GAZİ ÜNİVERSİTESİ

Gazi

1926

TT-FBD İÇİN FREKANS ALANINDA ÇALIŞAN UYARLANABİLİR DENKLEŞTİRİCİ TASARIMI

Nuri Hakan EKMEKCİ

DOKTORA TEZİ

ELEKTRİK ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EYLÜL 2018

Nuri Hakan EKMEKCİ tarafından hazırlanan "TT-FBD İÇİN FREKANS ALANINDA ÇALIŞAN UYARLANABİLİR DENKLEŞTİRİCİ TASARIMI" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Elektrik Elektronik Mühendisliği Ana Bilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman:

Elektrik Elektronik Mühendisliği Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum. ….…………………..

Başkan:

Elektrik Elektronik Mühendisliği Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum. ….…………………..

Üye:

Elektrik Elektronik Mühendisliği Ana Bilim Dalı, Hacettepe Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum. ….…………………..

Üye:

Elektrik Elektronik Mühendisliği Ana Bilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum. ….…………………..

Üye:

Elektrik Elektronik Mühendisliği Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum. ….…………………..

Tez Savunma Tarihi: 23/09/2018

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Doktora Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

………………………

Prof. Dr. Cevriye GENCER

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Nuri Hakan EKMEKCİ
23/09/2018

TT-FBD İÇİN FREKANS ALANINDA ÇALIŞAN UYARLANABİLİR DENKLEŞTİRİCİ TASARIMI

(Doktora Tezi)

Nuri Hakan EKMEKCİ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Eylül 2018

ÖZET

Haberleşme teknolojilerinde gerçekleşen gelişmeler sonucunda, günümüzde kullanmakta olduğumuz haberleşme hızları çok yüksek seviyelere ulaşmış, kullanıcı başına Gb/s mertebesine ulaşmıştır. Bu denli yüksek hızlara ulaşılması ile beraber, haberleşmenin güvenilirliğinde ortaya çıkan en önemli sorunlardan biri olan, semboller arası girişim etkisi daha şiddetli hale gelmekte ve sistem performansını olumsuz yönde etkilemektedir. Bu sorunu çözmek için geleneksel olarak, zaman bölgesinde çalışan denkleştiriciler kullanılmaktadır. Ancak, zaman bölgesinde çalışan denkleştiricilerin en önemli dezavantajı, haberleşme hızının artması ile işlemsel karmaşıklığın doğru orantılı olarak artmasıdır. Bu sorunun çözümü için, denkleştirme işlemi zaman bölgesi yerine frekans bölgesinde yapılmaktadır. İşlemci teknolojisinde yaşanan gelişmeler ve hızlı Fourier dönüşüm algoritmaları sayesinde, denkleştirme işleminin karmaşıklık seviyesi önemli ölçüde azalmaktadır. Ayrıca, denkleştirme işleminin frekans bölgesinde gerçekleştirilmesi, zaman bölgesine göre performansı önemli ölçüde arttırmaktadır. Bu çalışmada, yüksek hızlı haberleşme sistemleri için yeni uyarlanabilir frekans bölgesi denkleştirici yapıları geliştirilmiştir. Denkleştirme işlemi için hem doğrusal, hem de karar geri besleme yapıları göz önüne alınmıştır. Söz konusu denkleştiricilerin geliştirilmesinde komşu frekans noktalarındaki ilintisellik kullanılmıştır. Geliştirilen algoritmaların zamanla hızlı değişim gösteren Rayleigh sönümlü kanallarda, geçmişte önerilen diğer uyarlanabilir frekans bölgesi denkleştiricilere göre daha başarılı olduğu, yapılan bilgisayar benzetim çalışmaları ve teorik çalışmalar ile gösterilmiştir. Son olarak, yeni bir frekans bölgesi karar geri besleme algoritması geliştirilmiştir. Bu algoritmanın, literatürde önerilmiş olan frekans bölgesi uyarlanabilir karar geri besleme algoritmasına göre 5dB'lik, doğrusal denkleştiricilere göre ise 9dB'lik bir kazanç sağladığı yapılan çalışmalar sonucu görülmüştür. Tez kapsamında önerilen algoritmaların işlemsel karmaşıklık seviyesinin geleneksel olarak kullanılan algoritmalardan bir miktar yüksek olduğu, ancak elde edilen semboller arası girişim etkisini giderme performansında görülen artış göz önüne alındığında, geliştirilen algoritmaların, geniş bant kablosuz haberleşme sistemleri için kullanılabilecek bir seçenek olduğu değerlendirilmektedir.

Bilim Kodu	:	90523
Anahtar Kelimeler	:	Uyarlanabilir denkleştirme, frekans bölgesi denkleştirme
Sayfa Adedi	:	252
Danışman	:	Doç. Dr. Özgür ERTUĞ

ADAPTIVE FREQUENCY DOMAIN EQUALIZER DESIGN FOR SC-FDE

(Ph. D. Thesis)

Nuri Hakan EKMEKCİ

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

September 2018

ABSTRACT

Thanks to the development of communication technologies, today's communication systems reached high levels of speed, as such they are able to deliver Gb/s connection speed per user. However, by reaching such a high level of speed, intersymbol interference, which is one of the most important problems affecting the reliability of communication becomes more serious. This intersymbol interference adversely affects system performance. Traditionally, time domain equalizers are used to solve this problem. However, one of the most serious disadvantages of time domain equalizers is tremendous increase in the computation of equalizer coefficients with the increase of communication speed. Equalization could be performed in frequency domain instead of time domain to solve this complexity problem. As a result of improvement in processor technology and thanks to the fast Fourier transform method, the complexity level of equalization is decreased remarkably. Besides, implementing equalization in frequency domain has the effect of performance increase compared to time domain. In this work, new frequency domain adaptive equalizer structures are developed. Both, linear and decision feedback equalizer structures are considered. In developing these structures, correlation between neighbor frequency points are utilized and due to this correlation it is shown that, developed equalizer's performance are greatly enhanced compared to other proposed algorithms in past. As a last thing, a new frequency domain decision feedback algorithm is proposed. This algorithm has 5dB signal to noise improvement compared to newly proposed counterpart. Also, it has 9dB improvement over linear equalizer structures as a a result of research activities. Proposed algorithms are shown to have some complexity level rise compared to traditional ones but this level is affordable, considering performance benefits. When comparing complexity level of newly proposed frequency domain decision feedback equalizer, our proposed algorithm has similar complexity. That is why, it is believed that proposed algorithms are possible options that could be used in broadband wireless communication systems.

Science Code	: 90523
Key Words	: Adaptive Equalization, Frequency Domain Equalization
Page Number	: 252
Supervisor	: Doç. Dr. Özgür ERTUĞ

TEŞEKKÜR

Tez çalışmalarım sırasında bana desteğini esirgemeyen danışman hocam sayın Doç. Dr. Özgür ERTUĞ'a, tez izleme komitelerinde bulunan sayın hocalarım Prof. Dr. Erkan AFACAN'a ve Doç. Dr. Murat H. SAZLI'ya, savunma jürime katılan sayın Doç. Dr. Cenk TOKER ve Doç. Dr. Ertuğrul AKSOY'a değerli katkılarından dolayı teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca, bu süreçte yanımda olan ve göstermiş olduğu anlayış, destek ve özellikle doktora sürecinde beni her zaman cesaretlendiren ve bu tezin hazırlanması için beni gayretlendirip destek olan sevgili eşim Özge Tayfur EKMEKCİ'ye, ailemizin neşe kaynağı, gülüşüyle, bana her şeyi unutturan oğlum Alper EKMEKCİ'ye teşekkür ederim.

Beni yetiştiren, bu günlere getiren, ve destekleyen babam Celal EKMEKCİ, ve annem Bahtiyar EKMEKCİ'ye ve verdiği nasihatler ile bana yol gösteren abim Prof. Dr. Bülent EKMEKCİ'ye ve tezime yardıma dokunan ismini sayamadığım herkese teşekkür ederim.

Tezim, kısa süre önce, zamansız kaybettiğim, ihtiyacım olduğu her zaman yanımda bana destek olan, yardımsever, gülüşü ve sevecenliği ile insanın içini ısıtan, iyi kalpli sevgili abim Günhan Murat EKMEKCİ ve sevgili babam Celal EKMEKCİ anısına ithaf edilmiştir. Huzur içinde uyuyun.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

Sayfa

Sayfa

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge **Sayfa**

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil **Sayfa**

Şekil **Sayfa**

Şekil **Sayfa**

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\approx$	yaklaşık eşit
$*$	konvolüsyon
$(\ )^*$	karmaşık eşlenik işlemi
$(\ )^{\boldsymbol{T}}$	matris veya vektör transpoz alma
$(.)^{\boldsymbol{H}}$	matris/vektör karmaşık eşleniği ve transpozu
$\mathbb{C}^{\boldsymbol{mxn}}$	mxn karmaşık sayı uzayı
$\mathbb{E}\{\ \}$	beklenen değer işlemi
$\otimes$	dairesel konvolüsyon işlemi
$\Vert..\Vert$	vektör normu
$\boldsymbol{\alpha_n(t)}$	çok yollu iletim n. yol kazancı
$\boldsymbol{\beta}$	RLS algoritması unutma faktörü
$\boldsymbol{\gamma}$	güç kestirim unutma faktörü değeri
$\boldsymbol{\delta(t)}$	birim dürtü fonksiyonu
$\boldsymbol{\mu}$	uyarlanabilir algoritma basamak büyüklüğü
$\boldsymbol{\mu^o\ [n]}$	en uygun basamak büyüklüğü
$\boldsymbol{\sigma_n}^{\boldsymbol{2}}$	EBGG gücü (varyansı)
$\boldsymbol{\sigma^2_{n^o}}$	ölçüm gürültüsü gücü (varyansı)
$\boldsymbol{\lambda}$	Lagrange vektörü
$\boldsymbol{\phi_D}$	Doppler etkisi faz kayması (Hz)
$\boldsymbol{\tau_n(t)}$	çok yollu iletim n. yol gecikme değeri (s)
$\boldsymbol{\rho_{-i}}$	i kadar önceki frekansnoktası ile ilinti değeri
$\boldsymbol{\Delta f}$	TT-FBD alt taşıyıcı bant genişliği
$\boldsymbol{\Delta W_k[n]}$	katsayının en uygun değerden sapma değeri
$\boldsymbol{\nabla J_k[w,n]}$	$J_k[\boldsymbol{w},n]$, $\boldsymbol{w}$ vektörüne göre gradyantı
$\boldsymbol{\frac{\partial f(x,\mu)}{\partial \mu}}$	$f(x,\mu)$ fonksiyonunun μ'ye göre kısmi türevi
$\boldsymbol{\theta_i}$	faz değeri

Simgeler	Açıklamalar
$\boldsymbol{\xi_k}[\boldsymbol{n}]$	n. frekans noktası OHK (durağan kanal)
$\boldsymbol{\varsigma_k^{LMS}}[\boldsymbol{n}]$	n. nokta OHK (zamanlan değişen kanal)
$\boldsymbol{\xi^{o,FB-DD}}[\boldsymbol{n}]$	doğrusal denkleştirici için EDOHK
$\boldsymbol{\xi^{o,FB-KGB}}[\boldsymbol{n}]$	KGB denkleştirici için EDOHK
$\boldsymbol{\xi^{o}}[\boldsymbol{n}]$	en uygun ortalama hata karesi (EDOHK)
$\boldsymbol{\xi_k}^{\boldsymbol{GNLMS}}[\boldsymbol{n}]$	GNLMS k. blok, n. frekans noktası OHK
$\sum_{i=a}^{b}$	toplam sembolü
$\prod_{l=a}^{b}$	çarpım sembolü
$\mathbb{p}$	ZB çapraz ilinti vektörü
$\mathbb{R}$	ZB öz ilinti matrisi
$\mathbb{w}$	ZB en uygun denkleştirici vektörü
$\boldsymbol{A}^{+}$	A matrisinin sanal tersi
$\boldsymbol{B^{o}}[\boldsymbol{n}]$	en uygun FD-KGB geri besleme katsayısı
$\boldsymbol{B_k}[\boldsymbol{n}]$	FD-KGB denkleştirici, geri besleme katsayısı
$\boldsymbol{B_c}$	tutarlı bant genişliği (Hz)
$\boldsymbol{B_{c,\%90}}$	%90 ilintisellik tutarlı bant genişliği (Hz)
$\boldsymbol{B_{c,\%50}}$	%50 ilintisellik tutarlı bant genişliği (Hz)
c	ışık hızı
$\widetilde{\boldsymbol{d}}[\boldsymbol{n}]$	zaman bölgesinde denkleştirilmiş sinyal
dB	Desibel
$\boldsymbol{diag}\{\boldsymbol{x}\}$	köşegeni x olan köşegen matris
$\boldsymbol{d_k}$	zaman bölgesi vektörü veya matrisi
$\boldsymbol{e}[\boldsymbol{n}]$	n. adımdaki zaman bölgesi hata sinyali
$\boldsymbol{E_k}^{\boldsymbol{a}}[\boldsymbol{n}]$	soncul hata
$\boldsymbol{E_k}^{\boldsymbol{p}}[\boldsymbol{n}]$	öncül hata
$\mathbf{f_c}$	taşıyıcı frekans (Hz)
$\mathbf{f_D}$	Hz cinsinden Doppler kayma frekansı
$\boldsymbol{F}$	Ayrık fourier dönüşüm matrisi
$\boldsymbol{F^{o}}[\boldsymbol{n}]$	en uygun FD-KGB doğrusal katsayısı
$\boldsymbol{F_k}[\boldsymbol{n}]$	FD-KGB denkleştirici, doğrusal katsayısı
$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{t};\boldsymbol{\tau})$	zamanla değişen kanal birim dürtü tepkisi

Simgeler	**Açıklamalar**
Hz	Hertz
$\boldsymbol{H_k[n]}$	kanalın frekans bölgesi kestirim değeri
$\boldsymbol{H_k^o}$	ZD kanalın frekans bölgesi vektörü
$\boldsymbol{I}$	birim matris
$\boldsymbol{J^{FB-DD}}$	FB- DD maliyet fonksiyonu
$\boldsymbol{J^{FB-KGB}}$	FB- KGB maliyet fonksiyonu
$\boldsymbol{J^{ZB-DD}}$	ZB-DD maliyet fonksiyonu
$\boldsymbol{J^{ZB-KGB}}$	ZB-KGB maliyet fonksiyonu
$\boldsymbol{J_k[n]}$	uyarlanabilir algoritma maliyet fonksiyonu
m/s	metre/saniye
kbps	kilo bit per second
$\lim\limits_{k\to\infty}$	limit işlevi
$\boldsymbol{L(t)}$	çok yollu iletim t anındaki toplam yol sayısı
$\boldsymbol{m}$	GNLMS ve GRLS pencere boyut parametresi
$\boldsymbol{M_{GNLMS}[n]}$	GNLMS n. frekans nok. ayarsızlık değeri
$\boldsymbol{N_{SYM}}$	bir bloktaki sembol sayısı
$\boldsymbol{N_B}$	bir çerçevedeki blok sayısı
$\boldsymbol{N_{CP}}$	dönel ön ek sembol sayısı
$\boldsymbol{N_{training}}$	eğitim için kullanılan blok sayısı
$\boldsymbol{\wp^{r,d}(k)}$	ZB'de r ve d arasındaki k. çapraz ilinti değeri
$\boldsymbol{p_{k,(D,X)}[n]}$	D ve X arasındaki FB'de çapraz ilinti
$\boldsymbol{P_k[n]}$	NLMS ve GNLMS kestirim güç değeri
$\boldsymbol{P_h(\tau)}$	Güç gecikme dağılımı
$\boldsymbol{\Re^r(k)}$	r sinyalinin k. özilinti değeri
$\boldsymbol{R_h(t;\Delta t;\tau_1;\tau_2)}$	kanalın zamanla değişen özilinti fonksiyonu
$\boldsymbol{Re\{\ \}}$	gerçek değer alma işlemi
$\mathbf{T_C}$	tutarlılık zaman aralığı
$\mathbf{T_s}$	sembol dürtü süresi
$\mathbf{T_m}$	güç gecikme dağılımının en yüksek süresi
$\boldsymbol{Tr\{\ \}}$	matris iz alma işlemi
$\boldsymbol{v}$	mobil abone hızı (m/s)

Simgeler	**Açıklamalar**
$\mathcal{W}$	bant genişliği (Hz)
w	ayrık zaman fourier dönüşüm frekansı (Hz)
$\boldsymbol{w^o[n]}$	ZB en uygun DD vektörü n. değeri (Wiener)
$\boldsymbol{W^o[n]}$	FB en uygun DD n. katsayısı (Wiener)
$\boldsymbol{W_k[n]}$	FB DD n. katsayısı
$\boldsymbol{Z_{k,x}[n]}$	x sinyalinin özilinti değeri tersi

Kısaltmalar	**Açıklamalar**
2G	2nd Generation
3G	3rd Generation
4G	4th Generation
5G	5th Generation
3GGP	3rd Generation Partnership Project
4G LTE-A	4G LTE-Advanced
AZFD	Ayrık zaman Fourier dönüşümü
AMPS	Advanced Mobile Phone System
BPSK	Binary Phase Shift Keying
BHO	Bit hata oranı
CDMA	code division multiple access
DCT	ayrık kosinüs dönüşümü
DD	doğrusal denkleştirici
DFBÇ	dikgen frekans bölme çoğullama
DÖ	dönel ön ek
DÖÇ	dönel ön ek çıkarma
DÖE	dönel ön ek ekleme
DFBÇ	dikgen frekans bölgesi çoğullama
DFBÇE	dikgen frekans bölgesi çoklu erişim
EDGE	Enhanced Data Rates for GSM Evolution
EDOHK	En Düşük Ortalama Hata Karesi
EYO	En Yüksek Olabilirlik

Kısaltmalar	**Açıklamalar**
EUAÇ	En Uygun Altı Çözüm
EBGG	Eklenebilir Beyaz Gauss Gürültüsü
ETSI	European Telecomm. Standards Institute
FB	Frekans bölgesi
FBD	Frekans bölgesi denkleştirme
FB-LMS	Frekans bölgesi LMS
FB-NLMS	Frekans bölgesi NLMS
FB-RLS	Frekans bölgesi RLS
Gb/s	1 saniyede $1x10^9$ bit gönderim hızı
GBD	geniş bağlamda durağan
GBD-İS	geniş bağlamda durağan-ilintisiz saçılma
GNLMS	Generalized Normalized Least Mean Squares
GPRS	Global Packet Radio System
GNLMS	GNLMS-Yapılandırılmış kanal kestirimi
GPRS	Global Packet Radio System
GRLS	Generalized Recursive Least Mean Squares
HFD	Hızlı Fourier Dönüşümü
HSPA	High speed packet access
KGB	Karar Geri Besleme
LMS	Least Mean Square
LMS-YKK	LMS-yapılandırılmış kanal kestirimi
LTE	long term evolution
NLMS	Normalized Least Mean Squares
NMT	Nordic Mobile Tephone
OFDM	orthogonal frequency domain multiplexing
OFDMA	orthogonal frequency domain multiple access
OHK	ortalama hata karesi
RLS	Recursive Least Squares
SGO	Sinyal Gücü Gürültü Gücü Oranı
SAG	Semboller Arası Girişim
SC-FDE	single carrier-frequency domain equaliation
SC-FDMA	SC -frequency domain multiple access

Kısaltmalar	Açıklamalar
THFD	Ters Hızlı Fourier Dönüşümü
TT-FBD	Tek Taşıyıcılı-frekans Bölgesi Denkleştirme
TT-FBÇE	Tek Taşıyıcılı-Frekans Bölgesi Çoklu Erişim
OHK	Ortalama Hata Karesi
QAM	Quadrature Amplitude Modulation
QPSK	Quadrature Phase Shift Keying
TACS	Total Access Communication System
WCDMA	Wideband CDMA
ZB	Zaman Bölgesi
ZBD	Zaman Bölgesi Denkleştirme
ZB-LMS	Zaman Bölgesi LMS
ZB-NLMS	Zaman Bölgesi NLMS
ZB-RLS	Zaman Bölgesi RLS

1. GİRİŞ

Modern haberleşme sistemlerinde, ilk ortaya çıkışından itibaren, büyük gelişim ve değişim gösterdiği ve bunun sonucunda kullanıcılara birçok yeni hizmetlerin sağlanmaya başladığı görülmektedir. İlk teknolojik haberleşme sistemleri olarak kabul edilen telgraf ve telefon gibi telli haberleşme sistemleri kullanıcılara uzak noktalardaki diğer kullanıcılar ile metin ve ses şeklinde iletişime geçme imkânı sunmuştur. Bu sistemlerde, verici tarafından üretilen elektriksel sinyal bakır kablo vasıtası ile uzak alıcıya, yaklaşık anlık olarak gönderilmesi sağlanmıştır. Telli sistemlerin en önemli dezavantajları, yüksek sistem tesis maliyeti ve kullanıcıların sunulan hizmetlerden faydalanabilmesi için sabit bir noktada bulunma gerekliliğidir. Marconi tarafından hava üzerinden elektromanyetik dalgalar vasıtası ile ilk kablosuz telgraf sistemi geliştirilerek metin bazlı kablosuz haberleşme imkanı gösterilmiştir. Söz konusu gelişim ile beraber, haberleşme için kablo tesis maliyeti ortadan kalkmakta ve sistem maliyetinin önemli oranda azaltılmaktadır. Böylece kablosuz haberleşme sistemleri, hızlı bir gelişim süreci sonunda metinsel iletişime ek olarak, ses ve görüntü haberleşme geresinimine yönelik ilk aşamada radyo, televizyon ve telsiz gibi sistemler ortaya çıkmıştır. Ancak, radyo ve televizyon sistemleri kullanıcılara tek yönde iletişim sağlamakta olup, alıcıdan (televizyon, radyo vb.) vericiye doğru bir iletişim bulunmamaktadır.

Kullanıcılara ilk çift yönlü ses alışverişini sağlayan kablosuz sistem telsiz sistemleri olmuştur. Telsiz sistemleri başlangıçta polis, ambulans, itfaiye, vb. kamu teşkilatları tarafından kendi aralarındaki sesli haberleşme imkânı sağlamak üzere kullanılmıştır. Bunların dışında, 1946'dan itibaren 0G (zero generation) olarak anılan, ticari mobil haberleşme sistemlerinin atası olarak gösterilen sistemlerde kullanılmıştır. Bu sistemler analog tabanlı idi. Ayrıca, mobil ekipman ağırlığı çok yüksek olup, sistem kapasitesi oldukça sınırlıydı. Söz konusu sistemlere örnek olarak MTS (Mobile Telephony System), IMTS (Improved Mobile Telephony System) ve AMTS (Advanced Mobile Telephony System) verilebilir. Örnek olarak Amerika New York şehrinde 1960'larda kurulan ticari kablosuz sistemi aynı anda sadece 13 adet ses haberleşmesinin yapılmasına imkan vermekte ve kullanıcılar arama yapabilmek için uzun süre beklemeleri gerekmekte idi. Bu sistemler şehrin yüksek bir noktasına yerleştirilen çok güçlü vericiler ile radyo kapsama sağlamaktadır. Bu sebeple, 0G (zero generation) mobil haberleşme sistemlerine hücresel öncesi sistemlerde denilmektedir. 0G sistemlerinde, mobil haberleşme sistemi için ayrı bir şebeke kurulmayıp, hizmetler PSTN (Public Switched Telephone Network) üzerinden sağlanmakta idi. Toplam abone sayıları Amerika çapında 5000 abone civarında olup aboneler arama yapabilmek için uzun süre beklemeleri gerekmekte idi. Ayrıca geliştirilen 0G mobil ekipmanlarının yüksek ağırlığından dolayı çoğunlukla araba ve kamyonlarda kullanılmaktaydı.

1980'lerden itibaren ise daha yüksek kapasiteye sahip ticari mobil haberleşme sistemleri ortaya çıkmaya başlamıştır. Kapasite artışının sağlanması için Bell şirketi tarafından geliştirilen hücresel verici sistemi prensibi kullanılmıştır. Hücresel sistemler, kapsamanın sağlanacağı hedef alanın radyo kapsaması için bir adet çok güçlü verici yerine, çok daha düşük güçte birçok sayıda verici kullanılması ve vericilerde frekans yeniden kullanımı adı verilen, kaynakların tekrar kullanılması prensibine dayanmaktadır. Bu teknik sayesinde, 0G sistemlerde yaşanan kapasite sorunu çözülmeye çalışılmıştır. Bu kapsamda geliştirilen sistemler 1G (1^{st} Generation) ticari mobil haberleşme sistemi olarak anılmaktadır. 1G ticari haberleşme sistemlerinin en önemlileri Amerika'da AMPS (Advanced Mobile Phone System), İngiltere'de TACS/ETACS (Total Access Communication System), İskandinav ülkelerinde NMT (Nordic Mobile Telephony), Almanya'da C-450, Japonya'da JTAC (Japanese Total Access Communication), NTT (Nippon Telegraph and Telephony) sayılmaktadır. Görüldüğü üzere çeşitli ülkeler kendine ait sistem geliştirmiş olup, söz konusu sistemler birbirleri ile uyumlu değillerdi. 1G sistemleri, 0 G sistemlerinde olduğu gibi analog tabanlı olup, geliştirilen sistemlerin performansı ve kapasitesi için 0 G sistemlerine göre artış sağlanmasına karşın, halen ihtiyacı karşılamakta uzaktaydı. Analog haberleşme tekniği kullanılmasından dolayı, alıcı-verici arasında oluşan girişimden kaynaklanan sinyal bozulması yüksek seviyede olmaktadır. Bundan dolayı sistem kullanıcıları görüşme esnasında yeterli kalitede hizmet alamamaktaydılar. Ayrıca, 1G sistemlerinde hava üzerinden gönderilen sinyal şifrelenmediğinden başka kişiler tarafından dinlenilmesi kolay bir sistem idi.

1990'lardan itibaren entegre devre teknolojisinde yaşanan gelişmeler sayesinde, sayısal tabanlı mobil haberleşme sistemleri çeşitli ülkelerde (Amerika, Japonya, Avrupa) farklı özelliklere sahip sistemler geliştirilmeye başlanmıştır. Örneğin Amerika'da IS-54 (Interim Standard-54), IS-95 (Interim Standard-95), IS-136 (Interim Standard-136) ve Avrupa'da GSM (Global Sysytem for Mobile Communications). Sayısal tabanlı ticari mobil sistemleri 2G (2^{nd} Generation) olarak adlandırılmaktadır. Avrupa Birliği ülkelerinde 1G sistemlerinde karşılaşılan uyumsuzluk problemlerini aşmak, kullanıcıların mobil ekipmanlarını Avrupa ülkeleri arasındaki seyahatlerinde değiştirme zorunluluğu ortadan kaldırmak yani karşılıklı işletilebilirliği sağlamak ve analog mobil haberleşme sistemlerinde yaşanan kapasite sorununu ortadan kaldırmak için GSM (Groupe Speciale Mobile) adı verilen sayısal tabanlı sistem geliştirilmiştir. GSM ortaya çıkışından itibaren sadece Avrupa'da değil, tüm dünyada tercih edilerek kullanılmaya başlandığından ismi Gezgin Haberleşme için Küresel Sistem (Global System for Mobile Communications) olarak değiştirilmiştir. GSM sisteminin bu denli yaygın hale gelmesi ile ETSI (European Standards Institute) ve daha sonra 3GPP (3rd Generation Partnership Project, 2008) tarafından, donanım üreticilerinin birbirleri arasında uyumunu sağlamak üzere üretilen GSM donanımlarının sağlaması gereken teknik özellikleri geliştirilmiştir.

İnternet hizmetlerinin 1990'lı yıllarda ortaya çıkışından itibaren ses haberleşmesi yanında veri haberleşmesi gittikçe önem kazanmaya başlamış, günümüzde ise veri haberleşmesi ses haberleşmesine göre daha baskın hale gelmiştir. Evlerde modemler vasıtası ile telefon şebekeleri üzerinden internet kullanımı hızla yaygınlaşmıştır. İnternet kullanımının evlerde sabit telefon hattı yerine kullanıcılara daha serbest iletişim sağlayan kablosuz haberleşme sistemleri üzerinden de internet ve veri alışverişinin sağlanması gerekmiştir.

Ancak, 90'lı yıllarda kullanımda olan 1G ve 2G kablosuz sistemlerinin ortaya çıkışındaki temel hedef kullanıcılara ses haberleşmesini sağlamak olmuştur. Bundan dolayı, kablosuz haberleşme sistemleri üzerinde veri haberleşmesini sağlamak için çeşitli modifikasyonların yapılması gerekmiştir. Örnek olarak, GSM ile sayısal veri haberleşme imkânı sistem üzerine yapılan GPRS (Global Packet Radio System) ve GPRS bağlantı hızını iyileştirmeye yönelik EDGE (Enhanced Data Rates for GSM Evolution) eklentilerinin geliştirilmesi ile sağlanmıştır. GPRS/EDGE özellikli GSM sistemleri 2,5G ve 2,75G olarak bilinmektedir. Yapılan geliştirmeler ile GPRS ve EDGE sistemleri için tepe hızları sırasıyla 150 kbps ve 475 kbps seviyelerine ulaşılmıştır. Görüldüğü üzere, GSM üzerinden veri iletimi GPRS ve EDGE eklentileri ile başarılmış olsa da, veri haberleşmesi için özellikle hız konusunda kabiliyeti kısıtlı olup; kullanıcı başına kb/s seviyelerinde kapasite sağlamaktadır.

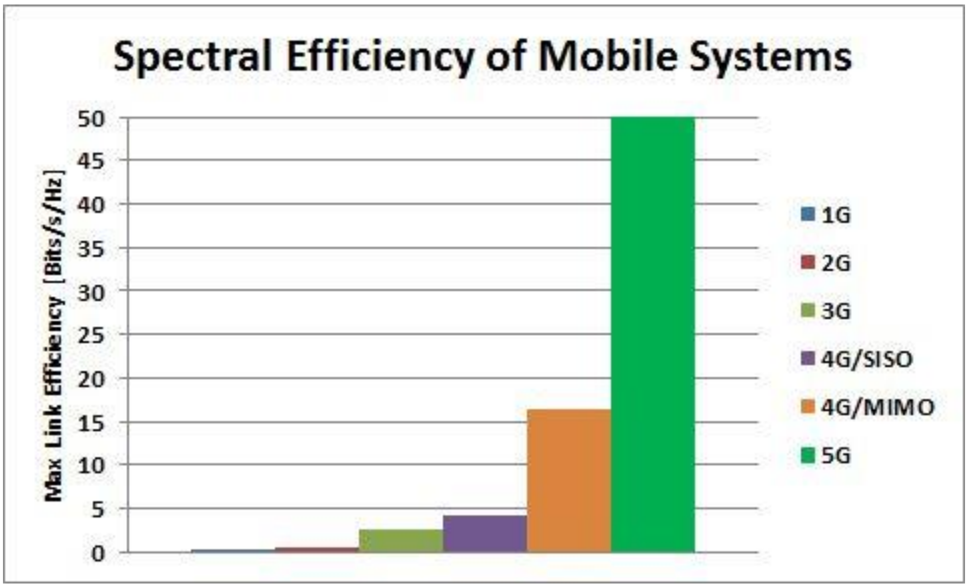
Mobil kullanıcıların gittikçe artan geniş bant internet (video, resim, vb.) ve veri haberleşme isteğini karşılamakta yetersiz kalan 2G GSM sistemi yerine, 2000'li yıllardan itibaren 3GGP (3rd Generation Partnership Project) ve 3GPP2 (3rd Generation Partnership Project 2) organizasyonları tarafından dünya çapında kullanılabilecek 3. nesil haberleşme sistemlerinin standartları hazırlanmaya başlanmış ve hız ve veri iletimi yönünden 2G sistemlerine göre çok daha iyileştirilmiş olan 3G (3rd generation) kablosuz haberleşme sistemleri ortaya çıkmıştır. İlk 3G sistemleri, Avrupa ülkelerinde 3GPP tarafından standartlaştırılan WCDMA (Wideband Code Division Multiple Acess) ile Kuzey Amerika, Japonya, Çin ve Kore'de 3GPP2 tarafından standartlaştırılan CDMA-2000 adı verilen sistemler tesis edilmeye başlanmıştır. 3G sistemi başlangıçta veri haberleşmesi için 2Mb/s tepe hızına ulaşabilecek şekilde tasarlanmış, sonrasında HSPA (High Speed Packet Access) ve HSPA+ olarak adlandırılan iyileştirmeler ile kullanıcılara toplam 42 Mb/s hızında bağlantı imkânı sunmuştur. ÇGÇÇ (Çok Girişli Çok Çıkışlı) teknolojilerin geliştirilmesi ile mobil aboneden baz istasyonuna ve baz istasyonundan mobil aboneye bağlantı hızı sırasıyla 168Mb/s ve 22Mbps seviyesine ulaşmıştır. Günümüzde kullanılmaya başlanan 4/4,5/4,9G mobil haberleşme sistemleri ile tepe hızları üst bağlantı için 150Mb/s alt bağlantı için ise 1000Mb/s seviyelerine ulaşmıştır. Son zamanlarda standartlaştırılmaya ve çeşitli ülkelerde tesis edilmeye başlanan 5G sistemleri ile Gb/s hızının ötesinde, spektrumu çok daha verimli kullanan, yoğun ÇGÇÇ (massive MIMO) teknolojisi ortaya çıkmıştır. Ayrıca geliştirilen sistem sadece insanların değil makinelerin de birbirleri arasında iletişim sistemi olarak kullanılması planlanmaktadır. Bu sayede, örneğin araçların birbirleri ile iletişime geçmek suretiyle, otonom araç ve trafik sistemleri ve nesnelerin interneti geliştirilmeye başlanmıştır. Otonominin sağlanması için araçların ve trafik yönetim sisteminin birbirleri arasında 5G kablosuz haberleşme teknolojisi ile iletişim kurması hedeflenmektedir (Baltar, Mueck, ve Sabella, 2018; Wang, Mao ve Gong, 2017).

Mobil haberleşme sistemlerinde yaşanan hızlı gelişime bağlı olarak, günümüzde dünyadaki toplam mobil abone sayısı, sabit telli telefon abone sayısından daha yüksek seviyeye çıkmıştır. Aradaki farkın gelecekte daha da artacağı öngörülmektedir. Kablosuz haberleşme sistemlerinin tesis maliyetinin, kablolu sistemlere göre daha düşük olmasından dolayı, bazı ülkelerde telli telefon tesis edilmeden, mobil haberleşme sistemleri tesis edilmiştir.

Haberleşme sistemlerinin gelişimine bakıldığında, gittikçe artan sayıda mobil abonenin daha da artan şekilde veri kullanım eğilim olduğu görülmektedir. Günümüzde artık cep telefonlarından video gibi yüksek veri hızı gereksinimi duyan uygulamalar yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu nedenle en büyük gelişmenin veri aktarım hızındaki yükselme eğiliminin olduğu görülmektedir. Kablosuz haberleşme sistemlerinde, veri hızı arttırılması, mobil abonelerin artan veri alış verişi ihtiyacının karşılanabilmesi ve makinelerin de birbirleri arasında kablosuz olarak haberleşebilmesini sağlamak için daha büyük frekans bant genişliğine ihtiyaç duyulmaktadır. Veri hızını arttırmak için, kullanılabilecek en basit yol veri alış verişinde kullanılan dürtü genişliklerinin gittikçe azaltılmasıdır. Gönderilen sembol süresi ile bant genişliği ters orantılı olduğundan, bu durumda daha büyük bant genişliğine ihtiyaç duyulmaktadır. Ancak kullanılabilecek bant genişliği kıt ve farklı birçok sistemin kablosuz olarak kullanıldığı göz önüne alındığında, mevcut bant genişliğinin daha verimli kullanılması, yani birim bant genişliği üzerinden gönderilen veri miktarının arttırılması zorunluluk haline gelmiştir. Örnek olarak 2G sistemlerinde birim bant genişliği başına iletilen bit miktarı 0.8bps/Hz iken 4,5G sistemlerinde bu değer 15bps/Hz seviyesine ulaşmıştır. Yeni nesil 5G ve ötesi sistemlerde 50bps/Hz seviyesine ulaşılması hedeflenmektedir. Şekil 1.1'de değişik kablosuz haberleşme teknolojilerinin spektrum verimlik değerleri gösterilmektedir. Görüldüğü üzere zaman içerisinde meydana gelen teknolojik gelişmelerden dolayı, birim bant üzerinden gönderilen veri miktarı gittikçe artmaktadır. Verimlilik seviyesinin yükseltilebilmesi için, M-QAM (M-alfabe boyutlu Quadrature Amplitude Modulation) gibi daha verimli modülasyon teknikleri geliştirilen kablosuz haberleşme sistemlerinde kullanılması gerekmektedir. M-QAM kullanımıyla, birim bant genişliği üzerinden gönderilen veri miktarı artarken, EBGG (eklenebilir beyaz gauss gürültüsü) ve haberleşme kanalında meydana gelen bozucu etkilere dayanımı özellikle modülasyon alfabe boyutu, M'in artması ile önemli oranda düşmektedir. Günümüzde kullanılan mobil haberleşme sistemleri hem daha büyük bant genişliği-daha düşük dürtü süresi- hem de M-QAM gibi bozucu etkilere karşı dayanım seviyesi düşük ancak bant genişliği verimlilik seviyesini arttıran modülasyon teknikleri kullanılmaktadır. Örnek olarak, 4G haberleşme sistemlerinde en yüksek 64-QAM modülasyon düzeyi kullanılmaktadır. Şu anda geliştirilme aşamasında olan 5G haberleşme sistemlerinde, daha da düşük dürtü süreleri ile 256-QAM gibi 64-QAM'dan daha üst seviyelerde modülasyon kullanılması planlanmaktadır.

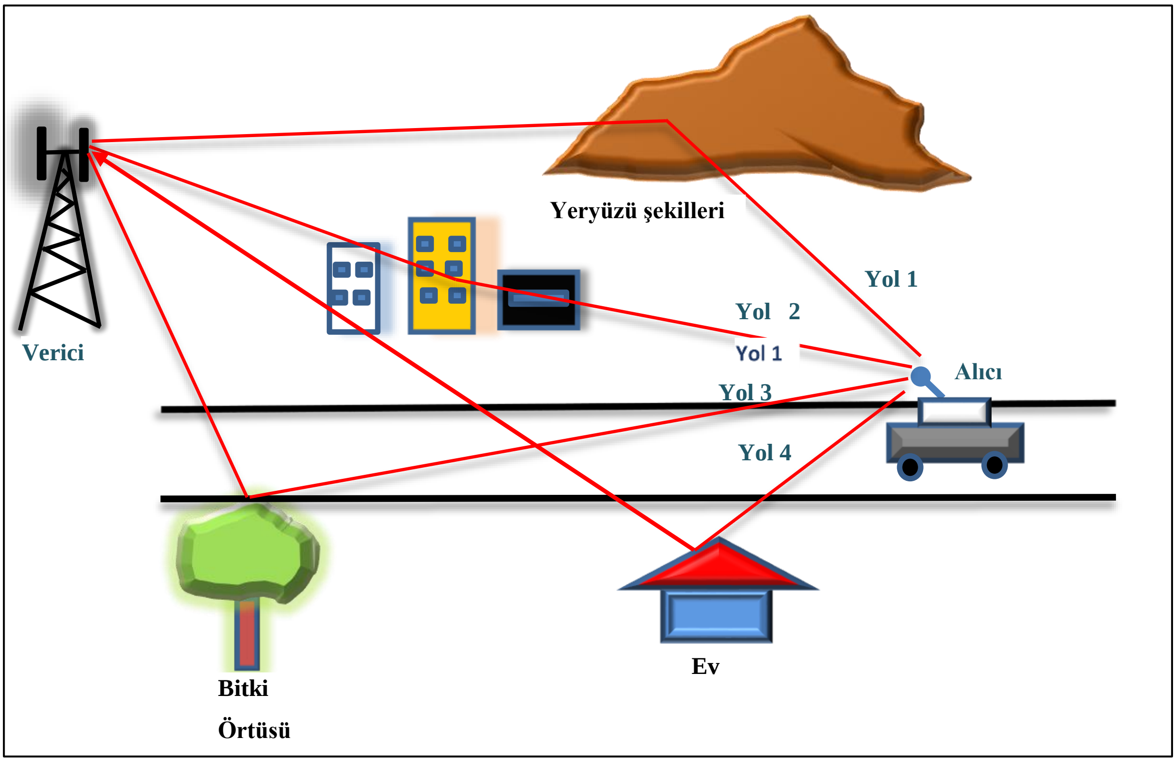
Kablosuz haberleşme sistemlerinin hızında ve kullanılan modülasyon seviyelerinde görülen önemli düzeydeki artış, beraberinde çözülmesi gereken sorunları da ortaya çıkarmıştır.

Şekil 1.2'de gösterildiği üzere kablosuz sayısal haberleşme sisteminde, vericiden gönderilen sinyal, alıcı ve verici arasındaki çeşitli yapılardan yansıyan sinyallerin toplamı olarak alıcıya ulaşmaktadır. Bu şekilde sinyalin yansıma ile alıcıya birden fazla yoldan ulaşarak toplanmasına *çok yollu iletim* adı verilmektedir. Her yansıma sonucu alıcıya ulaşan sinyal, farklı uzunlukta yol kat ettiğinden, yansıyan sinyalin genlik ve fazı farklı olarak ulaşmaktadır. Ayrıca, alıcı verici arasında göreli hareket olması halinde, alıcı ve verici arasında alınan sinyaldeki yansıma sayısı ve miktarı zaman ile değişim gösterdiğinden, çok yollu iletim ile toplamda alınan sinyalin gücü üzerinde dalgalanma görülmektedir. Alıcıdaki toplam sinyalde, vericiden gönderilen sinyalin zamanda değişik gecikmelerinin yani gönderilen farklı anlardaki sembollerin toplamı olmaktadır. Bu durum zamanda farklı sembollerin birbiri üzerine binerek örtüşmesine neden olmakta ve alıcının gönderilen sayısal sembolü doğru şekilde kestirim yapılmasına engel olmaktadır. Meydana gelen söz konusu bozucu etkiye *semboller arası girişim* (SAG) adı verilmektedir. SAG etkisi haberleşme hızına bağlı olarak değişim göstermektedir. Burada en önemli faktör vericiden gönderilen sembol süresi, T_s olmaktadır. T_s ne kadar düşük, yani haberleşme hızı yüksek, ise SAG etkisinin şiddeti de o denli yüksek olmakta ve haberleşmenin güvenilirliğini azaltmaktadır.



Şekil 1.1. Mobil haberleşme sistemlerinde spektrum verimliliği

Kablolu haberleşme sistemlerinde, vericinin gönderdiği sinyal kontrollü bir ortam içerisinden iletildiği için, alıcı- verici arasındaki mesafeden kaynaklanan sinyal bozulması (çok yollu iletimden kaynaklanan sönümleme, distorsiyon vb.) makul oranda, daha öngörülebilir şekilde meydana gelmekte ve göreceli daha basit yöntemler kullanılarak söz konusu bozucu etkiler giderilebilmektedir. Kablosuz haberleşme sistemlerinde ise, vericinin gönderdiği sinyal elektromanyetik dalgalar vasıtası ile daha kontrolsüz bir ortam olan hava üzerinden iletildiğinden, alıcı ve verici arasındaki coğrafi ve insan yapımı yapıların oluşturduğu çok yollu iletimden dolayı gönderilen sinyalde oluşan bozulma çok daha şiddetli ve öngörülmesi daha zor olmaktadır. Özet olarak, haberleşme kanalındaki çok yollu iletimden dolayı, gönderilen veri, haberleşme kanalından geçtiğinde SAG etkisine maruz kalmakta; bu durumda da alıcıda gönderilen verinin kestirimi zorlaşmakta ve alıcının gönderilen veriyi yanlış demodüle etmesine ve hatanın artmasına neden olmaktadır.



Şekil 1.2. Kablosuz haberleşme sistemlerinde çok yollu iletim

Ayrıca, kablosuz haberleşme sistemlerinde kullanımı gittikçe yaygınlaşan M-QAM gibi SAG etkisine daha duyarlı modülasyon tekniklerinin kullanımından dolayı, bu etkinin haberleşmenin üzerindeki etkisi daha da önemli hale gelmektedir. Bu nedenle, haberleşme hızının güvenli bir şekilde artmasını sağlamak için, bozucu SAG etkisinin giderilmesi veya tolere edilebilir seviyelere çekilmesi gerekmektedir.

Alıcı tarafta bahse konu SAG etkisini gidermek/azaltmak için denkleştirici adı verilen verilen yapının kullanılması gerekmektedir. Denkleştirici yapısı ilk olarak Tufts (1965) tarafından önerilmiştir. Önerilen yapı zamanda çalışan sıfıra zorlamalı (zero forcing-peak distortion) prensibine dayanmaktadır. Sonrasında yapılan iyileştirmeler sonucu OHK (ortalama hata karesi) tabanlı (Tufts, 1966) denkleştirme yapısı ortaya çıkmış ve sıfıra zorlamalı prensibe dayanan denkleştiricilere göre daha iyi performans sağladığı görülmüştür. Temel olarak denkleştirici yapısında, kanalın zamanda birim dürtü tepkisinin tersi bulunarak, alınan sinyal üzerindeki SAG etkisini gidermeye çalışmaktadır. Denkleştirici yapısında yukarıda belirtilen gelişime bağlı olarak, telli telefon şebekelerinde modem vasıtası ile kullanılan veri haberleşmesinin hızının önemli oranda artması sağlanmış, bir telefon hattından iletilen veri miktarının 1200 bps seviyesinden, denkleştirici kullanımı ile 64 kbps seviyelerine ulaşması mümkün olmuştur.

Denkleştirici yapısı ilk ortaya çıktığında, haberleşme sisteminin alıcı tarafında kullanılan en uygun denkleştirici katsayıları, haberleşmenin başlangıcında hesaplanmakta, veri alış verişi süresince aynı denkleştirici katsayıları kullanılmakta idi. Kablolu sistemler gibi zamanla değişmeyen veya değişim hızı çok düşük olan kanallarda anlatılan şekilde denkleştirme işlemi başarılı olmuştur. Ancak, özellikle kablosuz haberleşme sistemlerinde alıcı ve verici arasındaki kanal durumunda zaman ile değişimler meydana gelmektedir. Ek olarak kullanıcıların hareketli olmasından dolayı, SAG etkisi zamanla değişim gösterme miktarı, telli haberleşme sistemlerine göre daha fazla olmaktadır.

SAG etkisinin giderilmesi özellikle, mobil abone tarafından kullanılan el terminalinin işlemci gücü ve enerji kapasitesi, baz istasyonuna göre daha kısıtlı olduğundan, mobil el terminalinde kullanılacak denkleştiricinin düşük işlemsel karmaşıklık ve yüksek performansa sahip olması gereklidir. Ayrıca alıcının haberleşme esnasında zamanla meydana gelen değişimlere karşı kendini uyarlaması ve en iyi performansı sağlaması gerekmektedir.

Zamansal değişimin algılanması ve denkleştirici katsayıların hesaplanabilmesi için kendi kendine öğrenme kabiliyetine sahip uyarlanabilir sinyal işleme teknikleri kullanılmaktadır. Bu kapsamda, SAG etkisini giderecek sıfıra zorlamalı (zero forcing) uyarlanabilir denkleştirici yapısı ilk olarak Lucky (1965) tarafından ortaya atılmıştır. Uyarlamalı sinyal işleme tekniklerinin avantajı, en uygun denkleştirici katsayısının hesaplanması için doğrudan, özellikle haberleşme hızının artması ile daha uzun denkleştirici gereksiniminin oluşmasından dolayı, yüksek boyutlarda matris tersi alma işleminin yapılmasına gereksinim duymaması, bu sayede işlemsel karmaşıklığın azaltılmasını sağlaması ve zamansal değişimleri algılama kapasitesine sahip olmasıdır.

Gittikçe artan haberleşme hızı ile birlikte, önemi daha da artan zamanla değişen kanallardaki SAG etkisinin giderilmesi için, yeni bir yapıya ihtiyaç duyulmuştur. Bu kapsamda önerilen yapı, denkleştirmenin zaman bölgesi (ZB) yerine frekans bölgesinde (FB) yapılmasıdır. FB denkleştirme işlemi, yarı iletken ve entegre devre teknolojilerinde yaşanan gelişmelerden ötürü, günümüzde ZB denkleştirme işlemine göre özellikle uzun kanal birim dürtü tepkisine sahip kanallarda işlem gereksinimi açısından önemli avantajlara sahip olmaktadır.

4G LTE-A (4^{th} Generation Long Term Evolution-Advanced) ile 5G kablosuz haberleşme teknolojilerinde baz istasyonu ile mobil abone ve mobil abone ile baz istasyonu arasındaki iletişimde, sırasıyla DFBÇE (dikgen frekans bölmeli çoklu erişim) ve TT-FBÇE (Tek taşıyıcılı-frekans bölgesi çoklu erişim) frekans bölgesinde çalışan erişim teknikleri kullanılmaktadır. DFBÇE ve TT-FBÇE tekniklerinde, alıcı tarafta SAG etkisini gidermek üzere frekans bölgesinde çalışan denkleştirici kullanılmaktadır. Denkleştirici algoritmaları alıcı tarafta kullanılması gereken işlemci gücü üzerinde oldukça büyük yük oranına sahiptir. Bu nedenle, hem düşük işlemci gücü, hem de yüksek performans gereksiniminin sağlanması için düşük işlemsel karmaşıklığa sahip denkleştirici kullanılması gerekmektedir.

Tez kapsamında yapılan çalışmalarda, SAG etkisinin düşük işlemsel karmaşıklık seviyesine sahip, zaman ile değişim gösteren Rayleigh sönümlü kanallarda, geleneksel olarak kullanılan ZB yerine, FB çalışacak yeni uyarlanabilir denkleştirici yapılarının geliştirilmesi hedeflenmiştir. Tezin giriş bölümünde, ele alınan problemin ve öneminin ortaya konulması amaçlanmaktadır. İlk olarak SAG etkisi ve Rayleigh sönümlü kablosuz haberleşme kanalları açıklanacak, sonrasında ise ZB ve FB çalışan denkleştiriciler anlatılacak ve aralarındaki farklar ile frekans bölgesinde denkleştirme işleminin yapılması halinde ede edilen avantajlar belirlenecektir.

