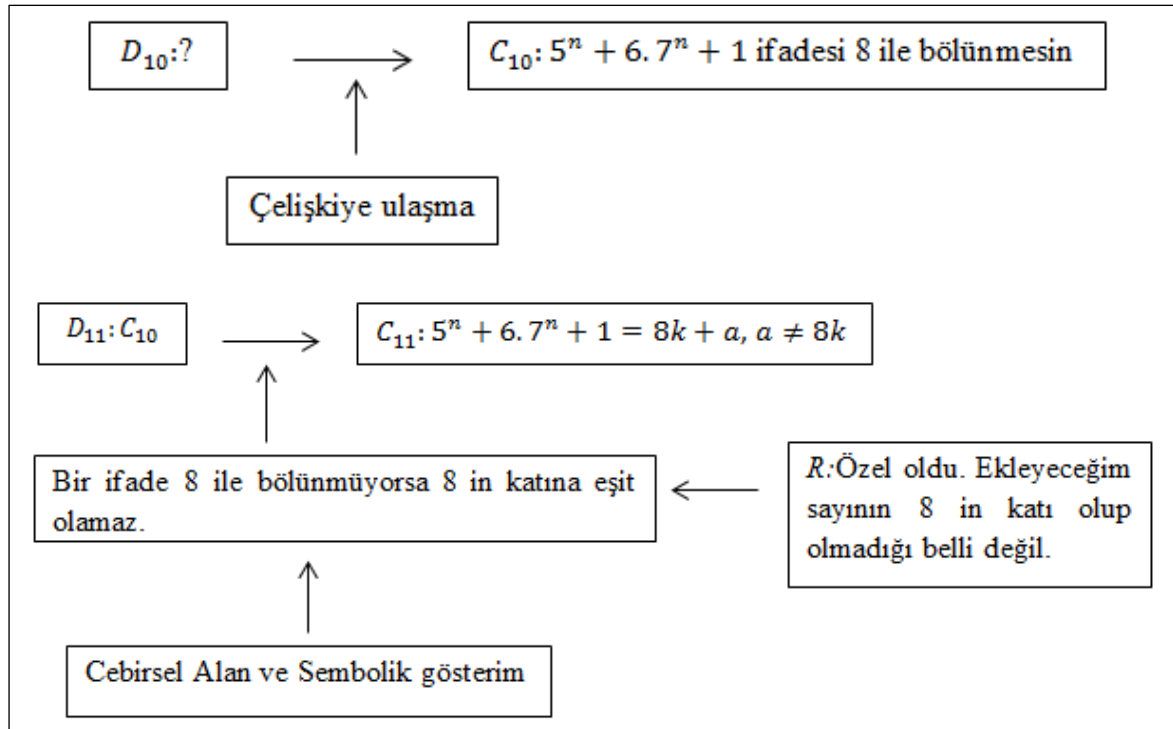
ÖA4'ün Problem 1 de Tercih Ettiği İkinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi

ÖA4'den hipotezini doğrulaması için farklı bir ispat tekniği seçmesi istendiğinde çelişkiyle ispatı seçmiştir. Dolayısıyla ispatın yapısı abdüktiftir. Buradan anlaşılmaktadır ki argümantasyon ve ispatın yapısı farklı olduğundan iki süreç arasında yapısal mesafe vardır.

ÖA4 ispat yapmaya başladığında üç kez yapısal argümantasyon süreci yaşadığı gözlemlenmiştir.

Kabul edelim ki ifade 8 ile bölünmesin. O zaman $5^n + 6 \cdot 7^n + 1 = 8k + a$ gibi bir sayıya eşit olur. $a \neq 8k$ olsun. $5^n + 6 \cdot 7^n + 1 = 8k + 1$ olsun. Ama o zaman özel mi olur? Ama şimdi oraya ekleyeceğim sayının 8 in katı olup olmadığı belli değil.

Şekil 160. ÖA4'ün birinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı birinci yapısal argümantasyon süreci



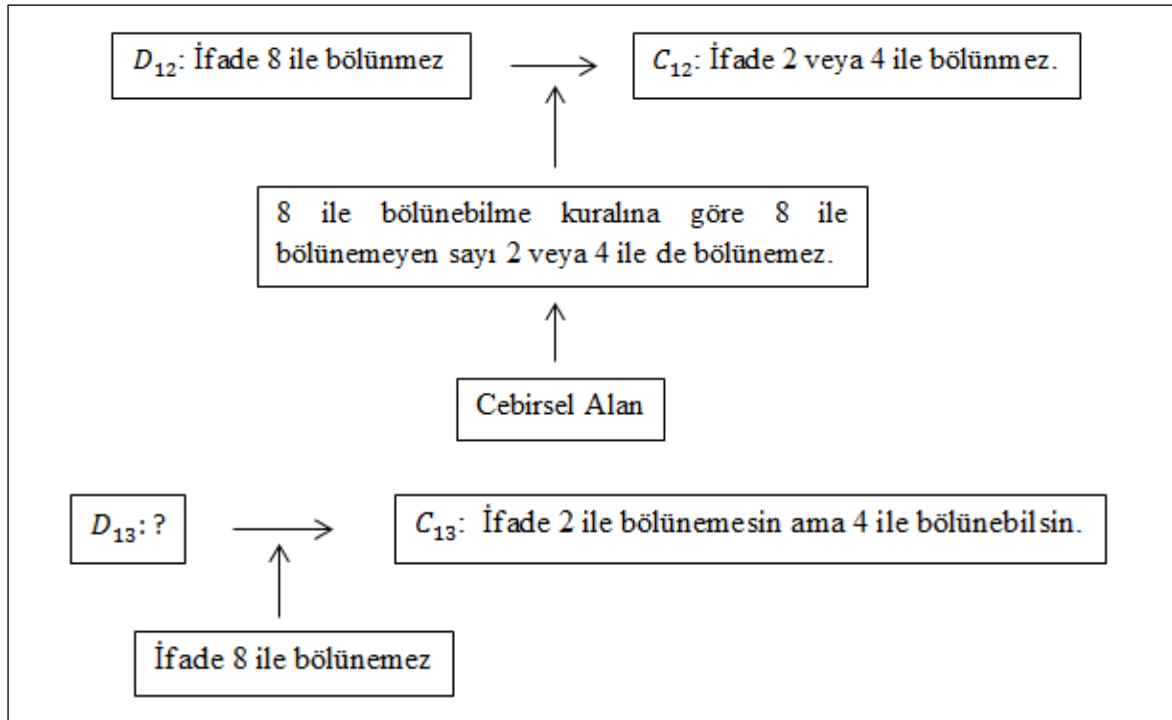
Şekil 161. ÖA4'ün birinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı birinci yapısal argümantasyon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi

ÖA4 buradaki yapısal argümantasyon sürecinde sembolik gösterimler kullanmıştır. Bu gösterimler; 8 e bölünebilen bir sayının 8 in bir katı olacağı, 8 in katı olan bir sayının $8k$ biçiminde yazılabileceği ve 8 in katı olmayan bir sayının da $a \neq 8k$ biçiminde yazılabileceğidir.

ÖA4 bu yapısal argümantasyon sürecinin ardından ispat sürecine geçemeyeceğini anlayıp başka şeyler aramaya karar vermiştir. Bu sırada ikinci yapısal argümantasyon süreci ortaya çıkmaktadır.

8 ile bölünmüyorsa 2 veya 4 ile de bölünmüyordur. Diyelim ki 2 ye bölünmesin ama 4 ile bölünsün.

Şekil 162. ÖA4'ün birinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı ikinci yapısal argümantasyon süreci

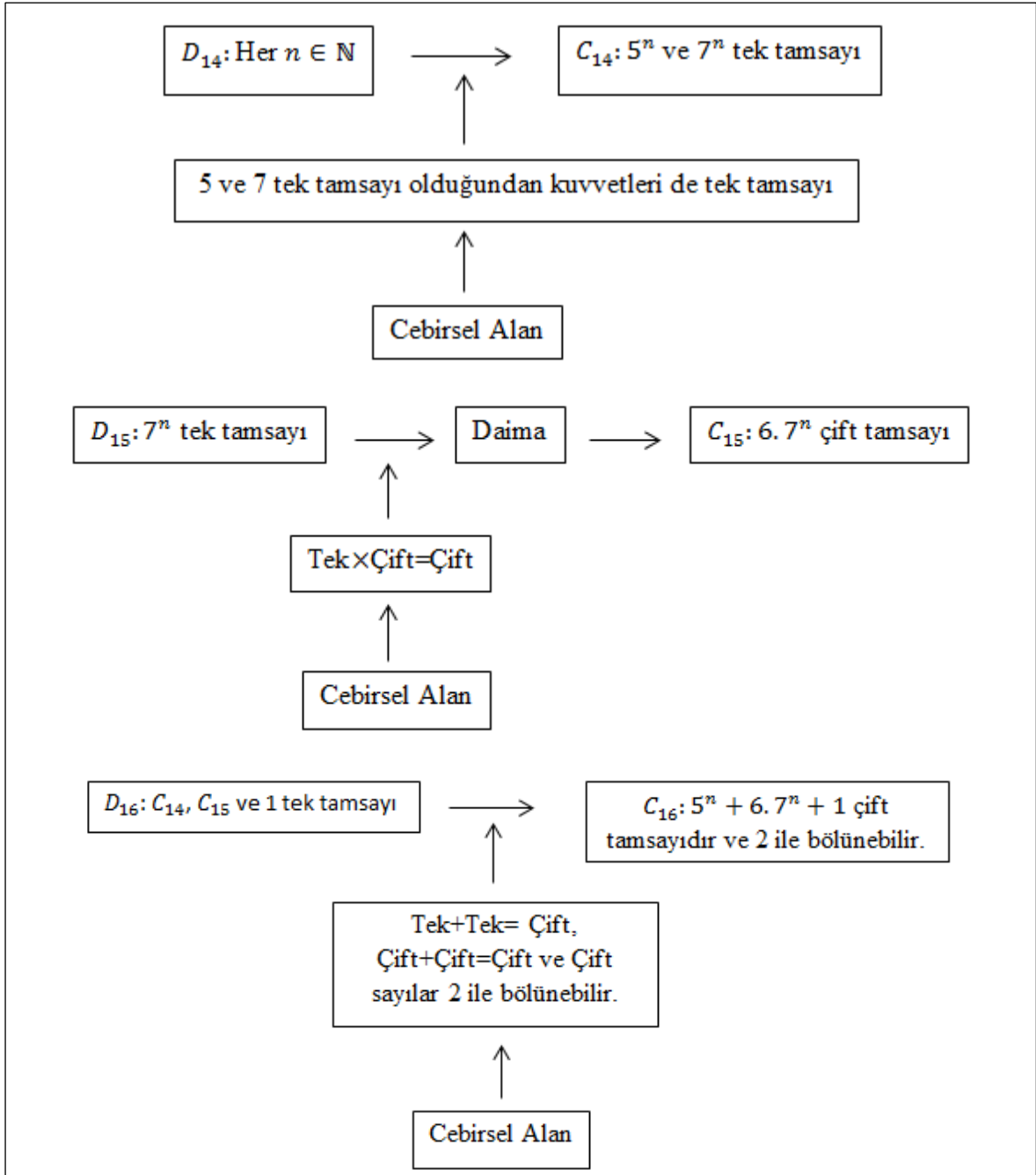


Şekil 163. ÖA4'ün birinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı ikinci yapısal argümantasyon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi

ÖA4 bu yapısal argümantasyon sürecinde abdükatif adım atmıştır. Bu nedenle ÖA4 bu abdükatif adımı dedüktif adıma dönüştürebilecek elemanlar aramakta ve bu sırada ispat sürecinin ilk kısmı ortaya çıkmaktadır.

$5^n + 6 \cdot 7^n + 1$ ifadesinde her $n \in \mathbb{N}$ için 5^n tek tamsayıdır. 7^n de bir tek tamsayıdır. $6 \cdot 7^n$ sayısı daima çift tamsayıdır. Tek ve çift sayının toplamı tektir. İki tek tamsayının toplamı da çifttir. Dolayısıyla bu ifade bir çift tamsayıdır ve 2 ile bölünür. Bu da kabulümüzle çelişir.

Şekil 164. ÖA4'ün birinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat süreci (1)

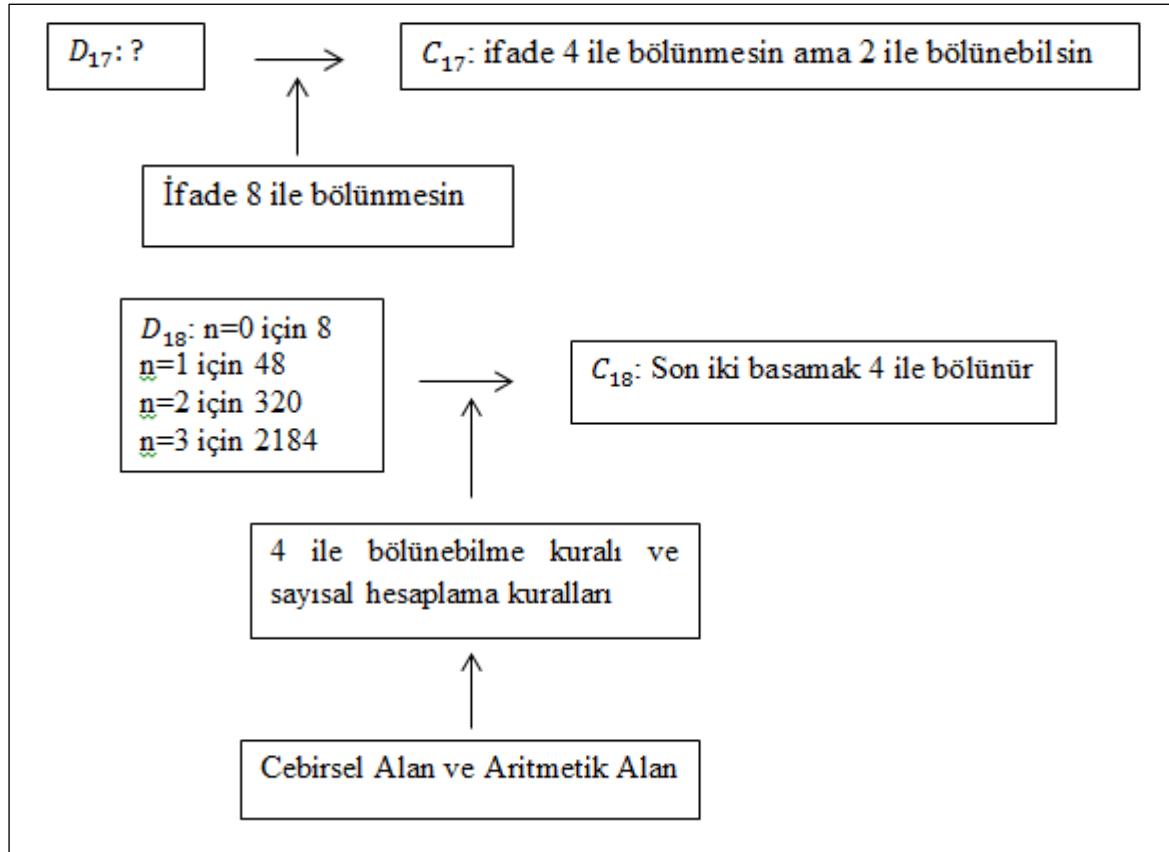


Şekil 165. ÖA4'ün birinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi

ÖA4 attığı ikinci abdükatif adımdaki iddianın yanlışlığını ispat sürecinin ilk kısmında attığı dedükatif adımlar ile gösterebilmiştir. ÖA4 ispatın burada tamamlanmadığını düşündüğünden ispatı tamamlayabilecek başka adımlar atar ve bu sırada üçüncü yapısal argümantasyon süreci gözlemlenir.

Diyelim ki ifade 4 ile bölünmesin ama 2 ile bölünebilsin. 4 ile bölünebilme kuralı son iki basamağın 4 ile bölünmesi şeklindeydi. n ye değerler verirsem son iki basamağın 4 ile bölündüğünü görüyorum.

Şekil 166. ÖA4'ün birinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı üçüncü yapısal argümantasyon süreci



Şekil 167. ÖA4'ün birinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı üçüncü yapısal argümantasyon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi

ÖA4 ispat sürecini tamamlayamamıştır. Çünkü üçüncü yapısal argümantasyon sürecinin başında attığı abdükatif adımı sonrasında dedükatif adıma dönüştürebilecek adımlar atamamıştır. Abdükatif adımdan sonra attığı adım özel örneklerle sınırlı kalmış olup doğal sayılara genelleyecek işe yarar elemanlar bulamamıştır.

ÖA4'ün argümantasyonunun içerik sistemi aritmetik alan üzerine temellendirilmişken ispat sürecinde içerik sistemi cebirsel alan üzerine temellendirilmiştir. Ancak ispat sürecinde gözlemlenen üçüncü yapısal argümantasyon sürecinde attığı son adımın kontrol alanı hem aritmetik hem cebirsel alan üzerine olduğundan bu adımın argümantasyon ve ispat süreci arasındaki bilişsel mesafeyi azaltmıştır. Ancak iki süreç arasındaki hem yapısal mesafeden ve son atılan abdükatif adımın dedüktif adıma dönüştürülememesinden kaynaklı olarak ÖA4 ispatı tamamlayamamıştır.

ÖA4'ün Problem 2'e Yönelik Bulgularının Analizi

ÖA4'ün Problem 2 de Tercih Ettiği Birinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi

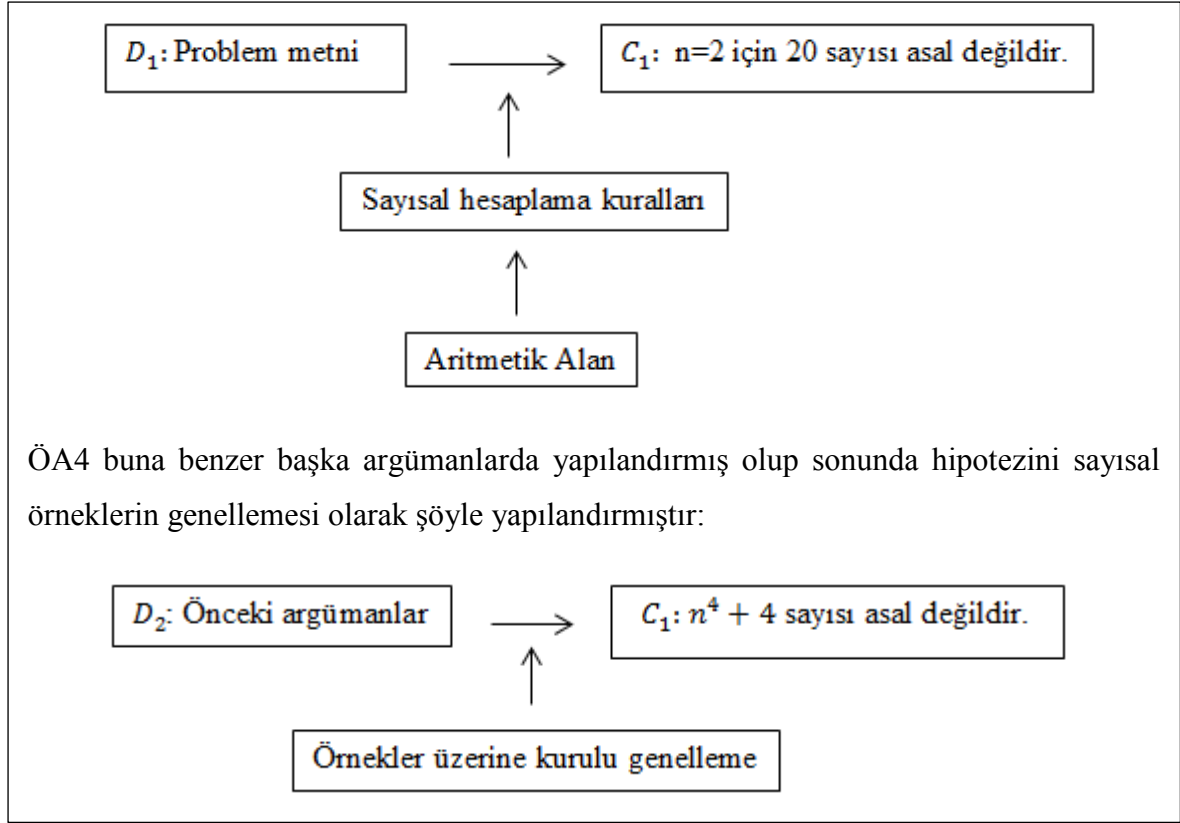
Problem 2: Her $n \geq 2$ tamsayısı için $n^4 + 4$ sayısının asal sayı olup olmadığı hakkında ne söyleyebilirsiniz? Varsayımınızı ispatlayınız.