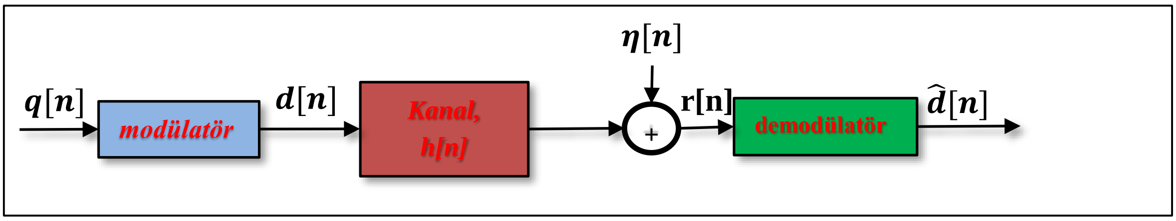
Semboller arası girişim

Şekil 1.2 ile gösterilen çok yollu iletişim kanalı üzerinden çalışan sayısal haberleşme sisteminin temel bant sayısal eşlenik blok modeli Şekil 1.3 ile verilmektedir. Verici ilk olarak, 0 ve 1'lerden oluşan sayısal veri, $q[n]$'i istenilen modülasyon türü ile modüle (BPSK, QAM, QPSK vb.) ederek, modüle edilmiş veri dizisi $d[n]$'i haberleşme kanalı üzerinden alıcıya ulaştırmaktadır. Sayısal eşlenik birim dürtü tepkisi $h[n]$ olan kanal üzerinden geçen modüle edilmiş sinyal, alıcıya EBGG ile ek bozulmaya uğramaktadır. Haberleşme kanalı ve EBGG ile bozulmaya uğramış sinyalin ifadesi,

$$r[n] = \sum_{i=0}^{L} d[n-i]h[i] + \eta[n] = d[n] * h[n] + \eta[n] \tag{1.1}$$

şeklindedir. Burada $*$ konvolüsyon işlemini, L kanalın eşlenik sayısal birim dürtü tepkisinin uzunluğunu, $\eta[n]$ ortalaması sıfır, varyansı σ_η^2 olan EBGG'yi göstermektedir. Sonrasında, kanalda bozulmaya uğramış ve gürültü eklenmiş sinyal, $r[n]$ alıcı tarafından demodüle edilerek, vericiden gönderilen özgün veriyi kestirmeye çalışmaktadır.

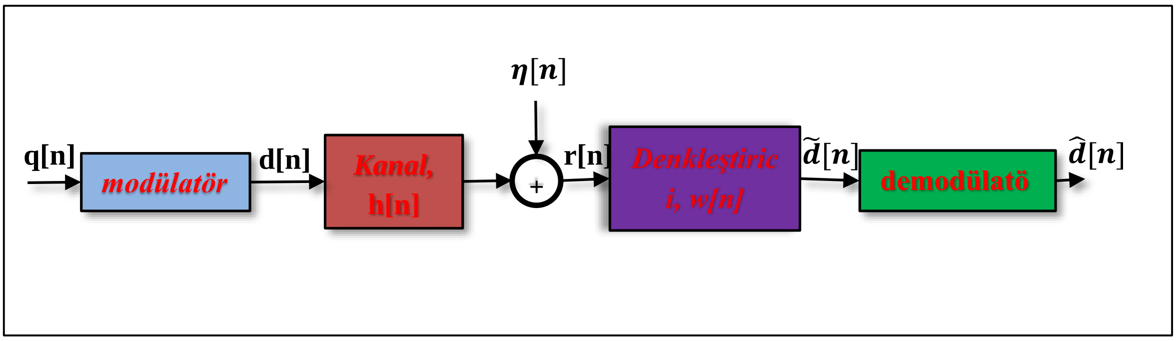
Şekil 1.3 ile gösterilen yapı ile alıcı, $r[n]$ sinyalini doğrudan herhangi bir işlem gerçekleştirmeden demodüle etmekte ve gönderilen verinin kestirimeyeye çalışmaktadır. Bu şekilde alınan sinyal demodüle edildiğinde, kanalın birim dürtü tepkisine bağlı olarak, kestirim yapılan sayısal veri, $\hat{d}[n]$'de hata düzeyi artmakta ve alıcıda gönderilen verinin güvenilir şekilde algılanmamasına neden olmaktadır.



Şekil 1.3. Temel bant sayısal haberleşme sistemi

Bu etkinin giderilmesi için, alıcı tarafta denkleştirme işleminin yapılarak, gönderilen sinyal üzerindeki bozucu etkiden arındırılmış sinyali, $\tilde{d}[n]$ elde edilmesi gerekmektedir. Temel olarak denkleştirme, alınan sinyalde haberleşme kanalından kaynaklanan bozulmanın tersine çevirerek gidermesi olarak ifade edilebilir. Alınan sinyal denkleştirici ile filtrelendiğinde, verici tarafından gönderilen verilere alıcıda olabilecek en iyi şekilde kestirim yapması, idealde eşit olması sağlanmalıdır. Bu koşulu sağlayan en uygun denkleştirici katsayıları, alıcı tarafından kullanılarak, alınan sinyal, $r[n]$ üzerinde uygulanması ve SAG'den arındırılması gerekmektedir.

Denkleştirme işleminin gerçekleştirildiği bölge açısından ZB ve dönüşüm bölgesi denkleştirici olmak üzere iki farklı seçenek bulunmaktadır. ZB denkleştirici yapısında, alınan sinyal üzerinde uygulanan denkleştirici algoritması tamamen ZB'de gerçekleştirilmektedir. Dönüşüm bölgesi denkleştirici algoritmalarda ise, alınan sinyal ilk olarak istenilen dönüşüm (DFT, DCT, Wavelet vb.) ile farklı bir bölgedeki değerleri elde edilmekte ve bu bölgede denkleştirme işlemi yapıldıktan sonra, denkleştirilen sinyal ters dönüşüm vasıtası ile tekrar zaman bölgesine dönüştürülmektedir. Denkleştirme işleminin zaman yerine farklı bir bölgede uygulanması, performans, karmaşıklık vb. hususlarda avantajlı olduğu yapılan çeşitli çalışmalarda gösterilmiştir (Falconer, Ariyavisitakul, Benyamin-Seeyar, ve Eidson, 2002). Tez kapsamında ele alınan denkleştirici yapısı, dönüşüm bölgesinde çalışan, özel olarak FB'de çalışan uyarlanabilir denkleştirici yapısıdır. Dönüşüm algoritması olarak FB'nin seçilmesi ile alınan sinyalde bulunan gürültünün dikgenleştirilmesi bu sayede de elde edilen performansın iyileştirilmesi sağlanmaktadır. Ayrıca, günümüzde kullanılmakta olan yeni nesil 4G sistemleri ve geliştirme aşamasında olan 5G sistemlerinde de yukarıda belirtilen avantajlarından dolayı, denkleştirme için FB kullanılmaktadır.



Şekil 1.4. ZB denkleştirici kullanan temel bant sayısal haberleşme sistemi

Şekil 1.4'te ZB denkleştirici kullanan genel sayısal haberleşme alıcı-verici yapısı gösterilmektedir. Bu yapıda, bozulmaya uğramış alınan sinyal, $r[n]$ demodüle edilmeden önce, denkleştirici algoritmasına uygulanmakta ve çıkışta denkleştirilmiş sinyal $\tilde{d}[n]$ elde edilmektedir. Sonrasında denkleştirilmiş (SAG etkisi giderilmiş/azaltılmış) sinyal, $\tilde{d}[n]$, demodülasyon işlemine tabi tutulmaktadır. Sonrasında alıcı gönderilen veriyi kestirmeye çalışarak $\hat{d}[n]$ elde edilmektedir.

Giriş bölümünün ilerleyen kısımlarında, kablosuz haberleşme sistemlerinde SAG etkisinin modellemesine ve haberleşme kanalında meydana gelen zamansal değişimin açıklanmasına yönelik bilgi verilecek, sonrasında ZB ve FB denkleştiriciler kısaca tanımlanarak, avantaj ve dezavantajları belirlenerektir.

Rayleigh sönümleme ve Doppler kayması

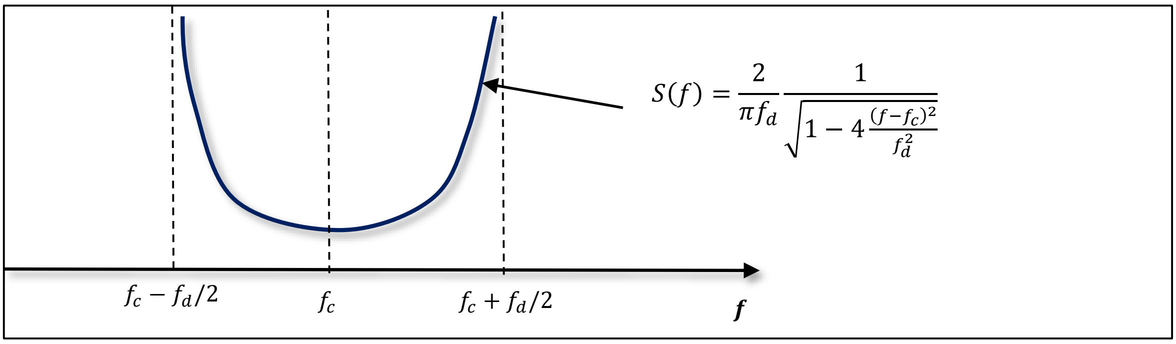
Zamanla değişen SAG etkisinin alınan sinyal üzerinde meydana getirdiği bozulma etkisini modellemek üzere alıcı verici arasındaki göreceli hareketin göz önüne alınması gerekmektedir.

İlk aşamada, Doppler kayma etkisi anlatılacak, sonrasında ise kanalın zamansal değişimi ile çok yollu iletim modellemesi anlatılacaktır.

Haberleşme kanalında, alıcı-verici arasındaki göreceli hareketten kaynaklanan, alıcı tarafta alınan sinyalin frekansında meydana gelen değişime Doppler kayması adı verilmektedir. Meydana gelen Doppler kayması, f_D, (Rappaport, 2007:179-185)

$$f_D = \frac{f_c v}{c} \tag{1.2}$$

şeklinde bulunmaktadır. Burada v m/s cinsinden hızı, f_c haberleşmede kullanılan Hz cinsinden taşıyıcı frekansı, c ise m/s cinsinden ışık hızını ifade etmektedir. Eşitlikten görüldüğü üzere Doppler kayma frekansı, alıcı ve vericinin göreceli hareket hızı ve haberleşme için kullanılan frekansın artması ile doğru orantılıdır. Doppler etkisinden dolayı, hareket eden alıcı, gönderilen sinyal frekansı değişmiş şekilde algılamakta, ayrıca gönderilen alınan sinyalin bant genişliği artmış olarak algılanmasına neden olmaktadır. Söz konusu değişim ve genişleme miktarı, doppler kayma frekansı (1.2) ile verilen f_D'dir. Şekil 1.5 ile modüle edilmemiş f_c frekansına sahip sinyalin tek yola sahip sönümlü kanal üzerinden gönderildiğinde v hızında hareket eden alıcıda alınan sinyal spektrumunda meydana gelen Doppler frekans kayması gösterilmektedir.



Şekil 1.5. Doppler frekans kayması

Yukarıda tek yollu sönümlü ve zaman ile değişen Rayleigh kanalın modellenmesi verilmiştir. Tek yollu, zaman ile değişen Rayleigh sönümlü kanalın birim dürtü tepkisi,

$$h(t;\tau) = \alpha(t)e^{j(\phi_D - 2\pi f_c \tau(t))}\delta(t-\tau(t)) \tag{1.3}$$

ile ifade edilmektedir. Burada, $\alpha(t)$ kanalın zamana bağlı kazanç değerini, $\tau(t)$ yolun uzunluğuna ve zamana bağlı olarak meydana gelen gecikme süresini, $\delta(t)$ birim dürtü fonksiyonunu göstermektedir.

Şekil 1.2. Kablosuz haberleşme sistemlerinde çok yollu iletim'de gösterildiği üzere, çok yollu iletimden ötürü alınan sinyal birçok farklı bileşenden oluşmaktadır. Birim dürtü tekisi ayrık dürtülerden oluşan çok yollu haberleşme kanalının sönümlü ve zamanla değişen kanalın t anındaki temel bant eşlenik modeli, $h(t;\tau)$,

$$h(t;\tau) = \sum_{n=0}^{L(t)} \alpha_i(t)e^{j(\phi_D - 2\pi f_c \tau_n(t))}\delta(t-\tau_n(t)) \tag{1.4}$$

şeklinde ifade edilmektedir. Burada, $\alpha_n(t)$ kanaldaki n. yola ait zamana bağlı kazanç değerini, $\tau_n(t)$ n. yolun uzunluğuna ve zamana bağlı olarak meydana gelen gecikme süresini, $\delta(t)$ birim dürtü fonksiyonunu, $L(t)$ t anındaki toplam yol sayısını göstermektedir. Doppler etkisinden kaynaklanan faz kayması, $\phi_D = 2\pi f_D$ şeklinde olup, $\phi_D - 2\pi f_c \tau_n(t)$ terimi, sinyalin yol ve Doppler'den kaynaklanan fazındaki toplam değişimi göstermektedir. Görüldüğü üzere oluşan faz değişimi, kullanılan taşıyıcı frekans f_c ile doğru orantılıdır. Taşıyıcı frekans, f_c, Ghz seviyesinde kullanılması ile kullanıcının küçük mesafe içerisindeki hareketleri, her bir yoldan alınan sinyal fazının büyük değişim göstermesine neden olmaktadır. Bu sebeple, alınan sinyal gücü kısa zaman süresi içerisinde büyük dalgalanma göstermektedir.

(1.4) temel bant eşlenik modelinden görüldüğü üzere, farklı zamanlardaki kanal birim dürtü tepkisinin toplam yol sayısı, faz değişimi farklılık göstermektedir. Şekil 1.4 ile örnek bir kanalın birim dürtü tepkisinin zaman ile değişimi gösterilmektedir. Zamanla değişen sönümlü kanallarda hem kanalın kazanç değeri, hem de toplam yol sayısı ile herbir yolun gecikme miktarı zaman ile değişim göstermektedir.

Alıcıda, (1.4) ile birim dürtü tekisi verilen sönümlü, zamanla değişen çok yollu kanal üzerinden gönderilen sinyalin alıcıdaki ifadesi,

$$r(t) = h(t;\tau) * d(t) \tag{1.5}$$

şeklinde olmaktadır. Görüldüğü üzere alınan sinyal, zamanla değişen kanal birim dürtü tepkisi ile gönderilen sayısal sembol, $d(t)$ konvolüsyonu olmaktadır. Eş. (1.4) ve (1.5)'den görüldüğü üzere alınan sinyaldeki her bir yol, farklı yapılardan alıcıya farklı sönümleme miktarı, $\alpha_n(t)$ ve farklı gecikme süreleri $\tau_n(t)$ ulaşmaktadır. Eğer kanala ait en yüksek gecikme değeri $T_m = maks(\tau_n(t))$ sayısal alıcı-verici sisteminde kullanılan sembol dürtü süresi, T_s'den oldukça küçük ise ($T_m \ll T_s$), alıcıya vericiden gönderilen veri sadece bir yoldan ulaşmaktadır. Bu durumda, kanal dar bant sönümlü (narrow band fading) kanal olarak adlandırılır ve frekans bölgesinde verici tarafından gönderilen sinyal, $d(t)$, sabit kazanç ve faz farkı ile çarpılmış şekilde alıcıya ulaşmaktadır. Aksi durumda ise ($T_s >> T_m$), kanal geniş bant sönümlü, frekans seçici kanal (wideband fading/frequency selective fading) olarak adlandırılır. Frekans seçici kanallarda, vericiden gönderilen sinyal, kanaldan geçtiğinde her frekans noktasında farklı bir kazanç değeri ve faz farkı ile çarpılır.

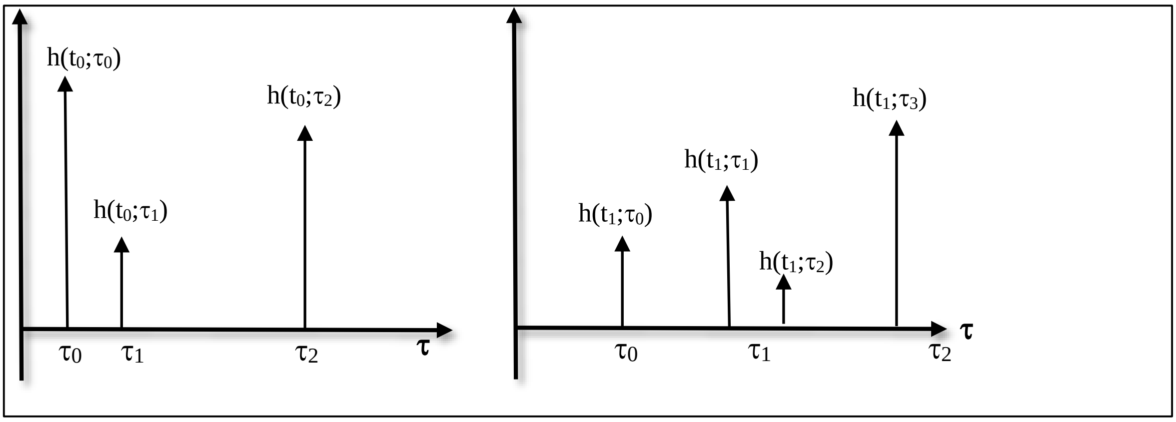
Haberleşme kanalındaki her farklı yola ait kazanç değeri, $\alpha_i(t)$ ve faz kayması, $2\pi f_c \tau_n(t)$ değerlerinin belirlenebilmesi için alıcı ve verici arasındaki tüm yapıların, bitki örtüsü vb. bilgilerin bilinmesi ve her yola ait teorik hesaplamaların yapılarak modellenmesi gerekmektedir. Basit geometrik durumlar için söz konusu hesaplamalar yapılabilmekte iken, şehir vb. ortamlar için bu yaklaşım yapılamayacak derecede karmaşık hale gelmektedir. Zamanla değişen sönümlü kanallar, önceden davranışları öngörülebilir ve belirlenebilmesi mümkün olmadığından, istatistiki olarak davranışının modellenmesi ve karakterize edilmesi gerekmektedir.

Zaman ile değişen sönümlü kanal modellenme için farklı seçenekler bulunmaktadır. Söz konusu seçenekler: Ricean sönümleme, Rayleigh sönümleme ve Nakagami sönümleme. Ricean sönümleme modelinde alıcı ve verici arasında doğrudan bir görüş hattı olduğu varsayılır. Diğer yandan, Rayleigh sönümlemede alıcı ve verici arasında görüş hattı olmayıp, alınan sinyal çeşitli yapılardan yansıyan sinyallerin toplamı olarak ifade edilmektedir. Bu bakımdan Rayleigh sönümleme şiddeti, Ricean sönümleme şiddetine göre daha fazla olmaktadır. Nakagami sönümleme modelinde ise, daha esnek ve seçilebilir bir model oluşturulmuş, bazı durumlarda yetersiz kalan Rayleigh sönümleme modeline göre daha şiddetli sönümleme modeli kullanım gereksinimi karşılanmıştır.

Tez kapsamında yapılan çalışmalarda Rayleigh sönümleme modeli kullanılmış olup ilerleyen aşamalarında gösterilmekte olan uyarlamalı sinyal işleme teknikleri Ricean ve Nakagami sönümleme modellerinde de kullanılmaya uygundur.

Şekil 1.6 ile zaman ile değişen bir kanalın birim dürtü tepkisi gösterilmektedir. Görüldüğü üzere, kanal değişik zamanlarda hem birim dürtü sayısı hemde kazanç değerleri değişime uğramaktadır.

Alıcı ve verici arasında görüş hattı olmayan durumda, çeşitli nesneler ve coğrafi şekillerden yansıyan sinyalin sönümlenmenin karakteriszasyonu için istatistiki olarak Rayleigh sönümleme modeli yaygın kullanılma sahiptir. Rayleigh sönümleme modelinde Geniş Bağlamda Durağan-İlintisiz Saçınma (GBD-İS) yaklaşımı kullanılmaktadır. GBD-İS kabulü durumunda, her yola ait kazanç değeri, h_i ortalaması sıfır, varyansı ${\sigma_{h_i}}^2$ olan, Gauss dağılımlı, karmaşık sayı rasgele değişken olarak ele alınmakta ve her yolun birbirinden bağımsız olduğu varsayılmaktadır. Bu durumda, i. yolun kazanç değeri ile fazının olasılık yoğunluk fonksiyonu, $p_{\alpha_i}(\alpha)$ ve $p_{\theta_i}(\theta)$, bulunduğunda,



Şekil 1.6. Zamanla kanal birim dürtü tepkisinin değişimi

$$p_{\alpha_i}(\alpha) = \frac{\alpha}{\sigma_{h_i}{}^2} e^{-\alpha/2\sigma_{h_i}{}^2} \tag{1.6}$$

$$p_{\theta_i}(\theta) = \frac{1}{2\pi}, -\pi \leq \theta \leq \pi \tag{1.7}$$

ile ifade edilir.

İstatistiki olarak kanalın karakterizasyonunda kanalın birim dürtü tepkisinin öz ilinti fonksiyonu kullanılmaktadır (Goldsmith, 2005:64-74). Özilinti fonksiyonu, $R_h(t; \Delta t; \tau_1; \tau_2)$ kanalın, t ve $t + \Delta t$ anlarında birim dürtü tepkisinin beklenen değeri olarak ifade edilmektedir. Bu fonksiyon,

$$R_h(t; \Delta t; \tau_1; \tau_2) = E\{h(t; \tau_1) h(t + \Delta t; \tau_2)\} \tag{1.8}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. $R_h(t; \Delta t; \tau_1; \tau_2)$ öz ilinti fonksiyonu, t ve $t + \Delta t$, anlarında elde edilen birim dürtü tepkileri, $h(t; \tau_1)$ arasındaki benzerliği ölçmektedir. Kanal kısa süre diliminde GBD kabul edildiğinde, $R_h(t; \Delta t; \tau_1; \tau_2)$ öz ilinti fonksiyonu sadece zaman farkı Δt'ye bağımlı olmaktadır. Ayrıca, farklı anlardaki gecikme değerlerine, τ_1, τ_2, ait yansımalar farklı yansıtıcı nesnelerden kaynaklandığı için birbirinden bağımsız olduğu kabul edilebilir. Bu özelliğe, ilintisiz saçılma (İS-uncorrelated scattering) adı verilmektedir. Sonuç olarak GBD-İS kanalın öz ilinti fonksiyonu, $R_h(\Delta t; \tau)$ gecikme τ ve zaman farkına , Δt bağlı hale gelmektedir. $R_h(\Delta t; \tau)$ aşağıda açıklandığı şekilde kanal hakkında istatistiki bilgilerin elde edilmesinde kullanılmaktadır.

Zamanla değişen sönümlü kanalda, güç gecikme dağılımı, diğer adı ile çok yollu şiddet profili, $P_h(\tau)$ ile kanalda bulunan yansimalara ait gücü göstermektedir. Güç gecikme dağılımı, kanal özilinti fonksiyonunda $\Delta t = 0$ $(P_h(\tau) = R_h(\Delta t = 0; \tau))$ alınması ile bulunmaktadır. Örnek bir güç gecikme dağılımı Şekil 1.7 ile gösterilmiştir. Güç gecikme dağılımı sürekli zaman fonksiyonu olabileceği gibi, birim dürtülerden de oluşabilmektedir. Gecikme dağılımı alıcıya ulaşan bileşenlerin gecikmeye bağlı olarak gücünü göstermektedir.

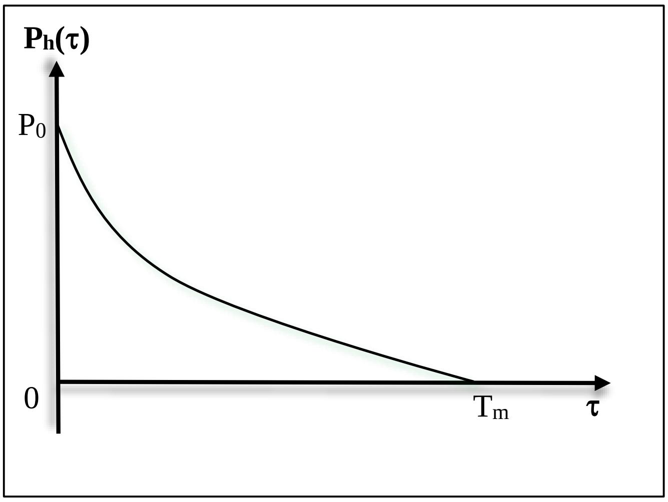
Güç gecikme dağılımından ortalama ve ortalama kök karesi (OKK) gecikme parametre değerleri, aşağıdaki şekilde hesaplanabilmektedir.

$$\mathfrak{m} = \frac{\int_0^\infty \tau P_h(\tau) d\tau}{\int_0^\infty P_h(\tau) d\tau} \tag{1.9}$$

$$\sigma_{P_h} = \sqrt{\frac{\int_0^\infty (\tau - \mathfrak{m})^2 P_h(\tau) d\tau}{\int_0^\infty P_h(\tau) d\tau}} \tag{1.10}$$

Hesaplanan $\mathfrak{m}$ ve σ_{P_h} değerleri kanalın haberleşme sistemi üzerindeki etkisi hakkında bazı bilgilerin edinilmesini sağlamaktadır. Eğer haberleşmede sembol gönderimi için kullanılan dürtü süresi, $T_s \ll \sigma_{P_h}$ ise, kanal üzerinden gönderilen semboller SAG etkisine maruz kalmaktadır. Aksi durumda, alınan sinyal sadece bir yoldan alıcıya ulaşmakta ve alınan sinyal üzerinde SAG etkisi meydana gelmemektedir.

Sönümlü kanalların bir diğer parametresi olan tutarlılık bant genişliği, B_c, iki farklı frekansta gönderilen modüle edilmemiş sinyalin kanal üzerinden geçtikten sonra alınan genlikleri arasında yüksek çapraz ilinti bulunan frekans aralığı değeridir. Bu ilinti değerinin frekansa göre değişimi, güç gecikme dağılımının Fourier dönüşümü ile elde edilmektedir. Genlik değerleri arasında çapraz ilintinin %90 ve %50 seviyeleri için tutarlılık bant genişliği, kanal güç değişimine bağlı değişkenlik göstermek ile beraber, aşağıdaki şekilde söz konusu değerlerin yaklaşık olarak,



Şekil 1.7. Güç gecikme dağılımı

$$B_{c,\%90} = \frac{1}{50\sigma_{rms}} \tag{1.11}$$

$$B_{c,\%50} = \frac{1}{5\sigma_{rms}} \tag{1.12}$$

formülleri ile yaklaşık hesaplanması mümkündür. Tutarlılık bant genişliği üzerinde kanaldan geçen sinyalin frekansı yaklaşık sabit kazanç değeri ve doğrusal faz farkı ile bozulmaya uğramaktadır. Bundan dolayı, gönderilen sinyalin bant genişliği, eğer $\mathcal{W} \ll B_c$ koşulunu sağlaması, yani sinyal bant genişliğinin tutarlılık bant genişliğinden çok daha düşük olması halinde, kanaldan geçen sinyalin tüm frekans bileşenleri sabit kazanç değeri ve doğrusal faz değişimi ile bozulmaya uğrar ve alınan sinyal üzerinde SAG etkisi meydana gelmez. Bu etkiye *düz sönümleme* adı verilmektedir. Aksi durumda ise, kanaldan geçen sinyalin frekans bileşenleri, farklı kazanç ve faz ile bozulmaya uğramaktadır. Bu durumda, sinyal frekans seçici sönümleme etkisine maruz kalmaktadır.

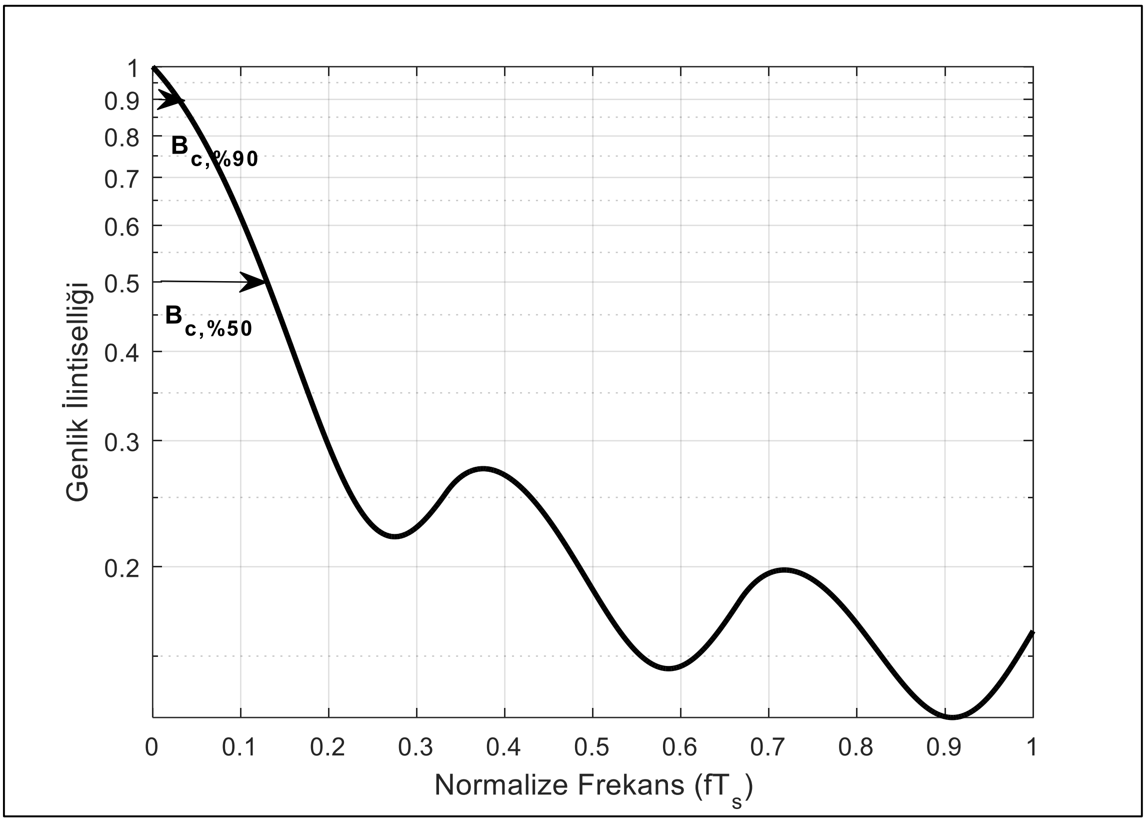
SAG etkisinin alınan sinyalin spektrumu üzerindeki etkisi açısından, toplam bant genişliği, $\mathcal{W}$ olan bir sinyal, tutarlı bant genişliği B_c olan Rayleigh sönümlü kanaldan gönderildiğinde, $\mathcal{W} < B_c$ ise, alınan sinyal $r[n] = ae^{-jb}d[n-\Delta]$ şeklinde ulaşmaktadır. Yani, $r[n]$ gönderilen sinyal $d[n]$'in sadece tek bir yoldan, sabit bir kazanç değeri a, ile çarpılmış, fazı ise sabit olarak b radyan kadar değişmiş, alıcıya ulaşana dek kat ettiği yola bağlı olarak Δ kadar gecikerek ulaşmış olacaktır. Bu şekilde sinyalin sönümlenmesine düz veya dar bant sönümleme adı verilmektedir. Tersi durumda, $\mathcal{W} > B_c$ ise, sinyali oluşturan frekans bileşenleri farklı kazanç değerleri ile çarpılacak ve alıcıda vericiden gönderilen sinyalin çok yollu iletim sonucu değişik gecikmiş hallerinin toplamı, $r[n] = \sum_i a_i e^{-jb_i} d[n - \Delta_i]$ şeklinde olacaktır. Bu tarz sönümlemeye ise frekans seçici veya genişbant sönümleme adı verilmektedir.

Şekil 1.8'de düzgün dağılımlı, 6 yollu kanal modellinin güç spektrum yoğunluğunun ilintselliği normalize frekansa bağlı olarak verilmiştir. İlintisellik hesabı için çok yollu şiddet profilinin frekans bölgesindeki genlik değerlerinin özilinti değerleri hesaplanarak yapılmıştır. (1.11) ve (1.12) ile verilen teorik hesaplamalar kullanıldığında $B_{c,\%90}$ ve $B_{c,\%50}$ değerleri sırasıyla 0.008 ve 0.08 olarak bulunmaktadır. Yapılan hesaplamaların Şekil 1.8'de verilen ilintisellik şekli ile tutarlı olduğu anlaşılmaktadır. Görebileceği üzere, $B_{c,\%90}$ daha düşük bir bant genişliğine denk gelirken, beklendiği üzere $B_{c,\%50}$ daha geniş olmaktadır. Özellikle $B_{c,\%90}$ bant genişliği için genlik ilintisellik değeri 1'e çok yakın olmakta, yani söz konusu bant genişliği içerisinde kalan frekanslar hemen hemen aynı genlik değişimi ile sönümlenmeye maruz kalmaktadır.

Alıcı-vericinin göreceli hareketinden kaynaklanan Doppler kaymasından dolayı, alınan sinyalin bant genişliği artmakta, ve zamansal olarak kanal birim dürtü tepkisi değişimini göstermektedir. Söz konusu değişimi ölçmek için tutarlılık zaman aralığı T_c, kullanılmaktadır. Tutarlılık zaman aralığı T_c, kanalın birim dürtü tepkisinin h(t;τ), sabit kaldığı zaman aralığını ifade etmektedir. Bu zaman aralığı Doppler kayma frekansına bağlı olarak, 0.423/f_d ile hesaplanabilmektedir. T_c süresinden sonra ise, kanalın birim dürtü tepkisi zamansal olarak değişime uğrayacağından, alınan sinyal gönderilen farklı bir birim dürtü etkisinde, farklı şekilde istatistiki olarak bozulmaya uğramaktadır.

Bu durumda, çok yollu-sönümlemeli ve zamanla değişen kanallarda blok tabanlı iletim ve denkleştirmenin her frekans noktasında skaler sayı çarpımı şeklinde yapılabilmesi için bir blok boyunca kanalın zamansal olarak sabit kalması gereklidir. Ayrıca, kanalda meydana gelen değişimleri yeterli doğrulukta algılayabilmek için T_c periyodunda vericinin alıcıya her iki tarafın bildiği eğitim dizisini göndermesi gereklidir. Örnek olarak TT-FBD sisteminde bu iki şartın sağlanabilmesi için, hem $N_B\left(N_{sym} + N_{CP}\right)T_s$ değerinin T_c değerinden küçük olması hem de frekans bölgesinde alt taşıyıcıların bant genişliği Δf= $\mathcal{W}/N_{SYM}$ değerinin B_c değerinden küçük olmalıdır. Blok boyunca kanalın birim dürtü tepkisinin yaklaşık olarak sabit kalması ve her alt taşıyıcı bant genişliği boyunca kanalın sabit kazanç değerine sahip olması için blok uzunluğu $\frac{T_c}{N_B T_s} - N_{CP} > N_{sym} > \frac{W}{B_c}$ şartını sağlayacak şekilde seçilmelidir. Böylece, dönel ön ek kullanılan ve blok tabanlı iletim durumunda frekans bölgesinde zamanla değişen kanalın denkleştirilmesi işlemi skaler sayı çarpımı ile yapılması sağlanmaktadır. Aksi durumda ise kanalın birim dürtü tepkisi blok zamanı boyunca zamana göre değişim gösterecektir. Ayrıca Δf>B_c olduğundan, alınan sinyalde bulunan alt taşıyıcılar komşu alt taşıyıcılar ile girişim meydana gelecektir. Bu durumda denkleştirme işleminin skaler çarpım ile yapılması mümkün olmayacak, yeterli denkleştirme performansı elde edilmesi için her frekans noktasında yeterli uzunlukta doğrusal filtre yapısının uygulanması gerekecektir. Bu durumda da frekans bölgesi denkleştirme işleminin en önemli avantajı olan düşük işlemsel karmaşıklık seviyesi özelliği ortadan kalkacak ve oldukça üst seviyelere çıkacaktır.

Örnek olarak frekans bölgesi denkleştirme kullanan 4G-LTE sistemi ele alıngında, 1.4Mhz ile 20MHz arasında değişken bant genişliğine, $\mathcal{W}$, örnekleme frekansının $f_s = \frac{1}{T_s} = 1.92MHz$ ve katları şeklinde olduğu, kullanılan çerçeve süresi olarak 0.5ms seçildiği, ve her çerçevede düşük saçılma süresine sahip kanallar için 7, yüksek saçılma süresine sahip kanallar için 6 blok kullanıldığı görülmektedir. Deneysel olarak yapılan çalışmalarda, kablosuz haberleşme kanalı OKK gecikme değerinin 1-2µs civarında olduğu belirlenmiştir. Bu durumda tutarlılık bant genişliği %90 ilinti seviyesi için hesaplandığında yaklaşık $B_{c,\%90}$ $15 - 20kHz$ olarak bulunmaktadır. 4G-LTE sisteminin tasarımında kullanıcıların 500km/s hızında haberleşmeye devam edebilmesi istenilmektedir. 500km/s hızda f_c=2Ghz taşıyıcı frekans için f_d=1kHz olmaktadır. Bu parametrelere göre $T_c = 0.423ms$ olarak bulunmaktadır. Gerekli hesaplamalar yapıldığında, N_{SYM} değerinin $\frac{0.423ms}{N_B T_s} - N_{CP} > N_{SYM} > \frac{W}{15kHz}$ şartını sağlayacak şekilde seçilmesi ile hedeflere ulaşılabildiği görülmektedir. ile 4G-LTE-A sistem parametreleri ile, belirlenen hedeflere ulaşılması için hesaplanan N_{SYM} sınır değerleri verilmektedir.



Şekil 1.8. Kablosuz haberleşme kanalı ilintiselliği

Seçilen parametrelerden ve hesaplanan sınır değerlerinden görüldüğü üzere 4G-LTE çerçeve yapısı, 500 km/saat hız desteği ve her alttaşıyıcının frekans bölgesinde skaler sayı çarpımı ile denkleştirilebilmesi için normal DÖ kullanılması halinde belirlenen hedefleri sağlayamadığı, uzatılmış DÖ kullanılması halinde ise sağladığı görülmektedir. Bu durumda 4G-LTE sisteminde yüksek hızlarda (v>120km/s) haberleşme desteği için uzaltılmış DÖ kullanılır iken, normal DÖ yapısı ise sabit ve ortalama hızlarda hareket eden abonelere hizmet vermek için kullanıldığı anlaşılmaktadır. 5G sistemleri 4G ile benzer çerçeve yapısına sahip olup alttaşıyıcı bant genişliği 15, 30, 60 ve 120kHz seçilebilecek şekilde esnek bir mimariye sahiptir.

Çizelge 1.1. 4G-LTE sistem parametreleri ve N_{sym} için hesaplanan sınır değerleri

$\mathcal{W}$ (MHz)	f_s (MHz)	N_{sym}	N_{CP} (normal/uzatılmış DÖ)	Üst Sınır $\frac{0.423ms}{N_B T_s} - N_{CP}$(normal/uzatılmış DÖ)	Alt Sınır $\frac{\mathcal{W}}{15kHz}$
1.4	1.92	128	9/32	116/128	93
3	3.84	256	18/64	232/256	200
5	7.68	512	36/128	464/512	333
10	15.36	1024	72/256	928/1024	666
15	23.04	1536	108/384	1347/1536	1000
20	30.7	2048	144/512	1856/2048	1333

Zaman Bölgesinde Denkleştirme

Başlangıçta belirtildiği üzere denkleştirme işlemi için ZB ve FB olmak üzere iki farklı seçenek mevcuttur. Bu kısımda ZB denkleştiriciler kısaca anlatılmaktadır. ZB denkleştiriciler için en iyi sonucu veren eşlenik filtre sisteminden bahsedilecek, sonrasında doğrusal ve karar geribesleme denkleştirici yapıları anlatılacaktır.

ZB bölgesinde denkleştirme işleminde SAG etkisi ile bozulmuş sinyalin demodülasyonu sonucu elde edilecek performans için Eşlenik Filtre Sınırı (EFS) bulunmaktadır (Tufts, 1965). EFS, herhangi bir denkleştiricinin ulaşabileceği en iyi performansı ifade etmektedir. Kullanılacak herhangi bir denkleştirici EFS'den daha iyi bir performans sağlayamaktadır.

Şekil 1.9'da alıcı ve vericide eşlenik filtre kullanan alıcı vericinin temel bant yapısı görülmektedir. Bu yapıda gönderilecek sayısal modüle edilmiş veri, $d[n]$, ilk olarak verici dürtü şekillendirici, $g_t(t)$, ile istenilen frekans karakteristiğine sahip olacak şekilde analog sinyale, $d(t)$, dönüştürülmektedir. Sonrasında veri birim dürtü tepkisi, $h(t)$, olan kanal üzerinden alıcıya ulaşmaktadır. Alıcıda ilk olarak alınan sinyal, birim dürtü tepkisi $g_r(t)$ olan giriş dürtü şekillendiriciden geçirilmektedir. Sonrasında örnekleme ve demodülasyon işlemleri yapılarak gönderilen verinin kestirimi yapılmaktadır. Eşlenik filtre yapısında, alınan sinyalin üzerindeki SAG etkisini gidermek için,

$$g_t(t) * h(t) * g_r(t) = \delta(t) \tag{1.13}$$

şartının saplanması gerekmektedir. Frekans bölgesinde söz konusu şart,

$$G_t(f)H(f)G_r(f) = 1 \quad (1.14)$$

halini almaktadır. Burada $G_t(f)$, $H(f)$ ve $G_r(f)$ sırasıyla verici dürtü şekillendirici, kanalın ve alıcı dürtü şekillendiricinin frekans tepkisini göstermektedir. Eş. (1.14) ile verilen şartın sağlanması ve dürtü şekillendirici çıkışında SGO oranını en yüksek seviyeye çıkarmak için,

$$|G_t(f)| = |G_r(f)| = K\frac{1}{\sqrt{|H(f)|}} \quad (1.15)$$

$$\theta_{G_t}(f) + \theta_H(f) + \theta_r(f) = 2\pi f_c t_o \quad (1.16)$$

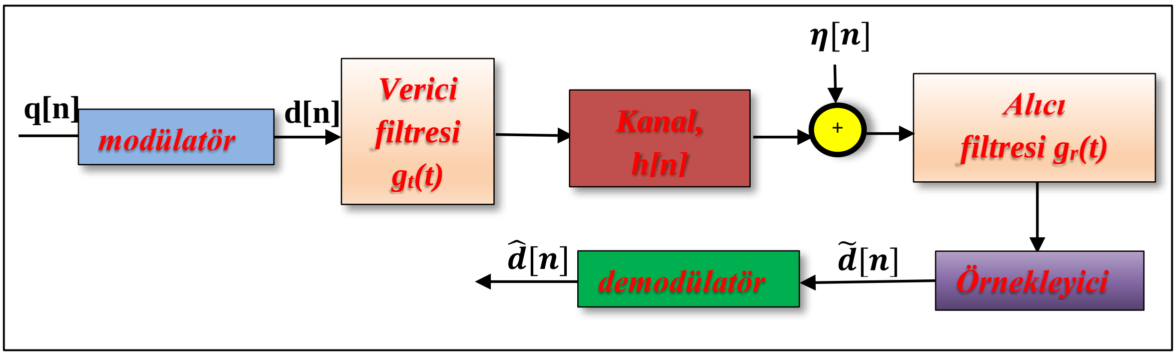
olması gerekmektedir. Burada, $|G_t(f)|$, $|G_r(f)|$ ve $|H(f)|$ sırasıyla verici filtre, alıcı filtre ve kanal frekans tepkislerine ait genlik değerini göstermektedir. $\theta_{G_t}(f), \theta_H(f), \theta_r(f)$ söz konusu filtrelerin faz tepkisini göstermektedir. t_o ise verici ve alıcıda kullanılan dürtü şekillendiricilerin gerçeklenebilmesi için (nedensellik) gerekli gecikme değerini göstermektedir.

Eş. (1.15) ve (1.16)'den görüldüğü üzere, eşlenik filtre kullanılan alıcı-verici yapısında, alıcı ve vericinin kanal birim dürtü tepkisini mükemmel olarak bilmesi, gönderilen ve alınan sinyalin kanala ait frekans tepkisinin karekökü ile filtrelemesi gerekmektedir. Bu sayede, alınan SGO maksimum seviyeye çıkarılmaktadır.

Bir diğer eşlenik filtre özelliği, kanalda zaman içerisinde değişim meydana geldiğinde, alıcı ve vericideki filtrelerinde değiştirilmesi gerekmektedir. Pratikte eşlenik filtre ile denkleştirme yapılabilmesi için söz konusu bilginin her iki tarafta bilinmesi gerektiğinden, bu yapının gerçek bir uygulamada kullanımı mümkün olmamaktadır.

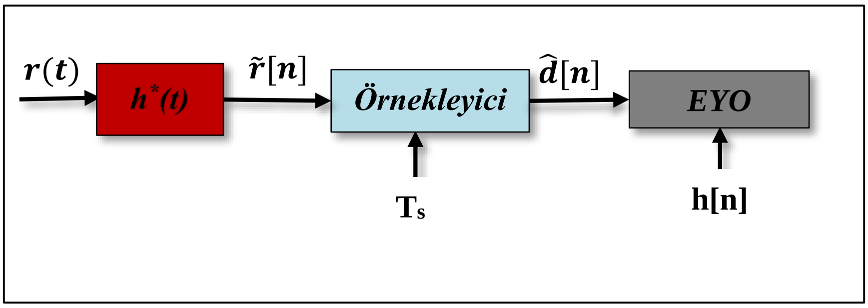
Uygulamada, SAG etkisini gidermek üzere ZB'de çalışan geleneksel denkleştirici (ZBD) yapıları kullanılmaktadır. ZBD için en iyi performansı sağlayan yapı en yüksek olabilirlik (EYO-Maximum Likelihood) algoritmasıdır. EYO algoritmasının genel yapısı Şekil 1.9 ile gösterilmektedir. EYO algoritmasında, alıcının sinyal gürültü oranını (SGO) en yüksek seviyeye çıkarabilmesi için alıcıda ilk olarak sinyalin kanala eşlenik olan filtreden geçirilmesi gerekmektedir (Tufts, 1965). Sonrasında, filtrelenen sinyal EYO algoritması ile gönderilen sinyalin kestirimi yapılmaktadır.

EYO algoritmasında, her alınan sembolden sonra, olabilecek tüm sembol değeri için aşağıdaki şekilde ilinti metriği, $İM_k$, hesaplanarak en yüksek ilinti seviyesine sahip dizi kombinasyonu kestirim dizisi olarak alınmaktadır. Her alınan sembolden sonra, $İM_k$,



Şekil 1.9. Eşlenik filtre kullanan alıcı-verici sistemi

$$İM_k = 2Re\left\{\sum_{n=0}^{k} d^*[n]\tilde{r}[n]\right\} - \sum_{n=0}^{k}\sum_{m=0}^{k} d^*[n]d[m]\chi[n-m] \tag{1.17}$$



Şekil 1.10. EYO algoritması

$$\chi[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]h^*[k+n] \tag{1.18}$$

şeklinde hesaplanmaktadır. Burada, $\chi[n]$ değerleri kanalın sayısal eşleğinin özilinti değerine karşılık gelmektedir. Alınan sinyal, ilk olarak kanala eşlenik filtre $h^*(t)$ ile filtrelendiğinden, girişteki EBGG, $\eta(t)$ filtrenin çıkışında renkli hale $v[n] = \sum_{k=0}^{L}\eta[k]h^*[n+k]$ gelmekte, öz ilinti dizisi $E\{v[n]v^*[n-k]\} = \sigma_\eta{}^2\chi[k]$ halinde olmaktadır. Eşlenik filtre çıkışındaki renkli gürültünün, EBGG'ye dönüştürülmesi için eşlenik filtreden sonra beyazlaştırıcı filtre kullanılmadır. Beyazlaştırıcı eşlenik filtrenin (BEF) birim dürtü tepkisi, kanalın özilinti dizisinin spektral bozulmasından elde edilir. Spektrum bozulmasında, $\chi[n]$ dizinin z-dönüşümü olan $\chi[z] = \psi[z]\psi^*[1/z^*]$ birim çemberin içinde olan sıfırlar alındığında, BEF elde edilir. BEF kullanılan EYO alıcı yapısı ve eşdeğer sayısal modeli Şekil 1.11'de görülmektedir.

Alınan sinyal üzerinden EYO algoritması ile alıcının kestirim yapılabilmesi için, en yüksek ilinti değerine sahip yol seçilerek dizi kestirilmektedir. Viterbi algoritması kullanılarak, EYO algoritmasının işlemsel karmaşıklığı azaltılabilmektedir. Viterbi algoritmasında, her sembolden sonra olası her sembol için en yüksek ilinti metriğine sahip yol seçilerek diğer yollar sonraki adımda göz önüne alınmaz.

EYO algoritması, EFS'ye oldukça yakın veya eşit seviyede performans sağlamaktadır. Ancak, Viterbi algoritması kullanıldığında EYO algoritmasının işlemsel karmaşıklığı M^L seviyesindedir. Örnek olarak, kanal birim dürtü uzunluğu L=10 sembol süresi olan kanalda QPSK modülasyonu kullanılması halinde her sembolün kestirilmesi için 4^{10}=1.000.000 çarpma işlemin yapılması gerekmektedir. İşlemsel karmaşıklık seviyesinden görüldüğü üzere EYO algoritmasının yüksek veri hızlarına sahip kanallarda, çok güçlü işlemci kapasitesi gerektirdiğinden, pratikte kullanımı mümkün olmamaktadır. Örnek olarak, 1Gbps veri alış veriş hızında, 10 sembol saçılma süresine sahip kanalda, QPSK modülasyon kullanan bir sistem için, saniyede 10^{15} çarpma işlemini gerçekleştirebilecek işlemciye ihtiyaç duyulmaktadır. Günümüzde kullanılan işlemciler genel olarak 2-3GHz bandında çalışmaktadır. Bu durumda işlemciler, saniyede yaklaşık $3\text{x}10^9$ işlem yapabilme kapasitesine sahip olmakta, 10^{15} seviyesindeki çarpma işlemi gereksinimini karşılamaktan oldukça uzak olmaktadır.

Bundan dolayı, EYO algoritması yerine en uygun altı çözüm (EUAÇ-suboptimal) algoritmalar kullanılmaktadır. EUAÇ algoritmaları, performans olarak EYO'dan daha düşük performans sağlamasına karşın, işlemsel karmaşıklık seviyesini önemli düzeyde azaltarak, ulaşılabilir işlemci kapasitelerinin kullanmayı olanaklı kılmaktadır. EUAÇ algoritmalarının geliştirilmesindeki temel amaç, olabildiğince EYO algoritmasının performansına yakın performans sağlanması, buna karşın işlemsel karmaşıklık seviyesinin olabildiğince düşürülmesidir. Genel olarak iki tip EUAÇ zaman bölgesi denkleştirici seçeneği mevcuttur. Bu seçenekler, doğrusal denkleştirici (DD) ile karar geri beslemeli (KGB) denkleştirici yapılarıdır (Proakis, 2007:15-64). Şekil 1.10'da DD ve karar KGB denkleştirici yapıları görülmektedir.

Kanal ve EBGG ile bozulmuş sinyal, ZB-DD ve ZB-KGB denkleştirici filtrelere uygulanması halinde çıkışta sırasıyla,

$$\tilde{d}^{DD}[n] = r[n] * w^{0}[n] = d[n] * h[n] * w^{0}[n] + \eta[n] * w^{o}[n] \tag{1.19}$$

$$\tilde{d}^{KGB}[n] = r[n] * \vartheta^{o}[n] + d[n] * \tau^{o}[n] = d[n] * h[n] * \vartheta^{o}[n] + \eta[n] * \tau^{o}[n] \tag{1.20}$$

elde edilmektedir. Görüldüğü üzere, girişteki sinyal doğrusal filtre yapılarından geçirilmekte, her bir sembol için kullanılan çarpma işleminin sayısı, filtre uzunluğuna bağlı olarak değişmektedir.