Şekil 168. İkinci matematiksel problem

ÖA4 hipotezini oluştururken sayısal hesaplamalar yapmıştır. Bunun üzerine $n^4 + 4$ sayısının asal sayı olmadığı hipotezini oluşturmuştur. ÖA4, hipotezini sayısal örneklerin genellemesi olarak yapılandığından argümantasyonun içerik sistemi aritmetik alan üzerine kuruludur. Ayrıca ÖA4'ün argümantasyonunun yapısı yapılandırıcı argümantasyon olup bu süreçte indüktif argümantasyon gözlemlenmiştir.

$n=2$ için $2^4 + 4=20$ sayısı asal değildir.
 $n=3$ için $3^4 + 4=85$ sayısı asal değildir.
 $n=4$ için $4^4 + 4=260$ sayısı asal değildir.
 $n=5$ için $5^4 + 4=629$ sayısı asal değildir.
 $n=6$ için $6^4 + 4=1300$ sayısı asal değildir.
O halde $n^4 + 4$ sayısı asal değildir.

Şekil 169. ÖA4'ün ikinci problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyon



ÖA4 buna benzer başka argümanlarda yapılandırmış olup sonunda hipotezini sayısal örneklerin genellemesi olarak şöyle yapılandırmıştır:

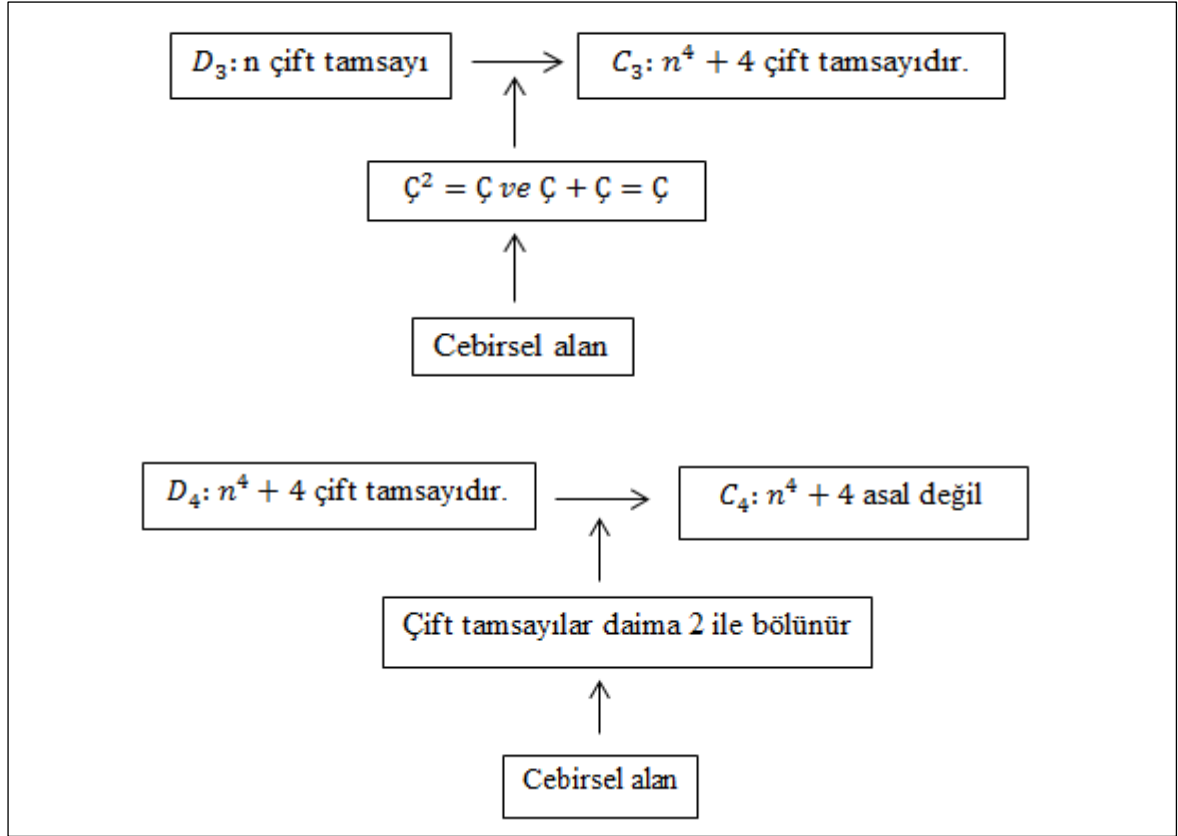
Şekil 170. ÖA4'ün ikinci problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyonun Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi

ÖA4 şimdi hipotezini doğrulamak için ispat yapmak zorundadır ve bunun için ispat tekniğini doğrudan ispat olarak seçmiştir. Dolayısıyla ispatın yapısı dedüktiftir. Buradan anlaşılmaktadır ki argümantasyonun ve ispatın yapısı farklı olduğundan argümantasyon ve ispat süreçleri arasında yapısal mesafe vardır.

ÖA4 argümantasyon sürecinden sonra ispat yapabilmek için n doğal sayılarını tek tam sayılar ve çift tamsayılar şeklinde ikiye ayırarak incelemiştir. Bu nedenle ÖA4'ün ispata teşebbüsünün analizi iki kısımda yapılabilir.

n çift tamsayı ise $n^4 + 4$ sayısı çift tamsayıdır ve daima 2 ile bölünür. Dolayısıyla asal olmaz.

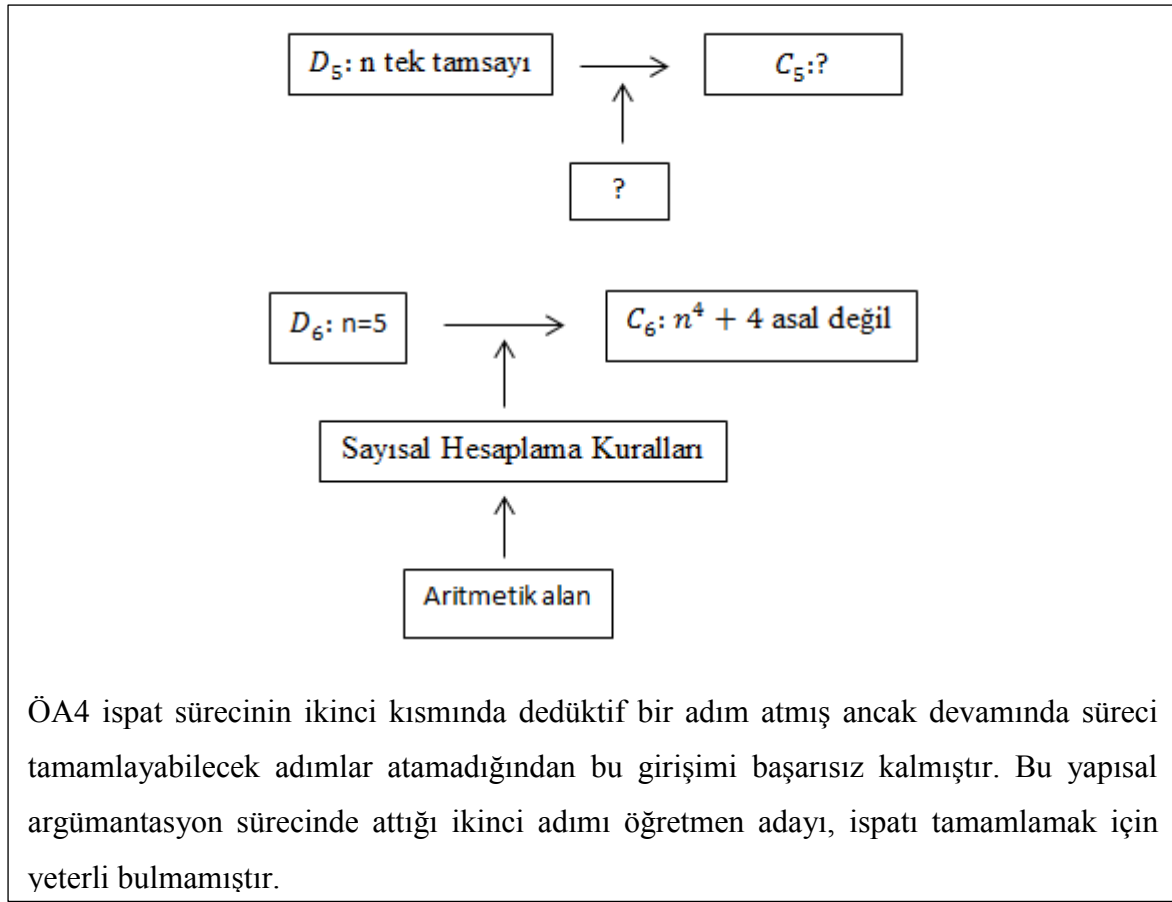
Şekil 171. ÖA4'ün ikinci problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat süreci (1)



Şekil 172. ÖA4'ün ikinci problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin (1) Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi

n tek tamsayı iken $n^4 + 4$ sayısının asal olup olmadığı hakkında bir şey söyleyemedim. n=5 için baksak $n^4 + 4 = 629$ olur. $629 = 17 \cdot 37$ olur. Dolayısıyla asal değil. Ama hala genel olarak tek tamsayılar hakkında bir şey söyleyemedim.

Şekil 173. ÖA4'ün ikinci problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat süreci (2)



Şekil 174. ÖA4'ün ikinci problemin çözümü için tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin (2) Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi

ÖA4 ispatı tamamlayamamıştır. İspat sürecinde atılan dedüktif adımların kontrol alanı hem aritmetik alan hem de cebirsel alan olduğundan iki süreç arasındaki bilişsel mesafe azalmıştır. Ancak ÖA4 cebirsel problemlerin çözümündeki dedüktif adımların oluşturduğu zincirin zorluğunu aşamamıştır. Ayrıca ispatın tamamlanmamasının bir diğer nedeni de ÖA4'ün ispat sürecinde argümantasyondaki düşüncesinden farklı bir düşünce ile devam etmesi olabilir.

ÖA4'ün Problem 2 de Tercih Ettiği İkinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi

ÖA4'den hipotezini doğrulamak için farklı bir ispat yöntemi seçmesi istendiğinde tümevarımla ispat yöntemini seçmiştir. Dolayısıyla ispatın yapısı indüktiftir. Buradan anlaşılmaktadır ki argümantasyon ve ispatın yapısı aynı olduğunda iki süreç arasında yapısal süreklilik vardır.

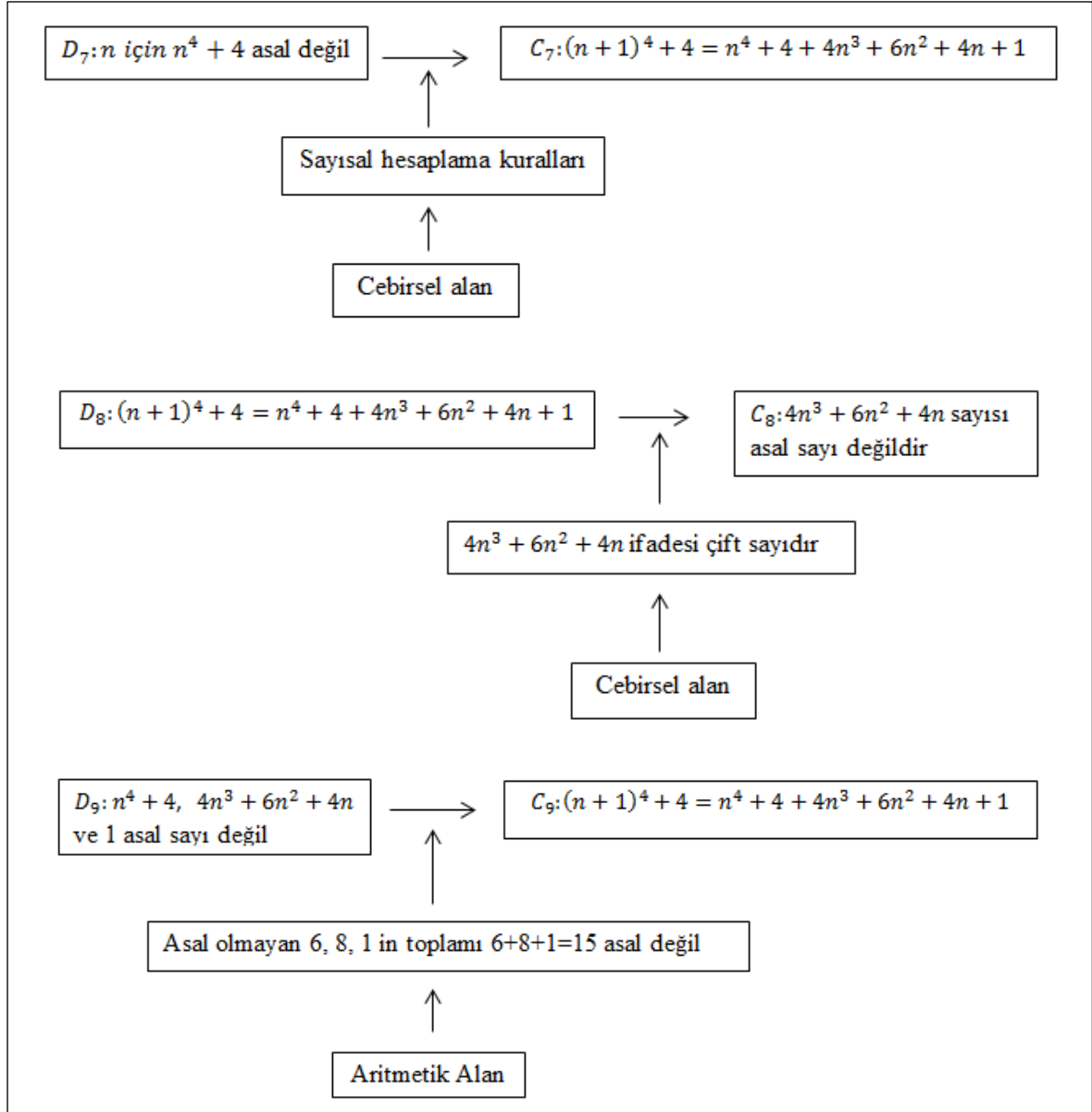
ÖA4 matematiksel indüksiyon yapmaya başladığında yapısal argümantasyon süreci yaşadığı gözlemlenmiştir.

$n=2$ için $n^4 + 4 = 20$ olduğundan asal değil. n için $n^4 + 4$ ifadesinin asal olmadığını kabul edelim ve $(n+1)$ için asal olup olmadığına bakalım.

$$\begin{aligned}(n + 1)^4 + 4 &= n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 + 4 \\ &= n^4 + 4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1\end{aligned}$$

Kabulden dolayı $n^4 + 4$ asal değil. $4n^3 + 6n^2 + 4n$ ifadesi çift sayı olduğundan asal değil. 1 zaten asal sayı değil. Bu asal olmayan sayıları topladığımızda asal olur mu acaba? Asal olmayan sayılar $6+8+1=15$ asal olmadı. Ama bu özel örnek garantilemez.

Şekil 175. ÖA4'ün ikinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat süreci (1)

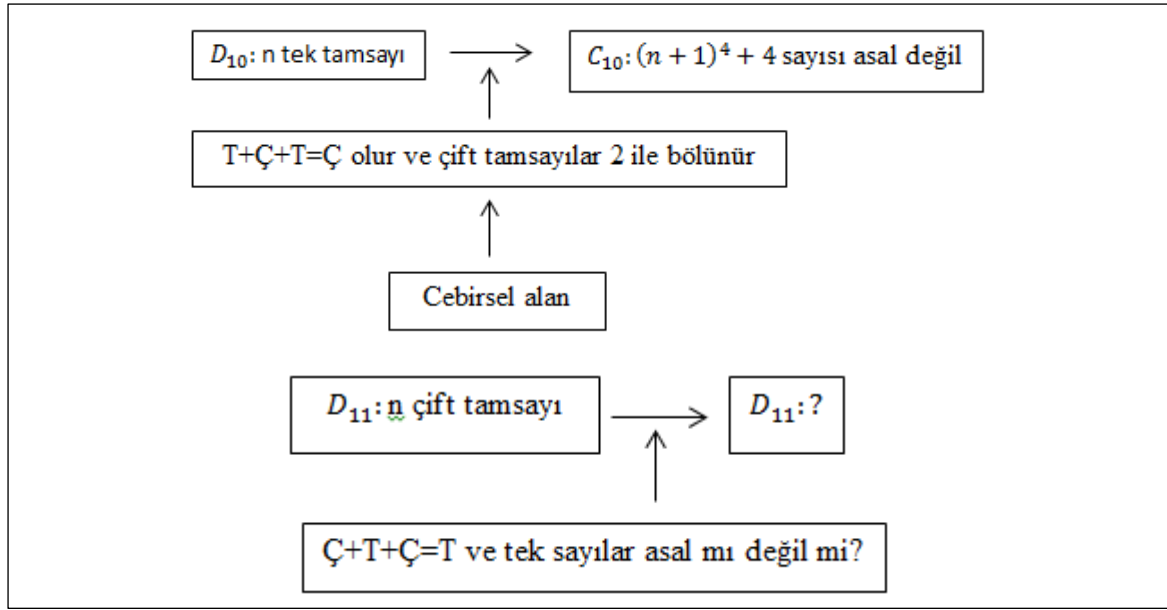


Şekil 176. ÖA4'ün ikinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin (1) Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi

ÖA4 C₉ iddiasının doğruluğundan emin olamaz. Çünkü gerekçesinin özel bir örnek olduğunu ve bunun da iddiayı garantileyemeyeceğini düşünmektedir. Bunun üzerine başka şeyler arar ve yeniden yapısal argümantasyon süreci yaşar.

Acaba tekliğine çiftliğine mi baksak? N çift tamsayı olursa Ç+Ç+T=T ve n tek tamsayı olursa T+Ç+T=Ç olur. n tek ise ifade çift olduğundan asal değildir. Ancak n çift ise ifade tek olur o zaman da asal mı değil mi bilemeyiz.

Şekil 177. ÖA4'ün ikinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat süreci (2)



Şekil 178. ÖA4'ün ikinci problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin (2) Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi

ÖA4 bu yapısal argümantasyon sürecinde iki dedüktif adım atmıştır. İlkinde adımın sonucunda bir iddia ortaya koyabilirken ikincisinde bir iddia ortaya koyamamıştır. Bunun nedeni iddiayı oluşturmak için ihtiyacı olan elemanları bulamaması olabilir. Bu durum ÖA4'ün ispatı tamamlayamamasına neden olmuş olabilir.

ÖA4'ün argümantasyon ve ispat süreci arasında yapısal süreklilik vardır. Yapılandırıcı argümantasyondan sonra ortaya çıkan ilk yapısal argümantasyon sürecinde kontrol alanı hem aritmetik hem de cebirsel olan atılmıştır. Dolayısıyla iki süreç arasında bilişsel süreklilik kurulmuştur. Ancak ÖA4 buna rağmen ispatı başarıyla tamamlayamamıştır. Bu durum cebirsel problemlerin çözümünün güçlü dedüktif yapısından kaynaklı olabilir. İkinci yapısal argümantasyon sürecinde atılan dedüktif adımların kontrol alanı cebirsel olduğundan burada iki süreç arasında bilişsel mesafe gözlemlenmektedir. ÖA4 yapısal sürekliliğe rağmen bu bilişsel mesafeden kaynaklı olarak ispatı tamamlayamamış olabileceği gibi yine cebirsel problemlerin güçlü dedüktif yapısından kaynaklı olarak da ispatı tamamlayamamış olabilir. ÖA4 her iki durumda da çözümdeki dedüktif zincirin zorluğunu aşamamış olabilir.

ÖA4'ün Problem 2 de Tercih Ettiği Üçüncü İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi

ÖA4'den hipotezini doğrulamak için farklı bir ispat tekniği seçmesi istendiğinde çelişkiyle ispatı seçmiştir. Dolayısıyla ispatın yapısı abdükiftir. Buradan anlaşılmaktadır ki argümantasyon ve ispatın yapısı aynı olduğunda iki süreç arasında yapısal mesafe vardır.

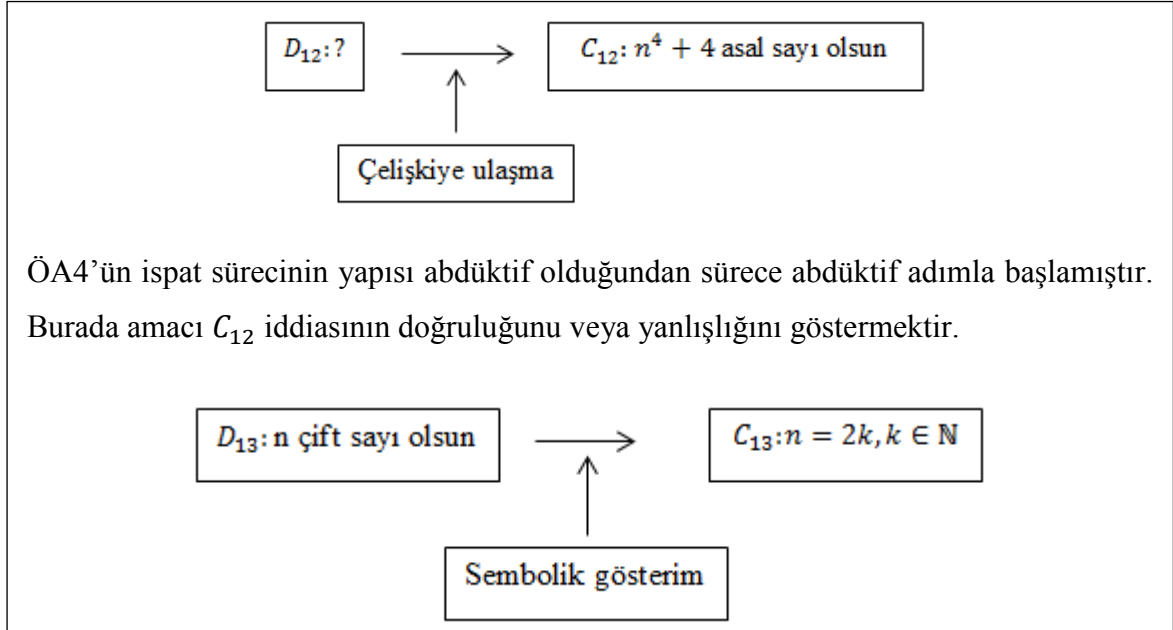
Kabul edelim ki $n^4 + 4$ asal olsun. O zaman bölenleri $+1, -1, n^4 + 4$ ve $-(n^4 + 4)$ olur. Onlardan başka böleni olduğunu bulmam lazım. n çift tamsayı ise $n=2k$ tipindedir. $k \in \mathbb{N}$ dir.

$$n^4 + 4 = (2k)^4 + 4 = 4^2 k^4 + 4$$

olur. Bu sayı da daima 4 ile bölünür. Yani n çift ise 4, $n^4 + 4$ ün bir bölenidir. Fakat $n^4 + 4$ asal sayıydı. Dolayısıyla çelişki olur. n tek tamsayı ise $n=2k+1$ tipindedir. $k \in \mathbb{N}$ dir.

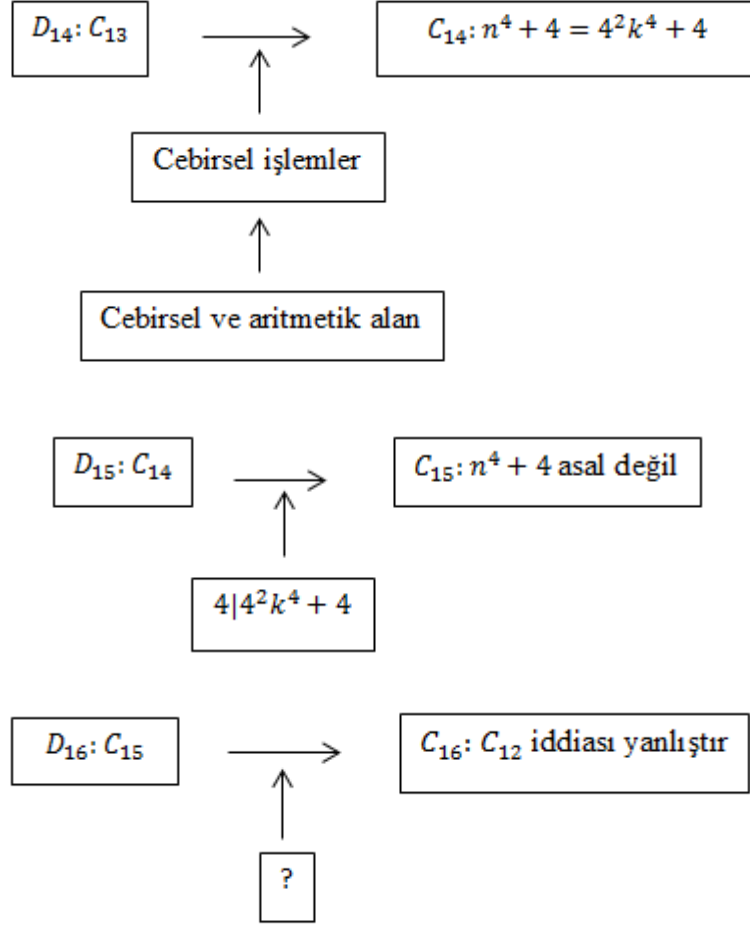
$$(2k + 1)^4 = (2k)^4 + 4(2k)^3 + 6(2k)^2 + 4(2k) + 1 + 4$$

Şekil 179. ÖA4'ün ikinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat süreci

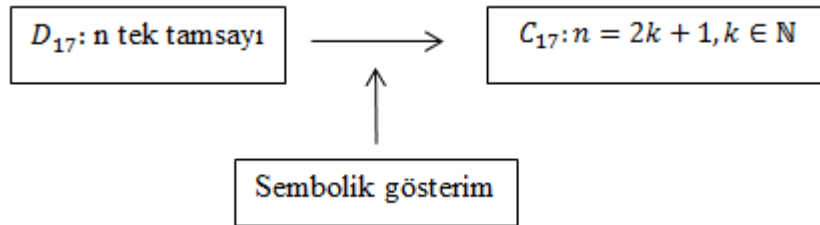


Şekil 180. ÖA4'ün ikinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (1)

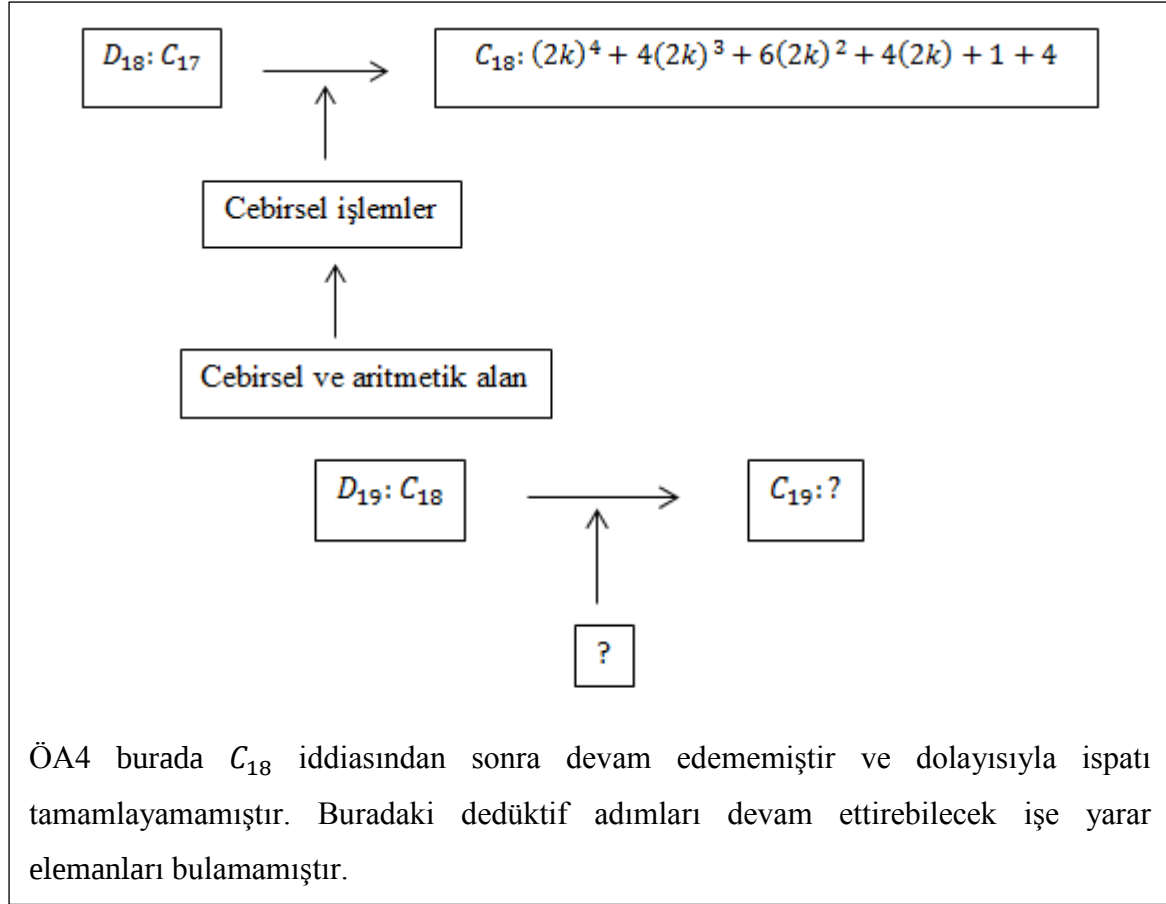
ÖA4'ün bu adımda kullandığı sembolik gösterim çift tamsayıların $2k$ biçiminde yazılabilmesidir.



ÖA4 ilk durum için C_{12} iddiasının yanlışlığını gösterebilmiştir. Şimdi ikinci durumu inceleyerek yanlışlığını göstermeye çalışmaktadır.



Şekil 181. ÖA4'ün ikinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (2)



Şekil 182. ÖA4'ün ikinci problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (3)

ÖA4'ün argümantasyonunun içerik sistemi aritmetik alan üzerine temellendirilmişken ispat sürecinin içerik sisteminin kontrol alanı hem aritmetik hem cebirseldir. Dolayısıyla ispat sürecinde atılan adımlardan bazılarının kontrol alanının hem aritmetik hem de cebirsel olması iki süreç arasında bilişsel süreklilik sağlamıştır. ÖA4 bilişsel süreklilik olmasına rağmen ispatı tamamlayamamıştır. Bu durumun sebebi seçilen ispat tekniğinin bu problemin çözümü için doğru teknik olmaması olabilir. Ayrıca cebirsel problemlerin güçlü dedüktif yapısından kaynaklı ÖA4 dedüktif zincirin zorluğunu aşamamış olabilir.

ÖA4'ün Problem 3'e Yönelik Bulgularının Analizi

ÖA4'ün Problem 3 de Tercih Ettiği Birinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi

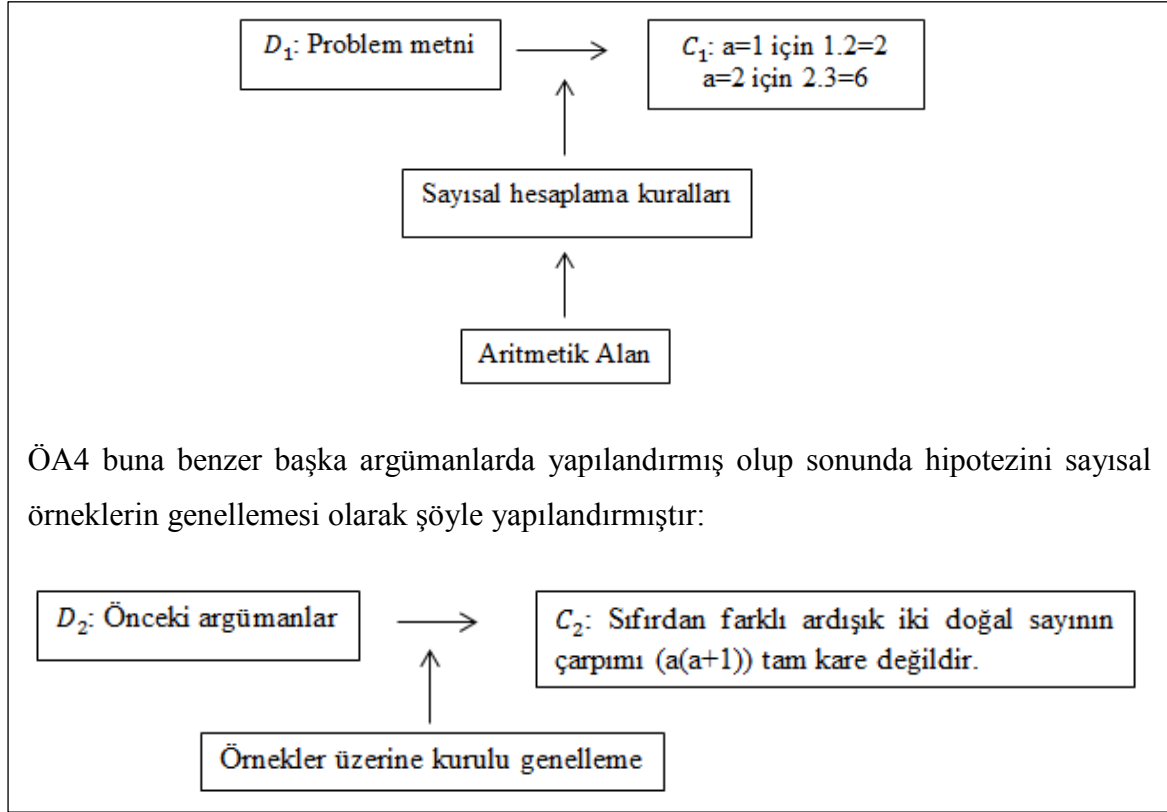
Problem 3: Ardışık ve sıfırdan farklı her iki doğal sayının çarpımının bir tam kare olup olmadığı hakkında ne söyleyebilirsiniz? Varsayımınızı ispatlayınız.

Şekil 183. Üçüncü matematiksel problem

ÖA4 hipotezini oluştururken 1, 2, 3, 4, 5, 6 ardışık sayılarını sırasıyla ikili olarak çarpmıştır ve bunun üzerine ardışık iki tamsayının çarpımının tam kare olmadığı hipotezini oluşturmuştur. Hipotez sayısal hesaplamaların genellemesi olarak yapılandırıldığında argümantasyonun içerik sistemi aritmetik alan üzerine temellendirilmiştir. ÖA4'ün argümantasyonunun yapısı yapılandırıcı argümantasyon olup bu süreçte induktif argümantasyon gözlemlenmiştir.

Tam kare olup olmadığını söylemek için denesem. a sıfırdan farklı bir doğal sayı olsun.
a=1 için $1.2=2$
a=2 için $2.3=6$
a=3 için $3.4=12$
a=4 için $4.5=20$
a=5 için $5.6=30$
O zaman ardışık iki tamsayının çarpımı tam kare değildir.

Şekil 184. ÖA4'ün üçüncü problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyon



Şekil 185. ÖA4'ün üçüncü problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyonun Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi

ÖA4 şimdi hipotezini doğrulamak için ispat yapmak zorundadır ve bunun için ispat tekniğini çelişkiyle ispat olarak seçmiştir. Dolayısıyla ispatın yapısı abdüktiftir. Buradan anlaşılmaktadır ki argümantasyonun ve ispatın yapısı farklı olduğundan argümantasyon ve ispat süreçleri arasında yapısal mesafe vardır.

ÖA4 ispat yapmaya başladığında düşündüğü ilk çözüm yolunda üç farklı yapısal argümantasyon süreci yaşadığı gözlemlenmiştir.

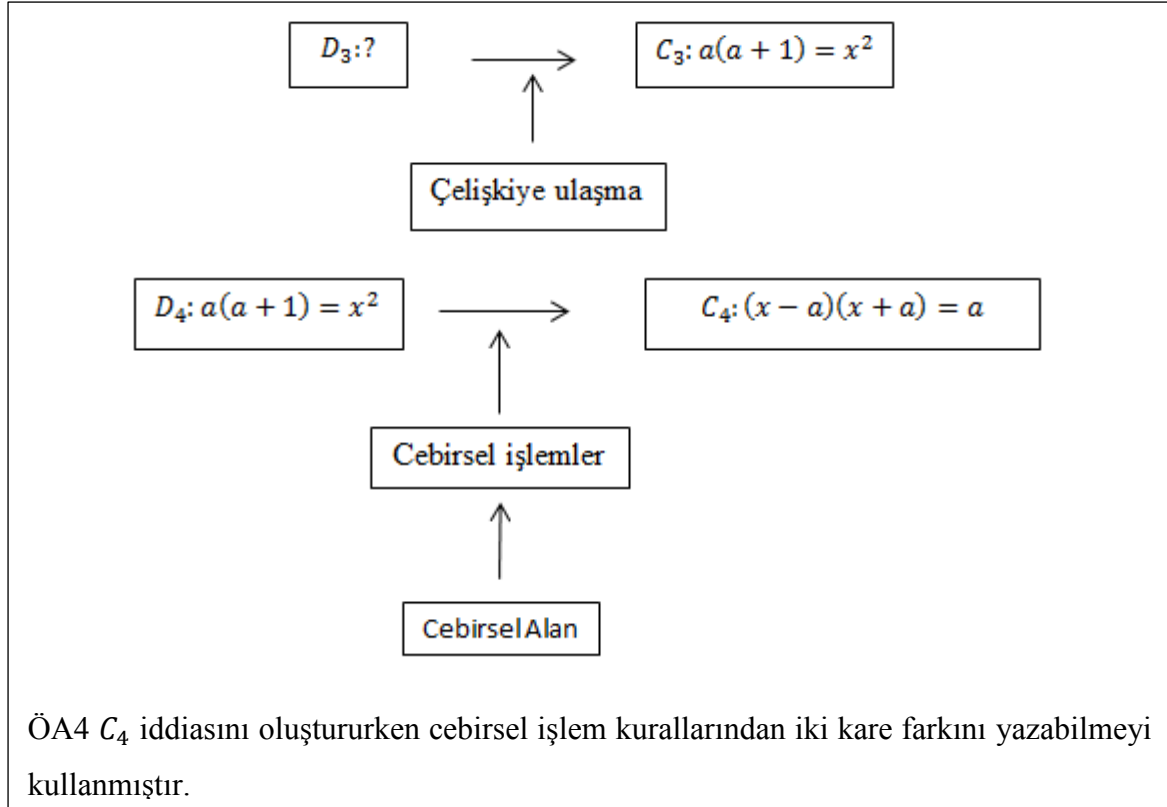
Bir sayı a olsun. Ardışığı yani 1 fazlası $a+1$ olur.

$$a(a+1) = x^2 \Rightarrow a^2 + a = x^2$$

$$\Rightarrow a = x^2 - a^2 \Rightarrow (x-a)(x+a) = a$$

Buradan bir şey gelmeyecek gibi duruyor.