DD ve KGB denkleştirici yapıları karşılaştırıldığında, KGB yapıda, karar verilerinin geri beslemede kullanılmasından dolayı performansı zaman bölgesi doğrusal denkleştiricilere göre daha iyi olmaktadır.

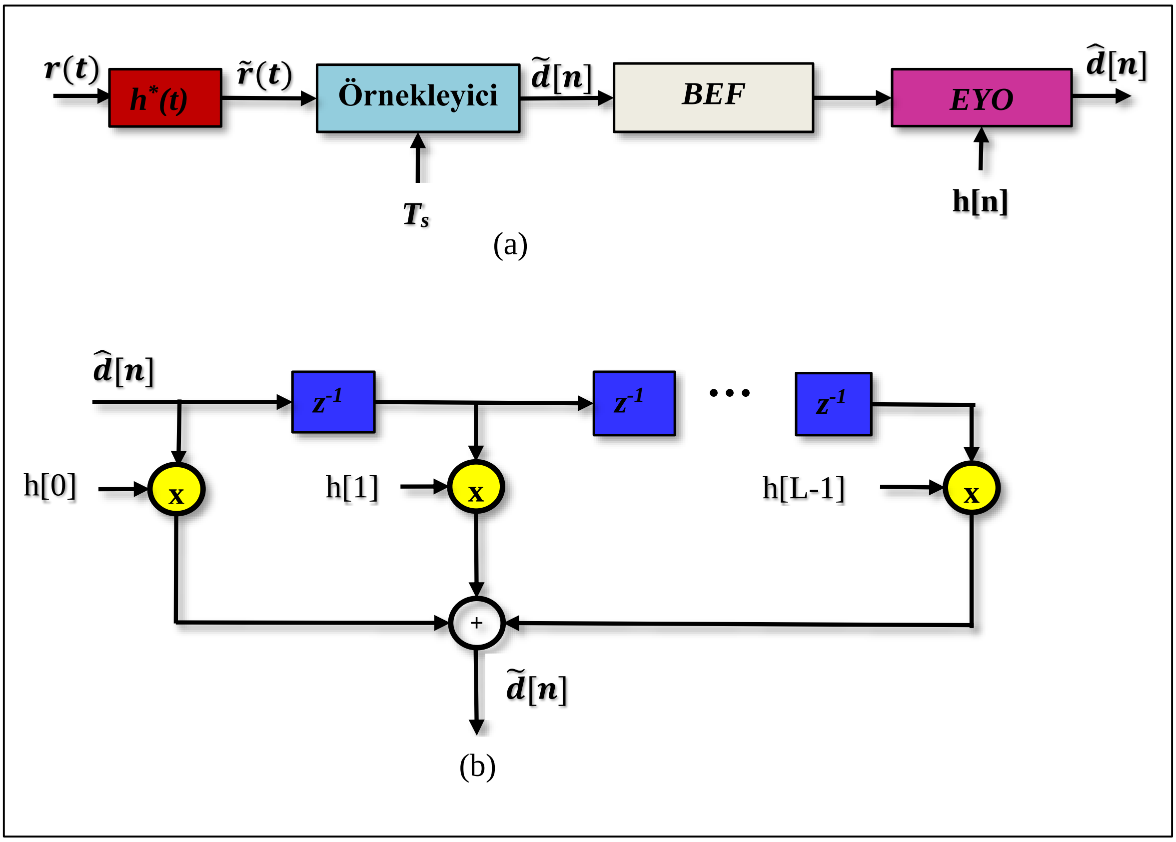
İşlemsel karmaşıklık açısından ise, her iki algoritmada sembol başına karmaşıklık seviyesi kanal birim dürtü tepkisinin uzunluğu, L'ye bağlı olmaktadır. ZB-DD ve ZB-KGB için denkleştirmede kullanılan karmaşık sayı çarpma işlem sayısı sembol başına 2L+1'dir. EYO algoritmasının kanal uzunluğu ile üssel olarak artan M^L olan karmaşıklık seviyesi ile karşılaştırıldığında, ZB-EUAÇ algoritmalarının, kanal uzunluğuna doğrusal orantılı olan oldukça düşük karmaşıklık seviyesine sahip olduğu gözlenmektedir. Ancak, ZB-DD ve ZB-KGB denkleştiricileri bile yüksek uzunluktaki kanal birim dürtü frekanslarına sahip kanallarda, işlemsel karmaşıklık seviyesi arttığından, yüksek veri hızına sahip sistemlerde işlemsel karmaşıklık açısından dezavantajlı hale gelmektedir.

ZB denkleştiriciler bir sonraki bölümde yapı ve performans açısından daha ayrıntılı incelenerek gösterilmektedir.

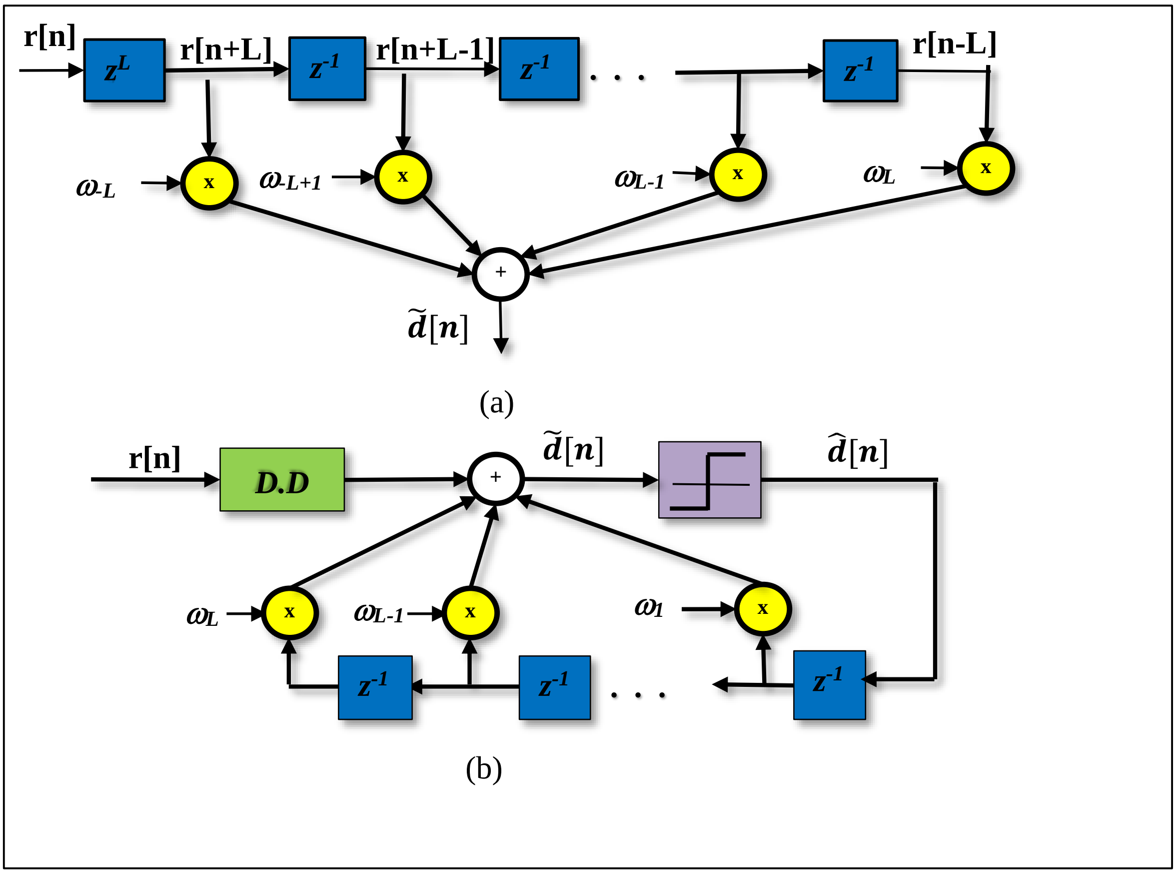
TT-FBD: Frekans bölgesi denkleştirme

Yukarıda belirtildiği üzere, ZB'nde çalışan denkleştiricilerde ortaya çıkan işlemsel karmaşıklık problemini düşürmek üzere, FB'nde denkleştirme işlemi önerilmiştir (Sari, Karam ve Jeanclaude, 1995). Yapılan çalışmalarda, ZB denkleştiricilere göre FB denkleştirme işlemi ile elde edilen SAG giderme performansı daha iyileştiği gösterilmiştir.

Sari ve diğerleri (1995) tarafından, tek taşıyıcılı-frekans bölgesi denkleştirmenin (TT-FBD, SC-FDE, Single Carrier Frequency Domain Equalization) önemi vurgulanmış ve alıcı verici sisteminde dönel ön ek (DÖE, CP-Cyclic Prefix) kullanılması ile denkleştirme işleminin blok olarak alınan verilerin, frekans bölgesinde basit çarpım işlemi ile yapılabileceği gösterilmiştir. Falconer, ve diğerleri (2002) tarafından yapılan çalışmada ise, TT-FBD kullanan haberleşme sisteminin geniş bant sistemler için kullanılan bir diğer sistem olan dikgen frekans bölme çoğullama (DFBÇ) sistemi ile benzer karmaşıklığa sahip olduğu, her iki yönteminde çok yollu kanallardaki performanslarının benzer olduğu gösterilmiştir. Ancak tek taşıyıcılı sistemlerin, DFBÇ'de birden fazla taşıyıcı kullanımından dolayı daha düşük tepe-ortalama güç oranına sahip olduğu ve bu durumda da tek taşıyıcılı sistemlerde daha ucuz olan güç yükselteçlerinin kullanılabileceği belirtilmiştir. Bundan dolayı, TT-FBD işlemi mobil haberleşme sistemlerinde, baz istasyonu mobil el terminallerine göre daha güçlü olduğundan, el terminalinden baz istasyonuna doğru olan iletişimde kullanılması daha uygun olmaktadır. Güç yükselticisindeki avantajdan dolayı, 4G-LTE-A ve 5G NR kablosuz haberleşme sistemlerinde, mobil aboneden, baz istasyonuna doğru bağlantı için TT-FBD'nin çok kullanıcı erişim şekli olan Tek Taşıyıcılı Frekans Bölmeli Çoklu Erişim (TT-FBÇE) tekniği kullanılmaktadır.



Şekil 1.11. (a) BEF kullanılan EYO alıcı yapısı (b) BEF filtre eşdeğer sayısal modeli

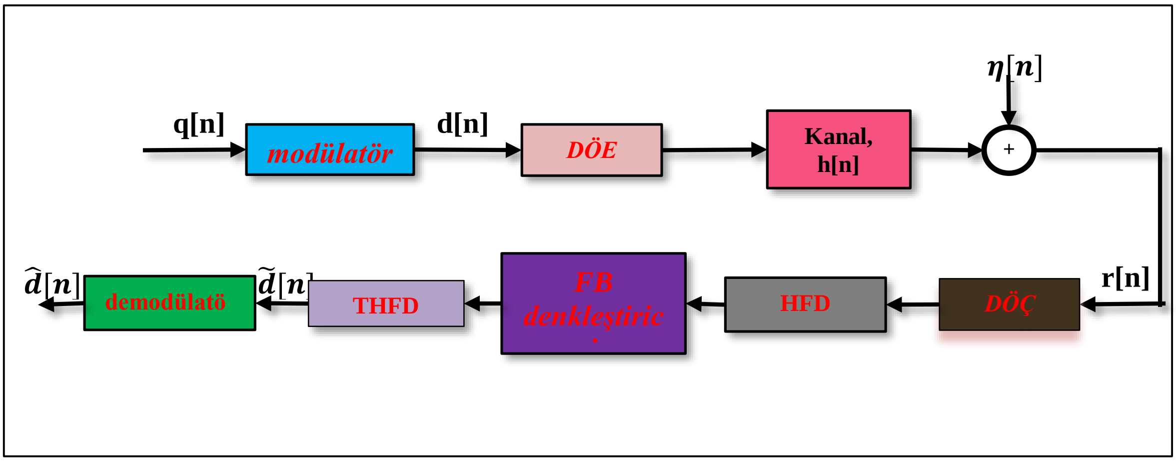


Şekil 1.12. ZB- EUAÇ denkleştirici yapıları (a) DD ve (b) KGB

Şekil 1.13'de frekans bölgesi denkleştirici kullanan TT-FBD alıcı verici sisteminin genel yapısı gösterilmektedir. TT-FBD alıcı-verici sisteminde, ilk olarak verici tarafında 0 ve 1'lerden oluşan sayısal veri sembolleri N_{sym} uzunluğunda bloklara ayrılır ve her blok sonundaki N_{cp} kadarlık kısım kopyalanarak dönel önek, DÖE, veri bloğunun önüne yerleştirilir. DÖE kullanımı ile, bloklar arasında girişim olmaması ve frekans bölgesinde, verinin ile kanalın birim dürtü tepkisinin dairesel konvolüsyon işlemine dönüşmesi sağlanmaktadır. Bu durumun sağlanabilmesi için DÖE uzunluğunun kanalın birim dürtü tepki süresinden uzun olması gerekmektedir. Bu sayede, Şekil 1.14 ile gösterildiği üzere Hızlı Fourier Dönüşümü (HFD) ile elde edilen alınan sinyalin frekans bölgesinde denkleştirme işlemi için, her frekans noktasında denkleştirici katsayısı $W[n], n = 0, 1, \dots, N_{sym} - 1$ ile skaler çarpımı ile yapılabilmesini sağlamaktadır.

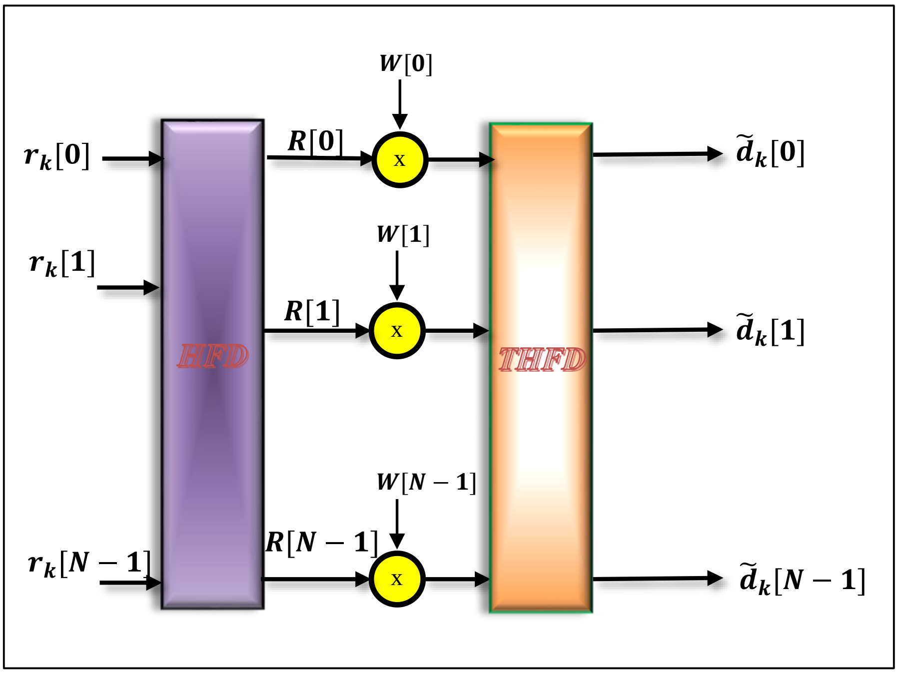
Verici, dönel önek ile uzatılmış blokları, haberleşme kanalı üzerinden alıcıya göndermektedir. Sonrasında, bozunmuş sinyal EBGG etkisine maruz kalmaktadır. Alıcı, ilk olarak gürültü ve girişim etkisi ile bozunmuş sinyalde DÖE çıkarma işlemi uygular. Takiben

N_{sym} noktalı HFD algoritması kullanarak, alınan sinyalin frekans noktasındaki değerleri elde edilir. Frekans bölgesinde, girişim etkisini gidermek için her frekans noktasında en uygun denkleştirici katsayısı ile çarpılması gerekmektedir. Ters Hızlı Fourier Dönüşüm (THFD) algoritması ile, denkleştirilen sinyal tekrar zaman bölgesine dönüştürülür. Denkleştirilen sinyal demodüle edilerek kestirim yapılan semboller elde edilmektedir.



Şekil 1.13. TT-FBD alıcı verici sistemi

Frekans bölgesinde denkleştirme işleminin yapılmasının zaman bölgesinde denkleştirme işlemine göre en önemli avantajı, işlemsel karmaşıklık seviyesinin düşürülmesidir. İşlemsel karmaşıklık seviyesinde elde edilen bu düşüş, HFD ve THFD algoritmalarının kullanımından kaynaklanmaktadır. Daha önce belirtildiği üzere, denkleştirme işlemi temelde kanalın tepkisinin tersini alan filtre katsayılarını bulmak ve elde edilen katsayılar ile alınan sinyalin filtrelenmesi yani konvolüsyon işleminin yapılmasını sağlamaktır. Zaman bölgesi denkleştirici için, bu işlemin yapılması çarpım açısından, kullanılan filtre uzunluğuna bağlı olarak sembol başına 2L+1 adet çarpım işlemine ihtiyaç duymaktadır.



Şekil 1.14. FB-DD yapısı

N_{sym} uzunluğundaki bir veri bloğu için denkleştirmenin yapılması için toplam karmaşık sayı çarpım sayısı $N_{sym}(2L+1)$ olmaktadır. Frekans bölgesi denkleştirici yapısı için ise, her HFD ve THFD algoritması $N_{sym}log_2N_{sym}$ adet çarpım işlemi gerekmektedir. Ek olarak, $W[n], n = 0, 1, \dots, N_{sym}-1$ katsayıları ile frekans bölgesi denkleştirme işlemi için N_{sym} çarpım işlemine ihtiyaç duyulmaktadır. Bu durumda her blok için denkleştirmede zaman ve frekans bölgesi denkleştiriciler için gereksinim duyulan karmaşık sayı çarpım sayısı sırasıyla, $N_{sym}(2L+1)$ ve $N_{sym}\left(log_2N_{sym}+1\right)$ olmaktadır. Zaman ve frekans bölgesi denkleştiriciler için karmaşıklık seviyeleri karşılaştırıldığında, frekans bölgesi denkleştiricilerin karmaşıklık seviyesi logaritmik olarak artmakta iken, zaman bölgesi denkleştiricilerin karmaşıklık seviyesi kanalın birim dürtü uzunluğu L ile doğru orantılı olarak artmaktadır. Bu sebepten dolayı, frekans bölgesi denkleştiricilerin işlemsel karmaşıklık seviyesi yüksek uzunluktaki kanal birim dürtü tepkisi (yüksek veri haberleşme hızı, düşük dürtü süresi) için zaman bölgesine göre önemli oranda azaltmaktadır. Örneğin, kanal birim dürtü tepki uzunluğu L=32, olan bir kanalda blok uzunluğu $N_{sym} = 128$ olacak şekilde denkleştirme yapıldığında zaman bölgesi denkleştirme için 8320 karmaşık sayı çarpımı gerekmekte iken, frekans bölgesinde denkleştirme için toplam 1024 adet karmaşık sayı çarpımına ihtiyaç duyulmaktadır. Görüldüğü üzere, frekans bölgesi denkleştirme işlemi için gereksinim duyulan işlemsel kapasite açısından zaman bölgesi denkleştiricilere göre önemli oranda avantaj sağlamaktadır.

Frekans bölgesinde denkleştirme işleminin bir diğer avantajı ise, elde edilen performansta elde edilen artıştır. Zaman bölgesinde denkleştirme işleminin iyileştirilebilmesi için denkleştirici uzunluğunun arttırılması gerekmektedir. Frekans bölgesinde ise, denkleştirme işlemi blok tabanlı yapıldığından, denkleştiricinin uzunluğu blok uzunluğu N_{sym}'ye eşit olmaktadır. Ayrıca, eğer DÖE ve DÖÇ kullanıldığına kanalın beklenen uzunluğundan eşit yada daha büyük seçildiğinde, SAG etkisi bir blok içinde kalmakta, blok içerisinde yapılan denkleştirme işlemi diğer bloklardan etkilenmemektedir. Bu sayede, her blok sonsuz uzunlukta bir denkleştirici ile işlem görmüş olmakta ve elde edilen performans daha uzun denkleştirici kullanımından dolayı ideale ZBD'ye göre daha yakın olmaktadır.

Yukarıda açıklanan denkleştirme yöntemlerinin pratik olarak uygulanabilmesi için, alıcının kanalın zaman ya da frekans bölgesindeki tepkisini bilmesi gerekmektedir. Ancak, alıcı sadece alınan sinyal verisine sahip olduğundan, söz konusu değerleri alınan veriden kestirim yaparak kullanması gerekmektedir. Bir sonraki bölümde, alıcıda doğrudan denkleştirici katsayılarının veya kanala ait parametrelerin kestirimi için kullanılabilecek uyarlanabilir denkleştirme işlemi açıklanmaktadır.

Literatürdeki ilk uyarlanabilir frekans bölgesi denkleştirme algoritması, Walzman ve Schwartz (1973) tarafından önerilmiştir. Önerilen algoritma ile düşük işlemsel karmaşıklıkta denkleştirmenin mümkün olduğu gösterilmiş, frekans bölgesindeki en uygun katsayı değerlerini bulmak için Rosen's gradyan metodunu kullanmışlardır.

Clarck (1998) tarafından yapılan çalışmada ise, geleneksel LMS ve RLS algoritmaları uyarlanabilir frekans bölgesi denkleştirici olarak kullanımı önerilmiş ve özellikle RLS algoritmasının zamanla değişen Rayleigh sönümlü kanallarda başarı düzeyinin LMS algoritmasına göre daha iyi olduğu gösterilmiştir.

Sonrasında ise, Younis, Sayed ve Al-Dhahir (2003) tarafından, Alomouti gönderim çeşitliliği için yine RLS tabanlı doğrusal frekans bölgesi uyarlamalı denkleştirici yapısı önerilmiş olup, geliştirilen yapının işlemsel karmaşıklığı önemli ölçüde azalttığı gösterilmiştir. Frekans bölgesinde uyarlamalı çalışan kanal kestirim algoritması Morelli, Sanguinetti, ve Mengali, (2005), tarafından ortaya atılmış olup, yapılan çalışmada yapılandırılmış kanal kestirim adı verilen algoritmanın yüksek hızlı kanallarda ve çeşitlilik kullanılması durumunda, ideal duruma yakın sonuç verdiği gösterilmiştir.

Coon, Armour, ve McGeehan, (2005) tarafından ise, uyarlamalı frekans bölgesi doğrusal denkleştiricilerin, Çok Giriş Çok Çıkışlı sistemler için genişletilmiş, eğitim dizisinin özel olarak tasarlanarak, sistem spektrum verimliliğinin arttırılabileceği, frekans bölgesinde denkleştirme yapıldığı için de karmaşıklığın azaltılabileceği gösterilmiştir. Iqbal, Al-Dhahrir, Zerguine, ve Zidouri, (2015) ile Iqbal, ve Zerguine (2017) tarafından yapılan çalışmalarda ise, frekans bölgesinde çalışan uyarlamalı karar geri besleme yapıları önerilmiştir.

Araştırmanın amacı

Tez çalışmasında amaçlanan, tasarımı yapılacak denkleştiricinin özellikle zamanla değişim gösteren Rayleigh sönümlü kanallarda yüksek başarım sağlayacak, işlemsel karmaşıklık seviyesi olabildiğince düşük, frekans bölgesi uyarlanabilir algoritmaların geliştirilmesidir. Bu sayede alıcının kanala ait parametrelerini ve/veya denkleştirici katsayılarını alınan sinyal üzerinden elde edilmesini sağlamaktadır. Bu kapsamda, işlemsel karmaşıklığın azaltılması ve performans artışının sağlanması için denkleştirme işleminin FB'de yapılması, ZB'de söz konusu işlemleri gerçekleştirmeye kıyasla, daha avantajlı olduğu çeşitli çalışmalar kapsamında gösterilmiştir (Falconer ve diğerleri, 2002). Çeşitli araştırmacılar (Gillian, Nix ve Armour, 2008; Falconer ve diğerleri, 2002), yapmış oldukları araştırmalar kapsamında frekans bölgesinde çalışan denkleştiriciler için çeşitli çözümler geliştirmişlerdir. Ancak, yapılan çalışmalar kapsamında genellikle alıcı tarafından kanalın frekans tepkisinin mükemmel şekilde bilindiği varsayılmıştır. Pratikte, alıcının bu bilgiyi bir şekilde belirlemesi gerekmektedir. Bu durumun çözümü için frekans bölgesinde çalışan uyarlanabilir denkleştirici yapısı uygulanabilecek yöntem olarak ortaya çıkmaktadır.

Yapılan araştırmalar kapsamında, FB'de çalışan DD ve KGB denkleştirici yapılarında, frekans bölgesinde çalışan kanal denkleştirici ve kanal kestirim algoritmaları geliştirilmiştir. Geliştirilen algoritmalarda, performans seviyesinin iyileştirilmesi ve kanalda meydana gelen hızlı değişimleri geleneksel algoritmalara göre daha iyi takip edilebilmesi için, komşu frekans noktalarında yüksek ilintiselliğe sahip kanallar için uyarlanabilir algoritmalar geliştirilmiştir. Geliştirilen algoritmaların, geleneksel ve literatürdeki diğer algoritmalara göre performansının artabileceği, bu artışın işlemsel karmaşıklık düzeyi üzerinde marjinal bir artış olmadan sağlandığı yapılan teorik analiz ve bilgisayar benzetim çalışmaları ile gösterilmektedir.

Elde edilen algoritmaların, teorik performansları da tez kapsamında yapılan çalışmalar ile belirlenmiştir. Elde edilen teorik performans düzeyleri, önemli ölçüde performans artışını göstermiştir. Bilgisayar benzetim çalışmaları yapılarak, bu durum kanıtlanmaya çalışılmıştır.

Bu bölümde anlatıldığı üzere, 4G-LTE-A ve 5G NR kablosuz haberleşme sistemlerinde FB denkleştirme yapılmaktadır. Bu sebeple tez kapsamında geliştirilen denkleştirici yapılarının kullanımının önemli ve yararlı olduğu düşünülmektedir.

Tezin kalan kısmı şu şekilde düzenlenmiştir: 2. Bölümde uyarlanabilir algoritmaların kanal denkleştirme için hem frekans hem de zaman bölgesi için kullanımı gösterilerek literatürde öne sürülen hem doğrusal hem de KGB yapılarındaki frekans bölgesi denkleştiricileri tanıtılmaktadır. 3. Bölümde, frekans bölgesinde doğrudan denkleştirme kullanan doğrusal yapıdaki algoritmalar tanıtılmaktadır. 4. Bölümde ise kanal kestirim yapılarak denkleştirmeye yönelik geliştirilen algoritmalar gösterilmektedir. Tamamen frekans bölgesinde çalışan iteratif geri beslemeli denkleştirici yapısı 5. bölümde gösterilmektedir. 6. ve son bölümde ise yapılan çalışmalar sonucu elde edilen bulgular irdelenerek, gelecekte yapılabilecek çalışmalar tartışılmaktadır.

2. EUAÇ KANAL DENKLEŞTİRME VE GELENEKSEL UYARLANABİLİR ALGORİTMALAR

Giriş bölümünde belirtildiği üzere, kablosuz haberleşme sistemlerinde performans ve iletişim hızını kısıtlayan SAG etkisinin giderilmesi için denkleştirici yapılarının kullanılması gerekmektedir. Denkleştirme işlemi için EFS ulaşılabilecek en iyi performans sınırını göstermekte, pratikte kullanımı mümkün olmamaktadır. Denkleştiriciler için EFS sınırına yakın performans sağlayan EYO algoritması kullanılmaktadır. Ancak EYO algoritmsının pratikte uygulanabilmesi için gereksinim duyulan işlem kapasitesi ulaşılabilir değildir. Bu sebeple EUAÇ (en uygun altı çözüm) adı verilen yöntemler kullanılarak, çok daha düşük işlem gereksinimi duyan algoritmalar kullanılmaktadır. EUAÇ denkleştirme işlemi için uygulama bölgesi açısından ZBD ve FBD olmak üzere iki farklı yöntem uygulanabilmektedir. Matematiksel olarak bakıldığında, EUAÇ denkleştirme işlemi ZB'de konvolüsyon işlemi olup, durağan kanallar için FB'de ise çarpım işlemine denk gelmektedir. Ancak, haberleşme kanalının birim dürtü tepkisi çok uzun olması halinde, konvolüsyon işleminin yapılabilmesi için gereksinim duyulan işlemci kapasitesi aynı oranda artmaktadır. Diğer yandan, HFD ve THFD algoritmaları sayesinde, FB'de denkleştirme ZB'ye göre daha düşük işlemsel karmaşıklık ile gerçekleştirilebilmektedir.

ZB ve FB denkleştirici katsayılarının hesaplanabilmesi için, bu bölümün ilerleyen kısımlarında anlatılacağı üzere, kanala ait bilgilerin (kanal birim dürtü/frekans tepkisi, EBGG varyansı) alıcıda bilinmesi gerekmektedir.

Ancak, söz konusu bilgiler alıcıda mevcut olmadığından, bir şekilde alıcının bu değerleri kestirmesi ve denkleştirme işleminde kullanması gerekmektedir. Kanala ait parametrelerin kestirimi için kullanılan en önemli bilgi kaynağı ise alınan sinyaldir. Kanal veya denkleştirici katsayıların alınan sinyal kullanılarak kestirilmesi için uyarlanabilir sinyal işleme teknikleri kullanılabilecek önemli bir seçenektir. Uyarlanabilir algoritmaların denkleştiricilerde kullanılması, alıcıda söz konusu parametrelerin alınan sinyal üzerinde yinelemeli şekilde elde edilmesini sağlamaktadır. Uyarlanabilir geleneksel LMS (Least Mean Square), NLMS (Normalized LMS) ve RLS (Recursive Least Squares) algoritmaları kullanan ZB ve FB denkleştiriciler kısaca bu bölüm kapsamında anlatılmaktadır. Uyarlamalı sinyal işleme tekniğinde denkleştirici parametrelerinin kestirimi için kullanılmakta olan alınan sinyal rasgele sürecin bir elemanıdır. Bu nedenle alıcı tarafından yapılan kestirim değerinde en uygun çözüme göre hata meydana gelmektedir. Bundan dolayı, SAG etkisini giderme performansı olumsuz etkilenmektedir. Bu nedenle kullanılan uyarlanabilir algoritmanın en uygun çözüme idealde tam olarak yakınsaması istenilmektedir.

Uyarlanabilir denkleştirici algoritmaların bir diğer önemli avantajı, yinelemeli yapısından ötürü, kanalda zaman içinde meydana gelen değişimleri algılama ve değişen duruma göre kendi kendine ayarlama kapasitesine sahip olmasıdır. Bu sayede, zaman ile değişim gösteren haberleşme kanalı üzerinden yapılan haberleşmede, uyarlanabilir sinyal işleme teknikleri kullanan denkleştirme algoritmaları önem arz etmektedir.

Bu bölümde, mevcut OHK tabanlı GBD kanallar için ZB ve FB'de SAG etkisini giderecek DD ve KGB yapılarındaki EUAÇ denkleştirici (Wiener) katsayıları teorik olarak bulunmaktadır. İkinci aşamada, ise kanal parametrelerinin bilinmesine gereksinim duymayan geleneksel LMS, NLMS ve RLS uyarlamalı algoritmalarının ZB ve FB'de denkleştirici katsayılarının yinelemeli hesaplama ifadeleri elde edilerek tanıtılmaktadır. Sonrasında ise her algoritmanın durağan ve zamanla değişen kanallar için performansları teorik olarak ortaya konulmaktadır.

2.1. En Uygun EUAÇ Denkleştirici Katsayısı-Wiener Çözümü

İlk aşamada ZB ve FB denkleştiriciler için, SAG etkisini gidermek üzere OHK tabanlı EUAÇ doğrusal ve KGB yapısındaki denkleştiriciler için kullanılması gereken en uygun filtre katsayı değerleri, kanal parametrelerine (birim dürtü/frekans tepkisi, EBGG varyansı) göre belirlenecektir. Söz konusu en uygun çözüm Wiener çözümü olarak adlandırılmaktadır. Wiener çözümü, zamanla değişmeyen, yani durağan, doğrusal kanallar için bir referans değeri olup, uyarlanabilir algoritmanın bu çözüme idealde eşit olması amaçlanmaktadır.

2.1.1. ZB-EUAÇ denkleştirici-Wiener çözümü

SAG etkisini gidermek üzere, geleneksel olarak doğrusal denkleştirici (DD) ve KGB olmak üzere kullanılan iki farklı tip EUAÇ yapısı bulunmaktadır. ZB-DD ve ZB-KGB yapıları için OHK tabanlı en uygun denkleştirici katsayı hesabı bulunması aşağıda gösterilmektedir.

ZB-DD EUAÇ katsayıları-Wiener çözümü

Şekil 1.12'de verilen ZB-DD denkleştirici yapısında, SAG etkisine maruz kalmış alınan sinyal $r[n]$ dizisi, DD kullanılması halinde $2L + 1$ uzunluğunda sonlu birim dürtü tepkisine, $w^0[n]$ sahip bir filtreden geçirilmektedir. Bu durumda denkleştirilen sinyal,

$$\tilde{d}[n] = r[n] * w^0[n] = d[n] * h[n] * w^0[n] + \eta[n] * w^o[n] \tag{2.1}$$

olarak ifade edilir. Burada, $\tilde{d}[n]$ denkleştirilmiş sinyali, $w^o[n]$ birim dürtü tepkisi $2L + 1$ uzunluğunda olan ZB-DD filtre katsayılarını göstermektedir. $\eta[n]$ ise alıcı elektronik devresinde oluşan EBGG'yi göstermektedir. (2.1) ifadesinden görüldüğü üzere, $\eta[n]$, denkleştirme işleminin ardından renkli hale gelmektedir.

(2.1) eşitliği konvolüsyon toplamı olarak ifade edildiğinde,

$$\begin{aligned}\tilde{d}[n] &= \sum_{i=-L}^{L} r[n-i]w^o[i] \\ &= \sum_{p=-L}^{L}\sum_{i=-L}^{L} d[n-p-i]h[i]w^o[p] + \sum_{p=-L}^{L} \eta[n-p]w^o[p]\end{aligned} \tag{2.2}$$

halini almaktadır.

Söz konusu denkleştirici filtrenin birim dürtü tepkisi, kanalın GBD olması halinde, en düşük ortalama hata karesi (EDOHK) yöntemine göre,

$$J^{ZB-DD} = \mathbb{E}\{|e[n]|^2\} = \mathbb{E}\left\{\left|d[n] - \tilde{d}[n]\right|^2\right\} \tag{2.3}$$

ile hesaplanması gerekmektedir. Burada J^{ZB-DD} maliyet fonksiyonu olarak adlandırılır. $\mathbb{E}\{\ \ \}$ beklenen ise değer operatörüdür. Maliyet fonksiyonu, $w^0[i]$ denkleştirici katsayılarına göre filtrelenen $r[n]$ sinyalinin, $\tilde{d}[n]$, ile vericiden gönderilen özgün sinyal $d[n]$ arasındaki farkın, yani hata, $e[n]$'in karesini hesaplamaktadır. J^{ZB-DD} maliyet fonksiyonunu en düşük değere getiren $w^o[i]$ katsayıları, en uygun katsayı olarak adlandırılır. Maliyet fonksiyonuna bakıldığında 2. dereceden bir denklem ortaya çıkmakta ve her zaman sıfırdan büyük olmaktadır. Sonuç olarak maliyet fonksiyonu eşsiz yani sadece bir adet en düşük değere sahip olmaktadır. J^{ZB-DD}'i en düşük değere getiren en uygun katsayı değerleri, J^{ZB-DD}'in $w^0[k]$ denkleştirici katsayısına göre türevinin sıfıra eşit olduğu noktadır. Söz konusu hesaplama yapıldığında,

$$\frac{\partial J^{ZB-DD}}{\partial w^0[k]} = \mathbb{E}\left\{r^*[n-k]\left(d[n] - \sum_{i=-L}^{L} r[n-i]w^o[i]\right)\right\} = 0, \quad k = -L, \dots, L \tag{2.4}$$

elde edilmektedir. Buradan, gerekli düzenleme yapıldığında

$$\sum_{i=-L}^{L} \mathbb{E}\{r[n-i]r^*[n-k]\}w^o[i] = \mathbb{E}\{r^*[n-k]d[n]\}, \quad k = -L, \dots, L \tag{2.5}$$

şeklinde $2L+1$ adet doğrusal sabit katsayılı denklem takımı elde edilir. Alınan sinyalin ZB'deki öz ilinti değeri, $\mathfrak{R}^r(k) = \mathbb{E}\{r[n]r^*[n-k]\}$ ve çapraz ilinti değeri $\wp^{r,d}(k) = \mathbb{E}\{d[n]r^*[n-k]\}$ olarak tanımlandığında, (2.5) eşitliği,

$$\sum_{i=-L}^{L} \mathfrak{R}^r(k-i)w^o[i] = \wp^{r,d}(k), k = -L, \dots, L \tag{2.6}$$

halini alır. Burada $(\ )^*$ karmaşık eşlenik alma işlemini göstermektedir. Verinin sıfır ortalamalı, varyansının σ_d^2, EBGG, $\eta[n]$ in sıfır ortalamalı ve varyansının σ_η^2, ve EBGG ile $d[n]$'in istatistiki olarak bağımsız olması halinde, k. özilinti $\mathfrak{R}^r(k)$ ve çapraz ilinti $\wp^r(k)$ değerleri sırası ile,

$$\mathfrak{R}^r(k) = \sigma_d^2 \sum_{m=-L}^{L} h[m]h^*[m-k] + \sigma_\eta^2\delta(k), k = -L, \dots, L \tag{2.7}$$

$$\wp^{r,d}(k) = \mathbb{E}\{d[n]r^*[n-k]\} = \sigma_d^2 h^*[-k], \qquad k = -L, \dots, L \tag{2.8}$$

ifadeleri ile hesaplanmaktadır.

$w^o[i]$ katsayılarını bulmak için (2.7) ve (2.8) ile ifadeleri verilen $2L+1$ adet sabit katsayılı doğrusal denklem takımı çözülmesi gerekmektedir. Söz konusu denklem takımı, öz ilinti matrisi, $\mathbb{R}_{(i,j)} = \sigma_d^2 \sum_{m=-L}^{L} h[m]h^*[m-j+i] + \sigma_\eta^2 \delta_{i,j}, i,j = -L, \ldots, L$ ve çapraz ilinti vektörü, $\mathbb{p}_i = \sigma_d^2 h^*[-i], i = -L, \ldots, L$ tanımlanarak ifade edildiğinde, en uygun katsayı vektörü, $\mathbb{w}^o = w^o[i], i = -L, \ldots, L$

$$\mathbb{w}^o = \mathbb{R}^{-1}\mathbb{p} \tag{2.9}$$

matris vektör çarpım ifadesi ile bulunabilir. Bu ifadenin çözümü için $(2L+1)x(2L+1)$ boyutundaki öz ilinti matrisi, $\mathbb{R}$'nin tersinin bulunması gerekmektedir. Matris tersi için $(2L+1)^3$ seviyesinde çarpma işlemine gereksinim duyulmaktadır. Ek olarak çapraz ilinti vektörü ile öz ilinti matrisinin çarpımı için $2L+1$ adet karmaşık sayı çarpımı gereklidir. Bir adet karmaşık sayı çarpımı, 4 adet reel sayı çarpımına eşittir. Sonuçta, EDOHK tabanlı doğrusal denkleştirici katsayılarının hesaplanabilmesi için toplam $64x(2L+1)^3 + 4x(2L+1)$ çarpma işlemi yapılması gereklidir. $w^o[i]$ katsayılarının hesaplanması ardından, alınan sinyal üzerinde denkleştirme işlemi için sembol başına $(2L+1)$ adet karmaşık sayı, yani $4x(2L+1)$ adet reel sayı çarpımına ihtiyaç duyulmaktadır.

$\mathbb{w}^o$ en uygun doğrusal denkleştirici vektörü kullanılması halinde elde edilen EDOHK değeri, $\xi^{o,ZB-DD}$,

$$\xi^{o,ZB-DD} = \mathbb{E}\left\{\left|d[n] - \tilde{d}[n]\right|^2\right\} = \sigma_d^2 - \sum_{i=1}^{2L+1}\sum_{j=1}^{2L+1} \mathbb{p}_i \mathbb{R}_{(j,i)} \mathbb{p}_j^* = \sigma_d^2 - \mathbb{p}^H \mathbb{R}^{-1} \mathbb{p} \tag{2.10}$$

olmaktadır.

<u>ZB-KGB EUAÇ katsayıları- Wiener çözümü</u>

KGB denkleştirici yapısı, Şekil 1.12'den görüldüğü üzere, temel olarak iki farklı bölümden oluşmaktadır. Denkleştiricinin ilk bölümü, $(L+1)$ uzunluğunda DD yapısında olup, diğer bölüm ise KGB bölümü olarak adlandırılmaktadır. ZB-KGB yapısında alınan sinyal, ilk aşamada filtrenin DD kısmı ile filtrelenerek girişim etkisinin bir bölümü giderilmektedir. Sonrasında ise KGB yapısı ile kendinden önceki sembollere ait karar verilen değerler kullanılarak girişimin kalan kısmının giderilmesi sağlanmaktadır. KGB denkleştirici yapısı için maliyet fonksiyonu,

$$J^{ZB-KGB} = \mathbb{E}\{|e[n]|^2\} = \mathbb{E}\left\{\left|d[n] - \sum_{i=-L}^{0} r[n-i]\vartheta^o[i] - \sum_{i=1}^{B} \hat{d}[n-i]\tau^o[i]\right|^2\right\} \tag{2.11}$$

şeklindedir. Burada $\vartheta^o[i]$, KGB denkleştiricinin ileri besleme katsayısı, $\tau^o[i]$ geri besleme katsayısı, $\hat{d}[n-i]$ önceki sembollere ait kestirim değeridir. İleri besleme katsayılarının uzunluğu $L+1$, geri besleme katsayılarının uzunluğu B olarak kabul edilmiştir. ZB-KGB için denkleştirilen sinyal, $\tilde{d}[n]$ ifadesi,

$$\tilde{d}[n] = \sum_{i=-L}^{0} r[n-i]\vartheta^o[i] + \sum_{i=1}^{B} \hat{d}[n-i]\tau^o[i] \tag{2.12}$$

ile hesaplanmaktadır. KGB yapısı için tanımlanan maliyet fonksiyonuna bakıldığında, ileri besleme katsayıları ile soncul SAG etkisi bir kısmı giderilmekte, geri besleme katsayıları ile de geriye kalan SAG etkisi giderilmeye çalışılmaktadır. Ancak, bu yapıda, kanaldan kaynaklanan sadece soncul SAG etkisi giderilmeye çalışılmakta, öncül SAG etkisi denkleştirilen sinyalde hala bulunmaktadır. Bu nedenle, ZB-KGB denkleştiricilerin performansı SAG etkisini, doğrusal yapıdaki denkleştiricilere göre daha iyi olmakla birlikte, tam olarak gidermesi mümkün olmamaktadır.

Maliyet fonksiyonunu en düşük değere getiren $\vartheta^o[i]$ ve $\tau^o[i]$ katsayıları, (2.11) ile tanımlanan maliyet fonksiyon türevini sıfıra eşitlenmesi ile bulunabilir. Gerekli hesaplamalar yapıldığında, $\vartheta^o[i]$ ve $\tau^o[i]$ katsayıları,

$$\sum_{k=-L}^{0} \Re^r(i-k)\vartheta^o[k] = \sigma_d^2 h^*[-i], i = -L, \dots, 0 \tag{2.13}$$

$$\tau^o[i] = -\sum_{k=-L}^{0} h(i-k)\vartheta^o[k], i = 1,2,\dots,B \tag{2.14}$$

doğrusal katsayılı denklem takımları ile bulunabilir. (2.13) ve (2.14) denklemleri matris yapısında tanımlanacak olur ise,

$$\mathbb{v}^o = (\mathbb{R}^r)^{-1}\mathbb{h}_1 \tag{2.15}$$

$$\mathbb{t}^o = -\mathbb{H}\mathbb{v}^o \tag{2.16}$$

şeklini alır. Burada, $\mathbb{v}^o = \left[\vartheta^o[-L], \dots, \vartheta^o[0]\right]^T$ ileri besleme denkleştirici vektörünü, $\mathbb{R}^r{}_{(i,j)} = \sigma_d^2 \sum_{m=0}^{-i} h[m]h[m+i-j] + \sigma_d^2\delta(i-j), i,j = -L, \dots, 0$ elemanlarından oluşan alınan sinyalin öz ilinti matrisini, $\mathbb{h} = \left[h[0], \dots, h[L]\right]^T$ kanal dürtü tepkisinden oluşan vektörü, $\mathbb{t}^o = \left[\tau^o[1], \dots, \tau^o[B]\right]^T$ geri besleme katsayılarından oluşan vektörü, $\mathbb{H}_{(i,j)} = h[i]h[i-j], i,j = -L, \dots, 0$ kanal katsayılarından oluşan matrisi göstermektedir.

KGB denkleştiricinin performansı, DD'ye göre özellikle sıfıra yakın spektruma sahip kanallarda daha başarılı olmaktadır. DD yapısında, kanalın sıfıra yakın veya eşit spektruma sahip olduğu noktalarda, daha yüksek kazanç değerine sahip filtrenin kullanılması gerekmektedir. Ancak, kazanç değerinin yüksek seviyelere gelmesi ile alınan sinyaldeki EBGG'nin de daha yüksek katsayı ile çarpılması yani denkleştirici çıkışındaki gürültü varyansının çok yüksek seviyelere çıkmasına neden olmaktadır. KGB denkleştiricide ise, elde edilen karar verisi $\hat{d}$'in doğrusal denkleştirici ile kısmından gelen SAG etkisi kısmen giderilmiş sinyalden, geri kalan SAG etkisinin geri besleme filtresi ile $\tau^o[i]$ ile çıkarılmaktadır. Denkleştirme sonucu alınan sinyaldeki EBGG'nin varyansının çıkışta yüksek katsayı ile çarpımının önüne geçilerek, daha düşük olması sağlanmakta, sonuçta DD'ye göre daha iyi performans elde edilmektedir. Ancak KGB denkleştiricinin performansı geri besleme için kullanılan kestirim değerlerinin güvenilir ve yeterince uzun olmasına bağlıdır. Alıcıda düşük SGO algılanması halinde geri beslemede kullanılan karar verilerinde hata miktarı artacak, sonuçta denkleştirme sonucu elde edilen performans DD'ye göre kötüleşmesine neden olacaktır. Geri besleme kısmı için ise kullanılan filtre boyutunun kanal uzunluğuna eşit olması halinde alınan sinyal üzerindeki SAG etkisinin en uygun şekilde giderilmesini sağlamaktadır.

ZB-KGB denkleştiricide, DD kısmı için $(L+1)$, KGB kısmı için L uzunluğunda filtre kullanıldığında GBD kanal için elde edilen EDOHK değeri, $\xi^{o,ZB-KGB}$,

$$\xi^{o,ZB-KGB} = \mathbb{E}\left\{\left|d[n] - \tilde{d}[n]\right|^2\right\} = \sigma_d^2 - \sum_{i=0}^{L} \vartheta^o[i]h[i] \tag{2.17}$$

olmaktadır.

KGB denkleştiricinin, işlemsel karmaşıklık açısından bakıldığında, (2.14) çözümünün bulunabilmesi için $(\mathbb{R}^r)^{-1}$ tersinin bulunması için $\mathcal{O}(L+1)^3$ seviyesinde karmaşık sayı çarpımı gerekmekte, (2.14) ile doğrusal kısım katsayılarının alınan sinyal ile çarpılması için $(L+1)$ adet karmaşık sayı çarpımı gerekmektedir. Geri besleme katsayılarının hesaplanması için ise $(L+1)$ adet karmaşık sayı çarpımı gerekmektedir. Geri besleme katsayıları ile kestirim yapılan sinyalin çıkarılması için ise L adet karmaşık sayı çarpım işlemine ihtiyaç duyulmaktadır. Sonuç olarak ileri ve geri besleme katsayılarının hesaplanması için $64x(L+1)^3 + 4(L+1)$ adet reel sayı çarpım işlemine gereksinim duyulmaktadır. Alınan sinyalin denkleştirilmesi için ise toplam $4x(2L+1)$ adet reel çarpım işleminin yapılması gerekmektedir.

ZB denkleştirici algoritmalarının işlemsel karmaşıklığı

ZB'de çalışan EUAÇ denkleştiricilerin işlemsel karmaşıklığı, verinin gönderildiği kanalın birim dürtü tepkisinin uzunluğuna, dolayısı ile bu etkiyi gidermek için kullanılacak denkleştiricinin uzunluğuna bağlıdır. EFS yakalayan EYO algoritması için bir önceki bölümde açıklandığı üzere sembol başına karmaşıklık seviyesi M^L seviyesindedir. EUAÇ algoritmaları, ZB-DD ve ZB-KGB, denkleştirici yapıları için sırasıyla, kanal birim dürtü uzunluğu, $(L+1)$ ve $(2L+1)$ seviyesinde olduğu görülmektedir. Bu seviye EYO algoritmasının karmaşıklık seviyesi ile karşılaştırıldığında, L =10 olan bir kanal için QPSK modülasyon metodu kullanıldığında ve 1Gbps veri alış veriş hızında, $10^{15}/(64x21^3+4x21)=1.69x10^9$ kadar işlemsel karmaşıklığın azaldığı görülmektedir. Görüldüğü üzere, özellikle uzun kanal uzunluğu için EUAÇ kullanımı ile işlemsel karmaşıklık çok önemli miktarda azalmakta ve gereksinim duyulan işlemci gücü ulaşılabilir seviyelere gelmektedir. Bu nedenle, EUAÇ algoritmaları pratikte denkleştirici amacı ile haberleşme sistemlerinde tercih edilmektedir. Ancak, yüksek hızlarda veri gönderimi ile kanalın birim dürtü tepkisi sembol süreleri ile kıyaslandığında oldukça artmakta, dolayısı ile kullanılması gereken ZB denkleştiricinin uzunluğu da aynı ölçüde artmaktadır.

Örnek olarak sembol süresi T=1ns, kanalın birim dürtü tepki süresi olarak 4μs kullanan haberleşme sisteminde, kanal uzunluğu $L = 250$ olmaktadır. Bu durumda ZB-DD katsayılarının hesaplanması için matris tersinin alma işlemi $64\mathrm{x}1001^3$ seviyesinde, filtreleme için ise ek olarak 2001 adet reel çarpım işlemi yapılması gerekmektedir. Sonuçta 1Gbps haberleşme hızında, QPSK modülasyonu kullanıldığında; EYO algoritması kullanıldığında 4^{250}=3,27x10^{150}, ZB-DD EUAÇ için saniyede yaklaşık 32x10^9, çarpım işleminin yapılması gerekmektedir. Her ne kadar ZB EUAÇ algoritmaları EYO algoritmasına göre çok önemli oranda işlemsel karmaşıklığı azaltsa da, ZB'de çalışan EUAÇ algoritmalarının kullanımı yüksek veri hızlarında pratiklikten çıkmaktadır. Bu nedenle işlemsel karmaşıklık seviyesini daha da azaltacak yöntemlere ihtiyaç duyulmaktadır. Bu sorunun çözümü için aşağıda önerilen FB denkleştirici yapısı gösterilmektedir.