Şekil 186. ÖA4'ün üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı birinci yapısal argümantasyon süreci



Şekil 187. ÖA4'ün üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı birinci yapısal argümantasyon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi

ÖA4 bu süreçte iddiasının doğruluğunu ya da yanlışlığını gösterebilecek başka adımlar atamamıştır. Argümantasyonun içerik sistemi aritmetik üzerine temellendirilmişken bu yapısal argümantasyon sürecinin içerik sistemi cebirsel alan üzerine temellendirildiğinden iki süreç arasında bilişsel mesafe vardır. İki süreç arasındaki bilişsel mesafenin olması durumu ÖA4'ün ispatı tamamlayamamasındaki sebeptir. Ayrıca ÖA4 bu yapısal argümantasyon sürecinde yapısal ve bilişsel mesafeyi azaltabilecek abdüktif adım atamamıştır. Bu nedenle ÖA4 yeniden yapısal argümantasyon süreci üretmiştir.

$a^2 + a$ bir şeyler ekleyip çıkarsam tam kare yapabilir miyim diye düşündüm ama zaten tam kare olmadığını biliyorum.

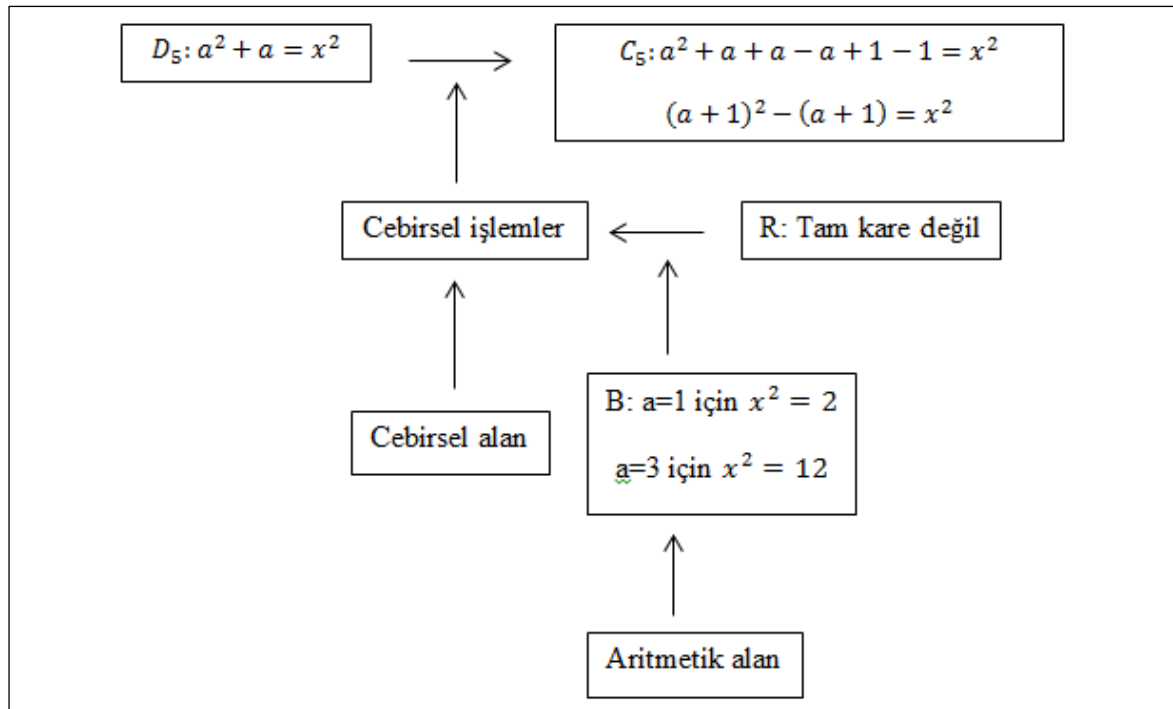
$$a^2 + a + a - a + 1 - 1 = x^2$$

$$a^2 + 2a + 1 - (a + 1) = x^2$$

$$(a + 1)^2 - (a + 1) = x^2$$

Bu benim ne işime yarayacak. Bir sayının karesinden kendisini çıkardığımda tam kare elde edemem ki zaten. $a=1$ desem $4-2=2$, $a=3$ desem $16-4=12$ oluyor. Bunlar da tam kare olmuyor.

Şekil 188. ÖA4'ün üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı ikinci yapısal argümantasyon süreci



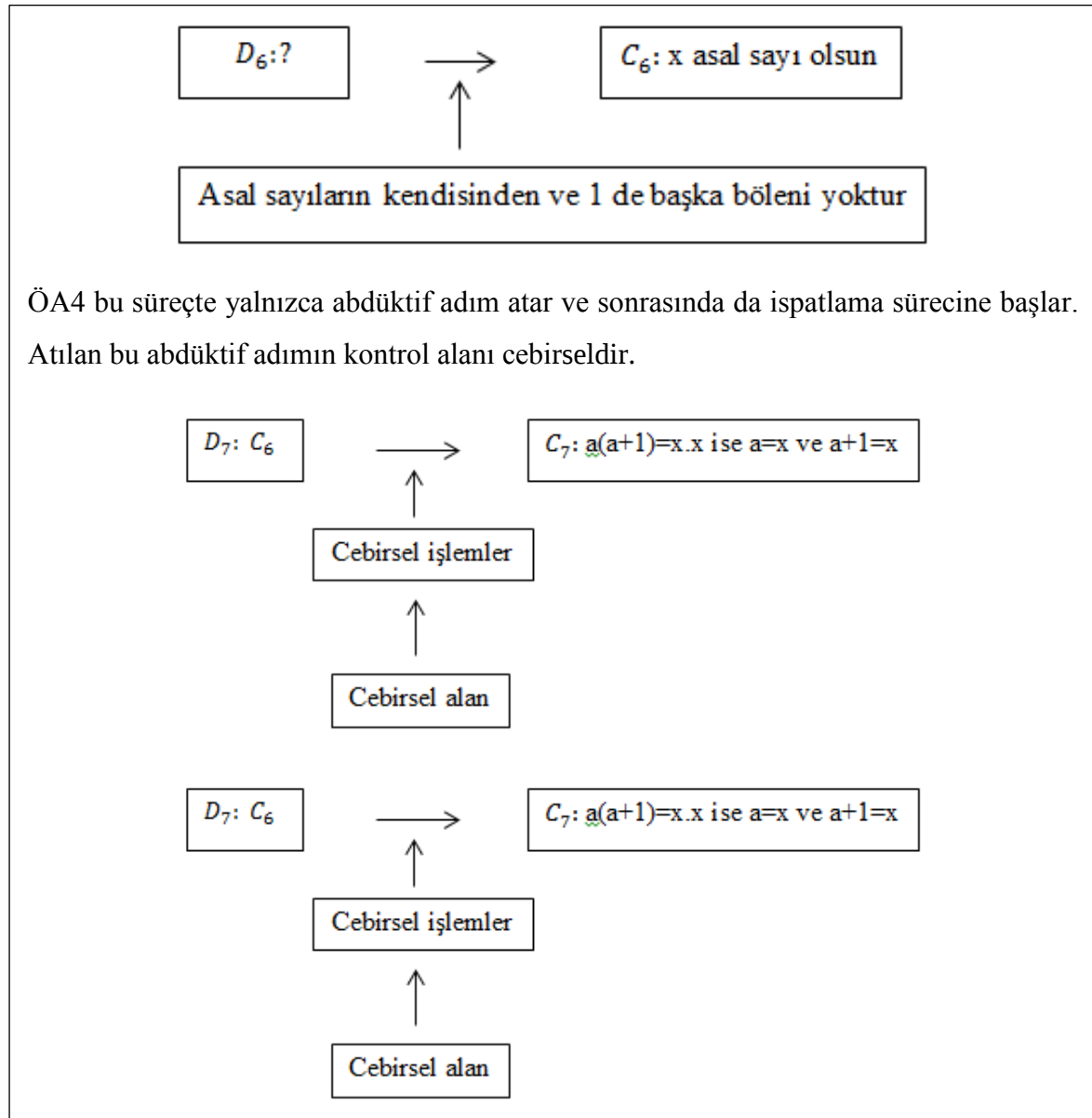
Şekil 189. ÖA4'ün üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı ikinci yapısal argümantasyon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi

ÖA4 yine bu süreçte de iddiasının doğruluğunu ya da yanlışlığını gösterebilecek başka adımlar atamamıştır. Argümantasyonun içerik sistemi aritmetik alan üzerine temellendirilmişken yapısal argümantasyon sürecinin içerik sisteminin hem aritmetik hem de cebirsel alan üzerine temellendirilmiş olması iki süreç arasında bilişsel süreklilik sağlamıştır. Ancak atılan dedüktif adımları devam ettirebilecek işe yarar elemanların

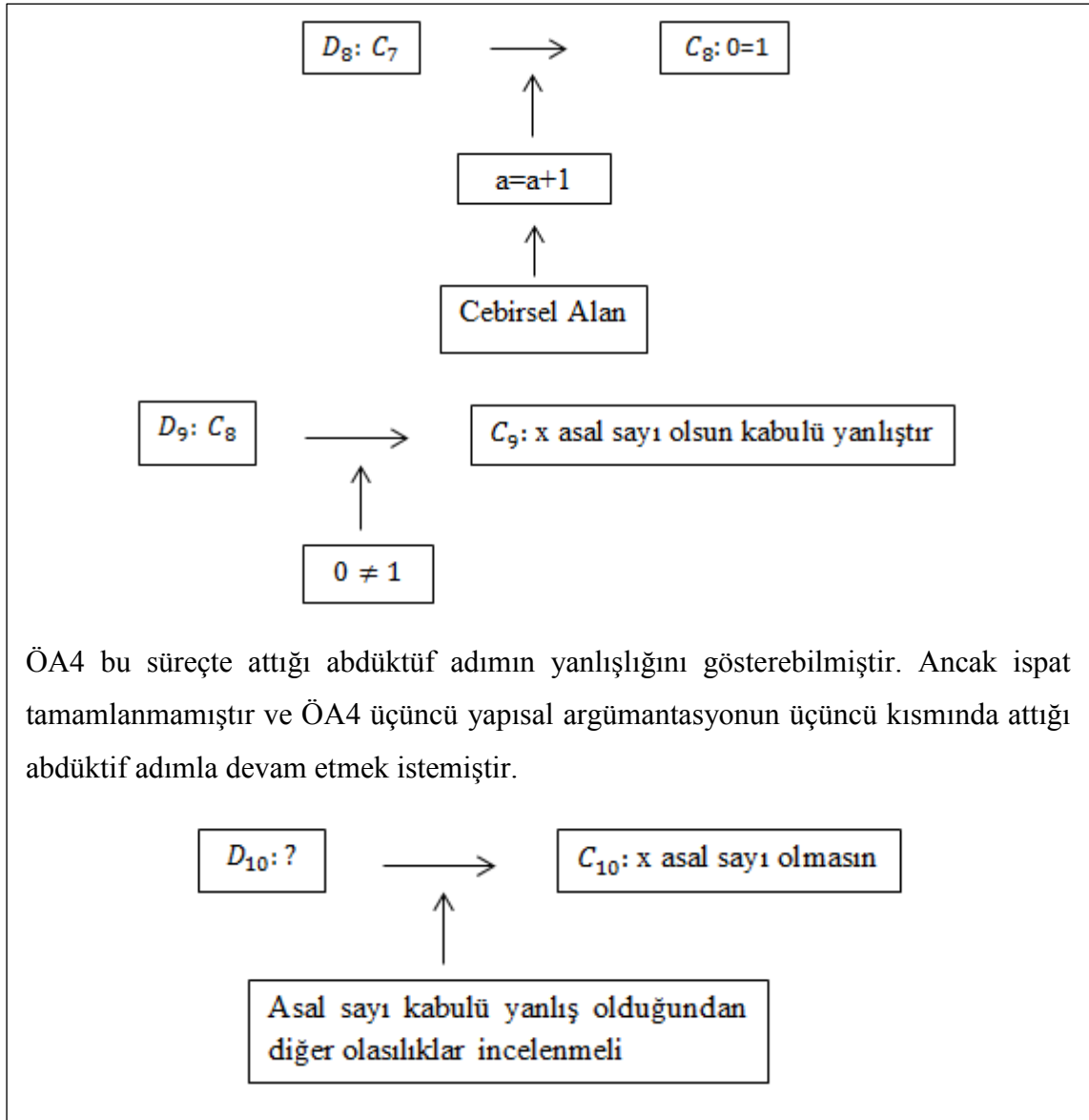
bulunamamış olması nedeniyle ÖA4 ispatı tamamlayamamıştır. Bu nedenle yeniden yapısal argümantasyon süreci üretmiştir.

Peki x e asal sayı desem. Bunun kendisinden ve 1 den başka böleni yok ya.. $a(a+1)=x.x$ yazsam. Buradan $a=x$ veya $a+1=x$ olur. Bu durumda çelişki olur. Peki x ya asal sayı değilse...

Şekil 190. ÖA4'ün üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı üçüncü yapısal argümantasyon süreci



Şekil 191. ÖA4'ün üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı üçüncü yapısal argümantasyon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (1)



Şekil 192. ÖA4'ün üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinde yaşadığı üçüncü yapısal argümantasyon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş cıkç modeline göre analizi (2)

ÖA4'ün üçüncü yapısal argümantasyonunda iki abdükütif adım gözlemlenmiştir. Ancak ikinci abdükütif adımdaki iddiasının doğruluğunu veya yanlışlığını gösterebilecek dedükütif adımlar atamamıştır. Argümantasyonun içerik sistemi aritmetik üzerine temellendirilmişken ispat sürecinin içerik sistemi cebirsel alan üzerine temellendirildiğinden iki süreç arasında bilişsel mesafe vardır. ÖA4'ün bu süreçte attığı abdükütif adımlar iki süreç arasındaki yapısal ve bilişsel mesafeyi azaltamadığından ve öğretmen adayı son abdükütif adımdaki iddiasının doğruluğunu ya da yanlışlığını gösterebilecek dedükütif adımı atamadığından ispatı tamamlayamamıştır.

ÖA4 ispat yöntemini değiştirmeyip çözüm yolunu değiştirerek sürece devam etmiştir. Bu sırada ÖA4 direkt olarak ispata teşebbüs etmiştir.

Kabul edelim ki $x^2 = a^2 + a$ olsun.

$$x^2 - a^2 = a \Rightarrow (x - a)(x + a) = a$$

olur. a nın çarpanları a ve 1 olsun. O zaman

$$(x - a)(x + a) = a \cdot 1$$

olur. Buradan $(x - a) = 1$ ve $(x + a) = a$ olsun. O zaman $x = a + 1$ ve $x = 0$ olur ki bu yanlıştır. Çünkü $x = 0$ olması için a ve $a + 1$ den birinin 0 olması gerek ancak sıfırdan farklı ardışık sayılarla ilgileniyorduk. Diğer bir duruma bakarsak $(x - a) = a$ ve $(x + a) = 1$ buradan da $x = 1 - a$ ve $x = 2a$ olur ki bu da yanlıştır. Çünkü $a \geq 1$ dir. Yani $a = 1$ olursa yine $x = 0$ olur ki bu durumun yanlışıllığı önceki durumda görülmüştü. $a > 1$ olursa $(x + a)$ nın a ve 1 çarpanlarında büyük olan a ya eşit olması gerekir ki $(x + a) = 1$ dir.

a nın çarpanları p ve q olsun. Yani

$$(x - a)(x + a) = p \cdot q$$

Buradan $x - a = p$ ve $x + a = q$ olur ki $x = a + p$ ve $x = q - a$ dır. ($q > p$) Ama buradan ne gelir. $x = a + p$ ya da $x = q - a$ ya eşit.

$$\begin{aligned} x^2 &= (a + p)^2 \Rightarrow a^2 + a = a^2 + 2ap + p^2 \\ &\Rightarrow a(1 - 2p) = p^2 \dots (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 &= (q - a)^2 \Rightarrow a^2 + a = q^2 - 2qa + a^2 \\ &\Rightarrow a(1 + 2q) = q^2 \dots (2) \end{aligned}$$

(ÖA4 (1) ve (2) denklemlerini oranlayarak işleme devam etmiştir.)

Şekil 193. ÖA4'ün üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat süreci (2)

$$\frac{1-2p}{1+2q} = \left(\frac{p}{q}\right)^2$$

$$q^2 - 2pq^2 = p^2 + 2qp^2 \Rightarrow q^2 - p^2 = 2pq^2 + 2qp^2$$

$$q^2 - p^2 = 2pq(q + p)$$

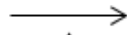
$$(q - p)(q + p) = 2pq(q + p)$$

$$(q - p) = 2pq \Rightarrow pq = \frac{q - p}{2} = a$$

Dönüp dolaşıp aynı şeyleri yazıyorum sanki.

Şekil 194. ÖA4'ün üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat süreci (2)

$D_{11}: ?$



$$C_{11}: x^2 = a^2 + a$$



Çelişkiye ulaşma

ÖA4 ispata abdüktif adımla başlayıp bu adımdaki iddiasının doğruluğunu ve ya yanlışlığını göstermek için devam etmektedir.

$D_{12}: C_{11}$



$$C_{12}: (x - a)(x + a) = a \cdot 1$$



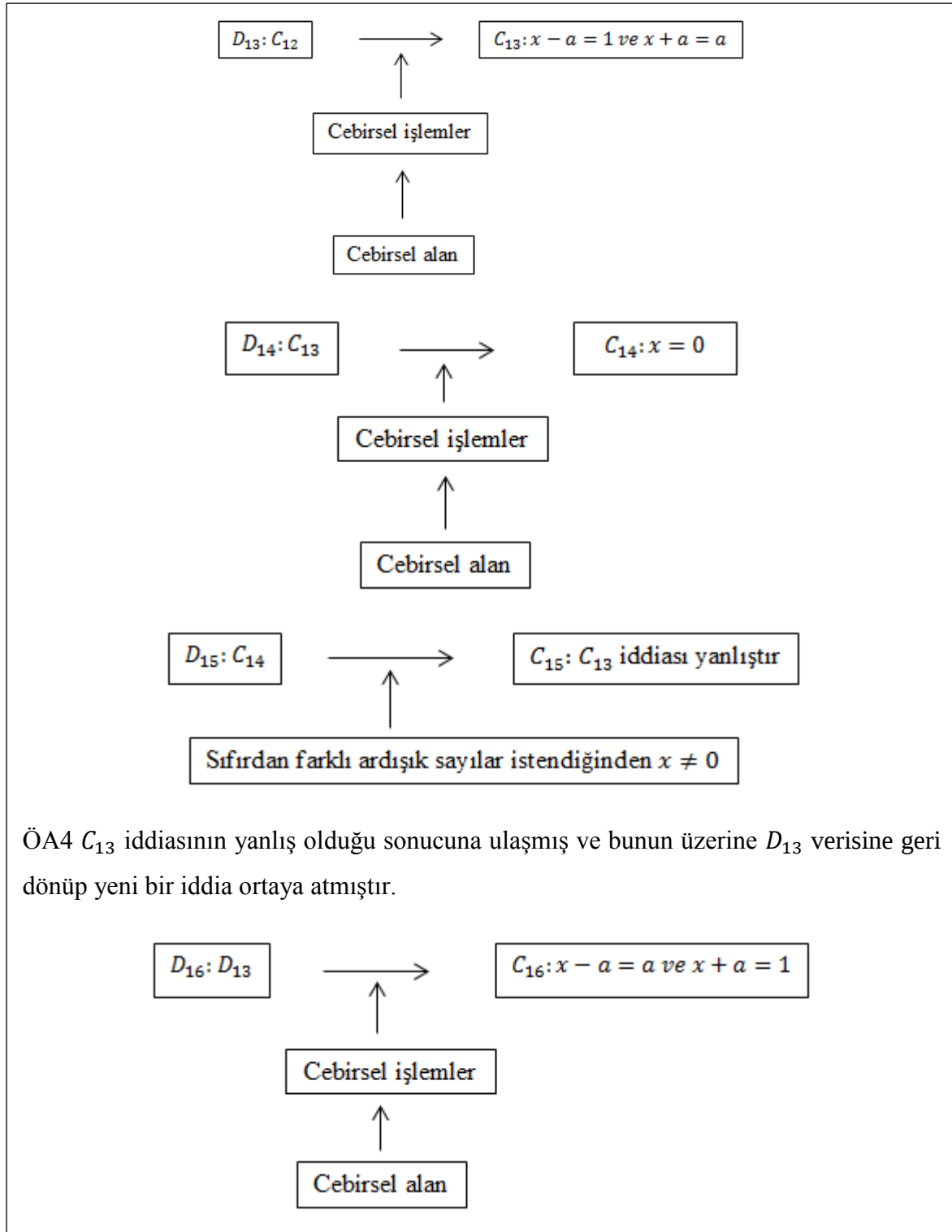
Cebirsel hesaplama kuralları



Cebirsel alan

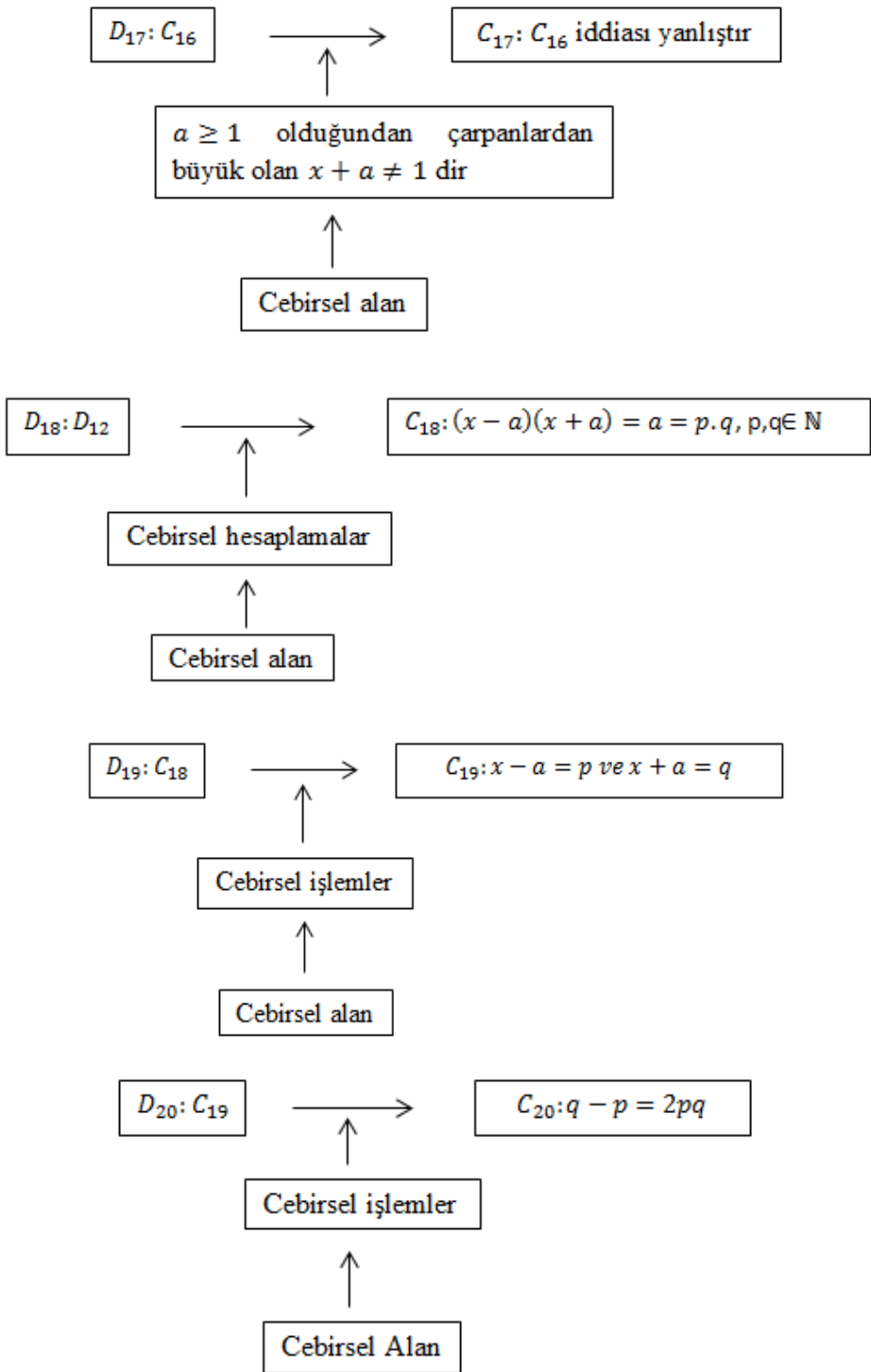
ÖA4 bu adımda cebirsel hesaplama kurallarından iki kare farkını bulma ve çarpanlara ayırma kurallarını kullanmıştır.

Şekil 195. ÖA4'ün üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinin (2) Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (1)

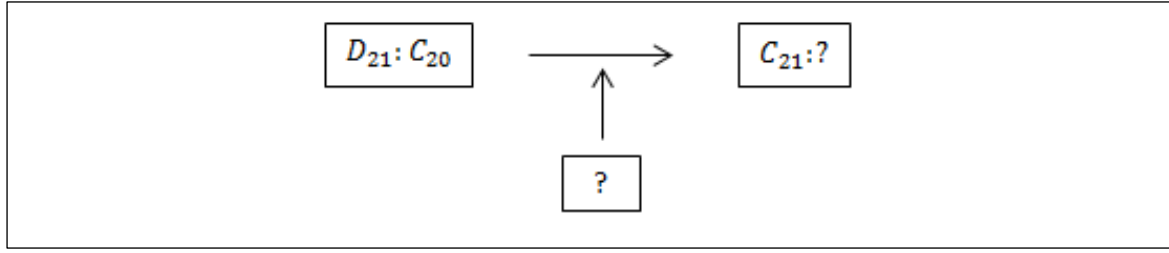


Şekil 196. ÖA4'ün üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinin (2) Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (2)

ÖA4 C_{16} iddiasının yanlış olduğu sonucuna ulaşmış ve bunun üzerine C_{12} iddiasının da yanlış olduğu sonucuna ulaşmıştır. Buradan D_{12} verisine dönerek ispat sürecine devam etmeye çalışmıştır.



Şekil 197. ÖA4'ün üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinin (2) Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (3)



Şekil 198. ÖA4'ün üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinin (2) Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (4)

ÖA4'ün argümantasyonunun içerik sistemi aritmetik alan üzerine temellendirilmişken ispat sürecinin içerik sistemi cebirsel alan üzerine temellendirildiğinden iki süreç arasında bilişsel mesafe vardır. Katılımcı iki süreç arasındaki yapısal ve bilişsel mesafeden kaynaklı ispatı tamamlayamamıştır. Eğer ÖA4 ispat sırasında yaşadığı yapısal argümantasyon sürecinde attığı abdükatif adımları dedüktif adıma dönüştürebilseydi ve bu yapısal argümantasyon sürecinde attığı bazı adımların kontrolünü aritmetik alan ile yapsaydı bilişsel mesafeyi azaltarak ispatı tamamlayabilirdi. Ancak bu olasılıklar süreçte gözlemlenememiştir.

ÖA4'ün Problem 3 de Tercih Ettiği İkinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi

ÖA4'den hipotezini doğrulamak için farklı bir ispat yöntemi seçmesi istendiğinde tümevarımla ispat tekniğini seçmiştir. Dolayısıyla ÖA4 burada matematiksel induksiyon gerçekleştirdiğinden ispatın yapısı indüktiftir. Buradan anlaşılmaktadır ki argümantasyon ve ispat sürecinin yapısı aynı olduğundan iki süreç arasında yapısal süreklilik vardır.

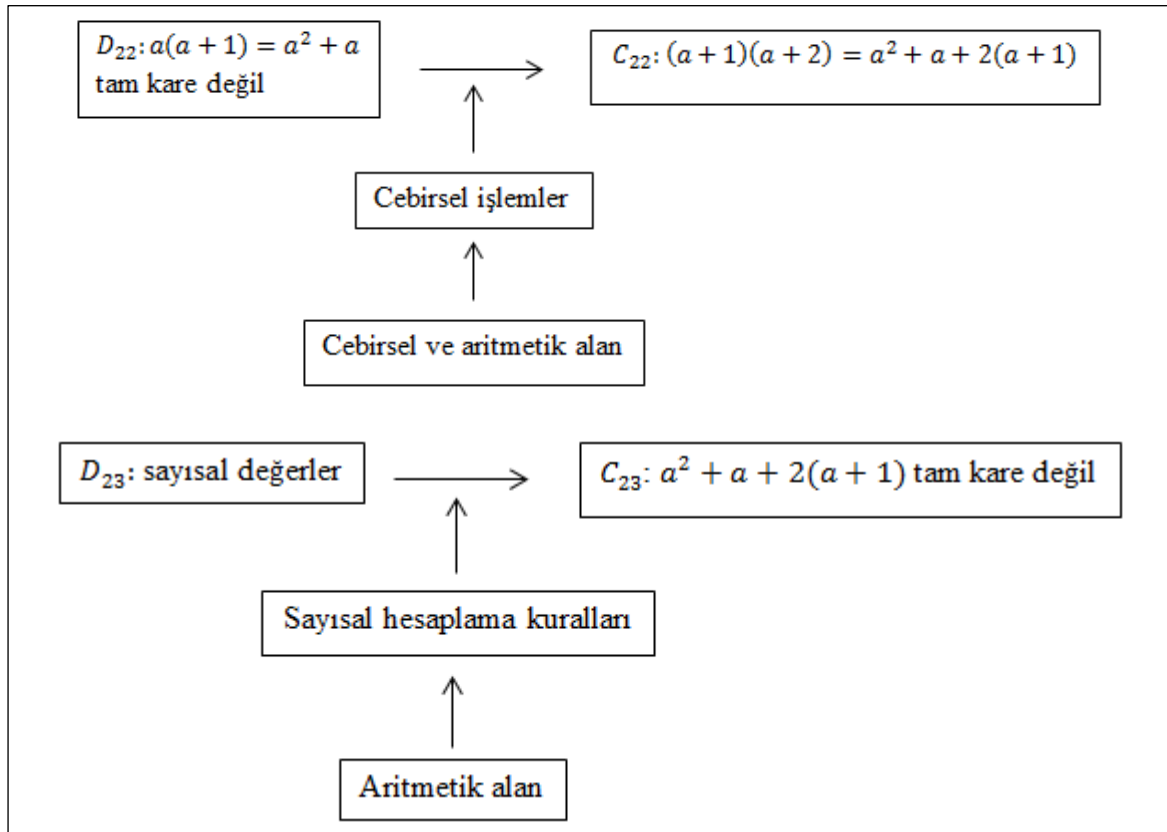
$a=1$ için $1.2=2$ tam kare değildir.

a için hipotez doğru olsun. Yani $a(a+1) = a^2 + a$ tam kare değildir. $a+1$ için doğru mudur?

$$(a+1)(a+2) = a^2 + 2a + a + 2 = a^2 + a + 2(a+1)$$

$a^2 + a$ tam kare değil tamam ama $2(a+1)$ ekleyince ne olur? Onu bilemedim. Aslında tam kare değil. Çünkü değer verdiğimde tam kare olmuyor. Ne söyleyebiliriz acaba?

Şekil 199. ÖA4'ün üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat süreci



Şekil 200. ÖA4'ün üçüncü problemin çözümü için tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş cıkç modeline göre analizi

ÖA4'ün argümantasyonunun içerik sistemi aritmetik alan üzerine temellendirilmişken yapısal argümantasyonunun içerik sistemi hem aritmetik hem de cebirsel alan üzerine temellendirilmiştir. Dolayısıyla yapılandırıcı argümantasyon ile yapısal argümantasyon arasında bilişsel süreklilik vardır. İki süreç arasında yapısal ve bilişsel sürekliliğe rağmen ÖA4 ispatı tamamlayamamıştır. Bunun sebebi ÖA4'ün yapısal argümantasyon sürecinde en son attığı dedüktif adım ile ispatın tamamlanmadığını düşünmesi ve ispatı tamamlayabilecek işe yarar elemanlar bulamaması olabilir. İşe yarar elemanlar bulamayıp yeni bir dedüktif ya da abdüktif adım atamaması da cebirsel problemlerin güçlü dedüktif yapısından kaynaklanabilir.

ÖA4 ispat yöntemini değiştirmeden “sıfırdan farklı ardışık iki doğal sayının çarpımı tam kare değildir.” hipotezini ispatlamak için yeniden yapısal argümantasyon süreci yaşamıştır. Bu yapısal argümantasyon süreç genelleme temelli indüktif bir argümantasyondur.

$$1.2=2$$

2.3=6 ve sonucun bir önceki sonuca göre artış miktarı 4

3.4=12 ve sonucun bir önceki sonuca göre artış miktarı 6

4.5=20 ve sonucun bir önceki sonuca göre artış miktarı 8

5.6=30 ve sonucun bir önceki sonuca göre artış miktarı 10

6.7=42 ve sonucun bir önceki sonuca göre artış miktarı 12

7.8=56 ve sonucun bir önceki sonuca göre artış miktarı 14

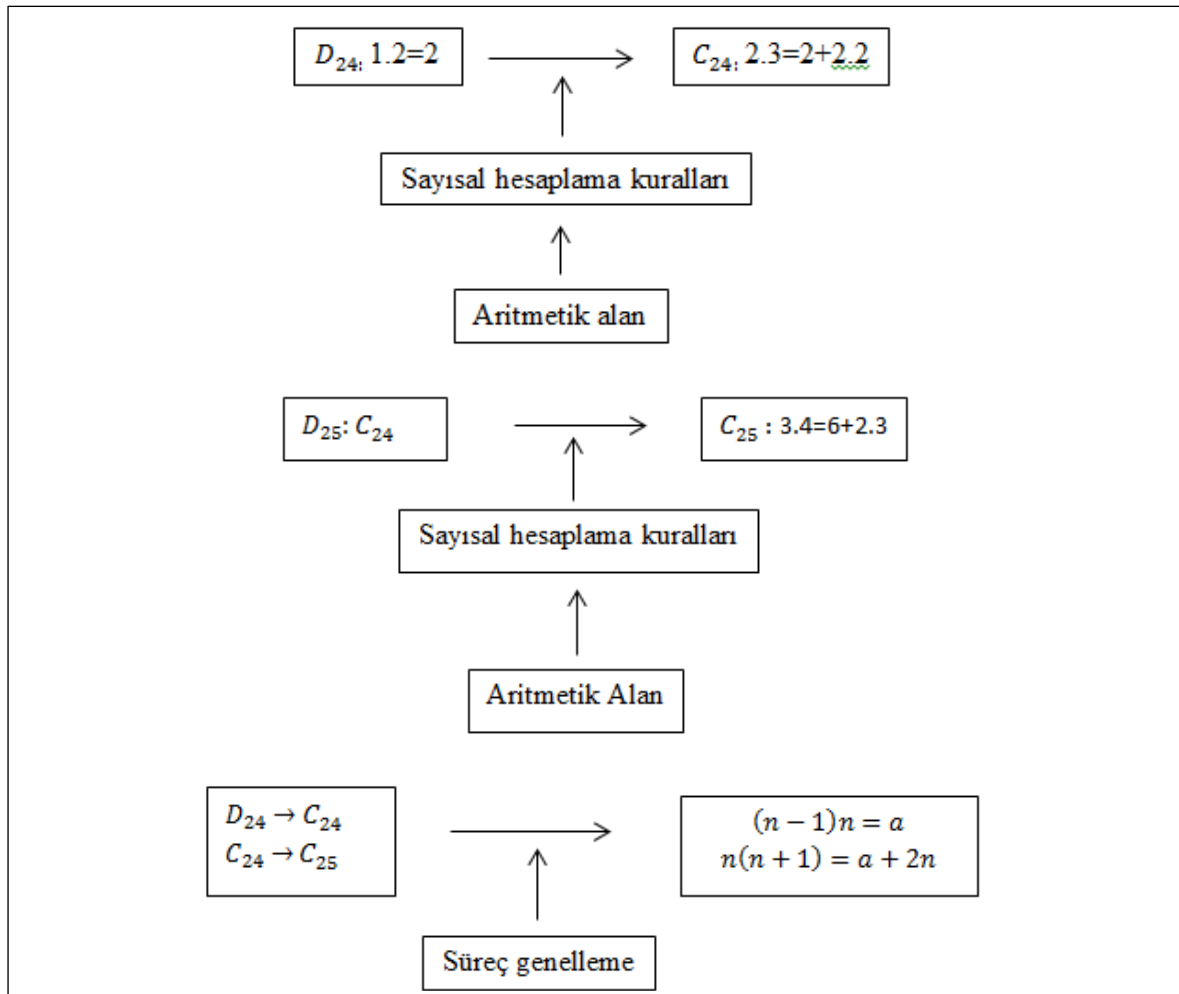
...