2.1.2. FB EUAÇ denkleştirici-Wiener çözümü

Giriş bölümünde belirtildiği üzere, FB denkleştirme işleminin uygulanması elde edilen performans ve işlemsel karmaşıklık açısından avantajlı olmaktadır. FB denkleştirme işlemi için alınan sinyalin, AZFD (ayrık zaman Fourier dönüşümü) ile ZB'den FB'ye dönüştürülmeli, denkleştirici filtreninde aynı şekilde FB'deki değerleri AZFD ile elde edilmelidir. AZFD işleminin düşük işlemsel karmaşıklıkta ve hızlı şekilde gerçeklenmesi için HFD algoritmaları kullanılmaktadır. Aşağıda sırasıyla FB-DD ve FB-KGB için en uygun denkleştirici katsayıların hesaplanması gösterilmektedir.

<u>FB-DD EUAÇ katsayıları-Wiener çözümü</u>

Doğrusal yapıdaki FB denkleştirme için ilk olarak, minimize edilecek EDOHK tabanlı maliyet fonksiyonu,

$$J^{FB-DD}(\omega) = \mathbb{E}\{|E(\omega)|^2\} \tag{2.18}$$

şekilinde tanımlanmaktadır. Maliyet fonksiyonunda, $E(\omega) = D(\omega) - X(\omega)W(\omega), \omega \in [0,2\pi)$ olarak tanımlanan frekans bölgesindeki hatayı göstermektedir. Parseval teoreminden dolayı, ZB'de (2.3)'de verilen maliyet fonksiyonunu minimize etmek ile FB'de (2.18) ile verilen hatanın minimize edilmesi eşdeğer olmaktadır. Böylece, FB'de denkleştirme yapılması halinde, ZB’de denkleştirme sonucu bulunan katsayılara sonsuz uzunluk için aynı değere yakınsama yapmaktadır.

Frekans bölgesi maliyet fonksiyonunu en düşük değere getiren denkleştirici katsayı değeri $W(w)$ maliyet fonksiyonunun türevinin sıfıra eşitlenmesi ile,

$$\frac{\partial J^{FB-DD}(w)}{\partial W(w)} = \mathbb{E}\{\left(-X^{*}(w)\right)E(w)\} = 0 \tag{2.19}$$

şeklinde bulunabilmektedir. Buradan, gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\mathbb{E}\{|X(w)|^2\}W(w) = \mathbb{E}\{D(w)X^{*}(w)\} \tag{2.20}$$

Şeklinde denkleştirici katsayı değeri ile alınan sinyalin n. frekans noktasındaki öz ilinti değeri $\mathbb{E}\{|X(w)|^2\}$ ve çapraz ilinti değeri $\mathbb{E}\{D(w)X^{*}(w)\}$ arasındaki eşitlik bulunmuş olmaktadır. Öz ilinti değeri $R_x(w) = \mathbb{E}\{|X(w)|^2\}$ ve çapraz ilinti değeri $p_{D,X}(w) = \mathbb{E}\{D(w)X^{*}(w)\}$ olarak tanımlanır ise, en uygun Wiener çözümü:

$$W(w) = R_X^{-1}(w)p_{D,X}(w) \tag{2.21}$$

olarak ifade edilebilir. Haberleşme kanalından geçerek alıcıya ulaşan sinyal, $X(w)$ ’in frekans bölgesindeki ifadesi, kanalın frekans tepkisi $H(w)$, gönderilen verinin frekans bölgesindeki değeri, $D(w)$ ve gürültünün frekans bölgesindeki değeri, $N(w)$ cinsinden $X(w) = D(w)H(w) + N(w)$ şeklinde ifade edilmektedir. Öz ilinti ve çapraz ilinti değerleri, $D(w)$’in, istatistiki olarak $N(w)$‘den bağımsız olduğu, ortalamasının sıfır ve varyansının $N_{SYM}{\sigma_d}^2$, gürültünün ortalamasının sıfır ve varyansının $N_{SYM}{\sigma_n}^2$ kabul edilir ise,

$$R_x(w) = \mathbb{E}\{|D(w)H(w) + N(w)\ |^2\} = N_{sym}{\sigma_d}^2|H(w)|^2 + N_{SYM}{\sigma_n}^2 \tag{2.22}$$

$$p_{D,X}(w) = \mathbb{E}\{D(w)\left(D(w)H(w) + N(w)\right)^{*}\} = N_{sym}{\sigma_d}^2H^{*}(w) \tag{2.23}$$

Özilinti ve çapraz ilinti ifadeleri yerine konulduğunda, en uygun Wiener denkleştirici katsayısı,

$$W^o(w) = \frac{{\sigma_d}^2 H^*(w)}{{\sigma_d}^2 |H(w)|^2 + {\sigma_n}^2} \tag{2.24}$$

olarak bulunmaktadır. Eşitlikten görüldüğü üzere, $W^o(w)$'in hesaplanabilmesi ve SAG etkisinin giderilmesi için, haberleşme kanalının frekans tepkisi, $H(w)$, ve EBGG varyansı ${\sigma_n}^2$ değerlerinin alıcıda bilinmesi gereklidir.

En uygun Wiener katsayıları kullanılarak alınan sinyal DD yapısı ile denkleştirildiğinde elde edilen EDOHK değeri, $\xi^{o,FB-DD}$,

$$\xi^{o,FB-DD}(w) = E\{|D(w) - X(w)W(w)|^2\} = \frac{{\sigma_d}^2 {\sigma_n}^2}{{\sigma_d}^2 |H(w)|^2 + {\sigma_n}^2} \tag{0.1}$$

olarak bulunur.

FB-KGB EUAÇ katsayıları-Wiener çözümü

Tamamı ile FB'de çalışan (ileri besleme ve geri besleme katsayıları) KGB denkleştirici için kullanılması gereken denkleştirici katsayılarının bulunabilmesi için kullanılması gereken maliyet fonksiyonu,

$$J^{FB-KGB}(w) = \mathbb{E}\{|D(w) - X(w)F(w) - D(w)B(w)|^2\} + \lambda^* \int_0^{2\pi} B(w)dw \tag{2.26}$$

şeklindedir. Burada, λ Lagrange çarpım faktörüdür. Maliyet fonksiyonunda bulunan kısıt fonksiyonu, $\int_0^{2\pi} B(w)dw$ geri besleme katsayısının t=0 zaman anında sıfır değerini alması, yani kestirim yapılması istenilen değerin hatadan tamamen çıkarılmasını önlemektir. Bu sayede SAG'in herhangi bir anda, hem kendinden sonraki, hemde kendinden önceki sembollerden kaynaklanan SAG etkisinin giderilmesini sağlamaktadır. FB-KGB maliyet fonksiyonuna bakıldığında, kestirim yapılacak sinyal geri besleme yolu ile ileri besleme ile denkleştirilen sinyalden çıkarılması sağlanmaktadır. Böylece, DD'ye göre SAG etkisini gidermede daha iyi performans elde edilmektedir.

Gerekli işlemler yapıldığında, FB'de elde edilen ileri ve geri besleme katsayıları,

$$F(w) = \frac{H^*(w)}{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|H(w)|^2 dw + \sigma_\eta{}^2/\sigma_d{}^2} \tag{2.27}$$

$$B(w) = \frac{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|H(w)|^2 dw - |H(w)|^2}{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|H(w)|^2 dw + \sigma_\eta{}^2/\sigma_d{}^2} \tag{2.28}$$

olarak bulunur. İleri besleme katsayısı, $F(w)$ bakıldığında, kanala eşlenik filtre olduğu görülmektedir. Alınan sinyalin eşlenik filtreden geçirilmesi ile SGO en yüksek değere çıkarılması sağlanmaktadır.

FB- KGB denkleştirici kullanıldığında elde edilen EDOHK, $\xi_{min}^{o,FB-KGB}$ değeri,

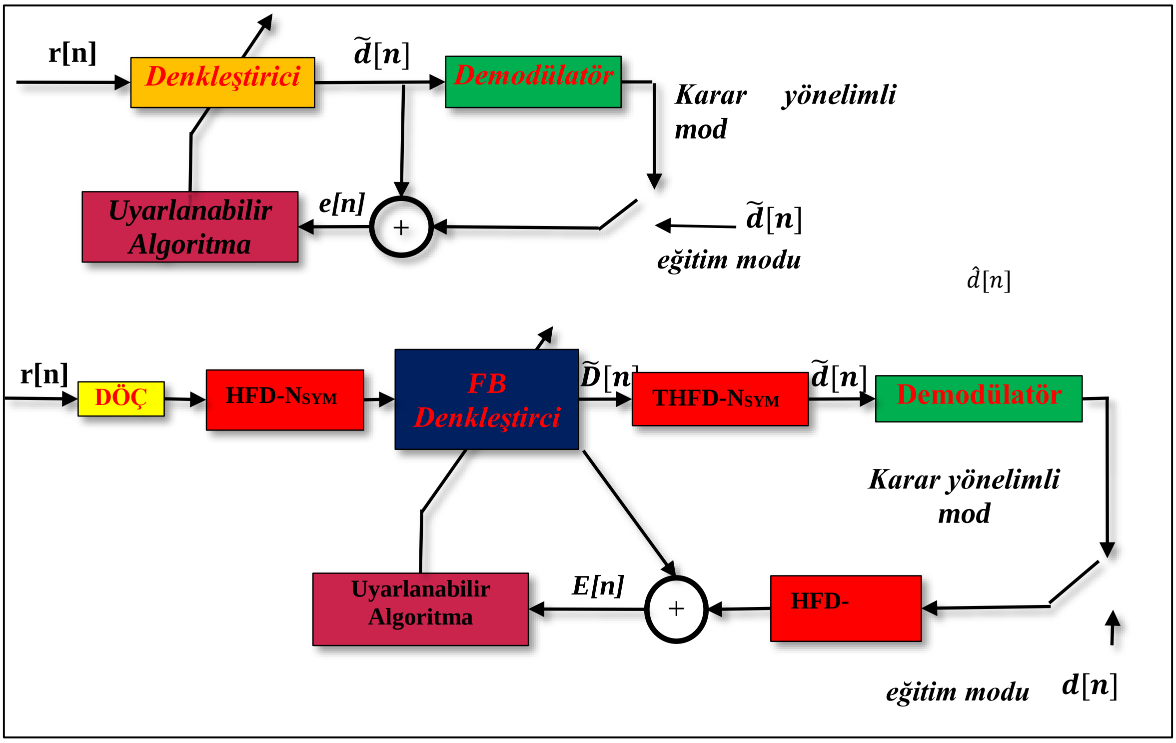
$$\begin{aligned} \xi_{min}^{o,FB-KGB}(w) &= E\{|D(w) - X(w)F(w) - X(w)F(w)|^2\} \\ &= \frac{\sigma_d{}^2\sigma_n{}^2}{(\sigma_d{}^2|H(w)|^2 + \sigma_n{}^2)^2} \end{aligned} \tag{2.29}$$

olarak bulunur. Doğrusal ile KGB denkleştiricilerin EDHOK performansları karşılaştırıldığında, KGB denkleştiricinin daha düşük kararlı durum OHK değerini sağladığı görülmektedir. Ancak işlemsel karmaşıklık açısından, KGB denkleştirici daha fazla işleme ihtiyaç duymaktadır. FB-KGB algoritması hem öncül hem de soncul SAG etkisini gidermekte, zaman bölgesi KGB algoritmasında ise soncul SAG etkisi göz ardı edildiğinden, FB-KGB algoritmasının performansı daha iyi olmaktadır.

2.2. Uyarlanabilir Denkleştirme

2.1 alt bölümünde gösterildiği üzere, EUAÇ (Wiener) denkleştirici katsayıların bulunabilmesi için hem kanala ait parametrelerin (kanal birim dürtü/frekans tepkisi), hem de gürültünün gücünün bilinmesi gerekmektedir. Uygulamada alıcı tarafında söz konusu bilgi mevcut olmadığından alınan veriden, denkleştirme için gerekli parametrelerin kestirilmesi gerekmektedir. Kanal parametrelerini alınan sinyal üzerinden kestirilerek, Wiener çözümüne yakınsama sağlayan algoritma olarak uyarlanabilir sinyal işleme teknikleri kullanılabilmektedir. Uyarlanabilir sinyal işleme tekniklerinin kullanılması ile denkleştirme işlemine yönelik çeşitli avantajları bulunmaktadır.

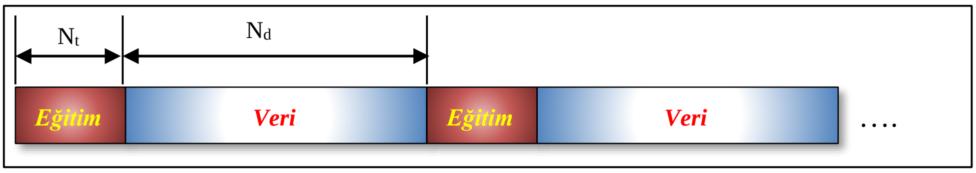
Durağan kanallarda en uygun denkleştirici katsayıları gönderilen veri dizisi boyunca sabit kalmakta ve zaman ile değişim göstermemektedir. Zamanla değişen kanallarda, en uygun katsayılarda zamana bağlı olarak değişim göstermektedir. Söz konusu değişim miktarı kablosuz kanallar için Doppler frekansından ölçülebilmektedir. Bu değişimin algılanarak değişen en uygun katsayıların kestiriminin doğru bir şekilde yapılması gerekmektedir.



Şekil 2.1. TT-FBD için (a) ZB (b) FB'de çalışan uyarlanabilir denkleştirici yapıları

Değişkenliğin algılanabilmesi için, haberleşme sisteminde belirli zaman aralıklarda alıcı ve verici tarafından bilinin eğitim dizisinin periyodik olarak gönderilmesi gerekmektedir. Giriş bölümünde belirtildiği üzere, bu zaman aralığı en az T_c tutarlılık zaman aralığı olarak ifade edilmektedir. Doppler kayma frekansı yani hızın artması halinde sistemin yeterli performası sağlaması için daha sık eğitim dizisi gönderilmesi gerekmektedir. Bu durumda haberleşmenin verimliliği fazla sayıda eğitim dizisi kullanılmasından dolayı olumsuz yönde etkilenmektedir. İki eğitim dizisi arasındaki sürede meydana gelebilecek zamansal değişimi algılanması ve değişen duruma göre yeni en uygun denkleştirici katsayılarının kullanılarak haberleşme verimliliğinin arttırılması gerekmektedir. Bu amaçla, uyarlanabilir sinyal işleme teknikleri kullanılabilecek önemli bir seçenek olarak ortaya çıkmaktadır. Uyarlanabilir algoritmalar sayesinde hem en uygun denkleştirici katsayılarının hesaplanması basitleştirilmekte, hem de zamanla meydana gelen değişimlerin algılanması ve yeni duruma göre en uygun denkleştirici katsayılarının hesaplanmasına olanak vermektedir. Zaman ve TT-FBD için kullanılan uyarlanabilir denkleştirici yapıları Şekil 2.1 ile verilmektedir.

Uyarlanabilir algoritmanın denkleştirme işlemini yapabilmesi için, alıcı ve verici tarafından bilinen yeterli uzunluktaki eğitim dizisi adı verilen verinin bir çerçeve yapısında, periyodik olarak alıcıya gönderilmesi gerekmektedir. Örnek bir eğitim dizisi kullanan çerçeve yapısı Şekil 2.2’de gösterilmektedir.



Şekil 2.2. Eğitim dizisi kullanan çerçeve yapısı

Alıcı, vericinin eğitim dizisi boyunca gönderdiği veriyi bildiğinden, kanal birim dürtü/frekans tepkisini kestirmesi sağlanmaktadır. Eğitim dizi uzunluğu, N_t boyunca alınan sinyalden, zaman bölgesi denkleştirici için kanal parametreleri aşağıdaki şekilde elde edilerek en uygun denkleştirici katsayısı hesaplanır.

Sonrasında ise, veri dizisi boyunca hesaplanan en uygun katsayılar kullanılarak, denkleştirme işlemi DD veya KGB yapısı ile gerçekleştirilir.

ZB ve FB uyarlanabilir denkleştirici yapıları karşılaştırıldığında, frekans bölgesinde uyarlamalı denkleştirme için N_{sym} noktalı HFD ve THFD işlemlerinin kullanıldığı görülmektedir. Temelde denkleştirme alınan sinyalin bir filtreden geçirilme yani konvolüsyon işlemidir. HFD ve THFD algoritmaları, konvolüsyon işleminin daha az işlem gerçekleştirilmesini sağlamaktadır.

2.2.1. Geleneksel uyarlanabilir ZB denkleştirme

ZB uyarlanabilir algoritma her adımda, gönderilen sinyal ile denkleştirici ile elde edilen sinyal arasındaki zaman bölgesindeki hatayı $e[n]$ hesaplayarak, bu hatanın en düşük kareler veya en düşük ortalama hata karesi yöntemine göre en aza indirilmesi hedeflenmektedir.

Eğitim dizisi süresince, alıcı gönderilen sinyali mükemmel olarak bildiğinden, hatayı tam olarak hesaplamaktadır. Bu sürenin sonunda veri dizisini alıcı kestirmek üzere, eğitim süresi sonda hesaplanan denkleştirici katsayıları ile alınan sinyali filtrelemekte, sonrasında ise bu sinyali demodüle ederek veriyi tahmin etmektedir. Bu tahmini yine hatayı hesaplamakta kullanmaktadır.

Uyarlanabilir algoritmanın temel amacı, belirlenen maliyet fonksiyonunu, $J(n)$ minimum değere getirecek parametrelerin yinelemeli olarak bulunmasını amaçlamaktadır. Yineleme için, maliyet fonksiyonunun her adımda gradyantının tersi yönde güncellenmesi sağlanmaktadır.

ZB uyarlanabilir algoritmanın genel katsayı güncelleme formülizasyonu,

$$w[n+1] = w[n] - \nabla J(n) \tag{2.30}$$

ile ifade edilir. Burada $J(n)$ maliyet fonksiyonu, ∇ ise gradyant operatörü, $w[n] = [w_{-L}[n], w_{-L+1}[n], \dots, w_0[n], \dots, w_{L-1}[n]\ ]^{\boldsymbol{T}}$ n. andaki $2L+1$ uzunluğunda denkleştirici filtre vektörüdür.

ZB'de çalışan LMS, NLMS ve RLS uyarlanabilir denkleştirici algoritmaları için maliyet fonksiyonu ve katsayı güncelleme bağıntıları Çizelge 2.1'de verilmiştir. Bağıntılarda gösterilen $e[n] = d[n] - \tilde{d}[n]$ n. semboldeki hata değeri olup, $r^*[n] = [\left[r[n-L], r[n-L+1], \dots, r[n], \dots, r[n+L+1]\right]^T$ olarak tanımlanan, $2L+1$ uzunluğunda alınan sinyal vektörüdür.

Uyarlanabilir algoritma olarak, en düşük ortalama kareler metodu (least mean square) ve öz yinelemeli en düşük kareler metodu (recursive least squares) kullanılmaktadır. Bunun yanında, işlemsel karmaşıklık seviyesi, filtre katsayıları bulunması için matris tersi doğrudan hesaplanmadığından, oldukça düşürülmektedir. Bir önceki alt bölümde belirtildiği üzere, alıcının kanala ait parametreleri mükemmel olarak bilmesi halinde, MMSE tabanlı zaman bölgesinde çalışan denkleştirici kullanıldığında işlemsel karmaşıklık seviyesi $\mathcal{O}(2L+1)^3$ iken, ZB-LMS tabanlı uyarlanabilir algoritma kullanılması ile $\mathcal{O}(2L+1)$, RLS tabanlı algoritmada ise $\mathcal{O}(2L+1)^2$ seviyesine indirgenmektedir. Ancak, ZB uyarlanabilir denkleştiriciler ile elde edilen karmaşıklık seviyesi dahi çok yüksek haberleşme hızlarında işlemci açısından sorunlara neden olmaktadır. Bu nedenle, uyarlanabilir ZB denkleştirici yerine, HFD ve THFD kullanan FB uyarlanabilir denkleştirici yapısı kullanılabilmektedir. Bir sonraki alt bölümde frekans bölgesi uyarlanabilir denkleştirici yapıları tanıtılmaktadır.

Çizelge 2.1. ZB uyarlanabilir denkleştirici algoritmaları

Metod	Filtre Güncelleme Bağıntısı	Maliyet Fonksiyonu
LMS	$w[n+1] = w[n] + \mu r^*[n]e[n]$	$J_k^{ZB-LMS}(n) = \lvert e[n] \rvert^2$
NLMS	$w[n+1] = w[n] + \frac{\mu}{\lVert w[n] \rVert^2} r^*[n]e[n]$	$J_k^{ZB-NLMS}(n) = \lVert w[n+1] - w[n] \rVert^2 + 2Re\{\lambda^H(d[n] - w^T[n+1]r[n])\}$
RLS	$w[n] = w[n-1] + Z[n]r^*[n]e[n]$, $Z[n] = (I - K[n]X[n])\frac{Z[n-1]}{\beta}$	$J_k^{ZB-RLS}(n) = \sum_{i=0}^{n} \beta^{n-i} \lvert d[n] - w^T[n]r[n] \rvert^2$

2.2.2. Geleneksel uyarlanabilir FB denkleştirme

Bu alt bölümde, frekans bölgesi için kullanılan geleneksel uyarlanabilir algoritmalar kısaca belirtilmektedir. Literatürde kullanılmakta olan algoritmalar, LMS (Clarck, 1998), NLMS (Shynk, 1992) ve RLS (Clarck, 1998) algoritmaları olarak sıralanmaktadır.

Giriş bölümünde açıklandığı üzere, TT-FBD sistemleri blok tabanlı olarak çalışmakta olup, denkleştirme ve katsayı güncelleme işlemi her blokta gerçekleştirilmektedir. Blok tabanlı denkleştirmenin, sembol tabanlı denkleştirmeye göre avantajı işlemsel karmaşıklık düzeyinin düşürülmesidir.

FB-LMS algoritması

Geleneksel LMS algoritması, blok tabanlı frekans bölgesi denkleştirme içinde uygulanabilmektedir (Clarck, 1998). Frekans bölgesi LMS (FB-LMS) algoritmasında kullanılan maliyet fonksiyonu, $J_k^{FB-LMS}[n]$,

$$J_k^{FB-LMS}[n] = |E_k[n]|^2 \tag{2.31}$$

olarak tanımlanmaktadır. Görüldüğü üzere FB-LMS algoritması anlık hata üzerinden en uygun Wiener çözümüne yakınsamaya çalışmaktadır. Katsayı güncelleme eşitliği için, maliyet fonksiyonunun gradyant değeri, $\nabla J_k^{FB-LMS}[n] = \frac{\partial J_k^{FB-LMS}[n]}{\partial W_k[n]}$, ve basamak büyüklüğü, μ kullanılması ile

$$W_{k+1}[n] = W_k[n] + \mu \frac{\partial J_k^{FB-LMS}[n]}{\partial W_k[n]} \tag{2.32}$$

ile bulunabilir. Eşitlikteki, $\frac{\partial J_k^{FB-LMS}[n]}{\partial W_k[n]}$ maliyet fonksiyonundan hesaplanarak değeri yerine konulduğunda, FB-LMS algoritmasının katsayı güncelleme eşitliği,

$$W_{k+1}[n] = W_k[n] + \mu X_k^*[n] E_k[n] \tag{2.33}$$

şeklinde bulunmaktadır.

ZB-LMS algoritmasında olduğu gibi, frekans bölgesi LMS algoritmasında Wiener çözümüne yakınsamayı (hız vb.) kontrol etmek üzere, basamak büyüklüğü, μ kullanılmaktadır. Vericiden gönderilen sinyal, sıfıra yakın veya eşit spektruma sahip bir kanaldan geçtiğinde, kullanılması gereken basamak büyüklüğünün düşürülmesi gerekmektedir. Ancak, birim basamak büyüklüğünün düşürülmesi, en uygun çözüme yakınsama hızını düşürmekte yani, yakınsama hızı giriş sinyalinin özdeğerlerine bağlı olduğundan, sıfıra yakın spektrum bölgelerinde en uygun çözüme yakınsama hızı azalmaktadır. FB-LMS algoritmasının diğer dezavantajı, kullanılan basamak büyüklüğünün arttırılması ile en uygun çözüm çevresinde meydana gelen dalgalanmanın şiddetinin artması, sonuçta kararlı durumda elde edilen OHK değerinin artması ile performansın olumsuz yönde etkilenmesidir.

FB-NLMS algoritması

FB-LMS algoritması, ZB'de olduğu gibi, en büyük dezavantajı, yakınsama hızının girişe uygulanan sinyalin özilinti değerine bağlı olması ve bu yüzden renkli spektruma sahip sinyalin girişe uygulanması halinde en uygun çözüme yakınsamasının uzun sürmesidir. Yakınsama hızını arttırmak üzere NLMS adı verilen LMS tabanlı algoritma geliştirilmiştir. NLMS algoritması, frekans bölgesi uyarlanabilir denkleştirme içinde kullanılabilmektedir. Geleneksel FB-NLMS algoritması için maliyet fonksiyonu,

$$minimum|W_{k+1}[n] - W_k[n]|^2$$
$$kısıtlama: D_k[n] = X_k[n]W_{k+1}[n]$$

olarak ifade edilmektedir. Bu maliyet fonksiyonu matematiksel olarak ifade edilir ise,

$$J_k^{FB-NLMS}[n] = |W_{k+1}[n] - W_k[n]|^2 + 2Re\{\lambda^*(D_k[n] - X_k[n]W_{k+1}[n])\} \quad (2.34)$$

olmaktadır. Eşitlikteki λ katsayısı Lagrange çarpım değerini göstermektedir. Maliyet fonksiyonunun türevi alınarak katsayı güncelleme formülü,

$$\frac{\partial J_k^{FB-NLMS}[n]}{\partial W_{k+1}[n]} = W_{k+1}[n] - W_k[n] + X_k^*[n]\lambda = 0 \quad (2.35)$$

$$W_{k+1}[n] = W_k[n] + X_k^*[n]\lambda \quad (2.36)$$

halini alır. Maliyet fonksiyonunun Lagrange çarpım değerine göre türevinden,

$$\frac{\partial J_k^{FB-NLMS}[n]}{\partial \lambda} = D_k[n] - X_k[n]W_{k+1}[n] = 0 \quad (2.37)$$

$$E_k[n] = D_k[n] - X_k[n]W_k[n] = X_k[n]X_k^*[n]\lambda \quad (2.38)$$

$$\lambda = \frac{1}{|X_k[n]|^2} E_k[n] \tag{2.39}$$

elde edilir. λ değeri yerine konulduğunda ve birim basamak büyüklüğü μ eklendiğinde, katsayı güncelleme eşitliği,

$$W_{k+1}[n] = W_k[n] + \frac{\mu}{|X_k[n]|^2} X_k^*[n] E_k[n] \tag{2.40}$$

elde edilir. Burada, $|X_k[n]|^2$ ifadesi, alınan sinyalin n. frekans noktası için güç değerine denk gelmektedir. Bu değerin yinelemeli olarak kestirimi için aşağıdaki kestirim eşitliği kullanılmaktadır (Haykin, 2010:367; Shynk, 1992),

$$P_k[n] = \gamma P_{k-1}[n] + (1-\gamma)|X_k[n]|^2 \tag{2.41}$$

Eşitlikteki γ değeri 0 ile 1 arasında seçilmelidir. Durağan kanallar için bu değer 1 e yakın seçilmesi, kanaldaki zamansal değişim arttıkça 0'a doğru azaltılması gerekmektedir. Giriş gücünün anlık değerinin kullanılması yerine (2.41) ifadesinin kullanılması ile, giriş gücünün anlık değerde meydana gelen büyük değişimlerin ortalamasının alınmasını sağlamaktadır. Böylece, giriş gücünün kestiriminde meydana gelen dalgalanmanın, FB-NLMS algoritmasını olumsuz yönde etkilemesinin önüne geçilmektedir. (2.41) eşitlik katsayı güncelleme eşitliğinde kullanıldığında,

$$W_{k+1}[n] = W_k[n] + \frac{\mu}{P_k[n]} X_k^*[n] E_k[n] \tag{2.42}$$

halini alır. FB-NLMS algoritmasının katsayı güncelleme eşitliğine bakıldığında, LMS algoritmasına göre farkın, giriş sinyalinin güç değeri, $P_k[n]$, ile normalize edildiği görülmektedir. Bu işlem sayesinde, LMS algoritmasında yakınsamanın sıfıra yakın değerler için uzun sürmesinin önüne geçilerek, çözüme daha hızlı bir şekilde ulaşılması sağlanmaktadır. Ayrıca FB-NLMS algoritmasının performansı, FB-LMS algoritmasından daha iyi olmakta, ancak aşağıda anlatılan FB-RLS algoritmasına göre daha kötü olmaktadır.

FB-RLS algoritması

Geleneksel RLS algoritması, FB için de kullanılabilir (Clarck, 1998). Bu durumda, HFD ile elde edilen n. frekans noktası için kullanılan maliyet fonksiyonu, $J_k^{FB-RLS}[n]$, tanımlanacak olur ise,

$$J_k^{FB-RLS}[n] = \sum_{i=0}^{k} \beta^{k-i} \left|E_{k,i}[n]\right|^2 \tag{2.43}$$

$$E_{k,i}[n] = D_i[n] - X_i[n]W_k[n] \tag{2.44}$$

şeklindedir. Burada β RLS maliyet fonksiyonunun unutma faktörüdür. Unutma faktörü değeri 0 ile 1 arasında seçilmesi gerekmektedir. J_k^{FB-RLS} fonksiyonunu en düşük değere getiren katsayı değeri, $W_k[n]$ bulunacak olur ise,

$$\frac{\partial J_k^{FB-RLS}[n]}{\partial W_k[n]} = \sum_{i=0}^{k} \beta^{k-i} {X_i}^*[n] E_{k,i}[n] = 0 \tag{2.45}$$

Bu durumda, eşitlik düzenlendiğinde, $W_k[n]$ katsayısı için,

$$\left(\sum_{i=0}^{k} \beta^{k-i} |X_i[n]|^2\right) W_k[n] = \left(\sum_{i=0}^{k} \beta^{k-i} {X_i}^*[n] D_i[n]\right) \tag{2.46}$$

denklemi elde edilir. RLS algoritması n. Frekans noktası için için özilinti, $R_{k,x}[n]$, ,

$$R_{k,x}[n] = \sum_{i=0}^{k} \beta^{k-i} |X_i[n]|^2 \tag{2.47}$$

ve çapraz ilinti, $p_{k,(D,X)}[n]$ değerleri,

$$p_{k,(D,X)}[n] = \sum_{i=0}^{k} \beta^{k-i} X_i^*[n] D_i[n] \tag{2.48}$$

olarak tanımlandığında, (2.46) ifadesi,

$$W_k[n] = \left(R_{k,x}[n]\right)^{-1} p_{k,(D,X)}[n] \tag{2.49}$$

şekline dönüşür. $R_{k,x}[n]$ değeri,

$$R_{k,x}[n] = \beta R_{k-1,x}[n] + |X_k[n]|^2 \tag{2.50}$$

ve $p_{k,(D,X)}[n]$ değeri,

$$p_{k,(D,X)}[n] = \beta p_{k-1,(D,X)}[n] + X_k^*[n] D_k[n] \tag{2.51}$$

yinelemeli olarak olarak bulunabilir. (2.50) ifadesinde matris tersleme önsavı (lemması) kullanılarak, $Z_{k,x}[n] = \left(R_{k,x}[n]\right)^{-1}$ değeri,

$$\begin{aligned} Z_{k,x}[n] = \beta^{-1} Z_{k-1,x}[n] \\ &- \beta^{-1} Z_{k-1,x}[n] X_k^*[n] \big(1 \\ &+ X_k[n] \beta^{-1} Z_{k-1,x}[n] X_k^*[n]\big)^{-1} X_k[n] \beta^{-1} Z_{k-1,x}[n] \end{aligned} \tag{2.52}$$

olarak yinelemeli olarak bulunması sağlanmaktadır. Bu ifade (2.32) eşitliğinde yerine konulduğunda, ve aşağıdaki tanımlama yapıldığında,

$$K_k[n] = \frac{Z_{k-1,x}[n] X_k^*[n]}{\beta + Z_{k-1,x}[n] |X_k[n]|^2} \tag{2.53}$$

$$Z_{k,x}[n] = (1 - K_k[n] X_k[n]) \frac{Z_{k-1,x}[n]}{\beta} = \frac{Z_{k-1,x}[n]}{\beta + Z_{k-1,x}[n] |X_k[n]|^2} \tag{2.54}$$

olarak bulunur. Ayrıca,

$$Z_{k,x}[n]X_k^*[n] = \frac{Z_{k-1,x}[n]X_k^*[n]}{\beta + Z_{k-1,x}[n]|X_k[n]|^2} = K_k[n] \tag{2.55}$$

olarak bulunmaktadır. (2.53)- (2.55) eşitlikleri kullanıldığında, RLS algoritmasının katsayısı güncelleme eşitliği (2.49),

$$W_k[n] = (1 - K_k[n]X_k[n])\frac{Z_{k-1,x}[n]}{\beta}\left(\beta p_{k-1,(D,X)}[n] + X_k^*[n]D_k[n]\right) \tag{2.56}$$

halini almaktadır. (2.56) düzenlendiğinde,

$$\begin{aligned} W_k[n] = {} & Z_{k-1,x}[n]p_{k-1,(D,X)}[n] - K_k[n]X_k[n]Z_{k-1,x}[n]p_{k-1,(D,X)}[n] + \\ & Z_{k,x}[n]X_k^*[n]D_k[n] \end{aligned} \tag{2.57}$$

halini alır. $W_{k-1}[n] = Z_{k-1,x}[n]p_{k-1,(D,X)}[n]$ olduğundan, (2.57) düzenlenir ise,

$$W_k[n] = W_{k-1}[n] + K_k[n](D_k[n] - X_k[n]W_{k-1}[n]) \tag{2.58}$$

olmaktadır. RLS algoritması için hata değeri $E_k[n] = D_k[n] - X_k[n]W_{k-1}[n]$ olarak tanımlandığında, katsayı günelleme eşitliği,

$$W_k[n] = W_{k-1}[n] + K_k[n]E_k[n] \tag{2.59}$$

olarak bulunmaktadır. (2.53) eşitliği ile verilen $K_k[n]$ ifadesi yerine konulduğunda, katsayı güncelleme eşitliği,

$$W_k[n] = W_{k-1}[n] + \frac{Z_{k-1,x}[n]}{\beta + Z_{k-1,x}[n]|X_k[n]|^2}X_k^*[n]E_k[n] \tag{2.60}$$

halini alır. Görüldüğü üzere, FB-RLS algoritmasında katsayı güncelleme eşitliği temel olarak özilinti değerinin ters değeri ile çarpıldığından, giriş sinyali beyazlaştırılmakta ve bu sayede yakınsama hızı LMS tabanlı algoritmalara göre daha hızlı meydana gelmektedir. Beyazlaştırma işlemi sayesinde, algoritmanın girişine renkli sahip sinyalin uygulanması durumunda kararlı durum performansı LMS tabanlı algoritmalara göre daha iyi olması sağlanmaktadır.

2.3. FB-LMS, FB-NLMS ve FB-RLS Algoritmalarının Ayarsızlık, Yakınsama ve İzleme Performanslarının Teorik Analizi

Bölüm kapsamında gösterildiği üzere uyarlanabilir algoritmalar en uygun denkleştirici filtre katsayıları yinelemeli olarak kestirmeye çalışmaktadır. Ancak, gönderilen ve alınan sinyalin istatistiki doğasından ötürü, uyarlanabilir algoritma kestirdiği en uygun filtre katsayılarına belirli bir zaman süresinde ve doğrulukta yakınsamayabilmektedir. Ayrıca yakınsamanın sağlanması ardından hesaplanan katsayılar en uygun çözüm etrafında dalgalanma meydana gelmektedir. Söz konusu dalgalanma, Wiener katsayıları ile denkleştirme işlemi uygulandığında elde edilen EDOHK değerinden daha yüksek değer almasına neden olmaktadır. Bu nedenle kullanılan uyarlanabilir algoritmanın meydana getirdiği fazladan OHK değeri incelenmesi gerekmektedir. Yang, Enzer, ve Yang (2017) tarafından yapılan çalışmada FB denkleştiricilerin istatistiki analizi yapılmış ve yinelemeli şekilde elde edilebilecek ifadeler elde edilmiştir.

Söz konusu fazlalılığın EDOHK değerine göre oranı ayarsızlık olarak adlandırılmaktadır. Ayarsızlık değeri, uyarlanabilir algoritmalar ile elde edilen kararlı durum OHK performansını belirlenmesinde kullanılmaktadır. Ayarsızlık değerinin idealde sıfır olması, yani uyarlanabilir algoritma ile elde edilen katsayı değerlerinin en uygun çözüme tam şekilde her adımda eşit olması, sonuçta EDOHK değerine eşit olması istenilmektedir.

Yakınsama performansı ise, uyarlanabilir algoritmanın başlangıçta verilen ilk değerden sonra en uygun değere yakınsama hızıdır. Uyarlanabilir algoritmanın, en uygun denkleştirici katsayısını hesaplayabilmesi için, alıcı verici sisteminde her iki tarafın bildiği veri dizisinin (eğitim dizisi) kullanılması, ayrıca kestirim yapılacak katsayıya bir ilk değer atanması ve bu değerin her adımda bilinen eğitim dizisi sayesinde hatayı bulmak suretiyle güncelleme yapılması gerekmektedir.

Uyarlanabilir algoritmalarda bir diğer incelenmesi gereken parametre ise zamanla değişen en uygun çözümü yakalama kabiliyetidir. Mobil haberleşme sistemlerinde kullanıcılar hareketli olduklarından, kanal durumunda zaman içerisinde değişim meydana gelmektedir.

Uyarlanabilir algoritmanın bu değişimi yakalaması ve takip etmesi kullanıcılara istenilen performansı sağlamakta büyük öneme sahip olmaktadır.

Uyarlanabilir algoritmanın zaman ile değişen, GBD olmayan sistemlerde performansını belirlemede kullanılan parametre izleme performansıdır. İzleme performansı uyarlanabilir algoritmanın zamanla değişen en uygun çözümün takibini ne derecede yapılabildiğinin göstergesidir. İzleme performansı zamanla değişen kanal üzerinden haberleşme yapan, ör. hızlı hareket eden mobil abonenin, elde edeceği haberleşme hızını ve güvenilirliğini etkileyen birincil faktördür. GBD olmayan kanallar için en uygun denkleştirici katsayısı zaman ile değişim gösterdiğinden, uyarlanabilir algoritma yapacağı kestirim işlemini yeterli doğrulukta yapabilmesi halinde güvenilir veri alışverişi oluşmaktadır. Günümüzde, mobil kullanıcılar artık, otomobil, uçak, hızlı tren gibi hareket düzeyi yüksek hızlarda hareket eden ulaşım araçları içinde de kablosuz haberleşme sistemleri üzerinden iletişim kurma isteğindedir. Örneğin, 4G-LTE-A sistemi için tasarım parametrelerinden biri de 500km/s'lik mobil abone hızında haberleşmenin devam etmesidir. Bundan dolayı, yüksek değişim gösteren kanallar üzerinden kablosuz veri alış verişinin sağlıklı olarak gerçekleştirilmesine sağlamak üzere zamansal değişimi algılama ve değişken denkleştirici katsayılarının yeterli doğrulukta kestirilmesi önem kazanmaktadır.

Uyarlanabilir algoritmaların yukarıda değinilen performans değerlerini değerlendirmek, karşılaştırmak ve davranışlarını karakterize etmek için ayarsızlık (misadjustment), yakınsama (convergence) ve izleme (tracking) performans göstergeleri kullanılmaktadır. Bu üç gösterge kullanılan uyarlanabilir algoritma yapısına ve algoritma parametrelerine göre değişim göstermektedir.

Uygulamada, uyarlanabilir algoritma için istenilen, olabildiğince düşük ayarsızlık değeri, en uygun çözüme en kısa sürede ulaşması ve zaman değişim hızı artsa dahi en uygun performansı sağlamaya devam etmesidir. Ancak bu üç gereksinim birbiri ile çelişmektedir. Söz gelimi geleneksel LMS, NLMS ve RLS algoritmalarında, düşük ayarsızlık değeri elde etmek için sırası ile kullanılan parametre değerleri μ sıfır değerine doğru küçültülmesi, β değerinin ise bire yakın seçilmesi gerekmektedir. Diğer yandan parametrelerin ayarsızlık değerini azaltacak şekilde seçilmesi, yakınsama hızını düşürerek en uygun çözüme daha yavaş yakınsama sağlanmasına neden olmaktadır. İzleme performansı açısından ise, söz konusu parametrelerin düşük seçilmesi ile zaman ile meydana gelen değişimlerin algılanmasını güçleştirmekte yetersiz performans elde edilmesine neden olmaktadır. Bu üç amacın aynı anda elde edilebilmesi için geleneksel algoritmalarda parametre değerlerinin bir şekilde her durum için hesaplanması ve ayarlanması gereksinimini doğurmakta olup uygulamada bu durum sıkıntıya yol açmaktadır.

Uyarlanabilir denkleştirme algoritmalarının ayarsızlık ve yakınsama performanslarının incelenmesi için, FB'de gönderilen sinyal $D_k[n]$'in,

$$D_k[n] = X_k[n]W^o[n] + \mathcal{N}_k^o[n] \tag{2.61}$$

bağıntısını sağladığı, işlemlerde kullanılan sinyallerin ise GBD olduğu kabul edilmektedir. Burada $W^o[n]$ en uygun Wiener çözümünü, $\mathcal{N}_k^o[n]$ ise taban hata değeri olup, sıfır ortalamalı öz ilinti değeri $N_{sym}\sigma_{\eta^o}^2$ olan Gauss gürültüsünü göstermektedir. OHK tabanlı herhangi bir uyarlamalı algoritma bu hata değerinden düşük bir OHK değeri sağlayamaz.

Bu durumda uyarlanabilir algoritmaların kullanımı ile, GBD kanallar için n. frekans noktası için elde edilen OHK değeri, $\xi_k[n]$,

$$\xi_k[n] = E\{|D_k[n] - X_k[n]W_{k-i}[n]|^2\} \tag{2.62}$$

ile hesaplanmaktadır. i değeri LMS ve RLS tabanlı algoritmalar için sırasıyla 0 ve 1 değerini almaktadır. (2.61) eşitliği (2.62) içerisinde kullanıldığında,

$$\xi_k[n] = \mathbb{E}\{|X_k[n]W^o[n] + \mathcal{N}_k^o[n] - X_k[n]W_{k-i}[n]|^2\} \tag{2.63}$$

elde edilir. Algoritmanın, en uygun değerden sapma miktarı $\Delta W_k[n] = W_k[n] - W^o[n]$ olarak tanımlanır ve (2.63) ifadesinde yerine konulur ise,

$$\xi_k[n] = \mathbb{E}\{|\mathcal{N}_k^o[n] - X_k[n]\,\Delta W_{k-i}[n]|^2\} \tag{2.64}$$

olarak bulunur. (2.64) düzenlendiğinde,

$$\xi_k[n] = \mathbb{E}\{|\mathcal{N}_k^o[n]|^2\} + E\{|X_k[n]\Delta W_{k-i}[n]|^2\} \\ - 2Re\left\{E\left[\mathcal{N}_k^{o,*}[n]X_k[n]\Delta W_{k-i}[n]\right]\right\} \tag{2.65}$$

halini almaktadır. Gauss gürültüsü, $\mathcal{N}_k^o[n]$, alınan sinyal $X_k[n]$ ve $\Delta W_k[n]$'den bağımsız olduğu kabul edilir ise,

$$\xi_k[n] = \xi^{\mathrm{o}}\,[\mathrm{n}] + \Delta\xi_k[n] = N_{sym}\sigma_{\eta^o}^2 + \mathbb{E}\{|X_k[n]\Delta W_{k-i}[n]|^2\} \tag{2.66}$$

olarak bulunmaktadır. (2.66)'dan anlaşıldığı üzere, kullanılan uyarlanabilir algoritma, Wiener çözümü kullanıldığında elde edilen EDOHK, $\xi^{\mathrm{o}}\,[\mathrm{n}] = N_{sym}\sigma_{\eta^o}^2$, üzerine $\Delta\xi_k[n] = \mathbb{E}\{|X_k[n]\Delta W_k[n]|^2\}$ kadarlık fazladan bir OHK oluşmasına yol açmaktadır. Bu değer, EDOHK değeri ile normalize edilir ise n. frekans noktası için ayarsızlık değeri, $M[n] = \frac{\Delta\xi_k[n]}{N_{sym}\sigma_{\eta^o}^2} = \frac{\mathbb{E}\{|X_k[n]\Delta W_k[n]|^2\}}{N_{sym}\sigma_{\eta^o}^2}$ şeklinde tanımlanmaktadır. Bu değer, incelenen uyarlamalı algoritmanın EDOHK değerine göre ne kadarlık fazladan OHK oluştuğunu göstermektedir. İdealde istenilen $M[n]$ değerinin olabildiğince düşük sıfıra yakın bir değer almasıdır.

Uyarlanabilir algoritmaların zamanla değişen katsayıları izleme performansını belirlemek için, en uygun katsayı değeri, $W_k^o[n]$' nin zamanda 1. dereceden Markov zinciri olarak,

$$W_{k+1-\mathrm{i}}^o[n] = aW_{k-i}^o[n] + \mathfrak{N}_k[n] \tag{2.67}$$

şeklinde değişim gösterdiği kabul edilmiştir. Burada, $\mathfrak{N}_k[n]$ sıfır ortalamalı, varyansı $\mathbb{E}\{|\mathfrak{N}_k[n]|^2\} = N_{sym}{\sigma_{\mathfrak{N}}}^2$ olan frekans bölgesindeki EBGG, a 1'e çok yakın seçilen değeri göstermektedir. Eş. (2.67)'den görüldüğü üzere ${W_k}^0[n]$ zamanda değişimi, a parametresinin 1'e yakın olmasından dolayı, $\mathfrak{N}_k[n]$ EBGG'nin dar bant genişliğine sahip alçak frekans geçiren filtrelenmiş halidir. En uygun katsayılarda meydana gelen değişim miktarı ise a katsayı değerine bağlı olmaktadır. a katsayı değeri 1'e doğru yaklaştığında en uygun katsayı değeri de zaman içerisinde daha yavaş değişim gösterecektir.

Zamanla değişen kanallarda, en uygun katsayı değeri her adımda değişkenlik gösterdiğinden, $D_k[n]$ sinyali,

$$D_k[n] = X_k[n]W_{k-i}^o[n] + \mathcal{N}_k^o[n] \tag{2.68}$$

bağıntısını sağladığı kabul edilmektedir. Burada $W_{k-i}^o[n]$ zamanla değişen en uygun filtre katsayı değerini göstermektedir.

Aşağıda, geleneksel FB'de çalışan LMS, NLMS ve RLS ait ayarsızlık, yakınsama hızı ve takip performanslarının teorik olarak elde edilmesi gösterilmektedir. Söz konusu parametreler karşılaştırılarak algoritmaların teorik olarak avantaj ve dezavantajlarının belirlenmesi amaçlanmaktadır.

2.3.1. LMS tabanlı FB algoritmaların teorik performansı

Bu kısımda, geleneksel FB-LMS ve FB-NLMS algoritmaların teorik performans analizi yapılmaktadır. Bu amaçla sırasıyla, ayarsızlık, yakınsama ve takip performanslarının belirlenmeseine yönelik teorik analiz yapılmaktadır. Yapılan analizlerin doğrulanması için bilgisayar benzetim çalışmaları yapılmıştır.

Ayarsızlık

FB-LMS ve FB-NLMS algoritmaları için $\Delta W_k[n] = W_k[n] - W^o[n]$ şeklinde katsayının en uygun Wiener değerinden sapma değeri tanımlanarak, (2.33) ve (2.42) ile verilen katsayı güncelleme ifadelerinde yerine konulur ise, anlık katsayı FB-LMS ve FB-NLMS katsayı sapma değerleri, $\Delta W_{k+1}^{LMS}[n]$, ve $\Delta W_{k+1}^{NLMS}[n]$, sırasıyla,

$$\Delta W_{k+1}^{LMS}[n] = \Delta W_k^{LMS}[n] + \mu X_k^*[n](X_k[n]W^o[n] + \mathcal{N}_k^o[n] - X_k[n]W_k[n]) \tag{2.69}$$

$$\Delta W_{k+1}^{NLMS}[n] = \Delta W_k^{NLMS}[n] + \frac{\mu}{P_k[n]} X_k^*[n](X_k[n]W^o[n] + \mathcal{N}_k^o[n] - X_k[n]W_k[n]) \tag{2.70}$$

şeklinde olacaktır.

FB-LMS algoritması için literatürde bulunan teorik ayarsızlık değerleri,

$$M^{LMS} = \mu \frac{\sigma_x^2}{2}, \sigma_x^2 = \frac{1}{N_{sym}^2} \sum_{n=0}^{N_{sym}-1} \mathbb{E}\{|X[n]|^2\}$$

şeklindedir.

Tez kapsamında yapılan çalışmada literatürde FB-LMS ve FB-NLMS algoritmaları için verilmiş olan teorik ayarsızlık değerinin daha doğru sonuç verecek yeni bir çalışma yapılması amaçlanmıştır.

FB-LMS algoritması katsayı sapma değeri için, (2.61), (2.69) içinde kullanıldığında,

$$\Delta W_{k+1}^{LMS}[n] = (1 - \mu|X_k[n]|^2)\Delta W_k^{LMS}[n] + \mu X_k^*[n]\mathcal{N}_k^o[n] \tag{2.71}$$

elde edilir. Aşağıdaki tanımlamalar kullanılarak,

$$\mathbb{K}_k^{LMS}[n] = (1 - \mu|X_k[n]|^2)^2 \tag{2.72}$$

$$\mathbb{L}_k^{LMS}[n] = 2\mu(1 - \mu|X_k[n]|^2)\mathrm{Re}\{\Delta W_k^{*,LMS}[n]X_k^*[n]\mathcal{N}_k^o[n]\} + \mu^2|X_k[n]|^2|\mathcal{N}_k^o[n]|^2 \tag{2.73}$$

(2.71) ifadesinin her iki tarafının norm karesi alındığında, katsayı sapma karesi, $\left|\Delta W_{k+1}^{LMS}[n]\right|^2$,

$$\left|\Delta W_{k+1}^{LMS}[n]\right|^2 = \mathbb{K}_k^{LMS}[n]\left|\Delta W_k^{LMS}[n]\right|^2 + \mathbb{L}_k^{LMS}[n] \tag{2.74}$$

olarak elde edilmektedir. (2.74) $k = 0$ başlangıç bloğundan itibaren hesaplandığında, $\left|\Delta W_k^{LMS}[n]\right|^2$ teriminin, başlangıç katsayı sapma değeri $|\Delta W_0^{LMS}[n]|^2$ ’e göre değişimi,

$$\left|\Delta W_k^{LMS}[n]\right|^2 = \mathbb{M}_{k-1}^{LMS}|\Delta W_0^{LMS}[n]|^2 + \mathbb{N}_{k-1}^{LMS}[n] \tag{2.75}$$

şeklinde olmaktadır. Burada $\mathbb{M}_k^{LMS}[n]$ ve $\mathbb{N}_{k-1}^{LMS}[n]$ değerleri, sırasıyla,

$$\mathbb{M}_k^{LMS}[n] = \prod_{i=0}^{k} \mathbb{K}_i^{LMS}[n] \tag{2.76}$$

$$\mathbb{N}_k^{LMS}[n] = \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{L}_i^{LMS}[n] \prod_{l=i+1}^{k} \mathbb{K}_l^{LMS}[n] + \mathbb{L}_k^{LMS}[n] \tag{2.77}$$

olarak tanımlanmaktadır.