$(n-1)n=a$ ve sonucun bir önceki sonuca göre artış miktarı $2(n-1)$

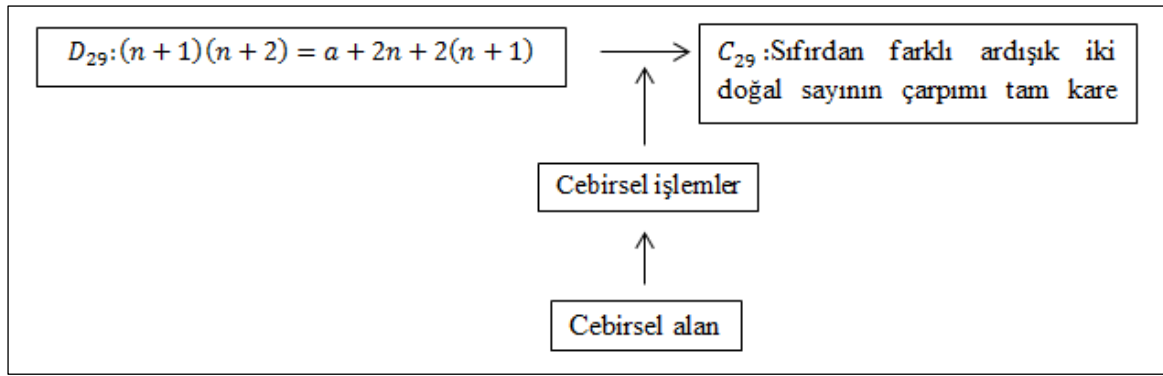
$$n(n+1)=a+2n$$

$$(n+1)(n+2)=?$$

Şekil 201. ÖA4'ün üçüncü problemin çözümü için tekrar yaşadığı argümantasyon süreci



Şekil 202. ÖA4'ün üçüncü problemin çözümü için tekrar yaşadığı argümantasyon sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi



Şekil 205. ÖA4'ün üçüncü problemin çözümünde tekrar tercih ettiği tümevarımla ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi (2)

ÖA4'ün argümantasyonunun yapısı indüktiftir. Bu indüksiyon sonuç genelleme temellidir. Argümantasyonun ardında ÖA4 tümevarımla ispata başlamadan önce yapısal argümantasyon süreci yaşamıştır. Bu yapısal argümantasyon süreç genelleme temelli bir indüktif argümantasyondur. Yaşanan bu süreç tümevarım yoluyla ispatı yapmak için gerekli elemanların toplanmasını sağlamıştır. ÖA4'ün argümantasyonunun içerik sistemi aritmetik alan üzerine temellendirilmişken ispatın içerik sistemi cebirsel alan üzerine temellendirilmiştir. Yani iki süreç arasında bilişsel mesafe vardır. Yaşanan yapısal argümantasyon sürecinde atılan adımların kontrol alanı hem aritmetik hem cebirsel olması iki süreç arasındaki bilişsel mesafenin azalmasını sağlamıştır. İki süreç arasındaki yapısal ve bilişsel süreklilik ÖA4'ün ispatı başarıyla tamamlamasını sağlamıştır.

ÖA4'ün Problem 4'e Yönelik Bulgularının Analizi

ÖA4'ün Problem 4 de Tercih Ettiği Birinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi

Problem 4: $0 \neq x \in \mathbb{R}$ için $x + \frac{1}{x} < 2$ ise o zaman x in negatifliği ya da pozitifliği hakkında ne söyleyebilirsiniz? Varsayımınızı ispatlayınız.

Şekil 206. Dördüncü matematiksel problem

ÖA4 hipotezini oluştururken sayısal hesaplamalar yapmış ve hipotezini $x \in \mathbb{R}^-$ olarak oluşturmuştur. ÖA4 hipotezini oluşturduğu argümantasyon sırasında sayısal hesaplamalar yaptığından bu sürecin içerik sistemi aritmetik alan üzerine temellendirilmiştir. Ayrıca ÖA4 argümantasyon sırasında hipotezini sayısal örnekleri genelleyerek elde ettiğinden

sürecin yapısı yapılandırıcı argümantasyon olup bu süreçte indüktif argümantasyon gözlemlenmiştir.

$x=1$ için $x + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{1} < 2$ olur ki $2=2$ olduğundan bu yanlıştır.

$x=2$ için $2 + \frac{1}{2} < 2$ olur ki $2,5 < 2$ olduğundan bu yanlıştır.

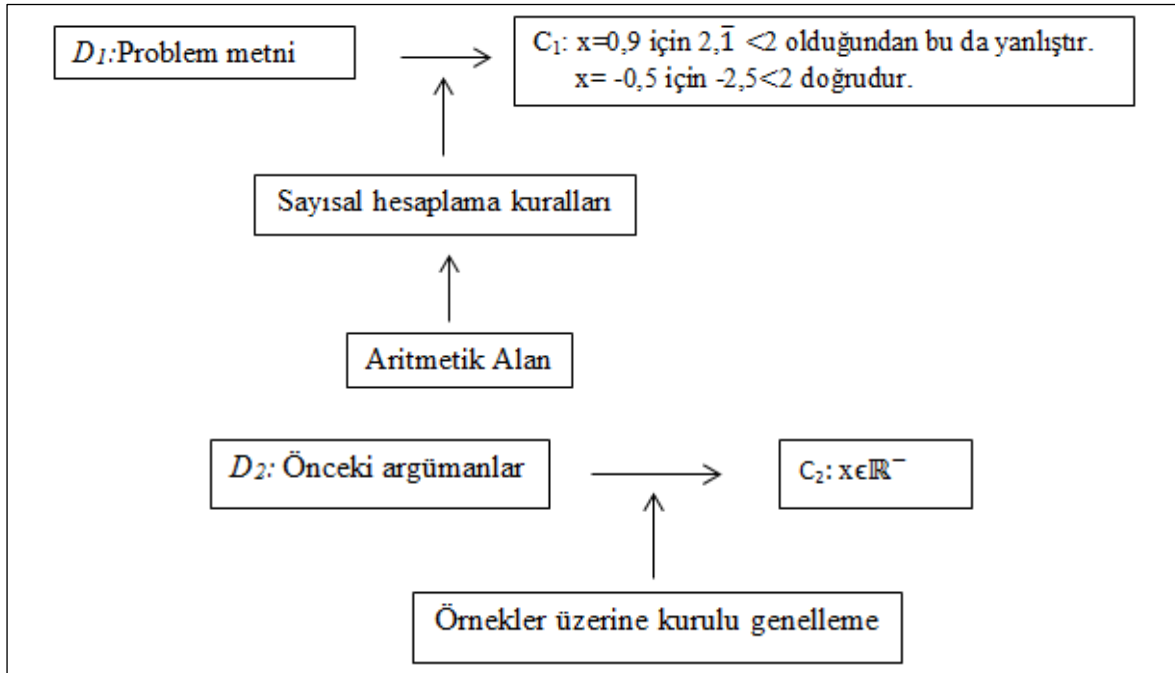
$x=0,9$ için $0,9 + \frac{1}{0,9} < 2$ olur ki $2,1 < 2$ olduğundan bu da yanlıştır.

$x=-0,5$ için $-0,5 + \frac{1}{-0,5} < 2$ olur ki $-2,5 < 2$ doğrudur.

$x=-1$ için $-1 + \frac{1}{-1} < 2$ olur ki $-2 < 2$ doğrudur.

Dolayısıyla $x \in \mathbb{R}^-$ dir.

Şekil 207. ÖA4'ün dördüncü problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyon



Şekil 208. ÖA4'ün dördüncü problemin çözümü sırasında yaşadığı argümantasyonun Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi

ÖA4 hipotezini doğrulamak için ispat yapmaya başlamış ve ispat tekniğini çelişkiyle ispat olarak seçmiştir. Dolayısıyla ispatın yapısı abdüktiftir. Buradan anlaşılmaktadır ki argümantasyonun ve ispat sürecinin yapısı farklı olduğundan iki süreç arasında yapısal mesafe vardır.

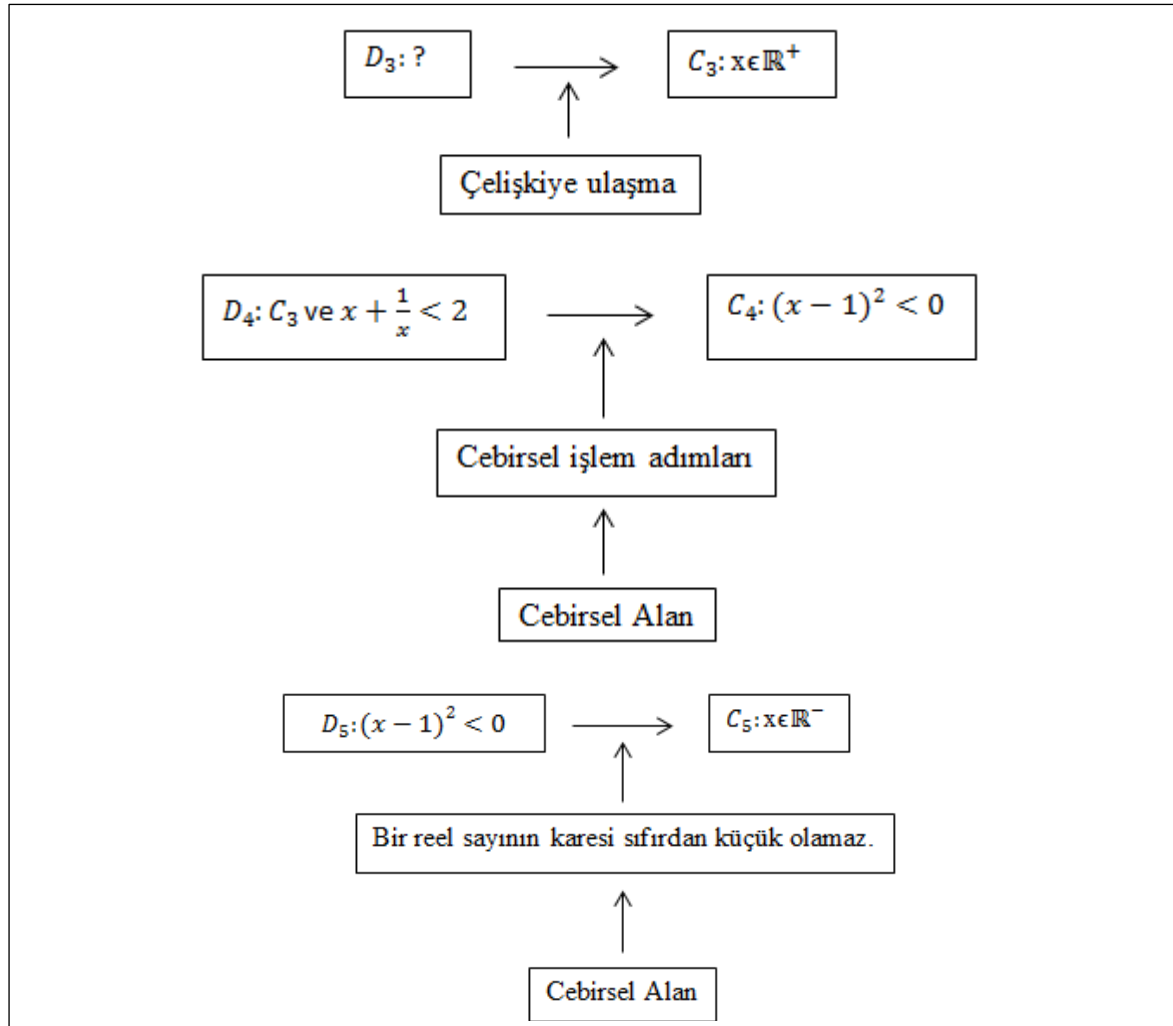
Kabul edelim ki $x \in \mathbb{R}^+$ olsun.

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} < 2 &\Rightarrow \frac{x^2 + 1}{x} < 2 \\ &\Rightarrow x^2 + 1 < 2x \\ &\Rightarrow x^2 + 1 - 2x < 0 \\ &\Rightarrow (x - 1)^2 < 0 \end{aligned}$$

Fakat bir reel sayının karesi sıfırdan küçük olamayacağından bu çelişkidir. Dolayısıyla $x \in \mathbb{R}^-$ dir.

Şekil 209. ÖA4'ün dördüncü problemin çözümünde tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat süreci

ÖA4 ispata abdükatif adım atarak başlamıştır.



Şekil 210. ÖA4'ün dördüncü problemin çözümünde tercih ettiği çelişkiyle ispatı kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi

ÖA4'ün argümantasyonunun içerik sistemi aritmetik alan üzerine temellendirilmişken ispatın içerik sistemi cebirsel alan üzerine temellendirilmiştir. Bu nedenle iki süreç arasında bilişsel mesafe vardır. ÖA4 iki süreç arasındaki bilişsel ve yapısal mesafeye rağmen ispatı başarıyla tamamlayabilmiştir. Bunun sebebi cebirsel problemlerin çözümünün güçlü dedüktif yapısı ve ispat sürecinin başlangıcında atılan abdükatif adımın dedüktif adıma dönüştürülebilmesi olabilir.

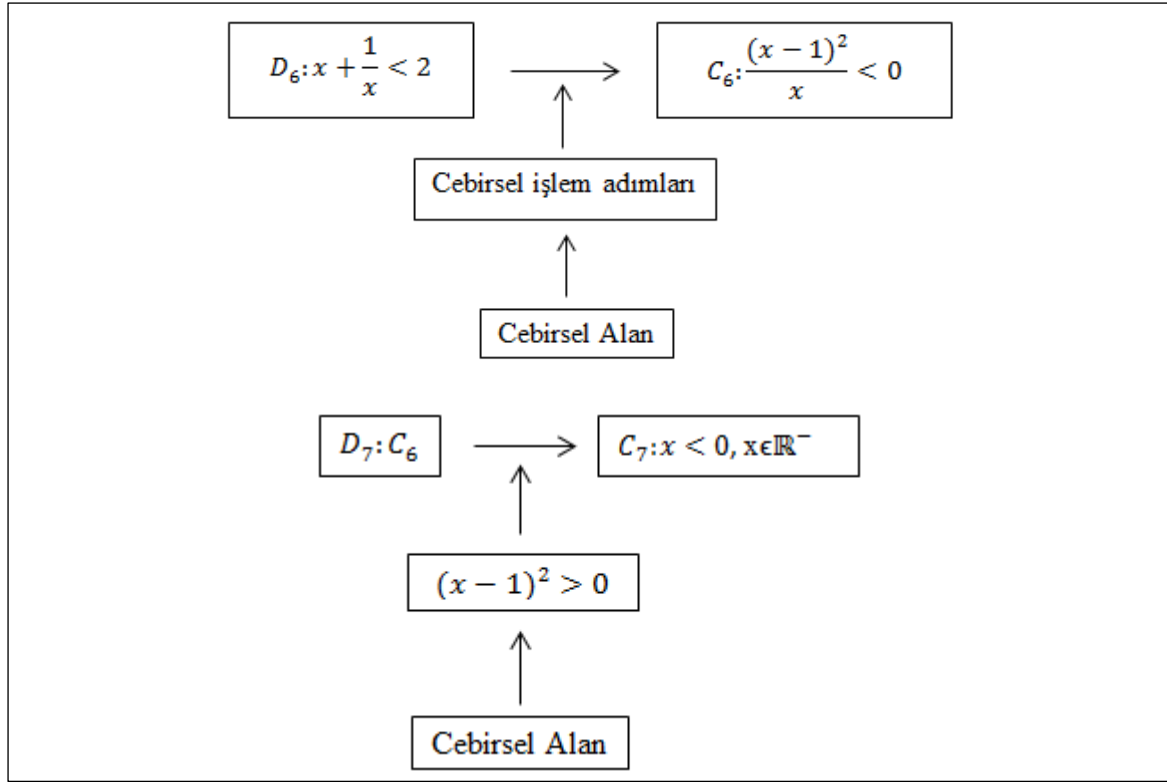
ÖA4'ün Problem 4 de Tercih Ettiği İkinci İspat Tekniğine Yönelik Bulgularının Analizi

ÖA4'den hipotezini doğrulaması için farklı bir ispat yöntemi seçmesi istendiğinde doğrudan ispat tekniğini seçmiştir. Dolayısıyla ispatın yapısı dedüktiftir. Buradan da görülmektedir ki argümantasyon ve ispatın yapısı farklı olduğundan iki süreç arasında yapısal mesafe vardır.

$$\begin{aligned}
 x + \frac{1}{x} < 2 &\Rightarrow \frac{x^2 + 1}{x} < 2 \\
 &\Rightarrow \frac{x^2 + 1}{x} - 2 < 0 \\
 &\Rightarrow \frac{x^2 + 1 - 2x}{x} < 0 \\
 &\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{x} < 0
 \end{aligned}$$

$(x - 1)^2 > 0$ olacağından $\frac{(x-1)^2}{x} < 0$ olması için x negatif reel sayı olmalıdır.

Şekil 211. ÖA4'ün dördüncü problemin çözümünde tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat süreci



Şekil 212. ÖA4'ün dördüncü problemin çözümünde tercih ettiği doğrudan ispat tekniğini kullandığı ispat sürecinin Toulmin modeline entegre edilmiş ckç modeline göre analizi

ÖA4'ün argümantasyonunun içerik sistemi aritmetik alan üzerine temellendirilmişken ispatın içerik sistemi cebirsel alan üzerine temellendirilmiştir. Bu nedenle iki süreç arasında bilişsel mesafe vardır. ÖA4 iki süreç arasındaki bilişsel ve yapısal mesafeye rağmen ispatı başarıyla tamamlayabilmiştir. Bu durum cebirsel problemlerin çözümünün güçlü dedüktif yapısından kaynaklanabilir.

BÖLÜM V

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu bölümde araştırmanın bulgularına göre sonuçlar ve öneriler verilecektir.

Sonuçlar

Yapılan araştırmalar göstermektedir ki (Pedemonte 2008,2007) cebirsel problemlerin çözümü güçlü dedüktif bir yapıya sahiptir. Bu nedenle bu problemlerin çözümü sırasında yaşanan argümantasyon ve ispat süreci arasındaki yapısal mesafe ispatın tamamlanmasında engel oluşturmamaktadır. Ancak bilişsel mesafe için aynı durum geçerli değildir. Bilişsel mesafe ispatın oluşmasında engel teşkil etmektedir. Görülmüştür ki ispat sürecinde yaşanan yapısal argümantasyon sürecinde atılan adımların kontrol alanı argümantasyon ve ispat süreci arasındaki bilişsel mesafeyi azaltabilmektedir. Bu durumda ispat başarıyla tamamlanabilmektedir.

Öğretmen adayları verilen matematiksel problemlerin çözümü için genellikle tümevarımla, çelişkiyle ve doğrudan ispat tekniklerini kullanmışlardır. Sonuçlar seçilen ispat teknikleri neticesinde oluşan çözümlere yönelik olarak oluşturulmuştur.

Birinci Matematiksel Probleme Ait Sonuçlar

Birinci matematiksel probleme dair öğretmen adaylarının hipotez oluşturdıkları argümantasyonun yapısı ÖA1 de abdüktif iken diğer öğretmen adaylarında indüktiftir. ÖA1'in argümantasyonunun içerik sistemi cebirsel alan üzerine temellendirilmişken diğer öğretmen adaylarının ki aritmetik alan üzerine temellendirilmiştir.

Tümevarımla ispat tekniğinin seçildiği çözümlere dair sonuçlar

Birinci matematiksel problemin çözümü için dört öğretmen adayı da tümevarımla ispat tekniğini kullanmıştır. Tümevarımla ispat tekniğinin aşamaları göz önüne alındığında yapısının induktif olduğu söylenebilir. Çünkü bu ispat tekniğinde amaç bir genellemeye ulaşmak, genellenenin doğruluğunu göstermektir. Buradan yola çıkarak ÖA1'in argümantasyon ve ispat süreci arasında yapısal mesafe, diğer öğretmen adaylarının ise argümantasyon ve ispat süreci arasında yapısal süreklilik olduğu söylenebilir.

Öğretmen adaylarının ikisi ispatı başarıyla tamamlarken ikisi yanlış tamamlamıştır. ÖA1'in iki süreci arasındaki yapısal mesafeye ve bilişsel süreklilik vardır. Öğretmen adayının ispat sürecinde attığı adımları kontrol alanı da argümantasyon sırasında olduğu gibi cebirsel alan ile sağlanmıştır. İki süreç arasındaki bilişsel sürekliliğin ÖA1'in ispatı başarıyla tamamlaması için yeterli olması beklenirdi. Çünkü cebirsel problemlerin çözümünün güçlü dedüktif yapısından kaynaklı olarak iki süreç arasındaki yapısal mesafe ispatın tamamlanması için engel oluşturmamaktadır (Pedemonte, 2008). Ancak ÖA1 ispatı yanlış tamamlamıştır. Bunun nedeni ise adayın ispat sürecinde ele aldığı matematiksel kuralı yanlış kullanmasıdır. Diğer öğretmen adaylarından ÖA2 ve ÖA4'ün ispat süreçlerinde attıkları bazı adımların kontrolü cebirsel alan ile sağlanırken bazılarının kontrolü aritmetik alan ile sağlanmaktadır. Bu nedenle bu adayların argümantasyon ve ispat süreci arasında da bilişsel süreklilik vardır. Dolayısıyla ÖA2 ve ÖA4 iki süreç arasındaki bilişsel süreklilik sayesinde ispatı başarıyla tamamlamışlardır. ÖA3 ise iki süreç arasındaki bilişsel mesafeden kaynaklı olarak ispatı yanlış tamamlamıştır. Çünkü argümantasyon sürecindeki düşüncesini ispat sürecinde cebirsel alana genelleyecek doğru gerekçeler bulamamıştır. Bulmuş olduğu gerekçe matematiksel olarak yanlış olduğundan ispatı yanlış tamamlamıştır.