(2.75) ifadesinde, $\left|\Delta W_k^{LMS}[n]\right|^2$, $\mathcal{N}_k^o[n]$ ile $X_k[n]$ istatistiki olarak birbirinden bağımsız kabul edilebilir. Bu durumda (2.77) ifadesinde beklenen değer işlevi kullanıldığında, katsayı sapma OHK değeri için,

$$\mathbb{E}\left\{\left|\Delta W_k^{LMS}[n]\right|^2\right\} = \mathbb{E}\{\mathbb{M}_{k-1}^{LMS}[n]\}\mathbb{E}\{|\Delta W_0^{LMS}[n]|^2\} + \mathbb{E}\{\mathbb{N}_{k-1}^{LMS}[n]\} \tag{2.78}$$

şeklinde ilişki elde edilir. Algoritmanın yakınsaması için $\mathbb{E}\{\mathbb{M}_{k-1}^{LMS}[n]\} = \prod_{i=0}^{k-1} \mathbb{E}\{\mathbb{K}_i^{LMS}[n]\} < 1$ şartının sağlanması gerekmektedir. Bu şartın sağlanabilmesi için,

$$\mathbb{E}\{\mathbb{K}_i^{LMS}[n]\} = \mathbb{E}\{(1-\mu|X_i[n]|^2)^2\} = \mathbb{E}\{1-2\mu|X_i[n]|^2 + \mu^2|X_i[n]|^4\} < 1 \tag{2.79}$$

olması gerekmektedir. Bu durumda LMS katsayı değeri μ,

$$0 < \mu < 2\frac{\mathbb{E}\{|X_i[n]|^2\}}{\mathbb{E}\{|X_i[n]|^4\}} = \frac{1}{\mathbb{E}\{|X[n]|^2\}} = \frac{1}{N_{sym}\left(\sigma_d^2|H[n]|^2+\sigma_n^2\right)} \tag{2.80}$$

olarak seçilmesi gerekmektedir. Görüldüğü üzere, FB-LMS algoritması için seçilen üst sınır değeri alınan sinyal gücünün tersi ile orantılı ve her frekans noktası için farklı olmaktadır.

(2.80) şartının sağlanması halinde kararlı durum için $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbb{E}\{\mathbb{M}_{k-1}[n]\} = 0$ olduğundan (2.78) ifadesi,

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\left\{\left|\Delta W_k^{LMS}[n]\right|^2\right\} = \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\{\mathbb{N}_{k-1}^{LMS}[n]\} \tag{2.81}$$

haline dönüşmektedir. $\mathbb{E}\{\mathbb{N}_{k-1}[n]\}$ terimi, (2.77) kullanılarak,

$$\mathbb{E}\{\mathbb{N}_{k-1}^{LMS}[n]\} = \sum_{i=0}^{k-2} \mathbb{E}\left\{\prod_{l=i+1}^{k-1} \mathbb{L}_i^{LMS}[n]\mathbb{K}_l^{LMS}[n] + \mathbb{L}_{k-1}^{LMS}[n]\right\} \tag{2.82}$$

şeklinde hesaplanmaktadır. (2.82) ifadesinde bulunan, $\mathbb{L}_i[n]$ ve $\mathbb{K}_l[n]$ farklı bloklara ait olduklarından, birbirlerinden bağımsızdırlar. Bu durumda,

$$\mathbb{E}\{\mathbb{N}_{k-1}[n]\} = \sum_{i=0}^{k-2} \prod_{l=i+1}^{k-1} \mathbb{E}\{\mathbb{L}_i^{LMS}[n]\}\mathbb{E}\{\mathbb{K}_l^{LMS}[n]\} + \mathbb{E}\{\mathbb{L}_{k-1}^{LMS}[n]\} \tag{2.83}$$

ile hesaplanmaktadır. $\mathbb{E}\{\mathbb{L}_i^{LMS}[n]\}$ ve $\mathbb{E}\{\mathbb{K}_l^{LMS}[n]\}$ ifadeleri sırasıyla,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{\mathbb{L}_i^{LMS}[n]\} = \mathbb{E}\{&2\mu\mathrm{Re}\{(1-\mu|X_i[n]|^2)\Delta W_k^{*,LMS}[n]X_i^*[n]\mathcal{N}_i^o[n]\} \\ &+ \mu^2|X_i[n]|^2|\mathcal{N}_i^o[n]|^2\}\end{aligned} \tag{2.84}$$

$$\mathbb{E}\{\mathbb{K}_l^{LMS}[n]\} = \mathbb{E}\{(1-\mu|X_l[n]|^2)^2\} = 1 - 2\mu\mathbb{E}\{|X_l[n]|^2\} + \mu^2\mathbb{E}\{|X_l[n]|^4\} \tag{2.85}$$

şeklinde elde edilmektedir. Bağımsızlık kabulünden ötürü, (2.84) ifadesinde bulunan $\mathbb{E}\left\{\mathrm{Re}\{(1-\mu|X_k[n]|^2)\Delta W_k^{*,LMS}[n]X_k^*[n]\mathcal{N}_k^o[n]\}\right\}$ terimi 0 değerini almaktadır. Bu durumda,

$$\mathbb{E}\{\mathbb{L}_i^{LMS}[n]\} = \mu^2 N_{sym}\sigma_{\eta^0}^2\mathbb{E}\{|X_i[n]|^2\} \tag{2.86}$$

olarak hesaplanmaktadır. (2.85) ve (2.86) sonuçları, (2.83)'de yerine konulduğunda,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{\mathbb{N}_{k-1}^{LMS}[n]\} &= \mu^2 N_{sym}\sigma_{\eta^0}^2\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}\textstyle\sum_{i=0}^{k-2}(1-2\mu\mathbb{E}\{|X_i[n]|^2\} + \\ &\mu^2\mathbb{E}\{|X_i[n]|^4\})^{k-i-1} + \mu^2 N_{sym}\sigma_{\eta^0}^2\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}\end{aligned} \tag{2.87}$$

elde edilir. $X_i[n]$ GBD sinyal olduğundan, $\mathbb{E}\{|X[n]|^2\} = \mathbb{E}\{|X_i[n]|^2\}, ve\ \mathbb{E}\{|X[n]|^4\} = \mathbb{E}\{|X_i[n]|^4\}$ $i = 0,1,2,\dots,k$ olmaktadır. Bu durumda, (2.87),

$$\mathbb{E}\{\mathbb{N}_{k-1}^{LMS}[n]\} = \mu N_{sym}\sigma_{\eta^0}^2\mathbb{E}\{|X[n]|^2\}\frac{1-(1-2\mu\mathbb{E}\{|X[n]|^2\}+\mu^2\mathbb{E}\{|X[n]|^4\})^{k-1}}{2\mathbb{E}\{|X[n]|^2\}-\mu\mathbb{E}\{|X[n]|^4\}} \quad (2.88)$$

şeklinde hesaplanmaktadır. Algoritma kararlı duruma ulaştığında, yani $k \to \infty$ ulaşıldığında, (2.81),

$$\lim_{k\to\infty}\mathbb{E}\left\{\left|\Delta W_k^{LMS}[n]\right|^2\right\} = \lim_{k\to\infty}\mathbb{E}\{\mathbb{N}_{k-1}^{LMS}[n]\} = \frac{\mu N_{sym}\sigma_{\eta^0}^2\mathbb{E}\{|X[n]|^2\}}{2\mathbb{E}\{|X[n]|^2\}-\mu\mathbb{E}\{|X[n]|^4\}} \quad (2.89)$$

haline gelmektedir. $X_k[n]$ karmaşık, dairesel, sıfır ortalama ve Gauss dağılıma sahip bir rastgele değişken olduğundan, $\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\} = N_{sym}(\sigma_d^2|H[n]|^2+\sigma_n^2)$, $\mathbb{E}\{|X_k[n]|^4\} = 2(\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\})^2 = 2N_{sym}^2(\sigma_d^2|H[n]|^2+\sigma_n^2)^2$ olacaktır. Söz konusu özelliğin hesaplanması Ek-1'de ayrıntılı olarak verilmektedir. Bu durumda, (2.89),

$$\lim_{k\to\infty}\mathbb{E}\left\{\left|\Delta W_k^{LMS}[n]\right|^2\right\} = \frac{\mu N_{sym}\sigma_{\eta^0}^2}{2(1-\mu\mathbb{E}\{|X[n]|^2\})} = \frac{\mu N_{sym}\sigma_{\eta^0}^2}{2\left(1-\mu N_{sym}(\sigma_d^2|H[n]|^2+\sigma_n^2)\right)} \quad (2.90)$$

olmaktadır. (2.90) ifadesine katsayı sapma OHK değeri adı verilmektedir. Görüldüğü üzere, katsayı sapma değeri yaklaşık olarak alınan sinyalin gücü ile ters orantılı olmaktadır. Bu durumda alınan sinyalin küçük değer aldığı frekans noktalarında (kanalın sıfıra yakın spektrum noktalarında), katsayı sapması daha az şiddetli olmaktadır.

Artık ortalama hata karesi değeri, (2.74) kullanılarak, her iki tarafı $|X_k[n]|^2$ ile çarpıldığında, artık OHK değeri,

$$\begin{aligned}\Delta\xi_k^{LMS}[n] &= \mathbb{E}\left\{|X_k[n]|^2\left|\Delta W_k^{LMS}[n]\right|^2\right\} = \mathbb{E}\Big\{(1-\\ &\mu|X_{k-1}[n]|^2)^2\left|\Delta W_{k-1}^{LMS}[n]\right|^2|X_{k-1}[n]|^2\Big\} + 2\mu\mathrm{Re}\Big\{(1-\\ &\mu|X_{k-1}[n]|^2)\Delta W_k^{*,LMS}[n]X_{k-1}^*[n]\mathcal{N}_k^o[n]\Big\} + \mu^2|X_k[n]|^2|X_{k-1}[n]|^2|\mathcal{N}_k^o[n]|^2\end{aligned} \quad (2.91)$$

olmaktadır. Ayarsızlık değeri $M^{LMS}[n] = \lim_{k\to\infty}\frac{\mathbb{E}\left\{|X_k[n]|^2\left|\Delta W_k^{LMS}[n]\right|^2\right\}}{N_{sym}\sigma_{\eta^o}^2} = \lim_{k\to\infty}\frac{\mathbb{E}\{\mathbb{N}_{k-1}[n]|X_k[n]|^2\}}{N_{sym}\sigma_{\eta^o}^2}$, olduğundan, gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$M^{LMS}[n] = \frac{\mu\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}}{2(1-\mu\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\})} = \frac{\mu N_{sym}(\sigma_d^2|H[n]|^2 + \sigma_n^2)}{2\left(1 - N_{sym}\mu(\sigma_d^2|H[n]|^2 + \sigma_n^2)\right)} \tag{2.92}$$

haline dönüşecektir.

Ayrıca yakınsamanın sağlanabilmesi için, μ değerinin,

$$\frac{1}{N_{sym}(\sigma_d^2|H[n]|^2+\sigma_n^2)} > \mu > 0 \tag{2.93}$$

olarak seçilmesi gerekmektedir.

Yakınsamanın sağlanması için μ değerini en sınırlayıcı değer, alınan sinyalin gücünün en yüksek değeri, yani kanalın frekans bölgesinde en yüksek genlik değeri olarak alınmalıdır.

FB-LMS algoritmasında tüm frekans noktaları için aynı katsayı değeri kullanıldığından, $\mu^{maks} = min\left\{\frac{1}{\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}}, k = 0, 1, \ldots, N_{sym} - 1\right\}$ olarak seçilmelidir

Karalı durumda, bir blok için elde edilen ortalama ayarsızlık değeri,

$$M^{LMS} = \frac{1}{N_{sym}^2}\sum_{n=1}^{N_{sym}-1} M^{LMS}[n] = \frac{\mu}{2N_{sym}^2}\sum_{n=1}^{N_{sym}-1}\frac{\mathbb{E}\{|X[n]|^2\}}{1-\mu\mathbb{E}\{|\mathrm{X}[n]|^2\}} \tag{2.94}$$

olarak bulunmaktadır.

FB-NLMS algoritması için ayarsızlık değeri için literatürde bulunan iki farklı sonuç bulunmakta olup,

$$M^{NLMS} = \mu$$

$$M^{NLMS} = \frac{\mu}{2-\mu}$$

şeklindedir.

Yukarıda verilen mevcut ayarsızlık değerlerine bakıldığında genel olarak bu hesaplamaların düşük μ değerleri için geçerli olduğu, ve ayarsızlığın güç kestirimi için kullanılan unutma faktörü γ değerinden bağımsız olduğu görülmektedir. Ancak sonraki bölümlerde gösterileceği üzere FB-NLMS algoritmasının ayarsızlık değeri γ değerine bağımlı olmaktadır. Bu alt bölümde literatürde şimdiye dek değinilmemiş olan söz konusu bağımlılık teorik olarak gösterilmekte ve yapılan benzetim çalışmaları ile desteklenmektedir.

FB-NLMS algoritması için, katsayı sapma OHK değerini bulmak üzere (2.61), (2.70) içinde kullanıldığında, katsayı sapma değeri,

$$\Delta W_{k+1}^{NLMS}[n] = \left(1 - \mu \frac{|X_k[n]|^2}{P_k[n]}\right) \Delta W_k^{NLMS}[n] + \mu \frac{X_k^*[n]}{P_k[n]} \mathcal{N}_k^o[n] \tag{2.95}$$

olarak bulunmaktadır. Aşağıda verilen tanımlamalar

$$\mathbb{K}_k^{NLMS}[n] = \left(1 - \mu \frac{|X_k[n]|^2}{P_k[n]}\right)^2 \tag{2.96}$$

$$\mathbb{L}_k^{NLMS}[n] = \frac{2\mu}{P_k[n]} \mathrm{Re}\left\{\left(1 - \mu \frac{|X_k[n]|^2}{P_k[n]}\right) \Delta W_k^{NLMS,*}[n] X_k^*[n] \mathcal{N}_k^o[n]\right\} + \left(\frac{\mu}{P_k[n]}\right)^2 |X_k[n]|^2 |\mathcal{N}_k^o[n]|^2 \tag{2.97}$$

kullanılarak (2.95) ifadesinin her iki tarafının norm karesi alındığında,

$$\left|\Delta W_{k+1}^{NLMS}[n]\right|^2 = \mathbb{K}_k^{NLMS}[n] \left|\Delta W_k^{NLMS}[n]\right|^2 + \mathbb{L}_k^{NLMS}[n] \tag{2.98}$$

elde edilmektedir. (2.98) başlangıç bloğundan itibaren hesaplandığında,

$$\left|\Delta W_k^{NLMS}[n]\right|^2 = \mathbb{M}_{k-1}^{NLMS}[n] |\Delta W_0^{NLMS}[n]|^2 + \mathbb{N}_{k-1}^{NLMS}[n] \tag{2.99}$$

elde edilir. Burada, $\mathbb{M}_k[n]$ ve $\mathbb{N}_{k-1}^{NLMS}[n]$,

$$\mathbb{M}_k^{NLMS}[n] = \prod_{i=0}^{k} \mathbb{K}_i^{NLMS}[n] \tag{2.100}$$

$$\mathbb{N}_k^{NLMS}[n] = \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{L}_i^{NLMS}[n] \prod_{l=i+1}^{k} \mathbb{K}_l^{NLMS}[n] + \mathbb{L}_k^{NLMS}[n] \tag{2.101}$$

olarak tanımlanmaktadır.

(2.99) ifadesinde beklenen değer işlevi kullanıldığında,

$$\mathbb{E}\left\{\left|\Delta W_k^{NLMS}[n]\right|^2\right\} = \mathbb{E}\{\mathbb{M}_{k-1}^{NLMS}[n]\}|\Delta W_0^{NLMS}[n]|^2 + \mathbb{E}\{\mathbb{N}_{k-1}^{NLMS}[n]\} \tag{2.102}$$

şeklinde katsayı sapma OHK değeri için ilişki elde edilir. Algoritmanın yakınsaması için $\mathbb{E}\{\mathbb{M}_{k-1}^{NLMS}[n]\} = \prod_{i=0}^{k-1} \mathbb{E}\{\mathbb{K}_i^{NLMS}[n]\} < 1$ şartının sağlanması gerekmektedir. Bu şartın sağlanabilmesi için,

$$\mathbb{E}\{\mathbb{K}_i^{NLMS}[n]\} = \mathbb{E}\left(1 - \mu\frac{|X_k[n]|^2}{P_k[n]}\right)^2 = \mathbb{E}\left\{1 - 2\mu\frac{|X_i[n]|^2}{P_k[n]} + \mu^2\frac{|X_i[n]|^4}{P_k^2[n]}\right\} < 1 \tag{2.103}$$

olması gerekmektedir. Bu durumda LMS katsayı değeri μ, Ek-2 ile verilen sonuçlar kullanıldığında kararlı durum ($k \to \infty$) için,

$$0 < \mu < 2\frac{\mathbb{E}\left\{\frac{|X_k[n]|^2}{P_k[n]}\right\}}{\mathbb{E}\left\{\frac{|X_k[n]|^4}{P_k^2[n]}\right\}} \approx 2\frac{\frac{\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}}{\mathbb{E}\{P_k[n]\}}}{\frac{\mathbb{E}\{|X_k[n]|^4\}}{\mathbb{E}\{P_k^2[n]\}}} = \frac{2}{(1+\gamma)} \tag{2.104}$$

olarak seçilmesi gerekmektedir. Görüldüğü üzere seçilebilecek üst sınır değeri $(1+\gamma)$ ile ters orantılı olmaktadır. $\gamma = 0$, seçildiğinde tek katsayılı standart NLMS algoritması uygulandığında seçilebilecek en yüksek değer 2 olmakta iken, $\gamma = 1$ olarak seçildiğinde en yüksek değer 1 olmaktadır.

(2.104) şartının sağlanması halinde kararlı durum için $\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\{\mathbb{M}_{k-1}[n]\} = 0$ olduğundan (2.102) ifadesi,

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\left\{\left|\Delta W_k^{NLMS}[n]\right|^2\right\} = \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\{\mathbb{N}_{k-1}^{NLMS}[n]\} \tag{2.105}$$

haline dönüşmektedir. $\mathbb{E}\{\mathbb{N}_{k-1}^{NLMS}[n]\}$ terimi, (2.101) kullanılarak,

$$\mathbb{E}\{\mathbb{N}_{k-1}^{NLMS}[n]\} = \sum_{i=0}^{k-2} \mathbb{E}\left\{\prod_{l=i+1}^{k-1} \mathbb{L}_i^{NLMS}[n]\mathbb{K}_l^{NLMS}[n] + \mathbb{L}_{k-1}^{NLMS}[n]\right\} \tag{2.106}$$

şeklinde hesaplanmaktadır. (2.106) ifadesinde bulunan $\mathbb{L}_i^{NLMS}[n]$ ve $\mathbb{K}_l^{NLMS}[n]$ birbirinden bağımsız olduklarından,

$$\mathbb{E}\{\mathbb{N}_{k-1}^{NLMS}[n]\} = \sum_{i=0}^{k-2} \mathbb{E}\left\{\mathbb{L}_i^{NLMS}[n]\right\} \prod_{l=i+1}^{k-1} \mathbb{E}\{\mathbb{K}_l^{NLMS}[n]\} + \mathbb{E}\{\mathbb{L}_{k-1}^{NLMS}[n]\} \tag{2.107}$$

ile hesaplanmaktadır. $\mathbb{E}\left\{\mathbb{L}_i^{NLMS}[n]\right\}$ ve $\mathbb{E}\{\mathbb{K}_l^{NLMS}[n]\}$ ifadeleri sırasıyla,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left\{\mathbb{L}_i^{NLMS}[n]\right\} = \mathbb{E}\Bigg\{2\mu\mathrm{Re}\left\{\left(1-\mu\frac{|X_i[n]|^2}{P_i[n]}\right)\Delta W_k^{NLMS,}[n]X_i^*[n]\mathcal{N}_i^o[n]\right\} \\ + \mu^2\frac{|X_i[n]|^2}{P_i^2[n]}|\mathcal{N}_i^o[n]|^2\Bigg\}\end{aligned} \tag{2.108}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{\mathbb{K}_l^{NLMS}[n]\} &= \mathbb{E}\left\{\left(1-\frac{\mu}{P_l[n]}|X_l[n]|^2\right)^2\right\} \\ &= 1 - 2\mu\mathbb{E}\left\{\frac{|X_l[n]|^2}{P_l[n]}\right\} + \mu^2\mathbb{E}\left\{\frac{|X_l[n]|^4}{P_l^2[n]}\right\}\end{aligned} \tag{2.109}$$

şeklinde elde edilmektedir. Bağımsızlık kabulünden ötürü, (2.108) ifadesinde bulunan $\mathbb{E}\left\{\mathrm{Re}\{(1-\mu|X_k[n]|^2)\Delta W_k^{NLMS}[n]X_k^*[n]\mathcal{N}_k^o[n]\}\right\}$ terimi 0 değerini almaktadır. Bu durumda,

$$\mathbb{E}\left\{\mathbb{L}_i^{NLMS}[n]\right\} = \mu^2 N_{sym}\sigma_{\eta^0}^2 \mathbb{E}\left\{\frac{|X_i[n]|^2}{P_i^2[n]}\right\} \tag{2.110}$$

olarak hesaplanmaktadır. (2.109) ve (2.110) ile elde edilen sonuçlar, (2.107)'de yerine konulduğunda,

$$\mathbb{E}\{\mathbb{N}_{k-1}^{NLMS}[n]\} = \mu^2 N_{sym}\sigma_{\eta^0}^2 \sum_{i=0}^{k-2} \mathbb{E}\left\{\frac{|X_i[n]|^2}{P_i^2[n]}\right\} \prod_{l=i+1}^{k-1}\left(1 - 2\mu\mathbb{E}\left\{\frac{|X_l[n]|^2}{P_l[n]}\right\} + \mu^2\mathbb{E}\left\{\frac{|X_l[n]|^4}{P_l^2[n]}\right\}\right) + \mu^2 N_{sym}\sigma_{\eta^0}^2 \mathbb{E}\left\{\frac{|X_{k-1}[n]|^2}{P_{k-1}^2[n]}\right\} \tag{2.111}$$

elde edilir. $X_i[n]$ GBD sinyal olduğundan, $\mathbb{E}\{|X[n]|^2\} = \mathbb{E}\{|X_i[n]|^2\}, ve\ \mathbb{E}\{|X[n]|^4\} = \mathbb{E}\{|X_i[n]|^4\}\ i = 0,1,2,\dots,k$ olmaktadır. Kararlı durumda, $\mathbb{E}\left\{\frac{|X_i[n]|^2}{P_i[n]}\right\}$ ve $\left(1 - 2\mu\mathbb{E}\left\{\frac{|X_l[n]|^2}{P_l[n]}\right\} + \mu^2\mathbb{E}\left\{\frac{|X_l[n]|^4}{P_l^2[n]}\right\}\right)$ teriminin tüm bloklar boyunca yaklaşık olarak sabit kaldığı kabul edilebilir. Bu durumda, (2.111),

$$\mathbb{E}\{\mathbb{N}_{k-1}^{NLMS}[n]\} = \mu N_{sym}\sigma_{\eta^0}^2 \mathbb{E}\left\{\frac{|X_{k-1}[n]|^2}{P_{k-1}^2[n]}\right\} \frac{1-\left(1-2\mu\mathbb{E}\left\{\frac{|X_{k-1}[n]|^2}{P_{k-1}[n]}\right\}+\mu^2\mathbb{E}\left\{\frac{|X_{k-1}[n]|^4}{P_{k-1}^2[n]}\right\}\right)^{k-1}}{2\mathbb{E}\left\{\frac{|X[n]|^2}{P_{k-1}[n]}\right\}-\mu\mathbb{E}\left\{\frac{|X[n]|^4}{P_{k-1}^2[n]}\right\}} \tag{2.112}$$

şeklinde hesaplanmaktadır. Algoritma kararlı duruma ulaştığında, yani $k \to \infty$ ulaşıldığında, (2.105),

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\left\{\left|\Delta W_k^{NLMS}[n]\right|^2\right\} = \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\{\mathbb{N}_{k-1}^{NLMS}[n]\} = \lim_{k\to\infty} \frac{\mu\mathbb{E}\left\{\frac{|X_{k-1}[n]|^2}{P_{k-1}^2[n]}\right\}N_{sym}\sigma_{\eta^0}^2}{2\mathbb{E}\left\{\frac{|X_{k-1}[n]|^2}{P_{k-1}[n]}\right\}-\mu\mathbb{E}\left\{\frac{|X_{k-1}[n]|^4}{P_{k-1}^2[n]}\right\}} \tag{2.113}$$

haline gelmektedir.

Görüldüğü üzere kararlı durumda ortalama katsayı sapma karesi, $\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\left\{\left|\Delta W_k^{NLMS}[n]\right|^2\right\}$ değeri alınan sinyalin $\mathbb{E}\left\{\frac{|X_{k-1}[n]|^2}{P_{k-1}^2[n]}\right\}$, $\mathbb{E}\left\{\frac{|X_{k-1}[n]|^2}{P_{k-1}[n]}\right\}$ve $\mathbb{E}\left\{\frac{|X_{k-1}[n]|^4}{P_{k-1}^2[n]}\right\}$değerlerine ile kullanılan katsayı μ değerine bağlı olmaktadır. Söz konusu beklenen değerlerin alınması ve tam olarak belirlenmesi işlemi sinyalin istatistiki doğasından ötürü hesaplanması zor bir işlem olduğundan bu değerlerin yaklaşık olarak hesaplanabilmesi gerekmektedir.

Aşağıda söz konusu değerlerin hesaplanabilmesi için kullanılan iki farklı yaklaşım anlatılmaktadır. İlk yaklaşımda bu değerler için yaklaşık bir hesaplama yöntemi gösterilmekte olup bu yönteme göre hesaplanan ayarsızlık değeri benzetim çalışmaları ile elde edilen ayarsızlık değerleri ile tam olarak örtüşmemektedir. İkinci yaklaşımda ise beklenen değerlerin olasılık yoğunluk fonksiyonları kullanılarak elde edilmesi gösterilmektedir. Bu durumda elde edilen teorik ayarsızlık ifadesi benzetim çalışmaları ile elde edilen ayarsızlık değerleri ile oldukça iyi seviyede örtüşmektedir.

<u>İlk yöntem</u>

Algoritma kararlı duruma ulaştığında, $\mathbb{E}\left\{\frac{|X[n]|^2}{P_k[n]}\right\} \approx \frac{\mathbb{E}\{|X[n]|^2\}}{\mathbb{E}\{P[n]\}}$, $\mathbb{E}\left\{\frac{|X[n]|^4}{P^2[n]}\right\} \approx \frac{\mathbb{E}\{|X[n]|^4\}}{\mathbb{E}\{P^2[n]\}}$ ve $\mathbb{E}\left\{\frac{|X[n]|^2}{P_k^2[n]}\right\} \approx \frac{\mathbb{E}\{|X[n]|^2\}}{\mathbb{E}\{P_k^2[n]\}}$ olarak kabul edilebilir. Bu durumda katsayı sapma karesinin beklenen değeri,

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\left\{\left|\Delta W_k^{NLMS}[n]\right|^2\right\} = \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\{\mathbb{N}_{k-1}^{NLMS}[n]\}$$
$$= \frac{\mu N_{sym}\sigma_{\eta^0}^2 \mathbb{E}\{|X[n]|^2\}\mathbb{E}\{P[n]\}}{2\mathbb{E}\{|X[n]|^2\}\mathbb{E}\{P^2[n]\} - \mu\mathbb{E}\{|X[n]|^4\}\mathbb{E}\{P[n]\}} \tag{2.114}$$

olarak bulunmaktadır. $X_k[n]$ dairesel karmaşık, sıfır ortalama ve Gauss dağılıma sahip bir rastgele değişken olduğundan, $\mathbb{E}\{|X[n]|^2\} = N_{sym}(\sigma_d^2|H[n]|^2 + \sigma_n^2)$, $\mathbb{E}\{|X[n]|^4\} = 2(\mathbb{E}\{|X[n]|^2\})^2 = 2N_{sym}^2(\sigma_d^2|H[n]|^2 + \sigma_n^2)^2$ olacaktır. Söz konusu özelliğin hesaplanması Ek-1'de ayrıntılı olarak verilmektedir. Bu durumda, (2.113),

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\left\{\left|\Delta W_k^{NLMS}[n]\right|^2\right\} = \frac{\mu(1+\gamma)\sigma_{\eta^0}^2}{2\big(2-\mu(1+\gamma)\big)(\sigma_d^2|H[n]|^2 + \sigma_n^2)} \tag{2.115}$$

olmaktadır. Görüldüğü üzere, katsayı sapma değeri sinyalin gücü ile ters orantılı olmaktadır. Bu durumda alınan sinyalin küçük değer aldığı frekans noktalarında (kanalın sıfıra yakın spektrum noktalarında), katsayı sapması daha şiddetli olmaktadır.

Artık ortalama hata karesi değeri, (2.74) kullanılarak, her iki tarafı $|X_k[n]|^2$ ile çarpıldığında, artık OHK değeri,

$$\Delta\xi_k^{NLMS}[n] = \mathbb{E}\left\{|X_k[n]|^2\left|\Delta W_k^{LMS}[n]\right|^2\right\} = \mathbb{E}\left\{\left(1 - \mu\frac{|X_l[n]|^2}{P_k[n]}\right)^2\left|\Delta W_k^{LMS}[n]\right|^2|X_k[n]|^2\right\} + 2\mu\mathrm{Re}\left\{\left(1 - \mu\frac{|X_l[n]|^2}{P_k[n]}\right)\Delta W_k^{*,LMS}[n]X_k^*[n]\mathcal{N}_k^o[n] + \mu^2\frac{|X_l[n]|^4}{P_k^2[n]}|\mathcal{N}_k^o[n]|^2\right\} \tag{2.116}$$

olmaktadır. Ayarsızlık değeri $M^{NLMS}[n] = \lim_{k\to\infty}\frac{\Delta\xi_k^{NLMS}[n]}{N_{sym}\sigma_{\eta^o}^2} = \lim_{k\to\infty}\frac{\mathbb{E}\left\{|X_k[n]|^2\left|\Delta W_k^{NLMS}[n]\right|^2\right\}}{N_{sym}\sigma_{\eta^o}^2} = \lim_{k\to\infty}\frac{\mathbb{E}\{\mathbb{N}_{k-1}[n]|X_k[n]|^2\}}{N_{sym}\sigma_{\eta^o}^2}$, olarak tanımlanmaktadır.

Gerekli düzenlemeler yapıldığında, ayarsızlık değeri,

$$M^{NLMS}[n] = \frac{\mu(1+\gamma)}{2\big(2-\mu(1+\gamma)\big)} \tag{2.117}$$

haline dönüşecektir. Bu durumda yakınsamanın sağlanabilmesi için, μ değerinin,

$$\frac{2}{(1+\gamma)} > \mu > 0 \tag{2.118}$$

olarak seçilmesi gerekmektedir. FB-NLMS algoritmasında kullanılabilecek en yüksek μ değeri unutma faktörü γ ile ters orantılı olmaktadır. γ değerinin bire yakın seçilmesi halinde, algoritmanın yakınsaması için kullanılabilecek en yüksek μ değeri bire doğru azaltılması gerekmektedir.

<u>Alternatif yöntem</u>

Ayarsızlık değerini bulmak üzere kullanılabilecek bir diğer alternatif ise, (2.113) ile verilen katsayı OHK değerinde bulunan $\mathbb{E}\left\{\frac{|X_{k-1}[n]|^2}{P_{k-1}^2[n]}\right\}$, $\mathbb{E}\left\{\frac{|X_{k-1}[n]|^2}{P_{k-1}[n]}\right\}$ ve $\mathbb{E}\left\{\frac{|X_{k-1}[n]|^4}{P_{k-1}^2[n]}\right\}$ beklenen değerlerini doğrudan hesaplamaktır. Ek 3'de söz konusu değerler olasılık yoğunluk fonksiyonlerının kullanılması ile hesaplanmış olup, aşağıda verilmektedir.

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\left\{\frac{|X_k[n]|^2}{P_k[n]}\right\} = \frac{1}{(1-\gamma)}\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \left\{\frac{(k-i)\gamma^{k-i}\ln\gamma + 1 - \gamma^{k-i}}{(1-\gamma^{k-i})^2}\right\} \tag{2.119}$$

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\left\{\frac{|X_k[n]|^2}{P_k^2[n]}\right\} = \frac{1}{(1-\gamma)^2}\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \left\{\frac{-(k-i)\ln\gamma - 1 + \gamma^{k-i}}{(1-\gamma^{k-i})^2}\right\} \tag{2.120}$$

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\left\{\frac{|X_k[n]|^4}{P_k^2[n]}\right\} = \frac{1}{(1-\gamma)^2}\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \left\{\frac{-2(k-i)\gamma^{k-i}\ln\gamma + \gamma^{2(k-i)} - 1}{(1-\gamma^{k-i})^3}\right\} \tag{2.121}$$

(2.119)-(2.121) ifadeleri (2.113)'te kullanıldığında,

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\left\{\left|\Delta W_{k+1}^{NLMS}[n]\right|^2\right\}$$
$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\mu \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \left\{\frac{-(k-i)\ln\gamma - 1 + \gamma^{k-i}}{\left(1-\gamma^{k-i}\right)^2}\right\} N_{sym}\sigma_{\eta^0}^2}{\frac{2}{(1-\gamma)}\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \left\{\frac{(k-i)\gamma^{k-i}\ln\gamma + 1 - \gamma^{k-i}}{\left(1-\gamma^{k-i}\right)^2}\right\} - \mu\frac{1}{(1-\gamma)^2}\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \left\{\frac{-2(k-i)\gamma^{k-i}\ln\gamma + \gamma^{2(k-i)} - 1}{\left(1-\gamma^{k-i}\right)^3}\right\}} \tag{2.122}$$

elde edilir. Sonuç olarak ayarsızlık değeri,

$$M^{NLMS}[n] = \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\frac{\left\{\left|\Delta W_{k+1}^{NLMS}[n]\right|^2 |X_{k+1}[n]|^2\right\}}{N_{sym}\sigma_{\eta^0}^2}$$
$$= \frac{\mu \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \left\{\frac{-(k-i)\ln\gamma - 1 + \gamma^{k-i}}{\left(1-\gamma^{k-i}\right)^2}\right\}}{2(1-\gamma)\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \left\{\frac{(k-i)\gamma^{k-i}\ln\gamma + 1 - \gamma^{k-i}}{\left(1-\gamma^{k-i}\right)^2}\right\} - \mu\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \left\{\frac{-2(k-i)\gamma^{k-i}\ln\gamma + \gamma^{2(k-i)} - 1}{\left(1-\gamma^{k-i}\right)^3}\right\}} \tag{2.123}$$

olarak bulunmaktadır.

FB-NLMS algoritması için ayarsızlık değeri, basamak büyüklüğü ve güç kestirimi için kullanılan unutma faktörüne bağlı olarak değişim gösterdiği (2.117) ve (2.123) ifadelerinden görülmektedir.

Ayrıca, algoritmanın yakınsaması için μ katsayısı $2(1-\gamma)\dfrac{\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i\left\{\frac{(k-i)\gamma^{k-i}\ln\gamma+1-\gamma^{k-i}}{\left(1-\gamma^{k-i}\right)^2}\right\}}{\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i\left\{\frac{-2(k-i)\gamma^{k-i}\ln\gamma+\gamma^{2(k-i)}-1}{\left(1-\gamma^{k-i}\right)^3}\right\}} > \mu$, şartını sağlayacak şekilde seçilmesi gerekmektedir. Bu durumda, μ katsayısının seçimi için güç kestiriminde kullanılan unutma faktörü, γ nin etkili olduğu görülmektedir.

Yakınsama

(2.78) ile verilen LMS katsayı sapma OHK değeri,

$$\mathbb{E}\left\{\left|\Delta W_k^{LMS}[n]\right|^2\right\} = \mathbb{E}\{\mathbb{M}_{k-1}[n]\}\mathbb{E}\{|\Delta W_0^{LMS}[n]|^2\} + \mathbb{E}\{\mathbb{N}_{k-1}[n]\} \tag{2.124}$$

şeklindedir. (2.124) yinelemeli ifadede,

$$\mathbb{E}\{\mathbb{M}_{k-1}^{LMS}[n]\} = (1 - 2\mu\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\} + 2\mu^2\{\mathbb{E}(|X_k[n]|^2)\}^2)^{k-1} \tag{2.125}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{\mathbb{N}_{k-1}^{LMS}[n]\} = \mu N_{sym}^2\sigma_{\eta^0}^2\mathbb{E}\{|X_i[n]|^2\}\frac{1-(1-2\mu\mathbb{E}\{|X[n]|^2\}+\mu^2\mathbb{E}\{|X[n]|^4\})^k}{2\mathbb{E}\{|X[n]|^2\}-\mu\mathbb{E}\{|X[n]|^4\}} \\ + \mu^2 N_{sym}^2\sigma_{\eta^0}^2\mathbb{E}\{|X[n]|^2\}\end{aligned} \tag{2.126}$$

olmaktadır. (2.124) ifadesi, katsayı sapmanın ortalama kare değerinin bloğa bağlı zaman içinde değişimini göstermektedir. Artık OHK, $\Delta\xi_k^{LMS}[n] = \mathbb{E}\left\{|X_k[n]|^2\left|\Delta W_k^{LMS}[n]\right|^2\right\}$ değerinin değişimi,

$$\begin{aligned}\Delta\xi_k^{LMS}[n] = \mathbb{E}\left\{|X_k[n]|^2\left|\Delta W_k^{LMS}[n]\right|^2\right\} = (1 - 2\mu\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\} + \\ 2\mu^2\{\mathbb{E}(|X_k[n]|^2)\}^2)^{k-1}\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2|\Delta W_0^{LMS}[n]|^2\} + \\ \mu N_{sym}^2\sigma_{\eta^0}^2\mathbb{E}\{|X_i[n]|^2\}\frac{1-\left(1-2\mu\mathbb{E}\{|X[n]|^2\}+\mu^2\mathbb{E}\{|X[n]|^4\}\right)^k}{2\mathbb{E}\{|X[n]|^2\}-\mu\mathbb{E}\{|X[n]|^4\}} + \mu^2 N_{sym}^2\sigma_{\eta^0}^2\mathbb{E}\{|X[n]|^2\}\end{aligned} \tag{2.127}$$

LMS algoritmasının toplam OHK değeri,

$$\xi_k^{LMS}[n] = \xi^o[n] + \Delta\xi_k^{LMS}[n] = \xi^o[n] + (1 - 2\mu\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\} + 2\mu^2\{\mathbb{E}(|X_k[n]|^2)\}^2)^{k-1}\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2|\Delta W_0^{LMS}[n]|^2\} + \mu N_{sym}^2\sigma_{\eta^0}^2\mathbb{E}\{|X_i[n]|^2\}\frac{1-\left(1-2\mu\mathbb{E}\{|X[n]|^2\}+\mu^2\mathbb{E}\{|X[n]|^4\}\right)^k}{2\mathbb{E}\{|X[n]|^2\}-\mu\mathbb{E}\{|X[n]|^4\}} + \mu^2 N_{sym}^2\sigma_{\eta^0}^2\mathbb{E}\{|X[n]|^2\} \quad (2.128)$$

Toplamda elde edilen ZB öğrenme eğrisi Parseval özelliğinden dolayı ise tüm frekans noktalarının toplamı olmaktadır. Buna göre,

$$\xi_k^{LMS} = \frac{1}{N_{sym}^2}\sum_{i=0}^{k}\xi_k^{LMS}[i] \quad (2.129)$$

FB-LMS algoritmasının yakınsama performansı görüldüğü üzere giriş sinyalinin gücüne bağlı olmaktadır. Eğer giriş sinyali renkli ise yakınsama performansı olumsuz yönde etkilenmektedir.

FB-NLMS algoritması için yakınsama ifadesinin elde etmek için, ayarsızlık kısmında verilen (2.102) ifadesi göz önüne alınmalıdır. Söz konusu ifade,

$$\mathbb{E}\left\{\left|\Delta W_k^{NLMS}[n]\right|^2\right\} = \mathbb{E}\{\mathbb{M}_{k-1}^{NLMS}[n]\}|\Delta W_0^{NLMS}[n]|^2 + \mathbb{E}\{\mathbb{N}_{k-1}^{NLMS}[n]\} \quad (2.130)$$

şeklinde olup $\mathbb{E}\{\mathbb{N}_{k-1}^{NLMS}[n]\}$ ifadesi (2.112) ile verilmektedir. $\mathbb{E}\{\mathbb{M}_{k-1}^{NLMS}[n]\}$ ve $\mathbb{E}\{\mathbb{N}_{k-1}^{NLMS}[n]\}$ ifadeleri için Ek-2'de verilen $\mathbb{E}\{P_k[n]\}$ ve $\mathbb{E}\{P_k^2[n]\}$ terimlerinin zamana bağlı değişimi kullanıldığında,

$$\mathcal{S}_k[n] = 1 + \gamma^{k+1}\left(\frac{P_{-1}[n]}{\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}} - 1\right) \quad (2.131)$$

$$\mathcal{U}_k[n] = \frac{(1-\gamma^k)(\gamma-\gamma^k) + (1-\gamma)\left(1-\gamma^{2(k+1)}\right)}{(1+\gamma)} \quad (2.132)$$

$$\mathcal{T}_k[n] = \gamma^{2(k+1)}\frac{P_{-1}^2[n]}{(\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\})^2} + \gamma^{k+1}(1-\gamma^{k+1})\frac{P_{-1}[n]}{\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}} + \mathcal{U}_k[n] \quad (2.133)$$

tanımları yapılarak, (2.130) ifadesinde kullanılacak olur ise,

$$\mathbb{E}\{\mathbb{M}_{k-1}^{NLMS}[n]\} = \prod_{i=0}^{k-1}\left(1 - \frac{2\mu}{\mathcal{S}_i[n]} + \frac{\mu^2}{\mathcal{T}_i[n]}\right) \tag{2.134}$$

$$\mathbb{E}\{\mathbb{N}_{k-1}^{NLMS}[n]\} = \mu^2 N_{sym}\sigma_{\eta^0}^2 \sum_{i=0}^{k-2}\frac{1}{\mathcal{S}_i[n]}\prod_{l=i+1}^{k-1}\left(1 - \frac{2\mu}{\mathcal{S}_l[n]} + \frac{\mu^2}{\mathcal{T}_l[n]}\right) + \frac{\mu^2 N_{sym}\sigma_{\eta^0}^2}{\mathbb{E}\{|X_{k-1}[n]|^2\}\mathcal{T}_{k-1}[n]} \tag{2.135}$$

haline dönüşür. (2.130) yinelemeli ifadesinden görüldüğü üzere, FB-NLMS algoritmasının kararlı durum seviyesine yakınsama hızı seçilen μ ve γ parametrelerine bağlı olmakta ve yakınsama hızı sabit olmayıp her adımda değişmektedir. Algoritmanın yakınsamasının sağlanması için, $\mu < \frac{2\mathcal{T}_k[n]}{\mathcal{S}_k[n]}$ şartının her adımda sağlanması gerekmektedir. Bu durumda her adımda kullanılabilecek katsayı üst sınır değeri zamanla değişim göstermektedir. Görüldüğü üzere yakınsama hızının arttırılması için her iki değerin büyük seçilmesi gerekmektedir. Ancak bu durumda bir önceki bölümde açıklandığı üzere ayarsızlık değeri yani toplam OHK değerinde artış meydana gelmektedir. ZB-NLMS algoritması için yakınsama kıstası $\mu < 2$ olması yeterli iken, FB-NLMS algoritmasında yakınsama üst sınır 2'den daha düşük seçilmesi gerekmektedir. Bu durumun nedeni, FB-NLMS algoritmasında güç kestirimi için 1. dereceden alçak geçiren filtre kullanılmasıdır.

k. blok için artık FB-NLMS OHK değerinin zamana göre değişimi,

$$\begin{aligned}\Delta\xi_k^{NLMS}[n] &= \mathbb{E}\left\{\left|X_k[n]\Delta W_k^{NLMS}[n]\right|^2\right\}\\ &= \mathbb{E}\{\mathbb{M}_{k-1}^{NLMS}[n]\}\mathbb{E}\{|X_k[n]\Delta W_0^{NLMS}[n]|^2\}\\ &\quad + \mathbb{E}\{\mathbb{N}_{k-1}^{NLMS}[n]\}\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}\end{aligned} \tag{2.136}$$

olmaktadır.

$\xi^o[n] = N_{sym}\sigma_{\eta^0}^2$ ve $\mathbb{E}\{|X_k[n]\Delta W_0^{NLMS}[n]|^2\} = N_{sym}(1 - \sigma_{\eta^0}^2)$ olmaktadır. Bu durumda, toplam OHK değeri, $\xi_k^{NLMS}[n]$, zamana bağlı değişimi, yani öğrenme eğrisi,

$$\xi_k^{NLMS}[n] = \xi^o[n] + \prod_{i=0}^{k-1}\left(1 - \frac{2\mu}{\mathcal{S}_k[n]} + \frac{\mu^2}{\mathcal{T}_k[n]}\right)\ (1 - \xi^o[n]) +$$
$$\mu^2\xi^o[n]\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}\sum_{i=0}^{k-2}\frac{1}{\mathcal{S}_i[n]}\prod_{l=i+1}^{k-1}\left(1 - \frac{2\mu}{\mathcal{S}_l[n]} + \frac{\mu^2}{\mathcal{T}_l[n]}\right) + \frac{\mu^2\xi^o[n]}{\mathcal{T}_{k-1}[n]} \tag{2.137}$$

halinde elde edilmektedir. Bir blok içerisindeki ortalama OHK değeri,

$$\xi_k^{NLMS} = \frac{1}{N_{sym}}\sum_{i=0}^{N_{sym}-1}\xi_k^{NLMS}[i] \tag{2.138}$$

şeklinde değişime uğrayacaktır.

Burada, $\xi^o[n] = N_{sym}\sigma_{\eta^o}^2$ olup, en uygun filtre katsayısı kullanıldığında elde edilen EDOHK değerini göstermektedir. FB-DD yapıldığında elde edilen EDOHK değeri (2.25) ile verilmektedir. (2.137) ile verilen eşitliğe öğrenme eğrisi (learning curve) adı verilmekte olup, NLMS algoritmasının zamana göre her adımda elde edilen OHK değerinin değişimini göstermektedir.

NLMS algoritmasının öğrenme eğrisine bakıldığında, kararlı duruma yakınsama performansının LMS algoritmasının tersine giriş sinyalinin gücüne daha az bağlı olmaktadır. Bu durumda NLMS algoritmasında, LMS algoritmasında oluşan renkli girişden dolayı yakınsama performansının azalma sorunu oluşmamaktadır.

Takip performansı

Durağan olmayan kanal için, LMS ve NLMS algoritmalarının katsayı ortalama sapma değişimi,

$$\Delta W_k^{LMS}[n] = W_k^{LMS}[n] - W_k^o[n] \tag{2.139}$$

$$\Delta W_k^{NLMS}[n] = W_k^{NLMS}[n] - W_k^o[n] \tag{2.140}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Takip performansını belirlemek için yapılan analizlerde, n. frekans noktası için tanımlanan $D_k[n]$ değeri, (2.68) ile verilen ifadeyi sağladığı kabul edilmektedir.

LMS algoritması için zamanla değişen en uygun katsayı için, her adımdaki katsayı sapma değeri, (2.139) yardımıyla,

$$\begin{aligned}\Delta W_{k+1}^{LMS}[n] &= W_k^{LMS} - W_{k+1}^{o}[n] \\ &\quad + \mu X_k^*[n](X_k[n]W_k^o[n] + \mathcal{N}_k^o[n] - X_k[n]W_k[n])\end{aligned} \tag{2.141}$$

şeklinde ifade edilebilir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında, (2.141),

$$\begin{aligned}\Delta W_{k+1}^{LMS}[n] &= (1-\mu|X_k[n]|^2)\Delta W_k^{LMS}[n] + \mu X_k^*[n]\mathcal{N}_k^o[n] + (1-a)W_k^o[n] \\ &\quad + \mathfrak{N}_k[n]\end{aligned} \tag{2.142}$$

halini alacaktır. Uyarlanabilir algoritmaların değişimi takip edebilmesi için zamansal değişimin sınırlı olması gerekmektedir. Bu nedenle a değeri 1'e çok yakın bir değer ($0.999 < a < 1$), $(1-a)W_{k-1}^o[n] \approx 0$ olarak kabul edilebilir. Sonuçta, katsayı sapma değeri yaklaşık,

$$\Delta W_{k+1}^{LMS}[n] = (1-\mu|X_k[n]|^2)\Delta W_k^{LMS}[n] + \mu X_k^*[n]\mathcal{N}_k^o[n] + \mathfrak{N}_k[n] \tag{2.143}$$

olarak alınabilir. Burada, $\mathcal{N}_k^o[n]$, ΔW_{k+1}^{LMS} ve $\mathfrak{N}_k[n]$ birbirinden istatistiki olarak bağımsız olduğu kabul edilmektedir. (2.143)'ün her iki tarafı $X_k[n]$ ile çarpılması, norm karesinin beklenen değerinin alınması halinde,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left\{\left|X_k[n]\ \Delta W_{k+1}^{LMS}[n]\right|^2\right\} = \mathbb{E}\{(1-\mu|X_k[n]|^2)^2\}\mathbb{E}\left\{\left|X_k[n]\ \Delta W_k^{LMS}\right|^2\right\} + \\ &\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}\mathbb{E}\{|\mathfrak{N}_k[n]|^2\} + \mu^2\mathbb{E}\{|X_k[n]|^4\}\mathbb{E}\{|\mathcal{N}_k^o[n]|^2\}\end{aligned} \tag{2.144}$$

olmaktadır. LMS algoritması kararlı duruma geldiğinde, $\mathbb{E}\{|X_k[n]\ \Delta W_{k+1}[n]|^2\} \approx \mathbb{E}\left\{\left|X_k[n]\ \Delta W_k^{LMS}[n]\right|^2\right\}$ olacaktır. (2.144) eşitliğinin sağındaki son ifade, ayarsızlık değeri hesaplanmasında bulunmuştur. Gerekli düzenleme yapıldığında, zamanla değişen GBD olmayan durum için toplam OHK $\varsigma_k^{LMS}[n]$,

$$\varsigma_k^{LMS}[n] = \xi^0\,[n] + \mathbb{E}\{|X_k[n]\,\Delta W_k[n]|^2\} = \xi^0\,[n]\left(1 + \frac{\mu\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}}{2(1-\mu\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\})}\right) + \frac{N_{sym}\sigma_{\mathfrak{R}}^2}{4\mu(1-\mu\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\})} \tag{2.145}$$

olarak elde edilir.

$\varsigma_k^{LMS}[n]$ ifadesine bakıldığında, GBD kanal için elde edilen OHK'ne ek olarak $\frac{N_{sym}{\sigma_{\mathfrak{R}}}^2}{\mu(2-\mu\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\})}$ kadarlık ek OHK oluşmaktadır. Gecikme hatası adı verilen bu hata, LMS algoritmasının zaman ile kanalda meydana gelen değişimi daha geç algılamasından kaynaklanmaktadır. Söz konusu fazlalık hata μ parametresi ile ters orantılı olup, azaltılması için μ değerinin arttırılması gerekmektedir. Ancak bu durumda, ayarsızlıktan kaynaklanan OHK yükselmekte, seçilen değere göre toplam OHK, $\varsigma_k^{LMS}[n]$, değerinde değişim meydana gelmektedir. Bu değişim, ayarsızlık değeri, ${\sigma_{\mathfrak{R}}}^2$ ve seçilen μ katsayı değerine bağlı olmaktadır. μ değerinin değiştirilmesi ile toplam OHK, $\varsigma_k^{LMS}[n]$ artabileceği gibi azalması da mümkün olmaktadır. Bundan dolayı, zaman ile değişen kanallar için en uygun performansı sağlayacak μ değerinin optimizasyonu gerekmektedir. Aşağıda zamanla değişen kanallar için elde edilen teorik OHK değerini en düşük değere getirecek μ hesabı gösterilecektir.

Zaman ile değişen durağan olmayan kanallar için, toplam OHK değerini en düşük seviyeye getirecek en uygun katsayı değeri, μ^o bulmak için, (2.145) ile verilen toplam OHK değerinin μ'ye göre türevinin alınarak sıfıra eşitlenmesi gerekmektedir. Bu durumda,

$$\frac{\partial\varsigma_k^{LMS}[n]}{\partial\mu} = \frac{\partial}{\partial\mu}\left\{\xi^0\,[n] + \frac{\mu\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}\xi^0\,[n]}{2(1-\mu\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\})} + \frac{\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}N_{sym}\sigma_{\mathfrak{R}}^2}{4\mu(1-\mu\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\})}\right\} = 0 \tag{2.146}$$

elde edilmektedir. Burada gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$2\xi^0\,[n]\mu^2 + 2N_{sym}\sigma_{\mathfrak{R}}^2\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}\mu - N_{sym}\sigma_{\mathfrak{R}}^2 = 0 \tag{2.147}$$

ikinci dereceden denklemi elde edilmektedir. En uygun katsayı değeri hesaplandığında,

$$\mu_{1,2}^{o,LMS}[n] = \frac{N_{sym}\sigma_{\mathfrak{N}}^2 \mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}}{2\xi^0\,[n]}\left\{-1 \pm \sqrt{1 + \frac{2\xi^0\,[n]}{N_{sym}\sigma_{\mathfrak{N}}^2(\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\})^2}}\right\} \tag{2.148}$$

olarak bulunmaktadır. En uygun katsayı değeri pozitif bir değer alması gerektiğinden, en uygun katsayının,

$$\mu^{0,LMS}[n] = \frac{N_{sym}\sigma_{\mathfrak{N}}^2 \mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}}{2\xi^0\,[n]}\left\{-1 + \sqrt{1 + \frac{2\xi^0\,[n]}{N_{sym}\sigma_{\mathfrak{N}}^2(\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\})^2}}\right\} \tag{2.149}$$

olarak ayarlanması gerekmektedir.

$\mu^{0,LMS}[n]$ değeri görüleceği üzere, $\xi^0\,[n]$, EDOHK değerine, en uygun katsayının değişim hızını belirleyen, $N_{sym}\sigma_{\mathfrak{N}}^2$ değerine, $\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}$, bağlı olmaktadır. EDOHK değeri doğrusal denkleştirici için (2.22)'den görülebileceği üzere alınan sinyalin SGO değerine bağlı olmaktadır. Bu sebeple en uygun değerin kullanımında her iki faktör göz önüne alınarak ayarlanması gerekmektedir. Ayrıca, $\mu^o\,[n]$ değeri HFD ile elde edilen her nokta için, alınan sinyalin gücüne $\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}$ bağlı olarak belirlenmesi gerektiğinden, farklı değerler almaktadır. Bu durumda, LMS algoritmasında zamanla değişen kanal için uyarlamalı denkleştirme işleminden en uygun performans elde etmek için, her frekans noktası için ile (2.149) verilen $\mu^o\,[n]$ değerinin kullanılması halinde performans, tüm frekans noktaları için sabit değer kullanılmasına göre iyileşme sağlanmaktadır.

Optimum katsayı kullanılması halinde elde edilen zamanla değişen katsayı için FB-LMS algoritması kullanılması halinde elde edilen toplam OHK değeri,

$$\varsigma_k^{LMS}[n] = \xi^0\,[n] + \frac{\xi^0\,[n]}{2\left(\xi^0\,[n] - N_{sym}\sigma_{\mathfrak{N}}^2(\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\})^2\left\{-1+\sqrt{1+\frac{\xi^0\,[n]}{N_{sym}\sigma_{\mathfrak{N}}^2\left(\mathbb{E}\left\{|X_k[n]|^2\right\}\right)^2}}\right\}\right)}\left(N_{sym}\sigma_{\mathfrak{N}}^2(\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\})^2\left\{-1+\sqrt{1+\frac{\xi^0\,[n]}{N_{sym}\sigma_{\mathfrak{N}}^2(\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\})^2}}\right\} + \frac{\xi^0\,[n]}{\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}\left\{-1+\sqrt{1+\frac{\xi^0\,[n]}{N_{sym}\sigma_{\mathfrak{N}}^2\left(\mathbb{E}\left\{|X_k[n]|^2\right\}\right)^2}}\right\}}\right) \quad (2.150)$$

olmaktadır.

NLMS algoritması için zamanla değişen en uygun katsayı için, her adımdaki katsayı sapma değeri,

$$\Delta W_{k+1}^{NLMS}[n] = W_k^{NLMS} - W_{k+1}^o[n] + \frac{\mu}{P_k[n]} X_k^*[n](X_k[n]W_k^o[n] + \mathcal{N}_k[n] - X_k[n]W_k[n]) \quad (2.151)$$

şeklindedir. Bu ifade, (2.68) yardımıyla,

$$\Delta W_{k+1}^{NLMS}[n] = \left(1 - \frac{\mu}{P_k[n]}|X_k[n]|^2\right)\Delta W_k^{NLMS}[n] + \frac{\mu}{P_k[n]} X_k^*[n]\mathcal{N}_k^o[n] + (1-a)W_k^o[n] + \mathfrak{N}_k[n] \quad (2.152)$$

olacaktır. a değeri 1'e çok yakın bir değer olduğundan $(0.999 < a < 1)$, $(1-a)W_{k-1}^o[n] \approx 0$ olarak kabul edilebilir. Sonuçta, katsayı sapma değeri yaklaşık,

$$\Delta W_{k+1}^{NLMS}[n] = \left(1 - \frac{\mu}{P_k[n]}|X_k[n]|^2\right)\Delta W_k^{NLMS}[n] + \frac{\mu}{P_k[n]} X_k^*[n]\mathcal{N}_k^o[n] + \mathfrak{N}_k[n] \quad (2.153)$$

şeklinde değişime uğrayacaktır. Burada,$\mathcal{N}_k^o[n]$, ΔW_{k+1}^{NLMS} ve $\mathfrak{N}_k[n]$ birbirinden istatistiki olarak bağımsızdır. (2.125)'in her iki tarafı $X_k[n]$ ile çarpılması, norm karesinin beklenen değerinin alınması halinde,

$$\mathbb{E}\left\{\left|X_k[n]\,\Delta W_{k+1}^{NLMS}[n]\right|^2\right\} = \mathbb{E}\left\{\left(1-\frac{\mu}{P_k[n]}|X_k[n]|^2\right)^2\right\}\mathbb{E}\left\{\left|X_k[n]\,\Delta W_k^{NLMS}\right|^2\right\} + \mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}\mathbb{E}\{|\mathfrak{N}_k[n]|^2\} + \mu^2\mathbb{E}\left\{\frac{|X_k[n]|^4}{P_k^2[n]}\right\}\mathbb{E}\{|\mathcal{N}_k^o[n]|^2\} \tag{2.154}$$

olmaktadır. NLMS algoritması kararlı duruma geldiğinde, $\mathbb{E}\left\{\left|X_k[n]\,\Delta W_{k+1}^{NLMS}[n]\right|^2\right\} \approx \mathbb{E}\left\{\left|X_k[n]\,\Delta W_k^{NLMS}[n]\right|^2\right\}$ olacaktır. (2.154) eşitliğinin sağındaki son ifade, ayarsızlık değeri hesaplanmasında bulunmuştur. Gerekli düzenleme yapıldığında, zamanla değişen GBD olmayan durum için toplam OHK $\varsigma_k^{NLMS}[n]$,

$$\begin{aligned} \varsigma_k^{NLMS}[n] &= \xi^0\,[n] + \mathbb{E}\left\{\left|X_k[n]\,\Delta W_k^{NLMS}[n]\right|^2\right\} \\ &= \xi^0\,[n]\left(1+\frac{\mu(1+\gamma)}{2-\mu(1+\gamma)}\right) + \frac{\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}N_{sym}\sigma_{\mathfrak{N}}^2}{\mu(2-\mu(1+\gamma))} \end{aligned} \tag{2.155}$$

olarak elde edilir.

$\varsigma_k^{NLMS}[n]$ bakıldığında, GBD kanal için elde edilen OHK'ne ek olarak $\frac{(1+\gamma)N_{sym}\sigma_{\mathfrak{N}}{}^2}{\mu(2-\mu(1+\gamma))}$ OHK oluşmaktadır. Gecikme hatası adı verilen bu hata, NLMS algoritmasının zaman ile kanalda meydana gelen değişimi daha geç algılamasından kaynaklanmaktadır. Söz konusu fazlalık hata μ parametresi ile ters orantılı olup, azaltılması için μ değerinin arttırılması gerekmektedir. Ancak bu durumda, ayarsızlıktan kaynaklanan OHK yükselmekte, seçilen değere göre toplam OHK, $\varsigma_k^{NLMS}[n]$, değerinde değişim meydana gelmektedir. Bu değişim, ayarsızlık değeri, $\sigma_{\mathfrak{N}}^2$ ve seçilen μ katsayı değerine bağlı olmaktadır. μ değerinin değiştirilmesi ile toplam OHK, $\varsigma_k^{NLMS}[n]$ artabileceği gibi azalması da mümkün olmaktadır. Bundan dolayı, zaman ile değişen kanallar için en uygun performansı sağlayacak μ değerinin optimizasyonu gerekmektedir. Aşağıda zamanla değişen kanallar için elde edilen teorik OHK değerini en düşük değere getirecek μ hesabı gösterilecektir.

Zaman ile değişen durağan olmayan kanallar için, toplam OHK değerini en düşük seviyeye getirecek en uygun katsayı değeri, μ^o bulmak için, (2.136) ile verilen toplam OHK değerinin μ'ye göre türevinin alınarak sıfıra eşitlenmesi gerekmektedir. Bu durumda,

$$\frac{\partial \varsigma_k^{NLMS}[n]}{\partial \mu} = \xi^0\,[n]\frac{\partial}{\partial \mu}\left\{1+\frac{\mu(1+\gamma)}{2-\mu(1+\gamma)}\right\}+\frac{\partial}{\partial \mu}\left\{\frac{\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}N_{sym}\sigma_{\mathfrak{R}}^2}{\mu(2-\mu(1+\gamma))}\right\}=0 \tag{2.156}$$

elde edilmektedir. Burada gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$(1+\gamma)\xi^0\,[n]\mu^2+N_{sym}\sigma_{\mathfrak{R}}^2(1+\gamma)\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}\mu-N_{sym}\sigma_{\mathfrak{R}}^2\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}=0 \tag{2.157}$$

ikinci dereceden denklemi elde edilmektedir. En uygun katsayı değeri hesaplandığında,

$$\mu_{1,2}^o[n]=\frac{N_{sym}\sigma_{\mathfrak{R}}^2\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}}{2\xi^0\,[n]}\left\{-1\pm\sqrt{1+\frac{4\xi^0\,[n]}{N_{sym}\sigma_{\mathfrak{R}}^2\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}(1+\gamma)}}\right\} \tag{2.158}$$

olarak bulunmaktadır. En uygun katsayı değeri pozitif bir değer alması gerektiğinden, en uygun katsayının,

$$\mu^{0,\mathrm{N}LMS}[n]=\frac{N_{sym}\sigma_{\mathfrak{R}}^2\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}}{2\xi^0\,[n]}\left\{-1+\sqrt{1+\frac{4\xi^0\,[n]}{N_{sym}\sigma_{\mathfrak{R}}^2\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}(1+\gamma)}}\right\} \tag{2.159}$$

olarak ayarlanması gerekmektedir.

$\mu^o\,[n]$ değeri görüleceği üzere, $\xi^0\,[n]$, EDOHK değerine, en uygun katsayının değişim hızını belirleyen, $N_{sym}\sigma_{\mathfrak{R}}{}^2$ değerine, $\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}$, unutma faktörü γ bağlı olmaktadır. EDOHK değeri DD için (2.22)'den görülebileceği üzere alınan sinyalin SGO değerine bağlı olmaktadır. Bu sebeple en uygun değerin kullanımında her iki faktör göz önüne alınarak ayarlanması gerekmektedir. Ayrıca, $\mu^o\,[n]$ değeri HFD ile elde edilen her nokta için, alınan sinyalin gücüne $\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}$ bağlı olarak belirlenmesi gerektiğinden, farklı değerler almaktadır. Bu durumda, LMS algoritmasında zamanla değişen kanal için uyarlamalı denkleştirme işleminden en uygun performans elde etmek için, her frekans noktası için (2.159) ile verilen $\mu^o\,[n]$ değerinin kullanılması halinde performans, tüm frekans noktaları için sabit değer kullanılmasına göre iyileşme sağlanmaktadır.

2.3.2. FB-RLS algoritmasının teorik performansı

RLS algoritması için ayarsızlık, yakınsama ve takip performansı için gerekli teorik analizler bu alt bölümde gösterilmektedir. LMS ve NLMS algoritmaları için söz konusu parametrelerin belirlenmesi için izlenen yöntem, RLS algoritması için de kullanılmak suretiyle söz konusu performans değerleri elde edilmektedir.

Ayarsızlık

FB-RLS algoritmasının literatürdeki yapılan çalışma sonucu elde edilen ayarsızlık değeri,

$$M^{RLS} = \frac{1-\beta}{1+\beta} \tag{2.160}$$

şeklindedir. Söz konusu teorik değer yapılan benzetim çalışmalarında özellikle düşük β değerleri için yetersiz kaldığı görülmüştür. Bu nedenle, söz konusu değeri daha iyi tahmin edebilecek teorik ayarsızlık değeri yapılan çalışmalar kapsamında iki farklı alternatif bulunmuştur.

FB-RLS algoritması için katsayı güncelleme eşitliği (2.60) ile verilmiş olup, $\Delta W_k^{RLS}[n] = W_k^{RLS} - W^o[n]$ ile en uygun Wiener değerinden sapma değeri tanımlanarak, (2.60) içerisinde kullanıldığında, n. frekans noktası için sapma değeri,

$$\Delta W_k^{RLS}[n] = \Delta W_{k-1}^{RLS}[n] + Z_{k,x}[n] X_k^*[n] E_k[n] \tag{2.161}$$

olarak elde edilir. RLS, algoritmasının hata vektörü, $E_k[n] = D_k[n] - X_k[n] W_{k-1}[n]$ ve (2.61) ile verilen regresyon bağıntısı kullanıldığında,

$$\Delta W_k^{RLS}[n] = \Delta W_{k-1}^{RLS}[n] + Z_{k,x}[n] X_k^*[n] \left(X_k[n] W^o[n] + N_k[n] - X_k[n] W_{k-1}[n]\right) \tag{2.162}$$

halini almaktadır. Sonrasında gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\Delta W_k^{RLS}[n] = \left(1 - Z_{k,x}[n] |X_k[n]|^2\right) \Delta W_{k-1}^{RLS}[n] + Z_{k,x}[n] X_k^*[n] \mathcal{N}_k^o[n] \tag{2.163}$$

elde edilir. Her iki tarafın karesi ile beklenen değeri alındığında,

$$
\begin{aligned}
E\left\{\left|\Delta W_k^{RLS}[n]\right|^2\right\} &= E\left\{\left(1 - Z_{k,x}[n]|X_k[n]|^2\right)^2\right\}\mathbb{E}\left\{\left|\Delta W_{k-1}^{RLS}[n]\right|^2\right\} \\
&- 2Re\left\{E\{Z_{k,x}[n]X_k[n]\Delta W_{k-1}^{RLS}[n]\left(1 - Z_{k,x}[n]|X_k[n]|^2\right)X_k^*[n]N_k[n]\}\right\} \\
&+ \mathbb{E}\left\{\left(Z_{k,x}[n]\right)^2|X_k[n]|^2|\mathcal{N}_k^o[n]|^2\right\}
\end{aligned}
\tag{2.164}
$$

halini almaktadır. Gürültü ile alınan sinyal birbirinden bağımsız olduklarından (2.164) ifadesinin sağındaki ikinci terim,

$$
\mathbb{E}\{Z_{k,x}[n]X_k[n]\Delta W_{k-1}^{RLS}[n]\left(1 - Z_{k,x}[n]|X_k[n]|^2\right)X_k^*[n]\mathcal{N}_k^o[n]\} = 0 \tag{2.165}
$$

olacaktır. Bu durumda, (2.164) ifadesi sadeleşerek,

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left\{\left|\Delta W_k^{RLS}[n]\right|^2\right\} = E\left\{\left(1 - Z_{k,x}[n]|X_k[n]|^2\right)^2\right\}\mathbb{E}\left\{\left|\Delta W_{k-1}^{RLS}[n]\right|^2\right\} + \\
&\mathbb{E}\left\{\left(Z_{k,x}[n]\right)^2|X_k[n]|^2|\mathcal{N}_k^o[n]|^2\right\}
\end{aligned}
\tag{2.166}
$$

elde edilmektedir. (2.166) ifadesindeki $\mathbb{E}\left\{\left(1 - Z_{k,x}[n]|X_k[n]|^2\right)^2\right\}$ terimi açıldığında,

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left\{\left(1 - Z_{k,x}[n]|X_k[n]|^2\right)^2\right\} = 1 - 2\mathbb{E}\{Z_{k,x}[n]|X_k[n]|^2\} + \\
&\mathbb{E}\left\{\left(Z_{k,x}[n]\right)^2|X_k[n]|^4\right\}
\end{aligned}
\tag{2.167}
$$

olmaktadır. (2.167) ifadesinin hesaplanabilmesi için $Z_{k,x}[n]|X_k[n]|^2$ rastgele değişkeninin beklenen değeri ve 2. dereceden momentinin belirlenmesi gerekmektedir.

Kararlı durumda $\mathbb{E}\left\{\left|\Delta W_k^{RLS}[n]\right|^2\right\} \approx \mathbb{E}\left\{\left|\Delta W_{k-1}^{RLS}[n]\right|^2\right\}$ olacağından, katsayı OHK değeri,

$$
\mathbb{E}\left\{\left|\Delta W_k^{RLS}[n]\right|^2\right\} = \frac{\mathbb{E}\left\{\left(Z_{k,x}[n]\right)^2|X_k[n]|^2\right\}\mathbb{E}\left\{\left|\mathcal{N}_k^o[n]\right|^2\right\}}{2\mathbb{E}\{Z_{k,x}[n]|X_k[n]|^2\} - \mathbb{E}\left\{\left(Z_{k,x}[n]\right)^2|X_k[n]|^4\right\}} \tag{2.168}
$$

şeklinde hesaplanacaktır.

<u>İlk yöntem</u>

FB-RLS algoritmasında $Z_{k,x}[n]$ terimi, özilinti değeri, $R_{k,x}[n]$ nin tersi olarak tanımlanmaktadır. $Z_{k,x}[n]$ değerinin belirlenmesi için $R_{k,x}[n]$'in beklenen değeri hesaplanmalıdır. Sonrasında elde edilen $\mathbb{E}\{R_{k,x}[n]\}$ değerinin tersi alınarak, $\mathbb{E}\{Z_{k,x}[n]\}$ değeri elde edilmelidir. n. frekans noktası için (2.47) ile verilen, $R_{k,x}[n]$'in beklenen değeri alınır ise,

$$\mathbb{E}\{R_{k,x}[n]\} = \sum_{i=0}^{k} \beta^{k-i} \mathbb{E}\{|X_i[n]|^2\} \tag{2.169}$$

elde edilmektedir. Görüldüğü üzere, özilinti değeri, $|X_i[n]|^2$ norm karesinin (güç değerleri) beklenen değeri, $\mathbb{E}\{|X_i[n]|^2\}$'nin unutma faktörü ile ağırlıklandırılmış hali başlangıç bloğundan itibaren toplanarak elde edilmektedir. Alınan sinyal GBD olduğundan, $\mathbb{E}\{|X_0[n]|^2\} = \mathbb{E}\{|X_1[n]|^2\} = \cdots = \mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}$olacaktır. Bu durumda $\mathbb{E}\{Z_{k,x}[n]\} = \left(\mathbb{E}\{R_{k,x}[n]\}\right)^{-1}$ şeklinde alındığı takdirde,

$$\mathbb{E}\{Z_{k,x}[n]\} = \frac{1-\beta}{\mathbb{E}\{|X[n]|^2\}} \tag{2.170}$$

olarak elde edilir. RLS kararlı duruma ulaştığında, $\mathbb{E}\{Z_{k,x}[n]|X_k[n]|^2\}$ değeri,

$$\mathbb{E}\{Z_{k,x}[n]|X_k[n]|^2\} \approx \mathbb{E}\{Z_{k,x}[n]\}\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\} = 1-\beta \tag{2.171}$$

olarak bulunmaktadır.

(2.167)'de bulunan $\mathbb{E}\left\{\left(Z_{k,x}[n]\right)^2|X_k[n]|^4\right\}$ terimi için, kararlı durumda gerekli hesaplama yapıldığında,

$$\mathbb{E}\left\{\left(Z_{k,x}[n]\right)^2|X_k[n]|^4\right\} = \mathbb{E}\left\{\frac{|X_k[n]|^4}{\left(\sum_{i=0}^{k} \beta^{k-i}|X_i[n]|^2\right)^2}\right\} \approx \frac{\mathbb{E}\{|X_k[n]|^4\}}{\mathbb{E}\left\{\left(\sum_{i=0}^{k} \beta^{k-i}|X_i[n]|^2\right)^2\right\}} \tag{2.172}$$

haline gelmektedir.$X_k[n]$ değeri Gauss dağılıma sahip olmasından dolayı $\mathbb{E}\{|X_k[n]|^4\} = 2(\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\})^2$ olarak alınabilir.

(2.172) paydasında bulunan $\mathbb{E}\left\{\left(\sum_{i=0}^{k}\beta^{k-i}|X_i[n]|^2\right)^2\right\}$ ifadesi açıldığında,

$$\mathbb{E}\left\{\left(\sum_{i=0}^{k}\beta^{k-i}|X_k[n]|^2\right)^2\right\} = \sum_{i=0}^{k}\beta^{2(k-i)}\mathbb{E}\{|X_i[n]|^4\} + 2\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{l=i+1}^{k}\beta^{2k-i-l}\mathbb{E}\{|X_i[n]|^2|X_l[n]|^2\} \tag{2.173}$$

elde edilir. $|X_i[n]|^2$ ile $|X_i[n]|^2$ farklı bloklar için vektör normu olduğundan, biribirleri arasında ilinti bulunmamaktadır. Bu durumda, $\mathbb{E}\{|X_i[n]|^2|X_l[n]|^2\} = \mathbb{E}\{|X_i[n]|^2\}E\{|X_l[n]|^2\}$ olacaktır. (2.173) ifadesinde bu özellik kullanıldığında,

$$\mathbb{E}\left\{\left(\sum_{i=0}^{k}\beta^{k-i}|X_i[n]|^2\right)^2\right\} = \sum_{i=0}^{k}\beta^{2(k-i)}\mathbb{E}\{|X_i[n]|^4\} + 2\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{l=i+1}^{k}\beta^{2k-i-l}\mathbb{E}\{|X_i[n]|^2\}\mathbb{E}\{|X_l[n]|^2\} \tag{2.174}$$

olmaktadır. Algoritma kararlı duruma geldiğinde, $\sum_{i=0}^{k}\beta^{2(k-i)} = \frac{1}{(1-\beta^2)}$ ve $\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{l=i+1}^{k}\beta^{2k-i-l} = \frac{\beta}{(1-\beta^2)(1-\beta)}$ olacaktır. (2.174) ifadesi bu durumda,

$$\mathbb{E}\left\{\left(\sum_{i=0}^{k}\beta^{k-i}|X_i[n]|^2\right)^2\right\} = \frac{2\left(\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}\right)^2}{(1-\beta^2)(1-\beta)} \tag{2.175}$$

halini almaktadır. Gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\mathbb{E}\left\{\left(Z_{k,x}[n]\right)^2|X_i[n]|^4\right\} = (1-\beta^2)(1-\beta) \tag{2.176}$$

haline dönüşmektedir. (2.167) ifadesine, elde edilen (2.171) ve (2.176)'de verilen ifadeler kullanıldığında,

$$\mathbb{E}\left\{\left(1 - Z_{k,x}[n]|X_k[n]|^2\right)^2\right\} = 1 - 2(1-\beta) + (1-\beta^2)(1-\beta) \tag{2.177}$$

olarak bulunmaktadır.

RLS algoritması kararlı duruma ulaştığında, $\mathbb{E}\{|\Delta W_k[n]|^2\} = \mathbb{E}\{|\Delta W_{k-1}[n]|^2\}$, olacak yani öncül ve soncul OHK değerleri, yaklaşık olarak eşit olmaktadır. Bu durumda, yukarıda bulunan (2.177), (2.166) içerisine yerleştirildiğinde,

$$\mathbb{E}\left\{\left|\Delta W_k^{RLS}[n]\right|^2\right\} = \{1 - 2(1-\beta) + (1-\beta^2)(1-\beta)\}\mathbb{E}\left\{\left|\Delta W_{k-1}^{RLS}[n]\right|^2\right\} + \frac{(1-\beta^2)(1-\beta)}{2\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}}\mathbb{E}|\mathcal{N}_k^o[n]|^2 \tag{2.178}$$

elde edilir. Burada, $\mathbb{E}\{|\mathcal{N}_k^o[n]|^2\} = N_{sym}\sigma_{\eta^0}^2$ olmaktadır. Kararlı durumda soncul hata, $E_k^{a,RLS}[n]$ OHK değeri,

$$\mathbb{E}\left\{\left|E_k^{a,RLS}[n]\right|^2\right\} = \mathbb{E}\left\{|X_k[n]|^2\left|\Delta W_{k-1}^{RLS}[n]\right|^2\right\} = \frac{1-\beta^2}{2(1+\beta^2)}N_{sym}\sigma_{\eta^0}^2 \tag{2.179}$$

olarak bulunmaktadır.

(2.179) kullanılarak kararlı durumda elde edilen RLS algoritması ayarsızlık değeri,

$$M^{RLS}[n] = \frac{\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2|\Delta W_{k-1}[n]|^2\}}{N_{sym}\sigma_{\eta^0}^2} = \frac{1-\beta^2}{2(1+\beta^2)} \tag{2.180}$$

olarak bulunmaktadır.

Alternatif yöntem

FB-NLMS algoritmasında yapıldığı şekilde, (2.168)'de bulunan beklenen değerler Ek-3'ile verildiği şekilde yerine konulduğunda,

$$M^{RLS}[n] = \lim_{k\to\infty}\mathbb{E}\frac{\left\{\left|\Delta W_{k+1}^{NLMS}[n]\right|^2|X_{k+1}[n]|^2\right\}}{N_{sym}\sigma_{\eta^0}^2}$$
$$= \frac{\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i\left\{\frac{-(k-i)\ln\beta-1+\beta^{k-i}}{(1-\beta^{k-i})^2}\right\}}{2\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i\left\{\frac{(k-i)\beta^{k-i}\ln\beta+1-\beta^{k-i}}{(1-\beta^{k-i})^2}\right\} - \sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i\left\{\frac{-2(k-i)\beta^{k-i}\ln\beta+\beta^{2(k-i)}-1}{(1-\beta^{k-i})^3}\right\}} \tag{2.181}$$

Ayarsızlık değerinden görüldüğü üzere, RLS algoritmasında, NLMS algoritması için olduğu gibi, ayarsızlık değeri giriş sinyalinden bağımsız olmakta, sadece, unutma faktörü, β değerine bağlı olmaktadır.

Yakınsama

RLS algoritması yinelemeli katsayı sapma OHK değeri, (2.166) ile verilmekte olup,

$$\mathbb{E}\left\{\left|\Delta W_k^{RLS}[n]\right|^2\right\} = \mathbb{E}\{(1 - Z_k[n]|X_k[n]|^2)^2\}\mathbb{E}\left\{\left|\Delta W_{k-1}^{RLS}[n]\right|^2\right\} + N_{sym}\sigma_{\eta^0}^2\mathbb{E}\{|Z_k[n]|^2\}\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\} \tag{2.182}$$

şeklinde elde edilmiştir. Burada, (2.169) kullanılarak $Z_{k,x}[n]$ değerinin blok ile değişimi beklenen değeri alınarak hesaplandığında,

$$\mathbb{E}\{Z_k[n]\} \approx \left(\mathbb{E}\{R_{k,x}[n]\}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{\beta^{k+1}}{Z_{-1}[n]} + \left(\sum_{i=0}^{k}\beta^{k-i}\right)\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}} \tag{2.183}$$

şeklinde elde edilir. Burada, $Z_{-1}[n]$ algoritmada verilen ilk değeri göstermektedir. (2.183) paydasında bulunan, $\sum_{i=0}^{k}\beta^{k-i}$ terimi,

$$\sum_{i=0}^{k}\beta^{k-i} = \frac{1-\beta^{k+1}}{1-\beta} \tag{2.184}$$

olduğundan, (2.183),

$$\mathbb{E}\{Z_k[n]\} = \frac{(1-\beta)Z_{-1}[n]}{\beta^{k+1}(1-\beta) + (1-\beta^{k+1})\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}Z_{-1}[n]} \tag{2.185}$$

şeklinde zaman içinde değişim göstermektedir. $\mathbb{E}\{|Z_k[n]|^2\}$ ise,

$$\mathbb{E}\{|Z_k[n]|^2\} = \frac{(1-\beta)(1-\beta^2)Z_{-1}^2[n]}{\beta^{2(k+1)}(1-\beta)(1-\beta^2) + 2\beta^{k+1}(1-\beta^{k+1})Z_{-1}[n]\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}\left\{(1-\beta^2) + \beta(1-\beta^k)Z_{-1}[n]\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}\right\}} \tag{2.186}$$

olacaktır. RLS algoritması katsayı sapma OHK'nin bloğa bağlı olarak değişimi, (2.182) kullanılarak,

$$A = \beta^{2(k+1)}(1-\beta)(1-\beta^2) + 2Z_{-1}[n]\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}\Big\{\beta^{k+1}(1-\beta^{k+1})(1-\beta^2) + (1+\beta^{2k}-\beta^k)(1-\beta)(1+\beta^{k+2})Z_{-1}[n]\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}\Big\}$$

$$E\left\{\left|\Delta W_k^{RLS}[n]\right|^2\right\} = \left[1 - 2\frac{(1-\beta)Z_{-1}[n]\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}}{\beta^{k+1}(1-\beta)+(1-\beta^{k+1})\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}Z_{-1}[n]} + \frac{2(1-\beta)(1-\beta^2)Z_{-1}^2[n](\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\})^2}{A}\right]\mathbb{E}\left\{\left|\Delta W_{k-1}^{RLS}[n]\right|^2\right\} + N_{sym}\sigma_{\eta^0}^2\left[\frac{(1-\beta)(1-\beta^2)Z_{-1}^2[n]\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}}{A}\right] \tag{2.187}$$

olmaktadır. Burada,

$$\mathcal{A}_k^{RLS}[n] = 1 - 2\frac{(1-\beta)Z_{-1}[n]\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}}{\beta^{k+1}(1-\beta)+(1-\beta^{k+1})\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}Z_{-1}[n]} + \frac{2(1-\beta)(1-\beta^2)Z_{-1}^2[n](\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\})^2}{A} \tag{2.188}$$

$$\mathcal{B}_k^{RLS}[n] = \frac{(1-\beta)(1-\beta^2)Z_{-1}^2[n]\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}}{A} \tag{2.189}$$

tanımlamaları kullanılması halinde,

$$\mathbb{E}\left\{\left|\Delta W_k^{RLS}[n]\right|^2\right\} = \mathcal{A}_k^{RLS}[n]\mathbb{E}\left\{\left|\Delta W_{k-1}^{RLS}[n]\right|^2\right\} + \mathcal{B}_k^{RLS}[n]N_{sym}\sigma_{\eta^0}^2 \tag{2.190}$$

olarak elde edilir. (2.190) ifadesi başlangıç, $i = 0$ bloğundan itibaren hesaplanacak olur ise, ortalama katsayı sapma karesi beklenen değeri için,

$$\mathbb{E}\left\{\left|\Delta W_k^{RLS}[n]\right|^2\right\} = \prod_{i=0}^{k}\mathcal{A}_i^{RLS}[n]\,\mathbb{E}\{|\Delta W_{-1}^{RLS}[n]|^2\} + \sum_{i=0}^{k}\mathcal{A}_i^{RLS}[n]\,\mathcal{B}_i^{RLS}[n]N_{sym}\sigma_{\eta^0}^2 \tag{2.191}$$

elde edilir. $\Delta\xi_k^{RLS}[n] = \mathbb{E}\left\{|X_k[n]|^2\left|\Delta W_{k-1}^{RLS}[n]\right|^2\right\}$ olduğundan,

$$\xi_k^{RLS}[n] = N_{sym}\sigma_{\eta^0}^2 + \mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}\mathbb{E}\{|\Delta W_{-1}^{RLS}[n]|^2\}\prod_{i=0}^{k}\mathcal{A}_i^{RLS}[n] + \mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}\sum_{i=0}^{k}\mathcal{A}_i^{RLS}[n]\,\mathcal{B}_i^{RLS}[n]N_{sym}\sigma_{\eta^0}^2 \tag{2.192}$$

şeklinde FB-RLS algoritmasının öğrenmesi eğrisi elde edilir. Görüldüğü üzere FB-RLS algoritmasında, her adımda elde edilen yakınsama hızı, her blokta farklı olmaktadır.

Parseval teorimi kullanıldığında, bir blok için OHK değeri, tüm frekans noktalarının OHK toplamının ortalamasına eşit olacağından,

$$\xi_k^{RLS} = \frac{1}{N_{sym}^2}\sum_{n=1}^{N_{sym}-1}\xi_k^{RLS}[n] \tag{2.193}$$

olarak hesaplanmaktadır.

<u>Takip performansı</u>

RLS algoritmasının zamanla değişen katsayıları izleme performansını elde etmek için, en uygun katsayı değeri, ${W_k}^0[n]$' nin zamanda 1. dereceden Markov zinciri olarak, değişim gösterdiği kabul edilmiş olup, değişimin ifadesi, (2.67) ile verilmektedir.

Durağan olmayan kanal göz önüne alındığında, RLS ortalama sapma katsayısı,

$$\Delta W_k^{RLS}[n] = W_k^{RLS}[n] - W_k^o[n] \tag{2.194}$$

şeklinde hesaplanmaktadır. Ayrıca, n. frekans noktası için tanımlanan $D_k[n]$ değerinin, (2.68) ile verilen regresyon ifadesini sağladığı kabul edilmektedir.

FB-RLS algoritması için (2.60) katsayı günelleme ifadesinin her iki tarafından, ${W_k}^0[n]$ çıkarılarak (2.194) ifadesi kullanıldığında ortalama sapma katsayısı,

$$\Delta W_k^{RLS}[n] = W_{k-1}[n] - W_{k-1}^o[n] + Z_{k,x}[n]{X_k}^*[n]\big(X_k[n]{W_k}^0[n] + \mathcal{N}_k[n] - X_k[n]W_{k-1}[n]\big) \tag{2.195}$$

haline dönüşmektedir. (2.195) düzenlendiğinde,

$$\Delta W_k^{RLS}[n] = \left(1 - Z_{k,x}[n]|X_k[n]|^2\right)\Delta W_{k-1}^{RLS}[n] + Z_{k,x}[n]X_k^*[n]\mathcal{N}_k[n] + (1 - a)W_{k-1}^o[n] - \mathfrak{R}_k[n] \tag{2.196}$$

olacaktır. a değeri 1'e çok yakın bir değer olduğundan ($0.999 < a < 1$), $(1 - a)W_{k-1}^o[n] \approx 0$ olmaktadır. Bu durumda, katsayı sapma değeri,

$$\Delta W_k^{RLS}[n] = \left(1 - Z_{k,x}[n]|X_k[n]|^2\right)\Delta W_k^{RLS}[n] + Z_{k,x}[n]X_k^*[n]\mathcal{N}_k[n] - \mathfrak{R}_k[n] \tag{2.197}$$

şeklinde değişime uğrayacaktır. Burada $\mathcal{N}_k[n]$, $\Delta W_k[n]$ ve $\mathfrak{R}_k[n]$ birbirinden istatistiki olarak bağımsızdır. Ayarsızlık değerinin hesabında yapıldığı şekilde, (2.169)'in her iki tarafı $X_k[n]$ ile çarpılması, norm karesinin beklenen değerinin alınması halinde,

$$\mathbb{E}\{|X_k[n]\ \Delta W_k[n]|^2\} = \mathbb{E}\left\{\left(1 - Z_{k,x}[n]|X_k[n]|^2\right)^2\right\}\mathbb{E}\{|X_k[n]\ \Delta W_{k-1}[n]|^2\} + \mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}\mathbb{E}\{|\mathfrak{R}_k[n]|^2\} + \mathbb{E}\left\{\left(Z_{k,x}[n]\right)^2|X_k[n]|^4|\mathcal{N}_k[n]|^2\right\} \tag{2.198}$$

olmaktadır. RLS algoritması kararlı duruma geldiğinde, $\mathbb{E}\{|X_k[n]\ \Delta W_{k+1}[n]|^2\} \approx \mathbb{E}\{|X_k[n]\ \Delta W_k[n]|^2\}$ olacaktır. (2.198) eşitliğinin sağındaki son ifade, ayarsızlık değeri hesaplanmasında bulunmuş olup, (3.135) ile verilmektedir. Gerekli düzenleme yapıldığında, zamanla değişen GBD olmayan durum için toplam OHK $\varsigma_k^{RLS}[n]$,

$$\varsigma_k^{RLS}[n] = \xi^0\,[n] + \mathbb{E}\{|X_k[n]\ \Delta W_{k-1}[n]|^2\} = \xi^0\,[n]\left(1 + \frac{1-\beta^2}{2(1+\beta^2)}\right) + \frac{\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}N_{SYM}\sigma_{\mathfrak{R}}{}^2}{(1-\beta)(1+\beta^2)} \tag{2.199}$$

olarak elde edilir.

Zamanla değişen kanaldan elde edilen OHK değeri, $\varsigma_k^{RLS}[n]$ bakıldığında, GBD kanal için elde edilen OHK'ne ek olarak $\frac{\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}N_{sym}\sigma_{\mathfrak{R}}{}^2}{(1-\beta)(1+\beta^2)}$ kadarlık, gecikme hatası (lag error) adı verilen fazladan OHK oluşmaktadır. Gecikme hatası, RLS algoritmasının zaman ile kanalda meydana gelen değişimi daha geç algılamasından kaynaklanmaktadır. Söz konusu fazlalık hata $(1-\beta)$ ile ters orantılı olup, azaltılması için β değerinin 0'a yakın seçilmesi gerekmektedir. Ancak bu durumda, ayarsızlıktan kaynaklanan OHK, yani ayarsızlık, değeri yükselmekte, seçilen değere göre toplam OHK, $\varsigma_k^{RLS}[n]$, değerinde değişim meydana gelmektedir. Bu değişim, ayarsızlık değeri, gecikme hatasının büyüklüğü ve seçilen β katsayı değerine bağlı olmaktadır. β değerinin değiştirilmesi ile toplam OHK, $\varsigma_k^{GRLS}[n]$ artabileceği gibi azalması da mümkün olmaktadır. Bundan dolayı, zaman ile değişen kanallar için en uygun performansı sağlayacak β değerinin optimizasyonu gerekmektedir. Aşağıda zamanla değişen kanallar için elde edilen teorik OHK değerini en düşük değere getirecek β hesabı gösterilecektir.

Zaman ile değişen durağan olmayan kanallar için, toplam OHK değerini en düşük seviyeye getirecek en uygun katsayı değeri, β^o bulmak için, (2.171) ile verilen toplam OHK değerinin β'ye göre türevinin alınarak sıfıra eşitlenmesi gerekmektedir. Bu durumda,

$$\frac{\partial \varsigma_k^{RLS}[n]}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta}\left\{1+\frac{1-\beta^2}{2(1+\beta^2)}\right\}\xi^o\,[n] + \frac{\partial}{\partial \beta}\left\{\frac{\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}N_{sym}{\sigma_{\mathfrak{N}}}^2}{(1-\beta)(1+\beta^2)}\right\} = 0 \tag{2.200}$$

elde edilmektedir. (2.200) çözüldüğünde,

$$\hbar = \xi^o\,[n] \tag{2.201}$$

$$\mathcal{k} = \mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}N_{sym}{\sigma_{\mathfrak{N}}}^2 \tag{2.202}$$

$$\hbar\beta^3 - (2\hbar + 3\mathcal{k})\beta^2 + (\hbar + 2\mathcal{k})\beta - \mathcal{k} = 0 \tag{2.203}$$

olarak üçüncü dereceden denklem bulunmaktadır. Söz konusu kök değeri,

$$\ell = \left(\frac{(2\hbar+3\mathcal{k})^3}{27\hbar^3} - \frac{(2\hbar+3\mathcal{k})(\hbar+2\mathcal{k})}{6\hbar^2} + \frac{\mathcal{k}}{2\hbar}\right) \tag{2.204}$$

$$m = \sqrt{\left(\frac{(2\hbar+3\mathcal{k})^3}{27\hbar^3} - \frac{(2\hbar+3\mathcal{k})(\hbar+2\mathcal{k})}{6\hbar^2} + \frac{\mathcal{k}}{2\hbar}\right)^2 + \left(\frac{(\hbar+2\mathcal{k})}{3\hbar} - \frac{(2\hbar+3\mathcal{k})^2}{9\hbar^2}\right)^3} \tag{2.205}$$

tanımlamaları kullanılarak,

$$\beta^o = \sqrt[3]{l+m} + \sqrt[3]{l-m} + \frac{(2\hbar + 3\Bbbk)}{3\hbar} \qquad (2.206)$$

ile hesaplanabilmektedir. (2.206) eşitliğinin (0-1) aralığında kalan kök değeri en uygun unutma faktörü değerini vermektedir.

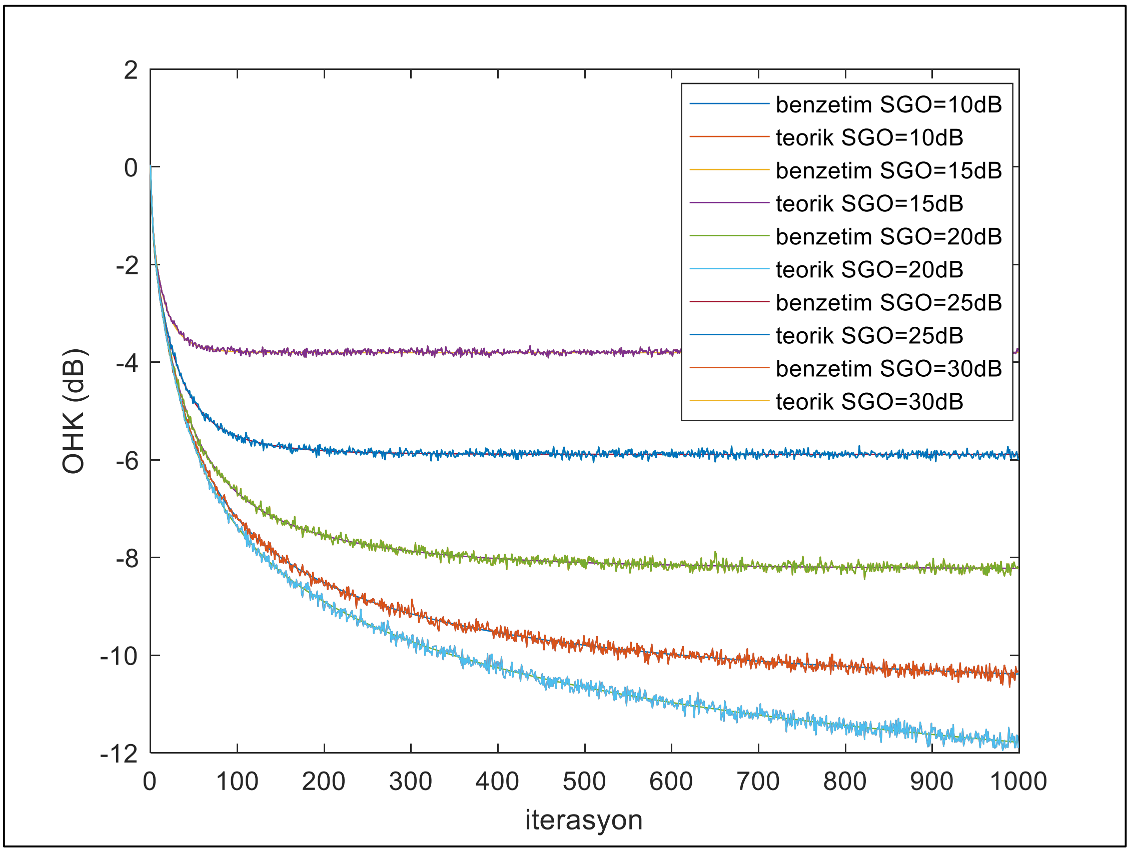
En uygun katsayı ifadesinden görüleceği üzere, hem EDOHK'ne hem de katsayının değişim hızını belirleyen, $N_{sym}\sigma_{\Re}{}^2$ değerine bağlı olmaktadır. EDOHK değeri doğrusal denkleştirici için (2.25)'den görülebileceği üzere alınan sinyalin SGO değerine bağlı olmaktadır. Bu sebeple en uygun değerin kullanımında her iki faktör göz önüne alınarak ayarlanması gerekmektedir. (2.206)'dan görülebileceği üzere, en uygun katsayı değeri HFD ile elde edilen her nokta için farklı bir değer alması gerekmektedir. her frekans noktası için en uygun bir katsayı değerinin kullanılması halinde performans, sabit değerli algoritmaya göre iyileşme sağlanmaktadır.

2.3.3. Benzetim sonuçları

Bölüm kapsamında yapılan tüm benzetim çalışmalarında, kanal modeli olarak düzgün 6 yollu modeli seçilmiştir.

Şekil 2.3 ile FB-LMS algoritmasının teorik olarak (2.128) ile verilen öğrenme eğrisi performansı ile bilgisayar benzetimi sonucu elde edilen farklı SGO değerleri kullanılarak öğrenme eğrileri gösterilmektedir. Bilgisayar benzetim çalışması için düzgün 6 yollu kanal modeli kullanılmıştır. Denkleştirme işleminde algoritma girişinde renkli sinyal kullanıldığından, yakınsama uzun sürmekte olduğu görülmektedir. Ayrıca, FB-LMS için yakınsama değeri her frekans noktası için ayrı olduğundan, toplamda elde edilen yakınsama değerini en düşük genlik değere sahip frekans noktası baskın şekilde belirlemektedir.

Şekil 2.4 ile FB-LMS algoritması kullanılması halinde elde edilen ayarsızlık değerinin SGO ve μ'ye bağlı olarak değişimi gösterilmektedir. Benzetim çalışmaları ile elde edilen sonuçlar ile teorik olarak bulunan ayarsızlık değeri ifadelerinin uyumlu olduğu anlaşılmaktadır. Görüldüğü üzere, ayarsızlık değeri SGO ve kullanılan katsayı değerine göre değişim göstermektedir. Burada, μ değeri arttırıldıkça ayarsızlık değeri ilk aşamada azalmakta, optimum bir değer aldıktan sonra ise artış eğilimi göstermektedir. Ancak söz konusu artış doğrusal olmayıp üssel olarak değişim göstermekte olup kullanılacak katsayı değeri için optimum bir değer bulunmaktadır. Aynı durum SGO ile ayarsızlık değişiminde de gözlemlenmektedir.



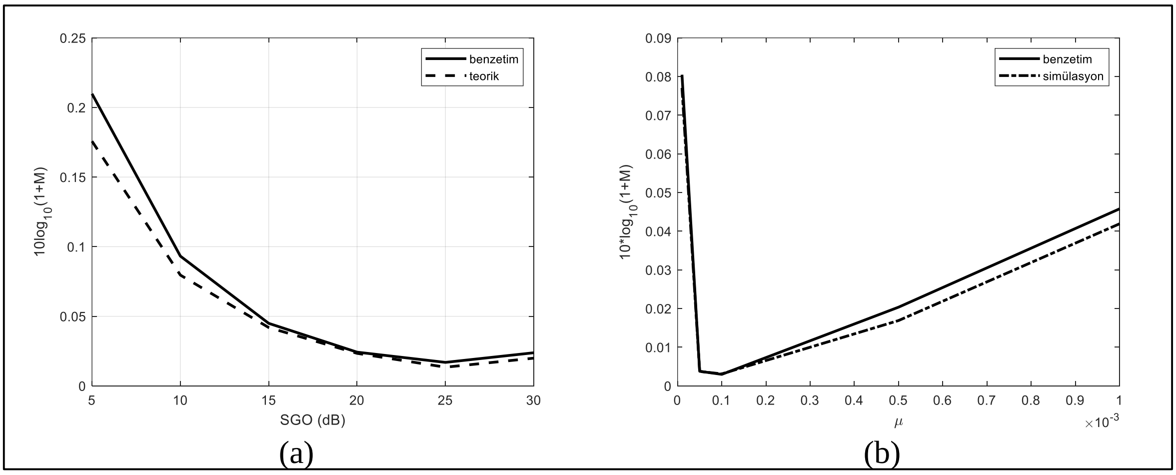
Şekil 2.3. FB-LMS öğrenme eğrileri $\mu=10^{-3}$

Yukarıda verilen teorik ve tez çalışmaları kapsamında verilen alternatif ayarsızlık değer hesaplarını karşılaştırmak üzere bilgisayar benzetim çalışması yapılmıştır. Şekil 2.5 ile FB-NLMS algoritması 6 yollu düzgün dağılımlı sönümlü kanalda elde edilen ayarsızlık değerinin katsayı değeri, μ ve unutma faktörü, γ'ya bağlı değişimi bilgisayar benzetim ve (2.117) ve (2.123) ifadeleri ile verilen teorik ayarsızlık değeleri ile birlikte gösterilmektedir. (2.123) ile verilen teorik ayarsızlık fonksiyonunun benzetim ile elde edilen sonuçlara oldukça yakın ve uyumlu olduğu görülmektedir.