Genel olarak öğretmen adayları problemin çözümüne yönelik en doğru ispat tekniğine argümantasyon sırasında karar vermişler ve ispat sürecinde argümantasyon sürecindeki düşüncelerinden kopmayıp bu düşüncelerin üstüne doğru eklemeler yaparak başarıya ulaşmışlardır.

Doğrudan ispat tekniğinin seçildiği çözümlere dair sonuçlar

Birinci matematiksel problemin çözümü için yalnızca iki öğretmen adayı doğrudan ispat tekniğini seçmiştir. Doğrudan ispat tekniğinin aşamaları göz önüne alınırsa; bu teknikte verilerden iddialar oluşturularak asıl iddiaya ulaşıldığından bu tekniğin yapısı dedüktiftir.

Doğrudan ispat tekniğini seçen ÖA1'in argümantasyon ve ispat süreci arasında yapısal mesafe vardır. Adayın ispat sürecinde attığı adımların kontrolü hem aritmetik hem de cebirsel alan ile sağlandığından iki süreç arasında bilişsel süreklilik de mevcuttur. Cebirsel problemlerin çözümünde yapısal mesafe ispatın tamamlamasına engel oluşturmadığından adayın ispatı tamamlaması beklenmektedir. Ancak ÖA1 ispatı tamamlayamamıştır. ÖA1'in ispatı tamamlayamamasının nedeni, problemin çözümündeki dedüktif adımlardan oluşan zinciri aşamamış olması olabilir. Dedüktif zinciri aşamamasının nedeni de adımları tamamlamak için gerekli olan işe yarar elemanları bulamamasıdır.

Doğrudan ispat tekniğini seçen ÖA2'nin argümantasyon ve ispat süreci arasında yapısal mesafe vardır. Adayın ispat sürecinde attığı adımların kontrolü hem aritmetik hem de cebirsel alan ile sağlandığından iki süreç arasında bilişsel süreklilik de mevcuttur. Cebirsel problemlerin çözümünde yapısal mesafe ispatın tamamlamasına engel oluşturmadığından adayın ispatı başarıyla tamamlamıştır. Bu durum üzerinde bilişsel süreklilik büyük bir etken olduğu gibi adayın problemin çözümündeki dedüktif adımlardan oluşan zinciri aşabilecek işe yarar elemanları bulması da bir etkidir.

Çelişkiyle ispatın seçildiği çözümlere dair sonuçlar

Birinci matematiksel problemin çözümü için üç öğretmen adayı çelişkiyle ispatı seçmiştir. Çelişkiyle ispatın aşamaları göz önüne alınırsa; elde bir veri olmadan ortaya bir iddia konularak ispata başlandığından bu tekniğin yapısının abdüktif olduğu söylenebilir. Bu ispat tekniğinde başlangıçta ortaya konan iddianın yanlış olduğu gösterilmeye çalışılır.

Çelişkiyle ispatı seçen ÖA1'in argümantasyon ve ispat süreci arasında yapısal süreklilik vardır. Adayın ispat sürecinde attığı adımların kontrolü hem aritmetik hem de cebirsel alan ile sağlandığından iki süreç arasında bilişsel süreklilik de mevcuttur. ÖA1'in iki süreç arasındaki yapısal ve bilişsel süreklilik üzerine ispatı tamamlaması beklenmektedir. Ancak öğretmen adayı ispatı tamamlayamamıştır. Bu durumun sebebi, başlangıçta atılan abdüktif adımdaki iddianın yanlışlığını göstermek için atılan dedüktif adımları devam ettirebilecek işe yarar elemanlar bulunamamasıdır.

Çelişkiyle ispatı seçen ÖA2'nin argümantasyon ve ispat süreci arasında yapısal mesafe vardır. Adayın ispat sürecinde attığı adımların kontrolü cebirsel alan ile sağlandığından iki süreç arasında bilişsel mesafe vardır. ÖA2 ispata başlarken bir abdükatif adım atmış, sonra bu adımın yanlışlığını göstermek için yaşadığı yapısal argümantasyon sürecinde iki abdükatif adım daha atmıştır. Pedemonte (2008)'e göre yapısal argümantasyon sürecinde atılan abdükatif adımların iki süreç arasındaki bilişsel mesafeyi azaltması beklenir. Ancak aday bu adımlarda da kontrolü cebirsel alanda sağlanabilen düşünceler ürettiğinden bilişsel mesafe azalmamıştır. Dolayısıyla aday iki süreç arasındaki bilişsel mesafe sebebiyle ispatı tamamlayamamıştır. Ayrıca yapısal argümantasyon sürecinde son attığı abdükatif adımdaki iddiasının yanlışlığını gösterebilecek dedüktif adımları tamamlamasını sağlayan işe yarar elemanlar bulamamış olması da ispatın tamamlanmasında engeldir.

Çelişkiyle ispatı seçen ÖA4'ün argümantasyon ve ispat süreci arasında yapısal mesafe vardır. Adayın ispat sürecinin içerik sistemi hem cebirsel hem de aritmetik alan üzerine temellendirildiğinden iki süreç arasında bilişsel süreklilik vardır. Aday iki süreç arasındaki bilişsel sürekliliğe rağmen ispatı tamamlayamamıştır. Bu durumun sebebi özel bir gerekçeyle oluşturduğu iddiasını cebirsel alana genelleymemesidir. Yani problemin çözümündeki dedüktif adımlardan oluşan zinciri tamamlayabilecek işe yarar elemanlar bulamamıştır.

Çelişkiyle ispatın kullanıldığı çözümleri genel olarak değerlendirirsek, öğretmen adaylarının ispatı tamamlayamamalarının önündeki en önemli etken belki de ispat tekniğinin problemin çözümü için uygun bir teknik olmaması olabilir.

İkinci Matematiksel Probleme Ait Sonuçlar

İkinci matematiksel probleme dair öğretmen adaylarının hipotez oluşturdıkları argümantasyonun yapısı tüm öğretmen adaylarında indüktif olup içerik sistemi aritmetik alan üzerine temellendirilmiştir.

Tümevarımla ispat tekniğinin seçildiği çözümlere dair sonuçlar

Öğretmen adaylarının tümü tümevarımla ispat tekniğini seçmiş olup hepsinin argümantasyon ve ispat süreci arasında yapısal süreklilik vardır.

Tümevarımla ispat tekniğini seçen ÖA1 ve ÖA3'ün öğretmen adaylarının ispat süreçlerinde attıkları adımların kontrolü cebirsel alan üzerine olduğundan iki süreç arasında bilişsel mesafe vardır. Adayların her ikisi de ispat sürecinde son attıkları adımda iddiayı özel bir gerekçe ile oluşturmuşlardır. Bu iddiayı genelleyerek cebirsel alanda geçerli olmasını sağlayan işe yarar elemanlar bulamadıklarından ispatı tamamlayamamışlardır. Pedemonte (2008)'e göre ispat sırasında yapılandırılan yapısal argümantasyon sürecine atılan abdüktif adımlar ve bu adımların kontrolünün argümantasyon sırasında atılan adımların kontrolü ile aynı olması iki süreç arasındaki bilişsel mesafeyi azaltmaktadır. Öğretmen adaylarının ispat sürecinde abdüktif adım gözlemlenmemiş ancak kontrolü aritmetik alan ile sağlanan bir adım gözlemlenmiştir. Bu adım adayların argümantasyon ve ispat süreci arasındaki mesafeyi azaltmış olabilir. Çünkü adayların bu adımlardaki düşünce sistemleri argümantasyondaki ile aynı olup aynı elemanları kullanmışlardır. Ama bilişsel mesafe ne kadar azalsa da adaylar ispatı tamamlayamamışlardır.

ÖA2 ispat sırasında abdüktif adım atmış ve bu abdüktif adımları dedüktif adıma dönüştürebilecek işe yarar elemanlar bulmuştur. Attığı dedüktif adımlarda ortaya bir iddia koymasını sağlayan gerekçeler hem aritmetik alan hem de cebirsel alan da doğrulanabilmektedir. Dolayısıyla ÖA2'nin argümantasyon ve ispat süreci arasında azalan bilişsel mesafe mevcuttur. Buna rağmen aday ispatı yanlış tamamlamıştır. Adayın ispatı yanlış tamamlamasının nedeni, seçtiği ispat tekniğini doğru uygulamayıp sadece ispatı tamamlamaya yönelik adımlar atmasıdır. Buradan anlaşılmaktadır ki; argümantasyon ve ispat süreci arasında yapısal ve bilişsel süreklilik olması ispatın her zaman başarıyla tamamlanmasını gerektirmez.

ÖA4 ispat sırasında iki farklı yapısal argümantasyon süreci yaşamıştır. İlkinde attığı adımların bazılarının kontrolü aritmetik alan ile sağlandığından iki süreç arasında bilişsel süreklilik vardır. Ancak aday ispatı tamamlayamamış ve bunun sebebi iddiasını özel bir gerekçeyle oluşturmuş olup cebirsel alana genelleyebilecek işe yarar elemanlar bulamamasıdır. İkinci yapısal argümantasyon sürecinde ilkinden farklı bir düşünceyle devam etmiştir. Burada atılan adımların kontrolü cebirsel alan ile sağlandığından iki süreç arasında bilişsel mesafe vardır. Bu nedenle aday ispatı yine tamamlayamamıştır.

Adayların tümünün ispatı tamamlayamamasının ya da yanlış tamamlamasının nedeni, cebirsel problemlerin güçlü dedüktif yapısı veya seçilen ispat tekniğinin bu problemin çözümü için uygun teknik olmaması olabilir.

Çelişkiyle ispatın seçildiği çözümlere dair sonuçlar

Üç öğretmen adayı çelişkiyle ispatı seçmiş olup ÖA1'in argümantasyon ve ispat süreci arasında yapısal mesafe vardır. Öğretmen adayının ispat sürecinde attığı adımların kontrolü cebirsel alan ile sağlandığından iki süreç arasında bilişsel mesafe vardır. Bilişsel mesafe adayın ispatı tamamlamasına engel olmuştur.

ÖA3'ün argümantasyon ve ispat süreci arasında bilişsel mesafe vardır. Aday ispat sırasında yapısal argümantasyon süreci yaşamış olup bu süreçte seçtiği ispat tekniği gereği abdüktif adım atmıştır. Adayın ispat sürecinde attığı adımların kontrolü cebirsel alan ile sağlandığından sürecin içerik sistemi cebirsel alan üzerine kuruludur. Ancak adayın son attığı adımda iddiayı oluşturmasını sağlayan gerekçenin kontrolü aritmetik alan üzerinedir. Hatta bu adımdaki düşünce argümantasyonda ortaya konulan düşünce ile benzerlik göstermektedir. Bu nedenle bu adım iki süreç arasındaki bilişsel mesafeyi azaltmıştır. Azalan bilişsel mesafe neticesinde adayın ispatı tamamlaması beklenirken aday son attığı adımdaki gerekçesini cebirsel alana genelleyebilecek işe yarar elemanlar bulamadığından ispatı tamamlayamamıştır. Yani problemin çözümündeki dedüktif zincirin zorluğuna takılmıştır.

Çelişkiyle ispatı seçen ÖA4'ün argümantasyon ve ispat süreci arasında yapısal mesafe vardır. ÖA4'ün ispat sürecinde attığı adımların kontrolü hem cebirsel hem de aritmetik alan ile sağlandığında iki süreç arasında bilişsel süreklilik vardır. Adayın iki süreç arasındaki bilişsel sürekliliğe rağmen ispatı tamamlayamamasının nedeni, problemin çözümündeki dedüktif zincirin zorluğunu aşamamasıdır.

Çelişkiyle ispatın seçildiği çözümlere genel olarak bakılırsa iki süreç arasındaki bilişsel sürekliliğe rağmen ispatın tamamlanamamasının sebebi; cebirsel problemlerin güçlü dedüktif yapısı veya seçilen ispat tekniğinin problemin çözümü için uygun teknik olmamasıdır.

Doğrudan ispat tekniğinin seçildiği çözümlere dair sonuçlar

Öğretmen adaylarından üç tanesi argümantasyon sırasında ortaya koydukları hipotezi doğrulamak için doğrudan ispat tekniğini seçmiştir.

Doğrudan ispat tekniğini seçen ÖA1'in argümantasyon ve ispat süreci arasında yapısal mesafe vardır. Aday bu ispat tekniğini seçerek attığı adımlarda kullandığı düşünce sistemi argümantasyondakinden oldukça farklıdır. İspat sürecinde atılan adımların kontrol alanı cebirsel alan üzerine temellendirilmiş olduğundan iki süreç arasında bilişsel mesafe vardır. Bu durum öğretmen adayının ispatı tamamlamasına engel olmuştur. Çünkü aday iki süreç arasında bağlantı kurup ispatı tamamlayabilmesini sağlayan düşünceden uzaklaşmıştır. İspat sürecinde ele aldığı düşüncesini devam ettirebilecek işe yarar elemanlar bulamadığından da attığı dedüktif adımları tamamlayamamıştır. Yani öğretmen adayı dedüktif zincirin zorluğunu aşamamıştır.

Doğrudan ispat tekniğini seçen ÖA2'nin argümantasyon ve ispat süreci arasında yapısal mesafe vardır. Aday bu ispat tekniğini seçerek attığı adımlarda argümantasyon sırasında ortaya koyduğu düşüncesini cebirsel alana genellemeye çalışmıştır. Bu sırada bazı adımlardaki gerekçesinin kontrolü aritmetik alan ile sağlanmıştır. Bazı adımlarda ortaya koyduğu gerekçe de hem aritmetik hem de cebirsel alanda doğrulanabilmektedir. Bu nedenle öğretmen adayının iki süreci arasında bilişsel süreklilik vardır. İspat sürecindeki dedüktif adımlardan oluşan zinciri başarıyla aşmış ve dolayısıyla aday ispatı başarıyla tamamlamıştır.

ÖA4'ün argümantasyon ve ispat süreçleri arasında yapısal mesafe vardır. Adayın ispat sürecinde attığı adımlarda ortaya koyduğu düşünce argümantasyon sürecindekinden farklıdır. İspat sürecinde atılan adımların kontrolü cebirsel alan ile sağlanmış olup bazı adımların kontrolü ise aritmetik alan ile sağlanmıştır. Ancak adayın düşünce sistemi iki süreçte farklı olduğundan bu adımlar iki süreç arasındaki bilişsel mesafeyi azaltamamıştır. Dolayısıyla aday bilişsel mesafeden kaynaklı ispatı tamamlayamamıştır. Bir diğer neden de cebirsel problemlerin güçlü dedüktif yapısıdır.

Üçüncü Matematiksel Probleme Ait Sonuçlar

Üçüncü probleme yönelik hipotezin oluşturulduğu argümantasyonun yapısı ÖA1'de abdüktif iken ÖA2, ÖA3 ve ÖA4 de indüktiftir. Tüm öğretmen adaylarının argümantasyonunun içerik sistemi aritmetik alan üzerine temellendirilmiştir.

Doğrudan ispat tekniğinin seçildiği çözümlere dair sonuçlar

Öğretmen adaylarından yalnızca ÖA2 ve ÖA3 doğrudan ispat tekniğini tercih etmiştir.

ÖA2'nin argümantasyon ve ispat süreci arasında yapısal mesafe vardır. Aday ispat sırasında üç farklı yapısal argümantasyon süreci yaşamıştır. Her birinde de attığı adımların kontrolü cebirsel alan ile sağlanmıştır. Aday argümantasyondaki düşüncesini ispat sürecinde cebirsel alana genelleyerek devam etmiştir. Ancak iki süreç arasında bilişsel mesafe olduğundan aday ispatı tamamlayamamıştır. Adayının ispatı tamamlayamamasının bir diğer nedeni de cebirsel problemleri güçlü dedüktif yapısı ve adayın problemin çözümündeki dedüktif zincirin zorluğunu aşamamasıdır.

ÖA3'ün argümantasyon ve ispat süreci arasında yapısal mesafe vardır. Aday hipotezini doğrulamak için ispat yapmaya başladığında yapısal argümantasyon süreci yaşadığı gözlemlenmiştir. Bu süreçte atılan adımların kontrolü cebirsel alan ile sağlandığından iki süreç arasında bilişsel mesafe vardır. Ancak yapısal argümantasyon sürecinde atılan abdüktif adım ve sonrasında bu abdüktif adımın dedüktif adıma dönüştürüldüğü adımda kontrol aritmetik alan ile sağlandığından iki süreç arasındaki bilişsel mesafe azalmıştır. ÖA3'ün azalan bilişsel mesafe neticesinde ispatı tamamlaması beklenebilir ancak ispat tamamlanmamıştır. Çünkü abdüktif adımı dedüktif adıma dönüştürmesine sağlayan “işe yarar” elemanlar ÖA3'ün sandığı gibi işine yaramamıştır. Hatta gerekçesini çürütmüş ardından da devam etmesini sağlayacak gerçekten işine yarayacak elemanlar bulamamıştır. Yani aday cebirsel problemleri güçlü dedüktif yapısından kaynaklı ispatı tamamlayamamıştır.

Çelişkiyle ispatın seçildiği çözümlere dair sonuçlar

Öğretmen adaylarının tümü üçüncü problemin çözümü için çelişkiyle ispatı seçmiştir.

ÖA1'in argümantasyon ve ispat süreci arasında yapısal süreklilik vardır. Aday ispat sürecinde üç farklı yapısal argümantasyon süreci yaşamış olup seçtiği ispat tekniği gereği attığı abdüktif adımdan farklı bir abdüktif adım daha atmıştır. Ayrıca süreçte atılan adımların kontrolü hem aritmetik hem de cebirsel alan ile sağlandığından iki süreç arasında azalan bilişsel mesafe vardır. Buna rağmen aday ispatı tamamlayamamıştır. Bu durumun sebebi attığı abdüktif adımı dedüktif adıma dönüştürebilecek işe yarar elemanlar bulamamasıdır. İkinci yapısal argümantasyon sürecinde içerik sistemi hem cebirsel hem de aritmetik alan üzerine temellendirilmiş olduğundan iki süreç arasında bilişsel süreklilik

vardır. Ancak aday yine ispatı tamamlayamamış ve bu sefer sebebi adayın süreç boyunca yanlış bir düşünce etrafında hareket etmesidir. Aday sonradan yanlışlığı fark etmiş ve bunun üzerine sonuncu yapısal argümantasyon sürecini yaşamıştır. Bu süreçte de aday başlangıçta attığı abdüktif adımdaki iddiasının yanlışlığını özel örneklerle göstermiş, bu düşüncesini cebirsel alan genelleyemediğinden ispatı tamamlayamamıştır.

ÖA2'nin argümantasyon ve ispat süreci arasında yapısal mesafe vardır. Aday ispat sırasında üç farklı yapısal argümantasyon süreci yaşamıştır. Tümünde de içerik sistemi cebirsel alan üzerine temellendirilmiştir. Bu nedenle argümantasyon ve ispat süreci arasında bilişsel mesafe vardır. Aday hem bilişsel mesafeden kaynaklı hem de cebirsel problemlerin güçlü dedüktif yapısından kaynaklı ispatı tamamlayamamıştır.