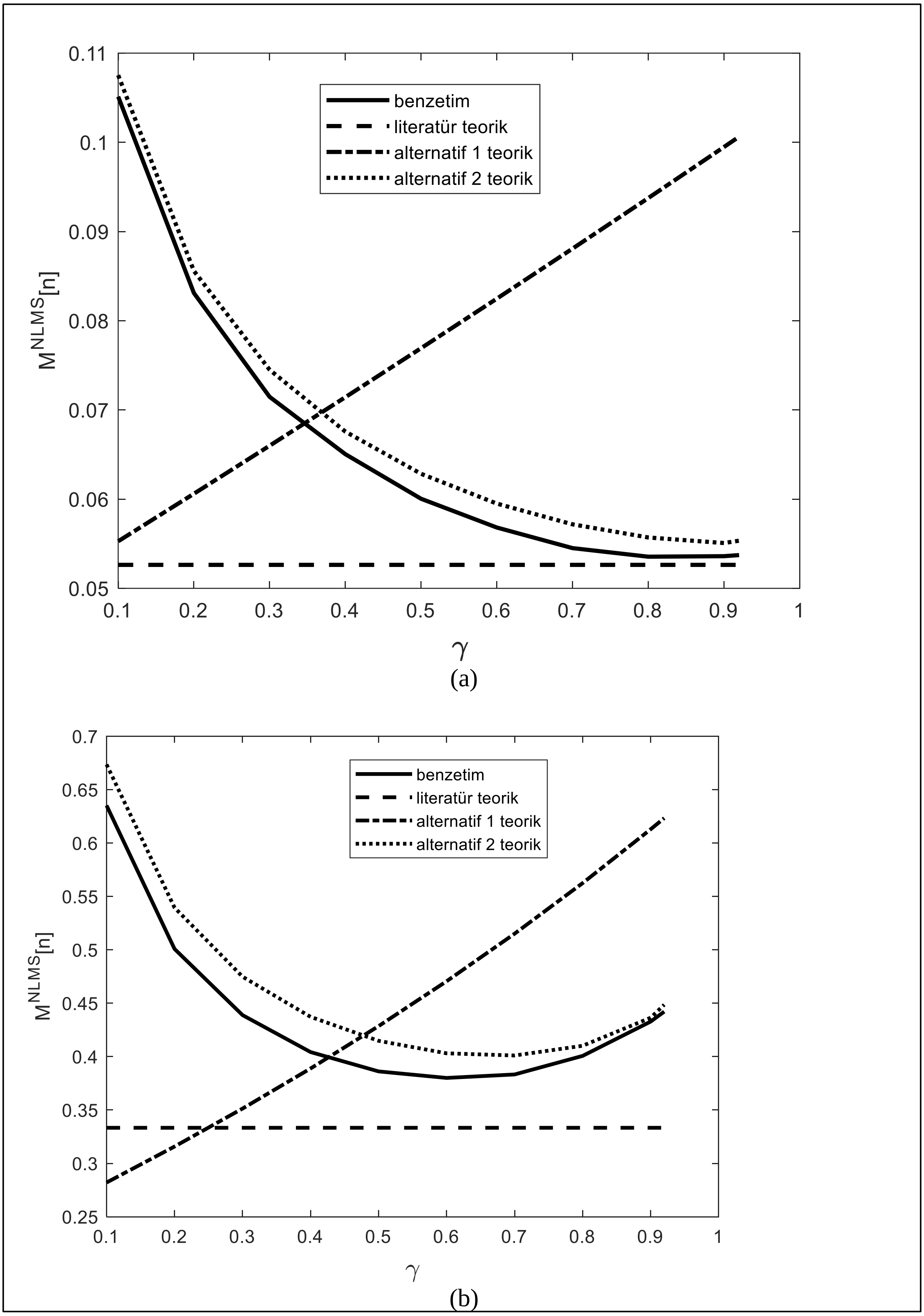
Unutma faktörü 0'a veya 1'e çok yakın seçilmesi ve yüksek μ katsayı değeri ($\mu > 0.1$) kullanılması halinde ayarsızlık değerinin yüksek seviyelere ulaştığı görülmektedir. $\mu > 0.1$

olarak kullanılması durumunda unutma faktörü değeri 0.4-0.5 arasında seçilerek elde edilen ayarsızlık olabilecek en düşük seviyeye getirilmektedir.

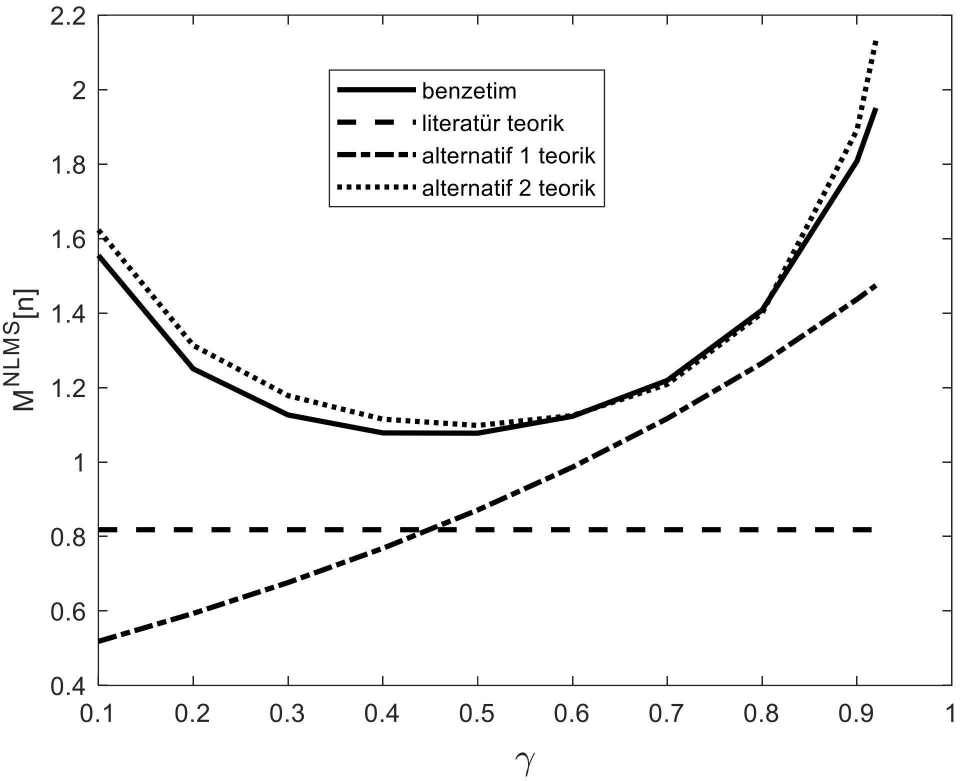
Sonuç olarak, FB-NLMS algoritması kullanılarak elde edilen ayarsızlık değeri hem μ hem de γ değerine bağlı olmakta, bu değerlerin ortak seçimi için optimum bir bölge bulunmaktadır. Genel olarak yapılan benzetim çalışmalarında, seçilen $\mu > 0.1$ olarak seçilmesi halinde γ değerinin 0.45 civarı bir değer alınması gerekmekte, $\mu < 0.1$ olarak kullanılması halinde ise 0.9 civarı bir değer alınması gerekmektedir.



Şekil 2.4. LMS algoritması ayarsızlık değeri (a) SGO, (b) μ ‘ye bağlı değişimi

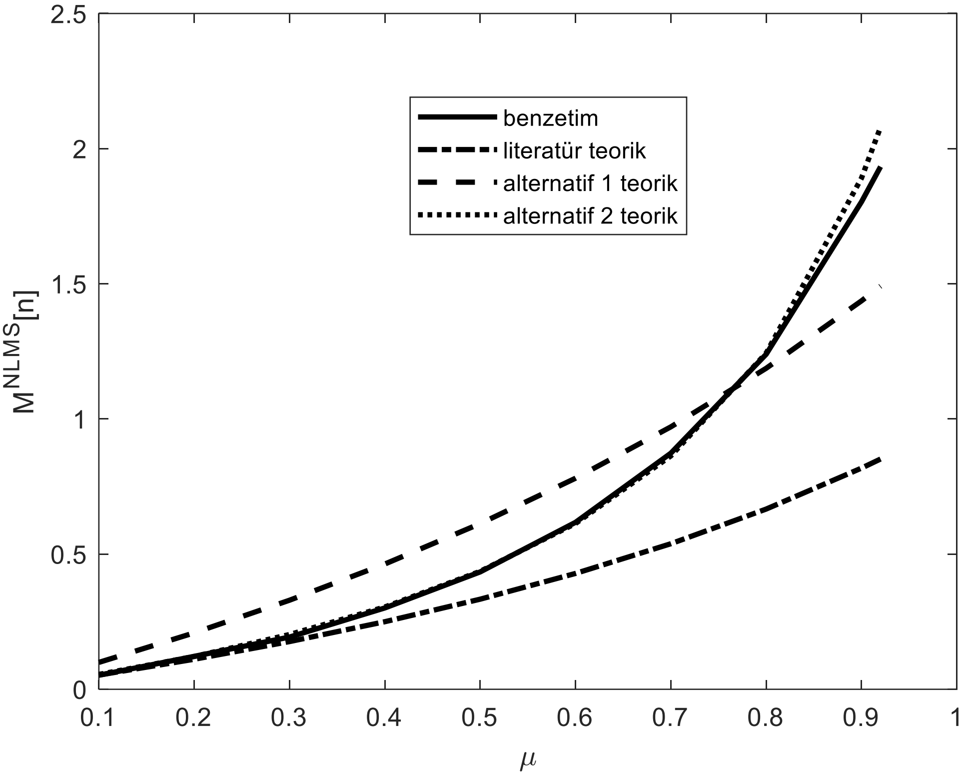


Şekil 2.5. FB-NLMS algoritması ayarsızlık değerinin unutma faktörüne göre değişimi (SGO=20dB) (a) $\mu = 0.1$, (b) $\mu = 0.5$, (c) $\mu = 0.9$

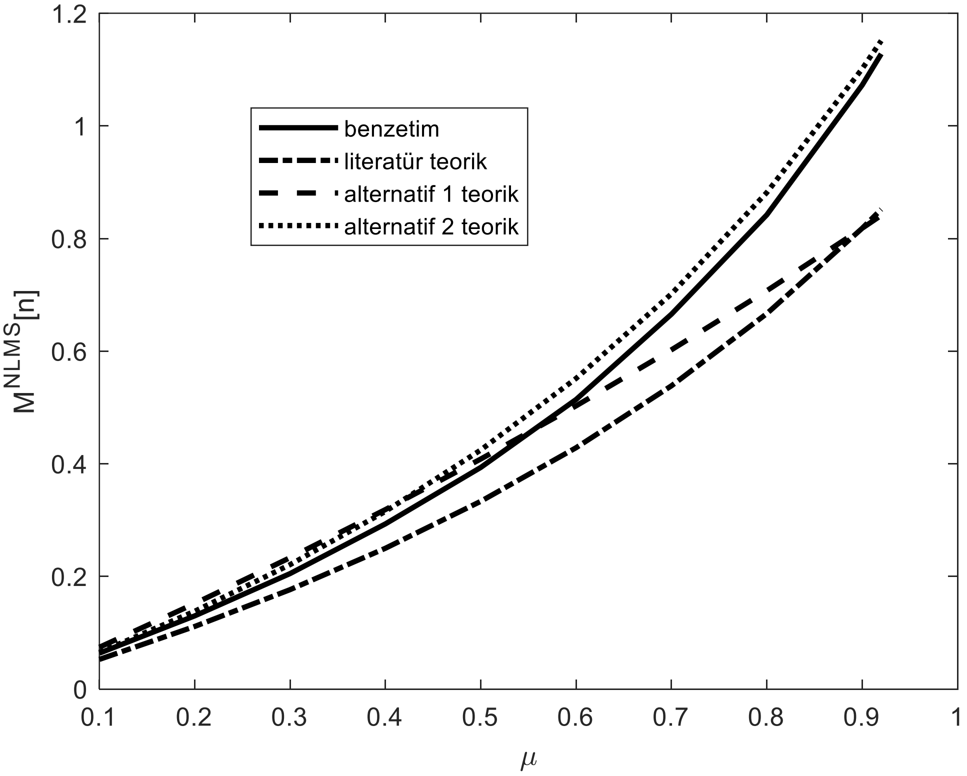


(c)

Şekil 2.5. (devam) FB-NLMS algoritması ayarsızlık değerinin unutma faktörüne göre değişimi (SGO=20dB) (a) $\mu = 0.1$, (b) $\mu = 0.5$, (c) $\mu = 0.9$

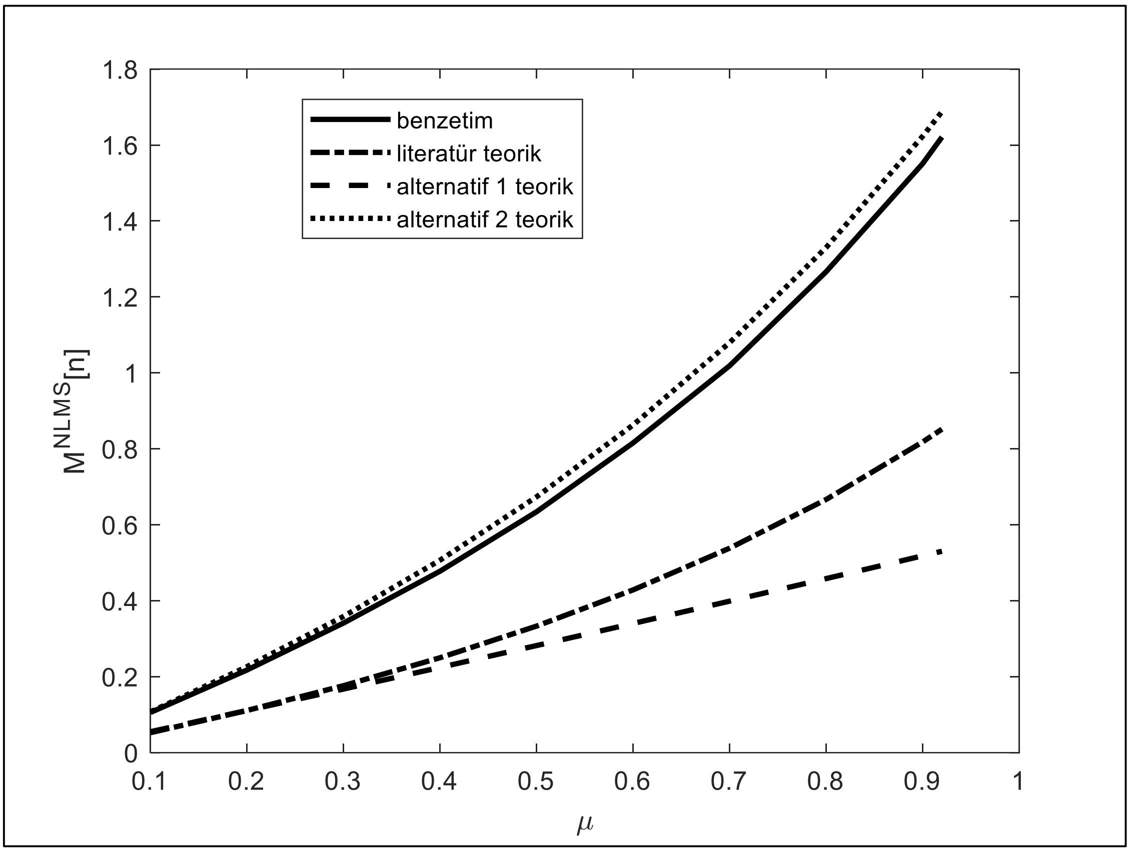


(a)



(b)

Şekil 2.6. FB-NLMS algoritması ayarsızlık değerinin μ’ya göre değişimi (SGO=20dB) (a) γ =0.1, (b) γ =0.45, (c) γ =0.9



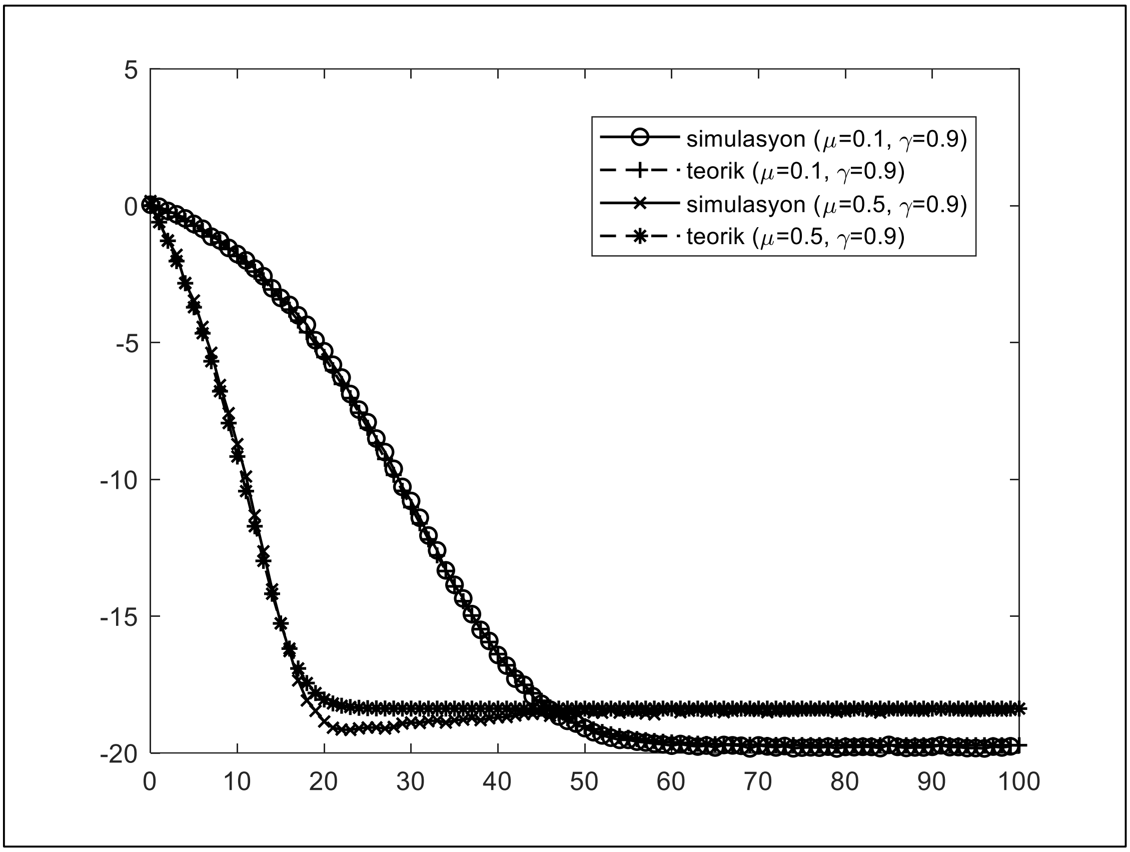
(c)

Şekil 2.6. (devam) FB-NLMS algoritması ayarsızlık değerinin μ'ya göre değişimi (SGO=20dB) (a) γ =0.1, (b) γ =0.45, (c) γ =0.9

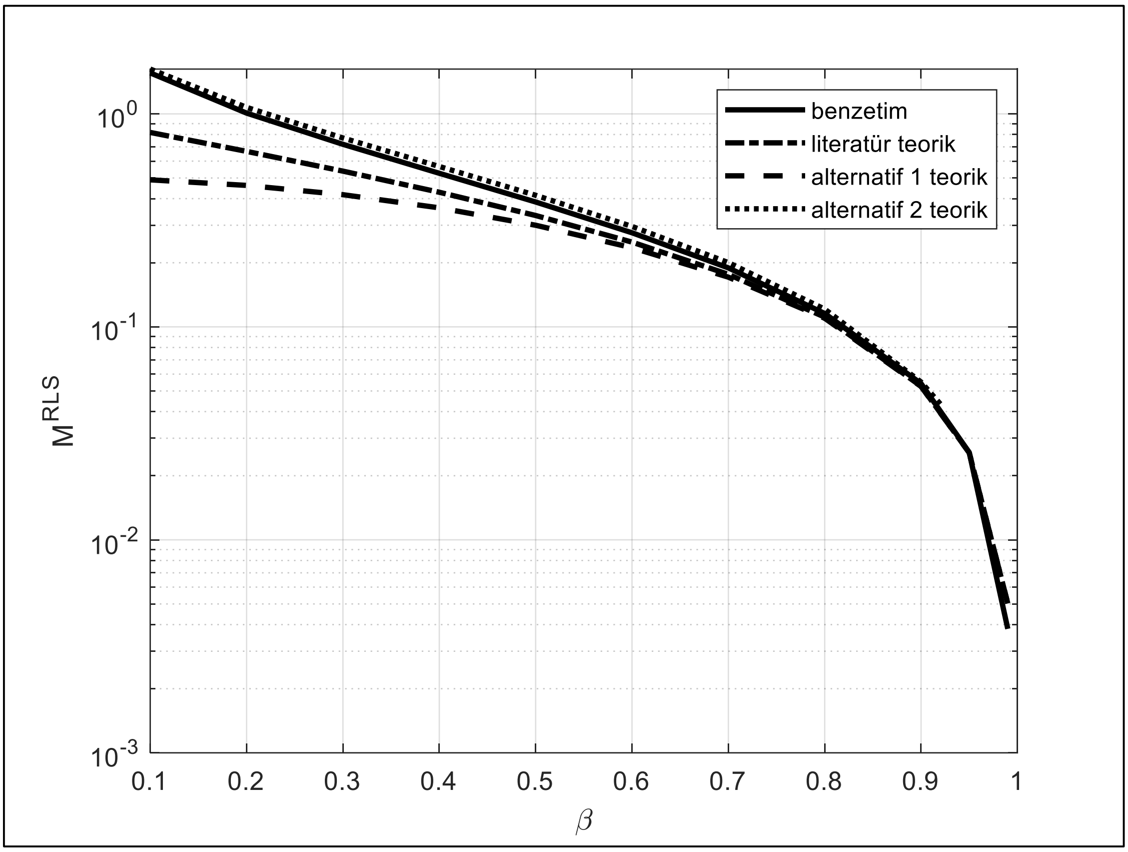
Ayarsızlığın μ'ya göre değişimi için karşılaştırma verileri Şekil 2.6 FB-NLMS algoritması ayarsızlık değerinin μ'ya göre değişimi (SGO=20dB) (a) γ =0.1, (b) γ =0.45, (c) γ =0.9 ile verilmektedir. Beklenildiği gibi, μ değerinin artması ayarsızlığın artmasına neden olmaktadır. İkinci alternatif ile verilen teorik fonksiyonunun benzetim çalışmalarından elde edilen sonuçlar ile en iyi uyumu yakaladığı görülmektedir.

Şekil 2.6 ile FB-NLMS algoritmasının öğrenme eğri performansları sistem tanımlama senaryosu için gösterilmektedir. Görüldüğü üzere teorik olarak bulunan öğrenme eğrisi benzetim çalışmaları ile elde edilen sonuçlar ile uyumlu olmaktadır. Benzetim ve simülasyon sonuçlarından görülebileceği üzere, FB-NLMS algoritmasının yakınsama hızını belirleyen iki farklı faktör bulunmaktadır. Söz konusu faktörler, basamak büyüklüğü ve unuıtma faktörü olmaktadır. Basamak büyüklüğü beklenildiği üzere büyük seçilmesi halinde yakınsama hızını arttırmakta iken, unutma faktörü azaltıldığında daha hızlı yakınsama sağlanabilmektedir. Ancak, ayarsızlık kısmında da gösterildiği üzere, unutma faktörünün azaltılması ayarsızlık değerinin yükselmesine neden olmaktadır. Teorik sonuçlar, düşük basamak büyüklükleri ile yüksek unutma faktörü değerlerinde daha iyi sonuç verdiği anlaşılmaktadır. Bu durumun nedeni teorik analizde yapılan kabullerden dolayı meydana gelmektedir.

Ayarsızlık değerinin β'ya bağlı değişimi Şekil 2.8'de gösterilmektedir. β değerinin 1'e yakısaması ile elde edilen ayarsızlık değerinde dramatik şekilde düştüğü görülmektedir. (2.123) ile verilen teorik olarak bulunan ayarsızlık değeri ile benzetim sonucu elde edilen ayarsızlık değerlerinin, β değerinin 1'e yakın değer almaya başlaması ile benzer değerler aldığı görülmektedir.

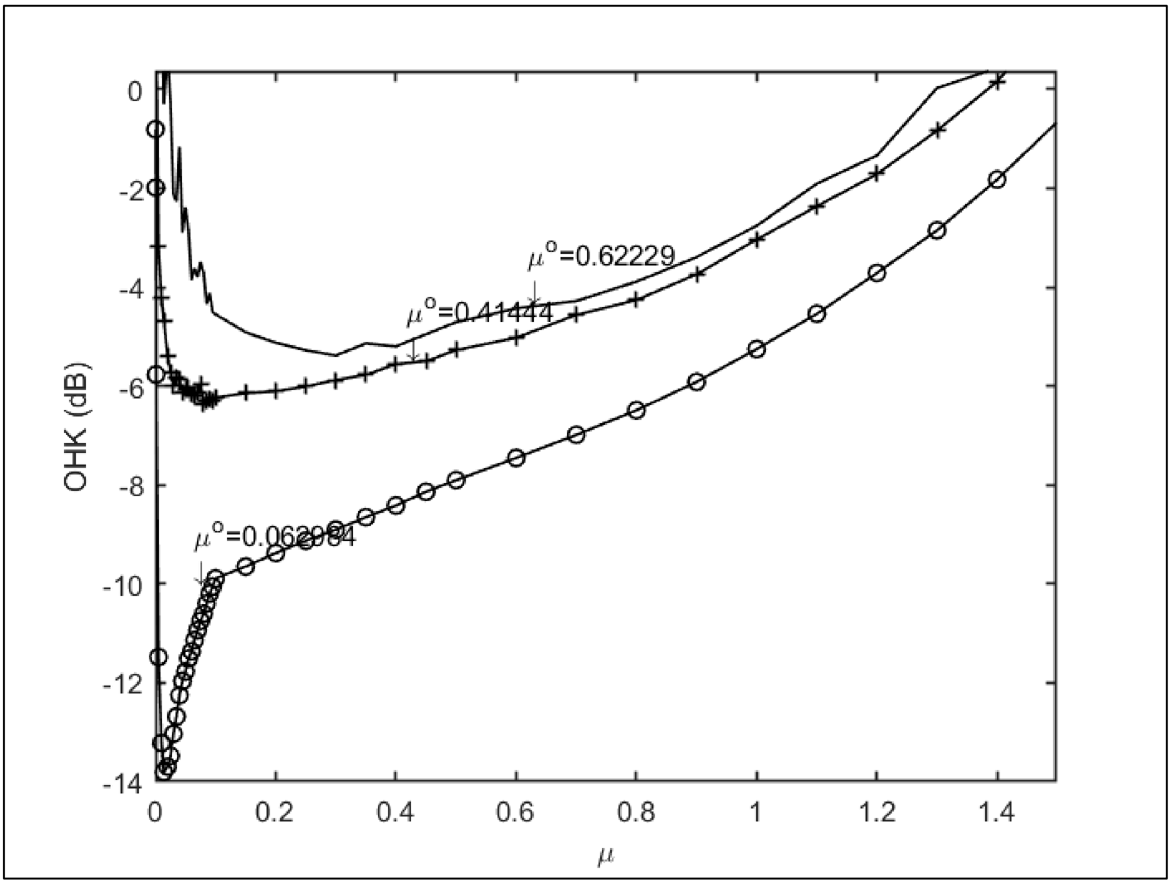


Şekil 2.7. FB-NLMS öğrenme eğrisi



Şekil 2.8. RLS algoritması ayarsızlık değerinin unutma faktörüne göre değişimi

FB-NLMS algoritmasının zaman ile değişen denkleştirici katsayısını takip performansı Şekil 2.9 ile verilmektedir. Görüldüğü üzere hesaplanan optimum katsayı değeri yaklaşık en düşük OHK değeri oluşmasını sağlamaktadır. Ayrıca kanalda zaman ile değişim hızı arttıkça elde edilen kararlı durum OHK değeri daha yüksek seviyelere gelmektedir. Katsayı değerinin optimum seçilmemesi de kararlı durum OHK değerini arttırmaktadır.



Şekil 2.9. FB-NLMS takip performansı

3. TT-FBD İÇİN FREKANS BÖLGESİNDE ÇALIŞAN UYARLANABİLİR DENKLEŞTİRİCİ ALGORİTMALARI

Bir önceki bölümde SAG etkisinin giderilmesi için kullanılan denkleştirme katsayılarının bulunması ile denkleştirme için geleneksel uyarlanabilir algoritmalar açıklanmıştı. 2. bölümde açıklandığı üzere uyarlanabilir sinyal işleminin avantajı denkleştirme yapılabilmesi için kanala ait parametrelerin alınan sinyal üzerinden, düşük karmaşıklık ile kestirim yapılmasını sağlamaktadır. Ayrıca uyarlanabilir sinyal işleme teknikleri kullanımı ile zaman içerisinde meydana gelen değişimleri algılanarak, özellikle mobil haberleşme sistemlerinde kullanıcı hareketliliğinden kaynaklanan değişken en uygun denkleştirici filtre parametrelerinin değişimini sağlamasıdır.

Bu bölümde tez konusu kapsamında geliştirilen TT-FBD (tek taşıyıcılı frekans bölgesi denkleştirici) haberleşme sistemi için doğrusal yapıdaki uyarlanabilir FBD yapıları tanıtılmaktadır. Bir sonraki bölümde FB denkleştirme için kanal kestirim işlemi gösterilmektedir. Bu bölüm kapsamında doğrudan denkleştirme için geliştirilen algoritmalar kanal kestirim durumundaki performansları bir sonraki bölümde gösterileektir.

Geleneksel LMS, NLMS ve RLS algoritmaların, zaman ile değişim gösteren kanallarda belirli bir değişimi algılama kapasitesi olmak ile beraber, bu kabiliyetin sınırlı olduğu yapılan çalışmalarda gösterilmiştir. Bu sebeple, daha iyi kanal takibi yapabilecek ve bu sayede yüksek mobil abone hızlarında SAG etkisine daha iyi giderebilecek yeni uyarlanabilir algoritmaların geliştirilmesi gerekmektedir.

Bir önceki bölümde tanıtılan geleneksel RLS ve LMS tabanlı uyarlanabilir algoritmaların karşılaştığı en önemli sorun sonlu sayıda örnekten gradyan kestirimi yapılması bundan dolayı da algoritma uygulandığında gradyan kestiriminde hatadan kaynaklanan gürültü performansının kısıtlı olmasıdır. Bu sorunu çözmek için geleneksel LMS tabanlı algoritmalarda kullanılan birim basamak büyüklüğünü küçültmek, RLS tabanlı algoritmalarda ise unutma faktörü değerini olabildiğince 1'e yakınlaştırmak gereklidir. Her ne kadar bu durumda durağan ortamlarda kararlı durum için gradyan kestiriminin daha iyi yapılması sağlanmış olsa da, algoritmanın kararlı duruma yakınsama hızı uzamakta ve zamanla değişen kanallardan gelen sinyalin denkleştirildiğinde zamansal değişimin yeterli seviyede takip edilememesi ve performansın olumsuz etkilenmesi sonucunu doğurmaktadır.

Bu nedenle, hem zamansal değişimi iyi derecede takip edebilecek, hem de gradyan kestiriminde karşılaşılan gradyan kestirim gürültü etkisini azaltacak bir yöntemin kullanılması gerekmektedir.

Bu bölümde, yukarıda belirtilen hedefe ulaşmak için yeni geliştirilen algoritmalar, doğrusal GNLMS ve GRLS algoritmaları tanıtılacaktır. Geleneksel LMS ve RLS algoritmalarında, katsayı güncelleme için, her katsayının bağımsız şekilde güncellenmesi esas alınmıştır. Ancak, giriş bölümünde belirtildiği üzere, tutarlı bant genişliği üzerinde, kanal yaklaşık olarak genliği sabit frekans tepkisi vermektedir. Bu nedenle, kanalın tutarlı bant genişliğindeki bu özellikten yararlanmak suretiyle GNLMS ve GRLS adı verilen algoritmalar geliştirilmiştir. Geliştirilen algoritmalarda, HFD ile elde edilen frekans bölgesinde tutarlı bant genişliği içerisinde, alınan sinyalin komşu frekans noktaları arasındaki yüksek ilinti seviyesi göz önüne alınmıştır. Bu ilinti sayesinde, haberleşme kanalında meydana gelen zamansal değişimin daha iyi takip edilmesi ve bu sayede de denkleştirici katsayılarının daha doğru belirlenerek alıcı verici sisteminin daha düşük bit hata oranı (BHO) performansı sergilemesi sağlanmıştır.

Elde edilen algoritmalar ile yapılan teorik performans analizi ve benzetim çalışmaları sonucunda, önerilen algoritma yapılarının geleneksel algoritmalara göre önemli ölçüde performansta iyileşme sağladığı, hızlı değişim gösteren kanallada daha başarılı olduğu görülmüştür. Ayrıca, geleneksel algoritmalarda kullanıcı tarafından belirlenmesi gereken algoritma parametrelerinin (μ, β) seçimi, elde edilen performansı belirleyici faktörü olup, kullanıcının bu değeri özellikle zamanla değişen kanalları da göz önüne alarak belirlemesi gerekmektedir. Bu değerler, durağan kanallarda, en uygun performans elde etmek için LMS ve NLMS algoritmaları için küçük, RLS algoritması için 1'e yakın seçilmesi gerekmektedir. Ancak bu durumda, kullanıcının hareketlenmesi durumunda, kanalda zamansal değişimler meydana gelmektedir. Söz konusu geleneksel algoritmaların zamansal değişimi yeterli seviyede takip edebilmesi için nbu değerlerin manuel olarak bulunarak girilmesi gerekmekte, günümüz haberleşme sistemlerinin hızı göz önüne alındığında bu durumun sağlanması hemen hemen imkânsız hale gelmektedir. Geliştirilen GNLMS algoritmasının geleneksel algoritmalara göre bir diğer avantajı da, kanalı takip etmek için belirlenecek parametre değerlerinin zamansal değişimden nispeten bağımsız olarak belirlenebilmesi ve manuel olarak belirlenme ihtiyacını ortadan kaldırılmasıdır.

Bu bölümde ilk aşamada, göz önüne alınan alıcıda uyarlanabilir frekans bölgesi denkleştirici kullanan alıcı-verici yapısı tanıtılmakta, sonrasında geliştirilen algoritmalar açıklamalı olarak verilmektedir. Önerilen algoritmaların işlemsel karmaşıklığı tartışıldıktan sonra teorik olarak söz konusu algoritmalar ile elde edilen ayarsızlık değerleri verilmektedir. Son olarak ise, geliştirilen algoritmalar kullanılarak yapılan bilgisayar benzetim sonuçları sunularak, geliştirilen algoritmaların faydaları tartışılmaktadır.

3.1. Sistem Modeli

Bu bölümde göz önüne alınan blok tabanlı frekans bölgesi denkleştirme kullanan TT-FBD alıcı-verici sisteminin yapısı Şekil 3.1 ile gösterilmektedir. TT-FBD vericisi ilk olarak, istenilen kiplenme (BPSK, QPSK, QAM vb.) ile elde edilen veri dizisini, $d_k[n]$, N_{sym} sayısında sembol içerecek şekilde bir blok oluşturur, sonrasında ise veri bloğunun sonunda bulunan sembollerin N_{cp} kadarı kopyalayarak bloğun baş kısmına eklenir. Bu sayede gönderilen veri bloğunun kanal ile dönel konvolüsyon yapısına sahip olması sağlanır ve denkleştirici katsayılarının frekans bölgesinde her frekans noktası için çarpım şeklinde yapılması sağlanmış olmaktadır.

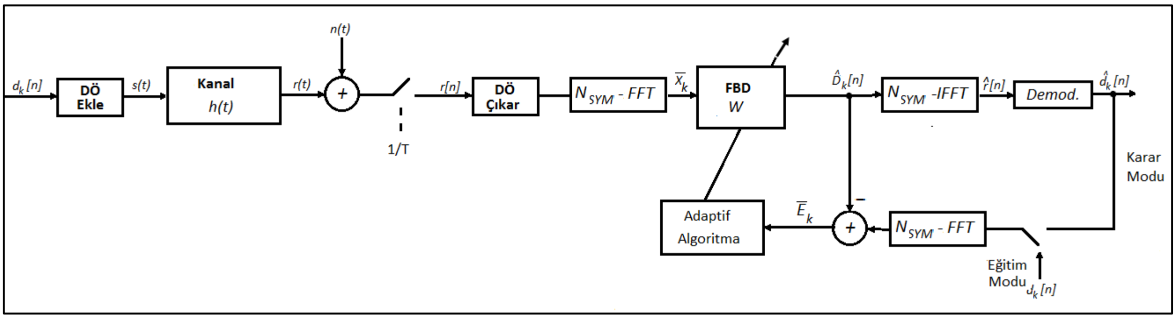
Verici dönel ön ek eklenmiş veri bloklarını bir çerçeve yapısı ile haberleşme kanalı üzerinden alıcıya gönderimini sağlamaktadır. Her çerçevenin N_B sayıda veri bloğundan oluşmakta ve her çerçevenin başında N_t sayıda alıcı ve verici tarafından bilinen eğitim dizi blokları kullanılmaktadır. Eğitim dizileri uyarlanabilir algoritmanın başlangıç aşamasında çözüme yakınsaması sonrasında kendi kendine zamanla değişimi izleyerek katsayıları değişen duruma göre güncellemesi sağlamaktadır.

Gönderilen veri blokları birim dürtü tepkisi h[n] olan kanal üzerinden, varyansı σ_n^2 ortalaması 0 olan termal Gauss gürültüsü, $n_k[n]$ eklenilerek alıcıya ulaşmaktadır. Alıcıda ilk olarak, alınan veriler $N_{sym} + N_{cp}$ uzunluğunda bloklara dönüştürülmektedir. Her blokta N_{cp} uzunluğundaki DÖÇ (dönel ön ek çıkarma) işlemi uygulanmaktadır. Matematiksel olarak alıcıdaki DÖÇ uygulanan, k. blokta alınan sinyalin ifadesi,

$$r_k[n] = d_k[n] \otimes h_k[n] + n_k[n], n = 1,2, \ldots, N_{SYM} \tag{3.1}$$

şeklinde olmaktadır. Burada ⊗ simgesi dairesel konvolüsyonu göstermektedir. Vektörel olarak yukarıda ifade düzenlenecek olur ise,

$$r_k = h_k \otimes d_k + n_k \tag{3.2}$$



Şekil 3.1. Uyarlanabilir FBD kullanan TT-FBD alıcı-verici sistemi

halini alır. Denklemde $r_k = [r_k[0], r_k[1], \ldots, r_k[N_{SYM} - 1]]^T$ zaman bölgesindeki k. blokta alınan sinyal vektörünü, $d_k = [d_k[0], d_k[1], \ldots, d_k[N_{SYM} - 1]]^T$ zaman bölgesindeki k. blokta gönderilen sinyal vektörünü, $n_k = [n_k[0], n_k[1], \ldots, n_k[N_{SYM} - 1]]^T$ zaman bölgesindeki gürültü vektörünü, h_k ise kanalın birim dürtü tepkisinden oluşan $N_{SYM} x N_{SYM}$ boyutundaki kare matrisi göstermektedir. Söz konusu matris,

$$\boldsymbol{h_k} = \begin{bmatrix} h_k[0] & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & h_k[L-1] & \cdots & h_k[3] & h_k[2] & h_k[1] \\ h_k[1] & h_k[0] & 0 & \cdots & 0 & h_k[L-1] & h_k[L-2] & \cdots & h_k[4] & h_k[3] & h_k[2] \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_k[L-1] & h_k[L-2] & h_k[L-3] & \cdots & h_k[1] & h_k[0] & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_k[L-1] & h_k[L-2] & \cdots & h_k[2] & h_k[1] & h_k[0] & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h_k[L-1] & h_k[L-2] & h_k[L-3] & \cdots & h_k[1] & h_k[0] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & h_k[L-1] & h_k[L-2] & \cdots & h_k[2] & h_k[1] & h_k[0] \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

şeklindedir. Durağan veya zamanla değişen ancak bir blok zamanı boyunca sabit kalan kanallar için, matrisin tüm ana ve ana köşegene paralel köşegenlerdeki elemanlar aynı olduğundan bu matris döngüsel (circular) matris yapısında olmaktadır. Bu tez kapsamında elde edilen algoritmalarda kanalın en az bir blok zamanı sabit kaldığı varsayılacaktır.

Sonrasında her blok N_{SYM} noktalı HFD kullanılarak frekans bölgesine dönüştürülmektedir. Frekans bölgesinde elde edilen sinyalin matematiksel ifadesi,

$$X_k = H_k D_k + N_k \tag{3.4}$$

halini almaktadır. Burada $X_k = [X_k[0], X_k[1], \ldots, X_k[N_{SYM} - 1]]^T$ frekans bölgesinde alınan sinyal vektörünü, $D_k = [D_k[0], D_k[1], \ldots, D_k[N_{SYM} - 1]]^T$ gönderilen veri bloğunun frekans bölgesindeki değerlerini, $N_k = [N_k[0], N_k[1], \ldots, N_k[N_{SYM} - 1]]^T$frekans bölgesindeki gürültü vektörünü, $H_k = Fh_kF^H$ kanalın birim frekans tepki değerlerinden oluşan matrisi göstermektedir. Zamanla değişmeyen durağan veya bir blok süresi boyunca değişmeyen kanallar için, döngüsel h_k matrisinin sağdan ve soldan ayrık Fourier dönüşüm matrisi ve ters dönüşüm, F ve F^H matrislerinin çarpımından dolayı, köşegen bir matris halini almakta ve $H_k = diag[H_k[0], H_k[1], \ldots, H_k[N_{SYM} - 1]]$ şeklinde ifade edilebilmektedir. Bu durumda, her frekans noktası için yukarıdaki ifade,

$$X_k[n] = H_k[n]D_k[n] + N_k[n], \quad 0 \leq n \leq N_{sym} - 1 \tag{3.5}$$

olarak, her frekans noktasında skaler çarpım şeklinde olmaktadır. Aksi durumda ise, h_k matrisinin ana ve ana köşegene paralel olan tüm köşegen elemanları birbirinden farklı olacağından, $H_k = Fh_kF^H$ işlemi sonucu elde edilen matris köşegen yapıda olmayacaktır. Yani, kanal, bir blok boyunca sabit kalmayacak ve birim dürtü tepkisi bir blok boyunca önemli derecede değişime uğrayacaktır. Bu durumda da HFD ile frekans bölgesine dönüştürülen sinyal için (3.5) ifadesi geçerli olmayacak, denkleştirme işleminin frekans bölgesinde gerçekleştirilebilmesi için, her frekans noktasında yeterli uzunluğa sahip doğrusal filtre yapısının kullanılması gerekecektir. Bir diğer sorun ise işlemsel karmaşıklık seviyesinin artması ve işlemci gücüne daha fazla ihtiyaç duyulmasıdır.

Durağan veya bir blok zamanı boyunca değişmeyen kanaldan geçen ve HFD ile frekans bölgesine dönüştürülen sinyal, uyarlanabilir denkleştirme algoritması kullanılarak düşük işlemsel karmaşıklıkta denkleştirilebilir. Denkleştirme işleminde her frekans noktası için elde edilen denkleştirici katsayıları, $W_k[n]$, n=0,1, …, N_{SYM} -1 ile çarpılarak, $\widehat{D}_k[n]$ elde edilir. Simgelerde kullanılan alt indis, çerçeve içindeki veri bloğunu göstermektedir. Denkleştirilen sinyal N_{SYM} noktalı HFD ile tekrar zaman bölgesine dönüşüm işlemi yapılarak, kullanılan kipleme metoduna göre gönderilen verilerin kestirimi $\hat{d}_k[n]$ yapılır. Eğer k. blok eğitim dizisi ise, alıcı tarafından bilinen veriler kullanılarak, HFD vasıtası ile hata vektörü elde edilir. Eğer k. blok eğitim dizisi değil ise, kestirim yapılan semboller bu amaçla kullanılmaktadır. Elde edilen kestirim veya bilinen eğitim dizileri kullanılarak denkleştirici katsayıları bir sonraki adımda iyileştirilmesi amacıyla güncellenmesi gerçekleştirilmektedir.

Tez kapsamında geliştirilen algoritmalar gösterilmeden önce, aşağıda sönümlü kanalın sağladığı bazı özellikler gösterilmekte ve kanıtlanmaktadır. Bu özelliklerden yaralanılarak, geleneksel algoritmalara göre daha iyi performans gösterecek yeni yapılar geliştirilmiştir.

3.2. FB En uygun Denkleştirici Katsayılarında İlintisellik

Giriş bölümünde belirtildiği üzere, kanalın tutarlı bant genişliği boyunca, Rayleigh sönümlü kanalın frekans tepkisinin genliği yaklaşık sabit olmakta ve faz farkı doğrusal olarak değişim göstermektedir. Bu durumda, TT-FBD tekniği kullanılarak yapılan haberleşmede, kanal ve EBGG ile bozulmuş alınan sinyal $r[n]$'in frekans bölgesinde tutarlı bant genişliği boyunca genliğinin yaklaşık sabit sönümleme etkisine maruz kalması beklenmektedir. Bu durum göz önüne alınarak aşağıdaki önermeler ortaya çıkmaktadır.

Önerme 1: N_{sym} noktalı HFD ile hesaplanmış, n. frekans noktası için en uygun denkleştirici katsayısı $W^0[n]$, alınan sinyalin frekans bölgesinde farklı frekans noktasına uygulandığında elde edilen hatanın beklenen değeri sıfır ve iki nokta için $W^0[n]$ kullanılarak elde edilen hata değerleri birbirleri ile ilintisiz olmaktadır.

Kanıtlama: $W^0[n]$ katsayısı, $n-i.$ $(i \neq 0)$ frekans noktasına uygulandığında, $\mathcal{E}[\mathrm{n}] = \begin{bmatrix} \mathcal{E}[\mathrm{n}] \\ \mathcal{E}[\mathrm{n}-\mathrm{i}] \end{bmatrix}$ olarak tanımlanan hata vektörü,

$$\mathcal{E}[\mathrm{n}] = \begin{bmatrix} D[n] - \widehat{D}[n] \\ D[n-i] - \widehat{D}[n-i] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D[n] \\ D[n-i] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X[n] \\ X[n-i] \end{bmatrix} W^o[n] = D[n] - X[n]W[n] \tag{3.6}$$

şeklindedir. Burada $D[n] = [D[n] \quad D[n-i]]^T$ ve $X[n] = [X[n] \quad X[n-i]]^T$vektörleri tanımlanmıştır. $D[n], X[n], N[n]$ ve $D[n-i], X[n-i], N[n-i]$ sıfır ortalamalı olduğundan, komşu frekans noktalarına $W^o[n]$ uygulandığında elde edilen hata değerlerinin ortalaması $\mathbb{E}\{\mathcal{E}[\mathrm{n}]\} = 0$ olarak bulunmaktadır.

$\mathcal{E}[\mathrm{n}]$ hata vektörünün öz ilinti matrisi, $\mathbb{E}\{\mathcal{E}[\mathrm{n}](\mathcal{E}[\mathrm{n}])^{\boldsymbol{H}}\}$,

$$\mathbb{E}\{\mathcal{E}[\mathrm{n}]\mathcal{E}^{H}[\mathrm{n}]\} = \mathbb{E}\{(D[n] - X[n]W^{o}[n])(D[n] - X[n]W[n])^{H}\} \tag{3.7}$$

ile hesaplanabilir. $d[m], m = 0, 1, \dots, N_{SYM} - 1$ modüle edilmiş veri dizisinin sıfır ortalamaya sahip ve beyaz ve varyansının $\sigma_d{}^2$ olduğu kabul edildiğinde, frekans bölgesinde $D[n]$ vektörünün özilinti matrisi, $\mathbb{E}\{D[n](D[n])^{H}\} = \mathrm{N_{sym}}\sigma_d{}^2 I$ şeklinde hesaplanır. Bu durumda, $X[n]$ vektörünün özilinti matrisi, $\mathbb{E}\{X[n](X[n])^{H}\} = \mathrm{N_{sym}} diag\{\sigma_d{}^2|H[n]|^2 + \sigma_\eta{}^2, \sigma_d{}^2|H[n-i]|^2 + \sigma_\eta{}^2\}$ olarak bulunmaktadır. Düzenlemeler yapıldığında, $\mathbb{E}\{\mathcal{E}[\mathrm{n}](\mathcal{E}[\mathrm{n}])^{H}\}$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\{\mathcal{E}[\mathrm{n}](\mathcal{E}[\mathrm{n}])^{H}\} = \\
&N_{sym}\begin{bmatrix} \sigma_d{}^2(|H[n]|^2 + 1) + \sigma_\eta{}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_d{}^2(|H[n]|^2 + 1) + \sigma_\eta{}^2 \end{bmatrix} W^{o}[n] - \\
&2N_{sym}\sigma_d{}^2 \begin{bmatrix} Re\{\mathrm{H[n]}W^{o}[n]\} & 0 \\ 0 & Re\{\mathrm{H[n-i]}W^{o}[n]\} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

halini alır. Hatanın öz ilinti matrisi köşegen yapıda olduğu görülmektedir. Bu durumda, $W^{o}[n]$ katsayısı n ve n-i. Frekans noktalarına uygulandığında elde edilen hata bileşenlerinin, birbirine ilintisiz olmaktadır.

Önerme 2: kanalın frekans tepkisi, %90 tutarlı bant genişliği içerisinde, $H[n]$ yaklaşık olarak birbirine yakın genlik değerine sahip olduğundan, en uygun doğrusal frekans bölgesi denkleştirici katsayısı $W^{o}[n]$'in genlik değerlerinin yaklaşık olarak birbirine eşit olması gerekmektedir. Bu durumda TT-FBD sistem FB-DD denkleştirici için $W^{o}[n]$, FB-KGB denkleştirici için $F^{o}[n]$ ve $B^{o}[n]$ tutarlı bant genişliği içinde kalan alt taşıyıcılar için uygulandığında yaklaşık olarak en uygun performansı sağlar.

Kanıtlama: n. frekans noktası için frekans bölgesinde çalışan DD ve KGB en uygun denkleştirici katsayıları, (2.21), (2.23)-(2.25) ifadeleri ile kanalın frekans tepkisinden hesaplanabilmektedir.

Eğer seçilen iki frekans noktası n ve n-i arasında kalan frekans bandı, %90 tutarlı bant genişliği içerisinde kalıyor ise, kanal tutarlı bant genişliği boyunca sabit olacağından, $|H[n]|^2 \approx (\rho^h)^2|H[n-i]|^2$ ve $|H[n]| \approx \rho^h|H[n-i]|$olacaktır. Bu durumda en uygun denkleştirici katsayıları genlik değerleri doğrusal denkleştirici için $|W^o[n]| \approx |W^o[n-i]|$, KGB denkleştirici için $|F^o[n]| \approx |F^o[n-i]|, |B^o[n]| \approx |B^o[n-i]|$ olmakta, katsayıların aralarında ise doğrusal faz farkı olacaktır.