ÖA3'ün argümantasyon ve ispat süreci arasında hem yapısal mesafe hem de bilişsel mesafe vardır. Aday ispatı tamamlayamamış ve tamamlayamamasının sebebi ÖA2'nin sebebi ile aynıdır.

ÖA4'ün argümantasyon ve ispat süreci arasında yapısal mesafe vardır. Aday ispat sırasında dört farklı yapısal argümantasyon süreci yaşamış olup ilkinde içerik sistemi cebirsel alan üzerine temellendirildiğinden iki süreç arasında bilişsel mesafe vardır. Hem bilişsel mesafe hem de cebirsel problemlerin güçlü dedüktif yapısından dolayı aday ispatı tamamlayamamıştır. İkincisinde içerik sistemi hem aritmetik hem de cebirsel alan üzerine temellendirilmiş olduğundan iki süreç arasında bilişsel süreklilik vardır. Ancak aday düşüncesini cebirsel alana genelleyecek işe yarar elemanlar bulamadığında ispatı tamamlayamamıştır. Üçüncü yapısal argümantasyon sürecinde ise aday abdüktif adım atarak başlamıştır. Ardından bu abdüktif adımdaki iddiasının yanlış olduğunu gösterebilecek, kontrolü cebirsel alan ile sağlanan dedüktif adımlar atabilmiştir. Ancak ispat tamamlanmamış ve aday bir abdüktif adım daha atmıştır. Bu sefer bu adımdaki iddiasının doğruluğunu ya da yanlışlığını gösterebilecek dedüktif adımlar atamamış ve ispatı tamamlayamamıştır. İspatın tamamlanamamasının bir diğer nedeni de iki süreç arasındaki bilişsel mesafedir. Adayın son yaşadığı yapısal argümantasyon sürecindeki durum ise ilkindekine benzer olup ispatı tamamlayamamasının nedeni de ilkiyle aynıdır.

Tümevarımla ispat tekniğinin seçildiği çözümlere dair sonuçlar

Öğretmen adaylarının tümü üçüncü problemin çözümü için tümevarımla ispat tekniğini seçmiştir.

ÖA1'in argümantasyon ve ispat süreci arasında yapısal mesafe vardır. İspat sürecinin içerik sistemi cebirsel alan üzerine temellendirilmiş olup iki süreç arasında bilişsel mesafe vardır. Ancak aday ispat sırasında yapısal argümantasyon süreci yaşayıp bu süreçte abdükatif adım atmış ve bu adımın kontrolünü aritmetik alan ile sağlamıştır. Dolayısıyla bu adım iki süreç arasındaki bilişsel mesafeyi azaltır. ÖA1'in attığı abdükatif adımı dedüktif adıma dönüştürebilecek işe yarar elemanlar bulamaması nedeniyle azalan bilişsel mesafe ispatın tamamlanabilmesi için yeterli olmamıştır.

ÖA2 ve ÖA3'ün argümantasyon ve ispat süreçleri arasında yapısal süreklilik vardır. Adayların ispat sürecinin içerik sistemi cebirsel alan üzerine temellendirilmiş olduğundan iki süreç arasında bilişsel mesafe vardır. Bilişsel mesafe adayların ispatı tamamlamasına engel olmuştur. Ayrıca adaylar attıkları dedüktif adımı devam ettirip sonuca ulaşmasını sağlayacak işe yarar elemanlar bulamadıklarında da ispatı tamamlayamamışlardır.

ÖA4'ün argümantasyon ve ispat süreci arasında yapısal süreklilik vardır. Aday ispat sırasında iki farklı düşünce kullanmıştır. İlkinde dedüktif adımlar atmış ve bu adımların kontrolünü hem cebirsel hem de aritmetik alan ile sağlamıştır. Dolayısıyla iki süreç arasında bilişsel süreklilik vardır. Ancak aday dedüktif adımını devam ettirebilecek işe yarar elemanlar bulamadığından ispatı tamamlayamamıştır. Bunun üzerine aday düşünce sistemini değiştirmiş ve ispat sürecine öyle devam etmiştir. Bu süreçte yapısal argümantasyon gözlemlenip bu argümantasyonun yapısı süreç genelleme temelli indüktif argümantasyondur. Yaşanan bu süreç adayın tümevarım yoluyla ispat yapmak için gerekli elemanları toplamasını sağlamıştır. Adayın ispat sürecinin içerik sistemi cebirsel alan üzerine temellendirilmiş olup bu süreçte yaşanan süreç genelleme temelli indüktif argümantasyon sürecinin içerik sistemi aritmetik alan üzerine temellendirildiğinden iki süreç arasında bilişsel süreklilik vardır. İki süreç arasındaki yapısal ve bilişsel süreklilik adayın ispatı başarıyla tamamlamasını sağlamıştır.

Dördüncü Matematiksel Probleme Ait Sonuçlar

Dördüncü matematiksel probleme dair öğretmen adaylarının hipotez oluşturdıkları argümantasyonun yapısı tüm öğretmen adaylarında indüktif olup içerik sistemi aritmetik alan üzerine temellendirilmiştir.

Öğretmen adayları bu matematiksel problemin çözümü için sadece doğrudan ve çelişkiyle ispatı tercih etmişlerdir.

Doğrudan ispat tekniğinin seçildiği çözümlere dair sonuçlar

Doğrudan ispat tekniğini seçen tüm öğretmen adaylarının argümantasyon ve ispat süreçleri arasında yapısal mesafe vardır. Adaylarının ispat sürecinde attıkları adımların kontrolü cebirsel alan ile sağlandığından iki süreç arasında bilişsel mesafe de mevcuttur. Ancak öğretmen adayları iki süreç arasındaki yapısal ve bilişsel mesafeye rağmen ispatı başarıyla tamamlamışlardır. Cebirsel problemlerin çözümü sırasında iki süreç arasındaki yapısal mesafenin ispatın tamamlanmasında engel oluşturmadığından söz etmiştik. Ancak bu problemde görülmektedir ki bilişsel mesafe de ispatın tamamlanmasına engel oluşturmamıştır. Bu durumun nedeni, cebirsel problemlerin çözümünün güçlü dedüktif yapısıdır. Yani öğretmen adayları problemin çözümündeki dedüktif adımların oluşturduğu zinciri tamamlayacak işe yarar elemanlar bulabilmişlerdir. Ayrıca öğretmen adayları argümantasyon sırasında problemin çözümünde kendilerini başarıya ulaştıracak doğru ispat tekniğini seçebilmişlerdir.

Çelişkiyle ispatın seçildiği çözümlere dair sonuçlar

Çelişkiyle ispatı seçen tüm öğretmen adaylarının argümantasyon ve ispat süreçleri arasında yapısal mesafe vardır. Adaylarının ispat sürecinde attıkları adımların kontrolü cebirsel alan ile sağlandığından iki süreç arasında bilişsel mesafe de mevcuttur. Ancak öğretmen adayları iki süreç arasındaki yapısal ve bilişsel mesafeye rağmen ispatı başarıyla tamamlamışlardır. Bu durumun nedeni bir önceki teknik olan doğrudan ispat tekniğindeki nedenle aynıdır.

Tüm problemlere ait sonuçlar tek bir çatı altında toplayarak incelendiğinde aşağıdaki bilgiler elde edilmektedir.

1. Argümantasyon ve ispat süreci arasında yapısal mesafe ve bilişsel süreklilik ya da yapısal ve bilişsel süreklilik olduğu durumda aday ispatı tamamlayabilmektedir. Çünkü cebirsel problemlerin çözümünde iki süreç arasındaki yapısal mesafe ispatın tamamlanmasında engel oluşturmamaktadır. Bu durumda adaylar bazen de ispatı tamamlayamamıştır. Çünkü cebirsel problemlerin güçlü dedüktif yapısında kaynaklı dedüktif adımlardan oluşan zinciri aşabilecek işe yarar elemanlar bulamamışlardır.
2. Argümantasyon ve ispat süreci arasında yapısal ve bilişsel mesafe olduğu durumda beklenen şekilde adaylar ispatı tamamlayamamıştır. Ancak beklenenin aksine

ispatın başarıyla tamamlandığı durumlarda gözlemlenmiştir. Bu durumun nedeni cebirsel problemlerin güçlü dedüktif yapısında kaynaklanmaktadır. Yani adaylar problemlerin çözümünde dedüktif adımlardan oluşan zinciri başarıyla aşabilmişlerdir.

3. İlk iki maddedeki beklenilenin aksine yaşanan durumlar seçilen ispat tekniklerinden kaynaklı olabilir. Çünkü argümantasyon probleme dair hipotezin oluşturulduğu ve aynı zamanda bu hipotezi doğrulayabilecek en uygun ispat tekniğinin seçildiği süreçtir. Adaylar genellikle ilk seçtikleri ispat tekniğinde sonuca başarıyla ulaşmışlardır. Ulaşamayanların ise sebebi ya yanlış ispat tekniğini seçmeleri ya bilişsel mesafe ya da cebirsel problemin dedüktif yapısını aşamamalarıdır. Ancak araştırmacının adaylardan başka bir teknik seçmelerini istediği durumda adaylar genelde sonuca ulaşamamışlardır. Ulaşmışlar ise başlangıçta seçtikleri teknik yanlış olup bir sonrakinden doğruyu seçmişlerdir.
4. Seçilen ispat tekniklerine yönelik başka bir önemli sonuç adayların her birinde gözlemlenmiştir. Adaylar sürekli olarak uygulayabildikleri, kendilerine en kolay gelen tekniği seçme eğilimindedirler. Özellikle tümevarımla ispat tekniği adaylar tarafında en popüler görülen tekniktir. Çelişkiyle ispat ise aksine örnek verme tekniği ile karıştırılan bu nedenle de adaylar tarafından oldukça zorlanılan teknik olmuştur. Adaylar devamlı olarak bu teknikleri kullandıklarını iddia edip başka bir teknik seçmeye yönelmemişlerdir.
5. Dördüncü madde göz önüne alındığında adaylar bazı problemlerin çözümünde; argümantasyon sırasında problemin çözümü için uygun olan tekniğin hangisi olduğunu düşünmeyip kendisinin hangi tekniği uygulayabileceğini göz önünde bulundurmıştır.
6. Son olarak seçilen ispat tekniğinin argümantasyon ve ispat süreci arasındaki ilişkiye –cebirsel problemlerin çözümünde iki süreç arasındaki yapısal mesafenin ispatın tamamlanmasında engel oluşturmadığından- etkisi olmadığı gözlemlenmiştir. Ancak seçilen ispat tekniği ispatın tamamlanabilmesinde etkilidir. Çünkü argümantasyon sırasında problemin çözümü için en doğru ispat tekniğinin seçilmesi beklenmektedir. Yani öğrenciler matematiksel problemlerin çözümünde başarıya ulaşma şanslarını artırabilmek için tüm ispat tekniklerini uygulayabilip, problemin çözümünü düşündüğü süreçte uygun ispat tekniğini kestirebilmelidir.

Öneriler

Bu bölümde, araştırmanın sonuçları çerçevesinde yararlı olacağı düşünülen önerilere yer verilecektir.

Eğitimci ve öğretmenler için;

Matematiksel problemlerin çözümünde ispat başlı başına bir süreç olmayıp öncesinde probleme dair hipotezin oluşturulduğu ve aynı zamanda uygun ispat tekniğinin seçildiği argümantasyon da önemli bir süreçtir. Bu iki sürecin uyumlu bir bütün olması matematiksel problemlerin çözümünde doğru sonuca ulaşılması için oldukça önemlidir. Bu nedenle eğitimcilere ve öğretmenlere; matematiksel problemlerin çözümünde öğrencilere iki süreç için de ihtiyaç duyulan zaman fırsatını vermeleri, öğrencilerin problemin çözümü için uygun olan ispat tekniğini kestirmeyi sezdirebilmeleri önerilir. Bunun yanı sıra eğitimciler ve öğretmenlere problemlerin mümkün olan tüm çözüm yollarını öğrencilere göstermeleri önerilir. Çünkü verilen bir problemin mümkün olan tüm çözüm yollarının bilinmesi öğrencilere esnek düşünebilmeyi öğretir. Bu da başka problemlerde öğrencilerin başarıyla çözüme ulaşma olasılıklarını artırır.

Öğretmenlere, verilen bir ifadeye yönelik öğrencilerin kendilerinin bir hipotez oluşturmalarına ve oluşturdukları hipotezi doğrulamak için ispat yapmaya çaba göstermelerine fırsat veren aktiviteler düzenlemeleri önerilebilir. Çünkü bu tip aktiviteler öğrencilerin hem matematiksel düşünme hem de problem çözme becerilerini geliştirecektir.

Problemlerin başarıyla çözüme ulaşabilmesinde önemli olan bir diğer etken, probleme yönelik olarak hipotezin oluşturulduğu argümantasyon sırasında hipotezi doğrulamak için gerekli olan ispat tekniğine karar verilmesidir. Buradan hareketle, öğretmenlere, öğrencilere tüm ispat tekniklerini göstermeleri, ispat tekniklerinin tümünün uygulamasının yapılabileceği aktiviteler hazırlamaları ve öğrencilere belli ispat teknikleri ile her zaman sonuca ulaşamayacaklarının farkına varmalarını sağlamaları önerilebilir.

Araştırmacılar için;

Cebirsel problemlerin çözümünde iki süreç arasındaki yapısal mesafe ispatın tamamlanmasına engel oluşturmamaktadır. Bu nedenle farklı ispat tekniklerinin seçilmesi araştırmadaki matematiksel problemlerin çözümünde yapısal anlamda engel oluşturmamıştır. Ancak bu durumun geometri ve analiz problemlerinin çözümünde de aynı olup olmadığının incelenmesi araştırmacılara önerilir.

Argümantasyon ve ispat süreci arasındaki ilişkiler içerik ve yapı açısından analiz edilmiş olup bilişsel ve yapısal süreklilik durumunda ispatın başarıyla tamamlandığı gözlemlenmiştir. Ancak hem yapısal hem de bilişsel sürekliliğin olduğu bazı durumlarda ispatın tamamlanamadığı olabilir. Bu çalışmada seçilen ispat tekniğinin yanlış olmasından veya cebirsel problemlerin güçlü dedüktif yapısından kaynaklı olarak bu durumun ortaya çıktığı gözlemlenmiştir. Ancak cebirsel olmayan problemlerde hem yapısal hem de bilişsel sürekliliğin olduğu ama ispatın tamamlanamadığı durumlara neden olan sebepler araştırılabilir.

KAYNAKLAR

- Almeida, D. (2003). Engendering proof attitudes: Can the genesis of mathematical knowledge teach us anything? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 34 (4), 479-488.
- Argument. (n.d.). *Merriam-Webster Dictionary* online. Retrieved from <https://www.merriam-webster.com/dictionary/argument>
- Argumentation. (n.d.). *Merriam-Webster Dictionary* online. Retrieved from <https://www.merriam-webster.com/dictionary/argumentation>
- Argüman. (t.y.). *Türk Dil Kurumu* içinde. http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_gts&arama=gts&guid=TDK.GTS.5a316abcbc7378.04724648 sayfasından erişilmiştir.
- Argün, Z., Arıkan, A., Bulut, S. & Halıcıoğlu, S. (2014). *Temel matematik kavramların künyesi*. Ankara: Gazi.
- Balacheff, N. (2008). The role of the researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 40, 501-512.
- Balacheff, N., & Gaudin, N. (2002). Students conceptions: an introduction to a formal characterization. *Le Cahiers du Laboratoire Leibniz*, 65.
- Boero, P., Garuti, R., Lemut, E. & Mariotti M. A. (1996). *Challenging the traditional school approach to theorems: A hypothesis about the cognitive unity of theorems*. Paper presented at the Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Valencia, 2. Retrieved from <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED453071.pdf>
- Boero, P., Garuti, R. & Mariotti M. A. (1996). *Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures*. Paper presented at the Proceedings of the 20th

Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Valencia, 2. Retrieved from <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED453071.pdf>

Bülbül, A. & Urhan, S. (2016). Argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçleri arasındaki ilişkiler. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 10 (1), 351-373.

Dinçer, S. (2011). *Matematik lisans derslerindeki tartışmaların Toulmin Modeline göre analizi*. Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Doruk, M. (2016). *İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının analiz alanındaki argümantasyon ve ispat süreçlerinin incelenmesi*. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Douek, N. (1998). Some remarks about argumentation and mathematical proof and their educational implications. *European Research in Mathematics Education*, 1, 125-139.

Fawcett, H. (1938). *The nature of proof. The National Council of Teachers of Mathematics Thirteenth Yearbook*. New York: Bureau of Publications of Teachers College, Columbia University.

Fiallo, J. & Gutierrez, A. (2017). Analysis of the cognitive unity or rupture between conjecture and proof when learning to prove on a grade 10 trigonometry course. *Educational Studies in Mathematics*, 96 (2), 145-167.

Güneş, S. (2013). *Matematik eğitiminde argümantasyon ve kanıt süreçlerinin analizi ve karşılaştırılması*. Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Harel, G. (2001). The Development of Mathematical Induction as a Proof Scheme: A Model for DNR-Based Instruction. In S. Campbell & R. Zaskis (Eds.). *Learning and Teaching Number Theory, Journal of Mathematical Behavior*. New Jersey, Ablex Publishing Corporation, 185-212.

Hipotez. (t.y.). *Türk Dil Kurumu* içinde. http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_bts&arama=kelimel&guid=TDK.GT.S.5a316b689f9949.96874686 sayfasından erişilmiştir.

- Inglis, M., Mejia-Ramos, J.P. & Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics*, 66, 3-21.
- İspat. (t.y.). *Türk Dil Kurumu* içinde. http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_bts&arama=kelime&guid=TDK.GT.S.5a316b71a3f5a9.95753211 sayfasından erişilmiştir.
- Lavy, I. (2006). A case study of different types of arguments emerging from explorations in an interactive computerized environment. *Journal of Mathematical Behaviour*, 25, 153-169.
- Milli Eğitim Bakanlığı (2018). Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programı: 9-12. Sınıflar. Ankara.
- Miyakawa, T. (2002). Relation between proof and conception: the case of proof for the sum of two even numbers. In *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME-26*, 21–26, Norwich.
- Pedemonte, B. (2002). *Relation between argumentation and proof in mathematics: Cognitive unity or break?* In J. Novotna (Ed.), *Proceedings of the 2nd Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 70–80). Marienbad.
- Pedemonte, B. (2003). What kind of proof can be constructed following an abductive argumentation? *European Research in Mathematics Education III*, 28 February-3 March.
- Pedemonte, B. (2007a). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematic*, 66, 23-41.
- Pedemonte, B. (2007b). *Structural relationships between argumentation and proof in solving open problems in algebra*. *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education/European Research in Mathematics Education (CERME 5)*, 22-26 February, Larnaca/Cyprus, 643-653.
- Pedemonte, B. (2008). Argumentation and algebraic proof. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 40, 385-400.

- Pedemonte, B. & Martinez, M. V. (2014). Relationship between inductive arithmetic argumentation and deductive algebraic proof. *Educational Studies in Mathematics*, 86, 125-149.
- Proof. (n.d.). *Merriam-Webster Dictionary* online. Retrieved from <https://www.merriam-webster.com/dictionary/proof>
- Polya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Tall, D. (1998). *The cognitive development of proof: is mathematical proof for all or for some*. Paper presented at the UCSMP Conference. Chicago University
- Toulmin, S. (1958). *The uses of argument*. UK: Cambridge University.
- Wood, T. (1999). Creating a context for argument in mathematics class. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30 (2), 171-191.



GAZİLİ OLMAK AYRICALIKTIR..