Alınan sinyalin frekans bölgesindeki değerlerine, n. frekans noktası için en uygun doğrusal denkleştirici katsayısı $W^o[n]$ n. ve n-i. frekans noktalarına uygulandığında elde edilen hata karesi değeri önerme 1 ile elde edilen sonuç kullanıldığında,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{|\mathcal{E}[\mathrm{n}-\mathrm{i}]|^2\} &\approx \mathbb{E}\{|\mathcal{E}[\mathrm{n}]|^2\} \\ &= \mathrm{N_{sym}}\sigma_d{}^2 + \left(\mathrm{N_{sym}}\sigma_d{}^2|H[n]|^2 + \mathrm{N_{sym}}\sigma_\eta{}^2\right)|\mathrm{W}^o[\mathrm{n}]|^2 \\ &- 2\mathrm{N_{sym}}\sigma_d{}^2 Re\{\mathrm{H}[\mathrm{n}]\mathrm{W}^o[\mathrm{n}]\} \end{aligned} \tag{3.9}$$

olmaktadır. Böylece, tutarlı bant genişliği içerisinde, n. frekans noktası için en uygun denkleştirici katsayıların kullanılması halinde yaklaşık olarak en uygun hatayı sağladığı kanıtlanmaktadır. Ayrıca, bu şekilde elde edilen hata değerleri, birinci önermede belirlenen ilinti matrisinden görüldüğü üzere, $\mathbb{E}\{\mathcal{E}[\mathrm{n}](\mathcal{E}[\mathrm{n}-\mathrm{i}])^*\} = 0$ olduğundan, $\mathcal{E}[\mathrm{n}]$ ve $\mathcal{E}[\mathrm{n}-\mathrm{i}]$ birbirinden ilintisiz olmaktadır.

Yukarıdaki her iki önermenin sonuçları birlikte değerlendirildiğinde, aşağıdaki tamamlayıcı sonuç elde edilmektedir.

Sonuç: haberleşme kanalının frekans tepkisi, tutarlı bant genişliği içerisinde, H[n] yaklaşık olarak birbirine yakın genlik ve faz değerine sahip olduğundan, en uygun doğrusal ve KGB frekans bölgesi denkleştirici katsayılarının genlik değerlerinin yaklaşık olarak birbirine eşit olması gerekmektedir. Bu durumda TT-FBD sistemi için en uygun denkleştirici katsayıları tutarlı bant genişliği içinde kalan alt taşıyıcılar için uygulandığında yaklaşık olarak en uygun performansı sağlaması gerekmektedir.

Sonraki alt bölümde, yukarıda bahsedilen sonuç kullanılarak elde edilen yeni uyarlanabilir frekans bölgesi denkleştirici yapıları anlatılmaktadır.

3.3. Önerilen Uyarlanabilir Algoritmalar

Haberleşme kanalının tutarlı bant genişiliği içerisinde kalan frekans noktaları arasındaki yüksek ilinti seviyesinden dolayı, frekans bölgesinde tutarlı bant genişliği içerisinde kalan en uygun denkleştirici katsayıları ile alınan sinyalde yüksek seviyede ilintisellik bulunacaktır. Söz konusu sinyallerde, denkleştirici katsayılarında ve haberleşme kanalındaki ilintisellik kullanılarak, uyarlanabilir algoritmaların yakınsama hızı ile zamanla değişen kanallarda kanal takibini iyileştirmek üzere yeni algoritmalar geliştirilmektedir. Bu alt bölümde, geleneksel frekans bölgesi NLMS ve RLS algoritmalarınde frekans bölgesinde belirtilen ilintiselliği göz önüne alan algoritmalar tanıtılmaktadır.

Geliştirilen algoritmalar, zaman bölgesinde çalışan ilgin izdüşüm (Ozeki, ve Umeda, 1984) tekniği ile benzerlik göstermektedir. Zaman bölgesi ilgin izdüşüm tekniğinde, her adımda elde edilen filtre katsayıları, belirlenen izdüşüm seviyesine göre kendinden önceki sembollere de uygulanmaktadır. Bu sayede ilgin izdüşüm tekniğinde LMS ve NLMS algoritmalarına göre daha iyi yakınsama sağlanırken, işlemsel karmaşıklık seviyesi daha yüksek seviyeye çıkmakta, kararlı durumda elde edilen ayarsızlık değeri izdüşüm seviyesinin artması ile daha yüksek seviyelere çıkmaktadır (Ekmekci, 2018).

3.3.1. GNLMS algoritması

Komşu frekans noktalarını da göz önüne alacak şekilde aşağıda verilen maliyet fonksiyonu FB-NLMS algoritması için aşağıdaki şekilde tanımlanabilir,

$$
\begin{aligned}
&minimum|W_{k+1}[n] - W_k[n]|^2 \\
&\qquad\qquad D_k[n-m] = X_k[n-m]W_{k+1}[n] \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&kısıtlama: \qquad D_k[n] = X_k[n]W_{k+1}[n] \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&\qquad\qquad D_k[n+m] = X_k[n+m]W_{k+1}[n]
\end{aligned}
$$

Maliyet fonksiyonu tanımından görülebileceği üzere, n. frekans noktasındaki denkleştirici katsayısı $W_{k+1}[n]$, kendisine en yakın her iki yöndeki komşu frekans noktalarına da aynı denkleştirici katsayısı kullanılmasını sağlamaktadır. Komşu frekans noktaları ile n. frekans noktası arasındaki yüksek seviyedeki ilintisellikten dolayı, denkleştiricinin değerinin birbirine yakın olması, böylece komşu frekans noktalarına da aynı denkleştirici katsayısının uygulanması halinde hatayı minimize etmesi beklenmektedir. Bu şekilde maliyet fonksiyonu kullanıldığında, uyarlanabilir algoritmanın katsayı güncellemesi için gradyan gürültüsünün etkisinin azaltılması beklenmektedir. Keza, bir önceki bölümde anlatılan geleneksel LMS, NLMS ve RLS tabanlı frekans bölgesi uyarlanabilir denkleştiricilerde katsayı güncellemesi için maliyet fonksiyonunun gradyantı tek frekans noktası ile hesaplanmaya çalışılmakta, bu durumda gradyan gürültüsü şiddeti daha fazla olmaktadır. Bu durumda da güncellenen katsayılar en uygun çözüm etrafında daha çok dalgalanmaya başlamaktadır. Meydana gelen dalgalanmadaki artış, elde edilen kararlı durum OHK performansını olumsuz etkilemektedir.

Sonuçta, tanımlanan maliyet fonksiyonu ile kestirim yapılacak herbir frekans noktasındaki skaler en uygun katsayı değeri için birden fazla denklemi aynı anda sağlaması gerekmekte, yani çözüm için aşırı belirlenmiş denklem (overdetermined) takımı göz önüne alınmaktadır. Gürültülü ortamlarda gerekenden fazla doğrusal denklem takımı kullanıldığında, bilinmeyen değer tüm denklem takımını sağlaması gerekmekte, bu sayede ölçüm değerlerinde bulunan gürültünün ortalamasının alınmaktadır. Böylece ölçüm değerlerinde bulunan gürültünün kestrim yapılan değer üzerindeki olumsuz etkisi sınırlandırılarak azaltılması sağlanmaktadır.

GNLMS algoritmasının maliyet fonksiyonu matematiksel olarak,

$$J_k^{GNLMS}[n] = |W_{k+1}[n] - W_k[n]|^2 + 2Re\{\lambda^H(D_k[n] - X_k[n]W_{k+1}[n])\} \tag{3.10}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada, $Re\{\ \}$ gerçek değer alma işlevini, $D_k[n] = [D_k[n-m], D_k[n-m], \cdots, D_k[n], \cdots, D_k[n+m]\ \ ]^T$ ve $X_k[n] = [X_k[n-m], X_k[n-m], \cdots, X_k[n], \cdots, X_k[n+m]\ \ ]^T$merkezi n. frekans noktası olan 2m+1 uzunluğunda, sırasıyla gönderilen ve alınan veri bloğunun frekans bölgesi değerlerinden oluşan kolon vektörünü, λ uzunluğu 2m+1 olan Lagrange vektörünü göstermektedir. İlgin izdüşüm algoritmasındaki projeksiyon seviyesi ile frekans bölgesindeki verilerin yeniden kullanım sayısı benzer olmaktadır.

En uygun denkleştirici katsayısını bulmak üzere, maliyet fonksiyonunun gradyantını hesaplayıp sıfıra eşitlenmesi gereklidir. Bu işlem yapılacak olur ise,

$$\frac{\partial J_k[n]}{\partial W_{k+1}[n]} = W_{k+1}[n] - W_k[n] + (X_k[n])^H \lambda = 0 \tag{3.11}$$

Çözülmesi gerekmektedir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$W_{k+1}[n] = W_k[n] + {X_k}^H[n]\lambda \tag{3.12}$$

elde edilir. Ayrıca, Lagrange çarpım vektörü için,

$$\frac{\partial J_k[n]}{\partial \lambda} = D_k[n] - X_k[n]W_{k+1}[n] = 0 \tag{3.13}$$

ifadesi elde edilebilir. Yukarıdaki ifade kullanıldığı durumda, λ vektörü

$$E_k[n] = D_k[n] - X_k[n]W_k[n] = X_k[n]{X_k}^H[n]\lambda \tag{3.14}$$

eşitliğini sağlaması gerekli olduğu görülmektedir. Buradan Lagrange çarpım vektörü,

$$\lambda = \left(X_k[n]{X_k}^H[n]\right)^{-1} E_k[n] \tag{3.15}$$

ifadesi ile hesaplanmaktadır Eşitlikten görüldüğü üzere, Lagrange çarpım vektörünün hesaplanması için $X_k[n]{X_k}^H[n]$ matris tersinin hesaplanması gerekmektedir. Ancak, söz konusu matris rankı 1 e eşit olmakta, yani bu matrisin tersi bulunmamakta ve sonsuz çözüm kümesine sahip olmaktadır. Bu yüzden, matrisin doğrudan tersinin kullanılması yerine, sanal tersinin (pseudo inverse) kullanılması sağlanabilir. Böylece, bulunan çözümün minimum norma sahip olması sağlanır. Tekil değer bozunması (singular value decomposition) kullanılarak sanal ters aşağıdaki şekilde bulunabilir. İlk olarak sanal tersi alınacak matris ile matrisin hermitianının çarpımının öz değerleri (eigenvalues) ve öz değer vektörleri (eigenvectors) bulunmalıdır. Bu değerler,

$$A = X_k[n]{X_k}^H[n] \Rightarrow AA^H = \|X_k[n]\|^2 X_k[n]{X_k}^H[n] \tag{3.16}$$

şeklindedir. Bu matrisin sadece bir adet sıfırdan farklı öz değeri bulunmakta ve sıfırdan farklı olan özdeğere ait özdeğer vektörü $X_k[n]$. Sıfırdan farklı özdeğer, $\|X_k[n]\|^4$ olarak bulunmaktadır. Sonuç olarak, $A = X_k[n]{X_k}^H[n]$ matrisinin sanal tersi

$$A^+ = \frac{1}{\|X_k[n]\|^4} X_k[n]{X_k}^H[n] \tag{3.17}$$

olarak bulunmaktadır. Bulunan değer, λ vektörünü bulmak üzere (3.14) eşitliğinde kullanıldığında,

$$\lambda = \frac{1}{\|X_k[n]\|^4} X_k[n]{X_k}^H[n]E_k[n] \tag{3.18}$$

elde edilir. Bu değer (3.11) bağıntısında yerine konuldığunda, ve güncellenen katsayının yakınsama hızını kontrol etmek için skaler μ katsayısı eklenildiğinde

$$W_{k+1}[n] = W_k[n] + \frac{\mu}{\|X_k[n]\|^2} {X_k}^H[n]E_k[n] \tag{3.19}$$

elde edilir. (3.19) eşitliğindeki $\|X_k[n]\|^2$ ifadesi GNLMS uyarlamalı algoritmasında göz önüne alınan frekans noktalarının tümünün güçlerinin toplamına eşittir. Uyarlanabilir algoritmanın çalışma ortamı durağan olmayan bir ortam olması halinde veya her frekans noktasındaki güç değerlerinin her blokta anlık değişiminin değişiminin ani ve yüksek olmasından dolayı, FB-NLMS algortimasında olduğu gibi geçmiş değerler göz önüne alınarak kestirim yapılması gerekmektedir. GNLMS için güç kestirim değeri, FB-NLMS algoritmasına benzer şekilde (Haykin, 2010:367, Shynk, 1992)

$$P_k[n] = \gamma P_{k-1}[n] + (1-\gamma)\|X_k[n]\|^2 \tag{3.20}$$

bağıntısı ile yapılabilmektedir. Sonuç olarak GNLMS algoritması için katsayı güncelleme formülü,

$$W_{k+1}[n] = W_k[n] + \frac{\mu}{P_k[n]} {X_k}^H[n]E_k[n] \tag{3.21}$$

halini almaktadır. (3.21) eşitliğinden görüleceği üzere, projeksiyon seviyesi bir olarak seçildiğinde, GNLMS algoritması NLMS algoritmasına dönüşmektedir. Bu yüzden, geliştirilen algoritmaya Genelleştirilmiş NLMS algoritması adı verilmiştir.

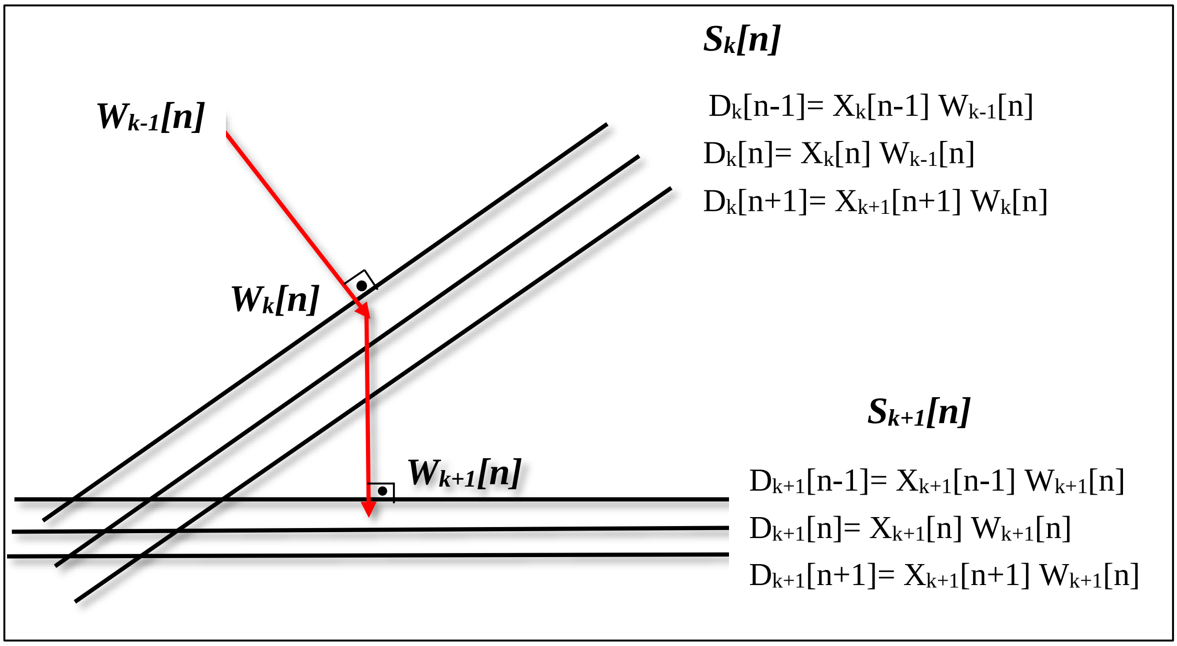
Önerilen GNLMS algoritmasının geometrik olarak yorumlanması amacıyla, herhangi bir frekans noktası için, $\mathbb{C}^{(\boldsymbol{2m+1})\boldsymbol{x1}}$ boyutlu karmaşık sayı uzayında, en uygun katsayıların komşu frekans noktalına uygulanması ile elde edilen doğru ailesi, $S_k[n]$ aşağıdaki gibi tanımlanır ise,

$$S_k[n] = \{D_k[n], X_k[n] \in \mathbb{C}^{(2m+1)x1}, W_k[n] \in \mathbb{C}^{1x1}\,; D_k[n] - X_k[n]W_k[n] = 0\} \tag{3.22}$$

elde edilir. Görüldüğü üzere, n. frekans noktası için kullanılan denkleştiricinin, göz önüne alınan en uygun denkleştirici katsayılarının uygulandığı 2m+1 uzunluğundaki pencere uzunluğu kanalın tutarlı bant genişliği, B_c içerisinde kalıyor ise, komşu frekans noktalarına kullanılması halinde de kestirim hatasının sıfıra yakınsamasını sağlamakta, elde edilen doğru ailesi birbirine yaklaşık olarak paralel olmaktadır.

Aksi takdirde, göz önüne alınan frekans noktaları arasında düşük ilintisellik olacağından, elde edilen doğru ailesinin paralelliği ortadan kalkacak ve birbirlerini keseceklerdir. Söz konusu kesişim noktası, n. frekans noktası için en uygun filtre noktasından farklı olacağından, denkleştirici katsayısının bir sonraki güncelleme adımı kesişim bölgesine doğru olacak, sonuçta algoritma yanlış denkleştirici katsayına yakınsama sağlaycaktır. Bu sebeple, GNLMS algoritmasında daha iyi performans elde edilebilmesini sağlamak için kullanılan pencerenin, tutarlı bant genişliği $B_{c,\%90}$ içerisinde kalması sağlanmalıdır. Aksi takdirde, performans iyileşme yerine kötüşleşme gösterecektir.

GNLMS algoritmasında gerekenden fazla sayıda denklem kullanıldığından, sonsuz sayıda çözüm olmasına karşın, bu çözümler içerisinden minimumun norma sahip çözümün bulunması sağlanmaktadır. Şekil 3.2’de GNLMS algoritmasında herhangi bir frekans noktası için katsayı güncelleme durumu gösterilmektedir. Gösterim için birim basamak boyutu bir olarak alınmış ve Gauss gürültüsünün var olmadığı kabul edilmiştir. Ayrıca, kanaldaki ilinti seviyesinin yeterince yüksek olduğu varsayılmıştır.



Şekil 3.2. GNLMS algoritmasında katsayı güncellemesi, GNLMS algoritması po=3

Burada yüksek ilintisellik seviyesi kabulünden dolayı, kısıtlama için kullanılan tüm doğrular birbirine paralel olmaktadır. k-1. bloktan, k. bloğa geçiş esnasında, denkleştirici katsayının, $W_k[n]$ güncelleme doğrultusu, $S_k[n]$ doğru ailesine dik olacak şekilde yapılmaktadır. GNLMS algoritması bir sonraki katsayıyı güncelleyerek hesaplandığında, tüm doğrular göz önüne alınarak, tüm doğrularda elde edilecek toplam hatayı minimum seviyeye getirecek şekilde yeni katsayı noktasını hesaplar. Sistemde gürültü bulunması halinde, minimum norm hesaplamadan dolayı, GNLMS algoritması daha düşük hataya sahip olacak şekilde katsayıların güncellemesini sağlamaktadır.

3.3.2. GRLS algoritması

Bir önceki alt bölümde, FB-NLMS tekniğinin genelleştirilmesi ile oluşturulan GNLMS yöntemi geliştirilmişti. Bu alt bölümde ise, uyarlamalı yöntem olarak, NLMS yöntemini kullanmak yerine, yinelemeli RLS tabanlı algoritmanın, GNLMS algoritmasına benzer şekilde genelleştirilmesi ve yeni bir yöntem geliştirilmesi amaçlanmaktadır. Yeni bulunan söz konusu algoritmaya GRLS (genelleştirilmiş RLS) adı verilmiştir (Ekmekci, 2018).

GNLMS algoritması geliştirildiğinde kullanılan argümanlarda yola çıkarak, GRLS algoritması için kullanılacak maliyet fonksiyonu aşağıdaki biçimde ifade edilebilir.

$$J_k^{GRLS}[n] = \sum_{i=0}^{k} \beta^{k-i} \left\| E_{k,i}[n] \right\|^2 \tag{3.23}$$

Burada, $E_{k,i}[n]$ n. frekans noktası için soncul hata değeri olup,

$$E_{k,i}[n] = D_i[n] - X_i[n] W_k[n] \tag{3.24}$$

olarak tanımlanmıştır. Maliyet fonksiyonunun minimum değerini sağlayan denkleştirici katsayısı, maliyet fonksiyonunun türevinin sıfıra eşitlenmesi ile

$$\frac{\partial J_{k,GRLS}[n]}{\partial W_{k+1}[n]} = \sum_{i=0}^{k} \beta^{k-i} (X_k[n])^H E_{k,i}[n] = 0 \tag{3.25}$$

şeklinde bulunur. Bu durumda, (3.25), (3.24) kullanılarak düzenlendiğinde,

$$\left(\sum_{i=0}^{k} \beta^{k-i} (X_k[n])^H X_k[n] \right) W_k[n] = \left(\sum_{i=0}^{k} \beta^{k-i} (X_k[n])^H D_k[n] \right) \tag{3.26}$$

elde edilir. Burada, GRLS algoritması için giriş sinyali özilinti, $R_{k,x}[n]$ ve giriş ile gönderilen sinyal arasındaki çapraz ilinti, $p_{k,(D,X)}[n]$,

$$R_{k,x}[n] = \sum_{i=0}^{k} \beta^{k-i} (X_k[n])^H X_k[n] = \sum_{i=0}^{k} \beta^{k-i} \|X_k[n]\|^2 \tag{3.27}$$

$$p_{k,(D,X)}[n] = \sum_{i=0}^{k} \beta^{k-i} (X_k[n])^H D_k[n] \tag{3.28}$$

şeklinde tanımlanarak, .GRLS algoritmasının ulaşmaya çalıştığı katsayı değeri,

$$W_k[n] = \left(R_{k,x}[n] \right)^{-1} p_{k,(D,X)}[n] \tag{3.29}$$

halini almaktadır. $R_{k,x}[n]$ ve $p_{k,(D,X)}[n]$ değerleri yinelemeli olarak,

$$R_{k,x}[n] = \beta R_{k-1,x}[n] + \|X_k[n]\|^2 \tag{3.30}$$

$$p_{k,(D,X)}[n] = \beta p_{k-1,(D,X)}[n] + (X_k[n])^H D_k[n] \tag{3.31}$$

ifadeleri ile bulunabilir. Geleneksel RLS algoritmasında olduğu gibi, matris tersleme önsavı kullanılarak, $Z_{k,x}[n] = \left(R_{k,x}[n]\right)^{-1}$ değeri,

$$Z_{k,x}[n] = \beta^{-1} Z_{k-1,x}[n] - \beta^{-1} Z_{k-1,x}[n](X_k[n])^H \big(I + X_k[n]\beta^{-1} Z_{k-1,x}[n](X_k[n])^H\big)^{-1} X_k[n]\beta^{-1} Z_{k-1,x}[n] \tag{3.32}$$

şeklinde yinelemeli olarak bulunması mümkündür. Ancak, ifadeye bakıldığında, hesaplamanın yapılabilmesi için $\left(I + X_k[n]\beta^{-1} Z_{k-1,x}[n](X_k[n])^H\right)^{-1}$ matrisi ile $X_k[n]$ vektörünün çarpılması gerekmekte, bu da işlemsel karmaşıklığı arttırmaktadır. İşlemsel karmaşıklığın azaltılması için $\left(I + X_k[n]\beta^{-1} Z_{k-1,x}[n](X_k[n])^H\right)^{-1}$ matrisine ters alma önsavı kullanılacak olur ise,

$$\left(I + X_k[n]\beta^{-1} Z_{k-1,x}[n](X_k[n])^H\right)^{-1} = I - X_k[n]\left(\beta\left(Z_{k-1,x}[n]\right)^{-1} + \|X_k[n]\|^2\right)^{-1} (X_k[n])^H \tag{3.33}$$

haline gelir. (3.33) ters ifadesi (3.32)'de yerine konulduğunda,

$$Z_{k,x}[n] = \left(1 - \frac{Z_{k-1,x}[n](X_k[n])^H}{\beta + Z_{k-1,x}[n]\|X_k[n]\|^2} X_k[n]\right) \frac{Z_{k-1,x}[n]}{\beta} \tag{3.34}$$

halini alır. GRLS faktörü için kalman kazanç faktörü, $K_k[n]$,

$$K_k[n] = \frac{Z_{k-1,x}[n](X_k[n])^H}{\beta + Z_{k-1,x}[n]\|X_k[n]\|^2} \tag{3.35}$$

şeklinde tanımlandığında $Z_{k,x}[n]$ ifadesi

$$Z_{k,x}[n] = (1 - K_k[n]X_k[n])\frac{Z_{k-1,x}[n]}{\beta} = \frac{Z_{k-1,x}[n]}{\beta + Z_{k-1,x}[n]\|X_k[n]\|^2} \tag{3.36}$$

olarak bulunur. Ayrıca, $Z_{k,x}[n]$ ve $K_k[n]$ vektörü arasında

$$Z_{k,x}[n](X_k[n])^H = \frac{Z_{k-1,x}[n](X_k[n])^H}{\beta + Z_{k-1,x}[n]\|X_k[n]\|^2} = K_k[n] \tag{3.37}$$

şeklinde ilişki mevcuttur. (3.29) katsayı günelleme ifadesine, (3.36) ve (3.31) ifadeleri yerine konulduğunda, GRLS algoritmasının katsayısı güncelleme eşitliği,

$$W_k[n] = (1 - K_k[n]X_k[n])\frac{Z_{k-1,x}[n]}{\beta}\left(\beta p_{k-1,(D,X)}[n] + (X_k[n])^H D_k[n]\right) \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned} W_k[n] &= Z_{k-1,x}[n]p_{k-1,(D,X)}[n] - K_k[n]X_k[n]Z_{k-1,x}[n]p_{k-1,(D,X)}[n] + \\ &Z_{k,x}[n](X_k[n])^H D_k[n] \end{aligned} \tag{3.39}$$

halini alır. (3.37) ile verilen ilişki kullanıldığında, ve $W_{k-1}[n] = Z_{k-1,x}[n]p_{k-1,(D,X)}[n]$ olduğundan, (3.39) eşitliği düzenlenir ise,

$$W_k[n] = W_{k-1}[n] + K_k[n]\Sigma_k[n] \tag{3.40}$$

olarak bulunmaktadır. Burada $\Sigma_k[n] = D_k[n] - X_k[n]W_k[n]$ öncül hata değeridir. $K_k[n]$ ifadesinin (3.35) ile verilen eşdeğeri (3.40)'da yerine konulduğunda, katsayı güncelleme eşitliği,

$$W_k[n] = W_{k-1}[n] + \frac{Z_{k-1,x}[n]}{\beta + Z_{k-1,x}[n]\|X_k[n]\|^2}(X_k[n])^H E_k[n] \tag{3.41}$$

halini alır.

3.4. İşlemsel Karmaşıklık

Bu alt bölümde, geliştirilen algoritmaların işlemsel karmaşıklığı, geleneksel LMS, RLS ve NLMS yöntemleri ile karşılaştırılarak incelenmektedir. Yapılan karşılaştırmada, HFD ve THFD işlemlerinin her birinin $N_{SYM}/2\log_2(N_{SYM})$ karmaşık sayı çarpımı ve $N_{SYM}\log_2(N_{SYM})$ sayıda karmaşık sayı toplamı gerektirdiği varsayılmıştır. Her algoritmanın gerçekleştirilmesi için 3 adet HFD/THFD işlemine gereksinim duyulmaktadır. Denkleştirme işleminin frekans bölgesinde gerçekleştirilmesi için her blokta N_{SYM} sayıda karmaşık sayı çarpımı, N_{SYM} -1 adet karmaşık sayı toplamı gerekmektedir. NLMS, GNLMS ve GRLS algoritmalarında her frekans noktasında hesaplanan vektör normları (güç değerleri $P_k[n]$) için iki adet gerçel çarpım işlemine gerek olduğu kabul edilmiştir. Ayrıca her karmaşık sayı çarpımı gerçel olarak dört adet çarpıma, karmaşık sayı toplama işleminin ise iki adet gerçel sayı toplamına karşılık geldiği varsayılmıştır. Bu durumda, yukarıdaki açıklamalara göre, tüm algoritmalara ait hesaplanan karmaşıklık seviyeleri Çizelge 3.1'de verilmektedir. Elde edilen işlemsel karmaşıklık seviyelerine bakıldığında, LMS algoritmasının en düşük karmaşıklık seviyesine sahip olduğu görülmektedir. Yeni önerilen GNLMS ve GRLS algoritmalarının karmaşıklık seviyesinin ise, diğer algoritmalardan daha yüksek olduğu ve karmaşıklık seviyesinin her iki algoritmada kullanılan projeksiyon seviyesinin artması ile arttığı anlaşılmaktadır. Örneğin N_{SYM}=256 olarak seçildiğinde, geleneksel algoritmalar olan LMS, NLMS ve RLS algoritmaları, sırası ile sembol başına 58, 62, ve 61 gerçel çarpım işlemine gereksinim duymaktadır. Görüldüğü üzere bu değerler birbirine oldukça yakın olmaktadır. GNLMS ve GRLS algoritmaları için projeksiyon seviyesi 3, yani m=1 olarak seçildiğinde gereksinim duyulan gerçel çarpım miktarları sırası ile, 78 ve 77 olmaktadır. Sonuç olarak geleneksel LMS algoritmasına göre, GNLMS ve GRLS algoritmaları %34 daha fazla çarpım işlemi yapılması gereksinim duymaktadır. Sonraki bölümlerde verilecek olan bilgisayar benzetim çalışmaları sonucunda elde edilen performans sonuçları, GNLMS ve GRLS algoritmalarının geleneksel algoritmalara göre oldukça yüksek seviyede performans artışı sağladığını göstermekte ve günümüzde işlemci kapasitesinde meydana gelen artıştan dolayı, söz konusu işlemsel karmaşıklık seviyesindeki artışın makul karşılanabileceği değerlendirilmektedir.

Çizelge 3.1. Sembol başına FB uyarlanabilir algoritmaların işlemsel karmaşıklığı

Algoritma	Çarpım (Gerçel)	Bölme	Toplama
HFD/THFD	$6log_2N_{sym}$	-	$6log_2N_{sym}$
FB-LMS	10	-	8
FB-NLMS	14	1	9
FB-RLS	13	1	10
FB-GNLMS	$16m+14$	1	$14m+9$
FB-GRLS	$16m+13$	1	$14m+10$

3.5. GNLMS ve GRLS Algoritmalarının Ayarsızlık, Yakınsama ve İzleme Performanslarının Teorik Analizi

Bu alt bölümde, 2. Bölümde geleneksel LMS, NLMS ve RLS algoritmaları için yapıldığı gibi, geliştirilen GNLMS ve GRLS algoritmalarının ayarsızlık, yakınsama ve izleme değerlerinin teorik olarak hesaplanması gösterilmektedir.

Yukarıda belirtilen ayarsızlık ve yakınsama performanslarının belirlenmesinde, kestirimi yapılacak sinyal, zaman bölgesi için benzer şekilde, tutarlı bant genişliği içerisinde, kanal $H[n]$, alınan sinyal $X_k[n]$ ve en uygun Wiener katsayıları, $W^o[n]$ arasında yüksek ilintisellik bulunması halinde, GNLMS ve GRLS algoritmaları için, bir önceki alt bölümde verilen ilintisellik kabulü durumunda, izdüşüm seviyesine bağlı olarak kullanılan pencere içerisinde çoklu regresyon bağıntısını,

$$D_k[n] = X_k[n]W^o[n] + \mathcal{N}_k[n] \tag{3.42}$$

sağladığı, işlemlerde kullanılan sinyallerin ise GBD olduğu kabul edilmektedir. Burada $W^o[n]$ en uygun Wiener çözümünü, frekans bölgesinde $\mathcal{N}_k[n]$ ise sıfır ortalamalı öz ilinti matrisi $N_{SYM}{\sigma_n}^2I$ olan beyaz Gauss gürültüsünü göstermektedir. Söz konusu gürültü hata taban değerini göstermekte olup, OHK tabanlı herhangi bir uyarlamalı algoritma bu hata değerinden düşük bir OHK değeri sağlayamaz.

Zamanla değişen kanallarda ise en uygun katsayı değeri her adımda değişkenlik gösterdiğinden, çoklu regresyon bağıntısı,

$$D_k[n] = X_k[n]W^o_{k-i}[n] + \mathcal{N}_k[n] \tag{3.43}$$

haline dönüşmektedir. Burada $W_{k-i}^{o}[n]$ zamanla değişen en uygun filtre katsayı değerini göstermekte olup, GNLMS için $i=0$, GRLS için $i=1$ olarak alınmaktadır.

Bu durumda uyarlanabilir algoritmaların kullanımı ile, GBD kanallar için n. frekans noktası için elde edilen OHK değeri, $\xi_k[n]$,

$$\xi_k[n] = E\{|E_k[n]|^2\} = E\{|D_k[n] - X_k[n]W_k[n]|^2\} \tag{3.44}$$

ile hesaplanmaktadır. (3.39) eşitliği (3.41) içerisinde kullanıldığında,

$$\xi_k[n] = E\{|X_k[n]W^o[n] + N_k[n] - X_k[n]W_k[n]|^2\} \tag{3.45}$$

elde edilir. Algoritmanın, en uygun değerden sapma miktarı $\Delta W_k[n] = W_k[n] - W^o[n]$ olarak tanımlanır ve (3.42) ifadesinde yerine konulur ise,

$$\xi_k[n] = E\{|N_k[n] - X_k[n]\,\Delta W_k[n]|^2\} \tag{3.46}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki ifade açıldığında,

$$\xi_k[n] = E\{|N_k[n]|^2\} + E\{|X_k[n]\Delta W_k[n]|^2\} - 2Re\left\{E\left[{N_k}^*[n]X_k[n]\Delta W_k[n]\right]\right\} \tag{3.47}$$

halini almaktadır. Gauss gürültüsü, $\mathcal{N}_k[n]$, alınan sinyal $X_k[n]$ ve $\Delta W_k[n]$ parametrelerinden bağımsız olduğu kabul edilir ise,

$$\xi_k[n] = N_{SYM}{\sigma_n}^2 + E\{|X_k[n]\Delta W_k[n]|^2\} \tag{3.48}$$

olarak bulunmaktadır. Eşitlikten anlaşıldığı üzere, kullanılan uyarlanabilir algoritma, Wiener çözümü kullanıldığında elde edilen EDOHK üzerine $E\{|X_k[n]\Delta W_k[n]|^2\}$ kadarlık fazladan bir OHK oluşmasına yol açmaktadır. Bu değer, EDOHK değeri ile normalize edilir ise ayarsızlık değeri, $M = E\{|X_k[n]\Delta W_k[n]|^2\}/N_{SYM}{\sigma_n}^2$ şeklinde tanımlanmaktadır. Bu değer, 0 ile 1 arasında olup, incelenen uyarlamalı algoritmanın EDOHK değerine göre ne kadarlık fazladan OHK oluştuğunu göstermektedir. İdealde istenilen istenilen M nin olabildiğince düşük değere, yani sıfıra yakın bir değer almasıdır.

Aşağıda, geliştirilen her algoritmaya ait ayarsızlık, yakınsama hızı ve takip performanslarının teorik olarak elde edilmesi gösterilmektedir. Söz konusu parametreler karşılaştırılarak algoritmaların teorik olarak avantaj ve dezavantajlarının belirlenmesi amaçlanmaktadır.

3.5.1. GNLMS algoritmasının teorik performansı

GNLMS algoritmasının teorik performans analizi sırasıyla, ayarsızlık, yakınsama ve takip şeklinde aşağıda teorik analizi yapılarak elde edilen sonuçlar verilmektedir.

Ayarsızlık

Önerilen GNLMS algoritması için, (3.21) ile verilen katsayı güncelleme eşitliğinde, $\Delta W_k[n] = W_k[n] - W^o[n]$ şeklinde katsayının en uygun Wiener değerinden sapma değeri ile (3.42) kullanılarak yerine konulacak olur ise, her adımda sapma değeri,

$$\Delta W_{k+1}^{GNLMS}[n] = \Delta W_k^{GNLMS}[n] + \frac{\mu}{P_k[n]} X_k^H[n](X_k[n]W^o[n] + N_k[n] - X_k[n]W_k[n]) \tag{3.49}$$

şeklinde olacaktır. (3.49) düzenlendiğinde,

$$\Delta W_{k+1}^{GNLMS}[n] = \left(1 - \frac{\mu}{P_k[n]} \|X_k[n]\|^2\right) \Delta W_k^{GNLMS}[n] + \frac{\mu}{P_k[n]} X_k^H[n][n] N_k[n] \tag{3.50}$$

Bu eşitlikte, her iki taraf, n. frekans noktasının alınan sinyal değeri ile $X_k[n]$ çarpılır ise,

$$X_k[n]\Delta W_{k+1}^{GNLMS}[n] = \left(1 - \frac{\mu}{P_k[n]} \|X_k[n]\|^2\right) X_k[n]\Delta W_{k+1}^{GNLMS}[n] + \frac{\mu}{P_k[n]} X_k[n] X_k^H[n] N_k[n] \tag{3.51}$$

elde edilir. Burada, soncul hata, $E_k^{p,NLMS}[n] = X_k[n]\Delta W_{k+1}^{NLMS}[n]$ ve öncül hata $E_k^{a,NLMS}[n] = X_k[n]\Delta W_k^{NLMS}[n]$ tanımları kullanıldığında,

$$E_k^{p,GNLMS}[n] = \left(1 - \frac{\mu}{P_k[n]} \|X_k[n]\|^2\right) E_k^{a,GNLMS}[n] + \frac{\mu}{P_k[n]} X_k[n] X_k^H[n] N_k[n] \tag{3.52}$$

halini alır. Soncul hata değeri, $E_k^{p,NLMS}[n]$, uyarlanabilir algoritmanın k. blokta filtre katsayı değeri güncellendikten sonra elde edilen hatayı, öncül hata değeri ise, filtre katsayısının güncellenmemiş (k-1. blokta elde edilen) değeri, $W_k[n]$, kullanılarak elde edilen hata değerini göstermektedir. (3.52) ifadesinin her iki tarafının norm karesi alındıktan sonra beklenen değer işlevi kullanıldığında, öncül ve soncul OHK arasında,

$$\begin{aligned} E\left\{\left|E_k^{p,GNLMS}[n]\right|^2\right\} &= E\left\{\left(1 - \frac{\mu}{P_k[n]} \|X_k[n]\|^2\right)^2 \left|E_k^{a,GNLMS}[n]\right|^2\right\} + \\ & \mu^2 E\left\{\frac{|X_k[n]|^2}{{P_k}^2[n]} N_k^H[n] X_k[n] X_k^H[n] N_k[n]\right\} \end{aligned} \tag{3.53}$$

şeklinde ilişki elde edilir. Eşitliğin sağ tarafındaki ifadede, $E_k^{a,NLMS}[n]$, $\left|E_k^{a,NLMS}[n]\right|^2$, $N_k[n]$ ile $X_k[n]$ istatistiki olarak birbirinden bağımsız kabul edildiğinde, (3.53)'nin sağındaki ilk terim,

$$\mathbb{E}\left\{\left(1 - \frac{\mu}{P_k[n]} \|X_k[n]\|^2\right)^2 \left|E_k^{a,GNLMS}[n]\right|^2\right\} = \mathbb{E}\left\{\left(1 - \frac{\mu}{P_k[n]} \|X_k[n]\|^2\right)^2\right\} \mathbb{E}\left\{\left|E_k^{a,GNLMS}[n]\right|^2\right\} \tag{3.54}$$

haline dönüşmektedir. n. frekans noktasında, $X_k[n]$ vektör norm kare değeri, $\|X_k[n]\|^2 = \sum_{i=-m}^{m} |X_k[n-i]|^2$ olmaktadır. $P_k[n]$ değeri sinyalin GNLMS izdüşüm seviyesine bağlı olarak pencere içerisinde kalan frekans noktalarının kestirim ile elde edilen güç değer toplamını göstermektedir. (3.20) ile verilen $P_k[n]$'in beklenen değeri alındığında,

$$\mathbb{E}\{P_k[n]\} = \gamma^{k+1} P_{-1}[n] + (1-\gamma) \sum_{l=0}^{k} \gamma^l \mathbb{E}\{\|X_k[n]\|^2\} \tag{3.55}$$

bulunmaktadır. Eşitlikteki $P_{-1}[n]$ terimi, güç kestirimi için kullanıcı tarafından girilen ilk değeri göstermekte olup, γ değeri gerçek değere yakınsamanın sağlanması için 1 den küçük seçilmektedir. Bu sayede, algoritma kararlı duruma ulaştığında, yani $k \rightarrow \infty$ ulaşıldığında, $\mathbb{E}\{P_k[n]\} = \mathbb{E}\{\|\boldsymbol{X_k[n]}\|^2\}$ olacaktır. Bu durumda, GNLMS kararlı duruma geldiğinde,

$\mathbb{E}\left\{\frac{\|\boldsymbol{X_k[n]}\|^2}{P_k[n]}\right\} \approx \frac{\mathbb{E}\{\|\boldsymbol{X_k[n]}\|^2\}}{\mathbb{E}\{P_k[n]\}} = 1$ ve $\mathbb{E}\left\{\frac{\|\boldsymbol{X_k[n]}\|^4}{{P_k}^2[n]}\right\} \approx \frac{\mathbb{E}\{\|\boldsymbol{X_k[n]}\|^4\}}{\mathbb{E}\{{P_k}^2[n]\}}$ olarak alınabilir. Böylece (3.54) eşitliğinin sağındaki ilk ifade,

$$\mathbb{E}\left\{\left(1-\frac{\mu}{P_k[n]}\|X_k[n]\|^2\right)^2\right\} = 1-2\mu\mathbb{E}\left\{\frac{\|X_k[n]\|^2}{P_k[n]}\right\} + \mu^2\mathbb{E}\left\{\frac{\|X_k[n]\|^4}{{P_k}^2[n]}\right\} \approx 1-2\mu + \mu^2\frac{\mathbb{E}\{\|X_k[n]\|^4\}}{\mathbb{E}\{{P_k}^2[n]\}} \tag{3.56}$$

haline gelmektedir.

(3.53) eşitliğindeki ikinci ifade matris ve vektörlerin çarpımı şeklinde belirlenen bir skaler sayı olduğundan, bu ifadenin $Tr\{\quad\}$, matris iz alma operatörü sonucunun yine kendisine eşit olması gerekmektedir. Bu durumda, söz konusu ifade,

$$\mathbb{E}\left\{\frac{|X_k[n]|^2}{{P_k}^2[n]}N_k^H[n]X_k[n]X_k^H[n]N_k[n]\right\} = Tr\left[\mathbb{E}\left\{\frac{|X_k[n]|^2}{{P_k}^2[n]}N_k[n]N_k^H[n]X_k[n]X_k^H[n]\right\}\right] \tag{3.57}$$

olarak yazılabilir. İz alma ile beklenen değer operatörü yer değiştirme özelliği bulunmaktadır. A ve B matrisleri için iz alma operatörü için yerdeğiştirme özelliği, $Tr\{AB\} = Tr\{BA\}$, kullanılabilir. Bu durumda, (3.57)

$$\mathbb{E}\left\{\frac{|X_k[n]|^2}{{P_k}^2[n]}N_k[n]N_k^H[n]X_k[n]X_k^H[n]\right\} = \mathbb{E}\left[Tr\left\{\frac{|X_k[n]|^2}{{P_k}^2[n]}N_k[n]N_k^H[n]X_k[n]X_k^H[n]\right\}\right] \tag{3.58}$$

haline dönüştürülebilmektedir. $N_k[n]$ ile $X_k[n]$ istatistiki olarak bağımsız olduğu göz önüne alındığında ve matris izi alma ve beklenen değer operatörünün değişme özelliği tekrar kullanıldığında,

$$\mathbb{E}\left\{\frac{|X_k[n]|^2}{{P_k}^2[n]}N_k[n]N_k^H[n]X_k[n]X_k^H[n]\right\} \approx Tr\left[\mathbb{E}\{N_k[n]N_k^H[n]\}\mathbb{E}\left\{\frac{|X_k[n]|^2}{{P_k}^2[n]}X_k[n]X_k^H[n]\right\}\right] \tag{3.59}$$

olarak alınabilir. Alt bölüm başlangıcında belirtildiği üzere, pencere içerisindeki noktalara filtreleme yapıldığında elde edilen hata vektörü $N_k[n]$ öz ilinti matrisi, $E\{N_k[n]N_k^H[n]\} = N_{SYM}\sigma_n^2 I$ olmaktadır. Sonuç olarak, $\frac{|X_k[n]|^2}{{P_k}^2[n]} X_k[n]X_k^H[n]$ matrisinin beklenen değeri

$$\mathbb{E}\left\{\frac{|X_k[n]|^2}{{P_k}^2[n]} X_k[n]X_k^H[n]\right\}$$
$$= \begin{bmatrix} \mathbb{E}\left\{\frac{|X_k[n]|^2|X_k[n-i]|^2}{{P_k}^2[n]}\right\} & \cdots & \mathbb{E}\left\{\frac{|X_k[n]|^2X_k[n-i]{X_k}^*[n+i]}{{P_k}^2[n]}\right\} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{E}\left\{\frac{|X_k[n]|^2X_k[n+i]{X_k}^*[n-i]}{{P_k}^2[n]}\right\} & \cdots & \mathbb{E}\left\{\frac{|X_k[n]|^2|X_k[n+i]|^2}{{P_k}^2[n]}\right\} \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

şeklinde olmaktadır. Beklenen değer matrisinde köşegen değerler, $\mathbb{E}\left\{\frac{|X_k[n]|^2|X_k[n-i]|^2}{{P_k}^2[n]}\right\}, i = -m, \dots, m$, sıfırdan farklı olup, köşegenin dışında kalan değerler, $\mathbb{E}\left\{\frac{|X_k[n]|^2X_k[n+i]{X_k}^*[n-l]}{{P_k}^2[n]}\right\} \approx \frac{\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2X_k[n+i]{X_k}^*[n-l]\}}{\mathbb{E}\{{P_k}^2[n]\}} = 0, \ i \neq l \ i, l = -m, \dots, m$ olacaktır. Bu durumda, $E\left\{\frac{|X_k[n]|^2}{{P_k}^2[n]} X_k[n]X_k^H[n]\right\}$ matrisi,

$$\mathbb{E}\left\{\frac{|X_k[n]|^2}{{P_k}^2[n]} X_k[n]X_k^H[n]\right\} = diag\left[\mathbb{E}\left\{\frac{|X_k[n]|^2|X_k[n-i]|^2}{{P_k}^2[n]}\right\}\right], \qquad i = -m, \dots, m \quad (3.61)$$

halini alır. Eş. (3.53), ifadesine, (3.58), (3.61) ifadeleri ile elde edilen sonuçlar kullanıldığında, soncul ve öncül OHK değerleri arasındaki ilişki,

$$\mathbb{E}\left\{\left|E_k^{p,GNLMS}[n]\right|^2\right\} \approx \left(1 - 2\mu + \mu^2\mathbb{E}\left\{\frac{\|X_k[n]\|^4}{{P_k}^2[n]}\right\}\right)\mathbb{E}\left\{\left|E_k^{a,GNLMS}[n]\right|^2\right\} +$$
$$\mu^2 N_{sym}\sigma_n^2\left\{\sum_{i=-m}^{m}\mathbb{E}\left\{\frac{|X_k[n]|^2|X_k[n-i]|^2}{{P_k}^2[n]}\right\}\right\} \quad (3.62)$$

şeklinde elde edilir. Kararlı durumda güncellenen katsayının ortalama sapma değeri karesi, $\mathbb{E}\left\{\left|E_k^{p,GNLMS}[n]\right|^2\right\}$ ile bir adım önceki ortalama sapma değeri karesi, $\mathbb{E}\left\{\left|E_k^{a,GNLMS}[n]\right|^2\right\}$ birbirine yakın değer almaya başlayacak ve k. ve k+1. adımdaki katsayının en uygun çözümden sapma değerinin OHK değeri birbirine eşit olmaya başlayarak, $\mathbb{E}\left\{\left|E_k^{p,GNLMS}[n]\right|^2\right\} \approx \mathbb{E}\left\{\left|E_k^{a,GNLMS}\right|^2\right\}$ olacaktır. Bu durumda (3.62),

$$\mu(2-\mu\mathbb{E}\left\{\frac{\|X_k[n]\|^4}{{P_k}^2[n]}\right\})E\left\{\left|E_k^{a,GNLMS}[n]\right|^2\right\}=\mu^2\sigma_n^2\sum_{i=-m}^{m}E\left\{\frac{|X_k[n]|^2|X_k[n-i]|^2}{{P_k}^2[n]}\right\} \quad (3.63)$$

haline dönüşecektir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında, fazlalık OHK değeri,

$$E\left\{\left|E_k^{a,GNLMS}[n]\right|^2\right\}=\frac{\sum_{i=-m}^{m}\mathbb{E}\left\{\frac{|X_k[n]|^2|X_k[n-i]|^2}{{P_k}^2[n]}\right\}}{2-\mu\mathbb{E}\left\{\frac{\|X_k[n]\|^4}{{P_k}^2[n]}\right\}}\mu\sigma_n^2 \quad (3.64)$$

olarak bulunmaktadır. Algoritma kararlı duruma ulaştığında, (3.64) ifadesinin payında bulunan,

$$\mathbb{E}\left\{\frac{|X_k[n]|^2|X_k[n-i]|^2}{{P_k}^2[n]}\right\}\approx\frac{\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2|X_k[n-i]|^2\}}{\mathbb{E}\{{P_k}^2[n]\}} \quad (3.65)$$

ve paydasında bulunan

$$\mathbb{E}\left\{\frac{\|X_k[n]\|^4}{{P_k}^2[n]}\right\}\approx\frac{\mathbb{E}\{\|X_k[n]\|^4\}}{\mathbb{E}\{{P_k}^2[n]\}} \quad (3.66)$$

terimleri şeklinde yakınsama sağlayacaktır. (3.64) ifadesi, (3.65) ve (3.66) sonuçları kullanılarak düzenlendiğinde, kararlı durum fazlalık OHK değeri

$$\mathbb{E}\left\{\left|E_k^{a,GNLMS}[n]\right|^2\right\}=\frac{\sum_{i=-m}^{m}\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2|X_k[n-i]|^2\}}{2\mathbb{E}\{{P_k}^2[n]\}-\mu\mathbb{E}\{\|X_k[n]\|^4\}}\mu N_{sym}\sigma_n^2 \quad (3.67)$$

ile hesaplanmaktadır. $\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2|X_k[n-i]|^2\}$ ifadesi, alınan sinyalin komşu noktalarındaki yüksek ilintisellikten dolayı, n ve n-i. noktanın güç değerlerinin beklenen değerlerinin ortalaması,

$$\rho_{-i}[n]=\frac{\mathbb{E}\{|X_k[n-i]|^2\}}{\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}}=\frac{\sigma_d^2|H[n-i]|^2+\sigma_n^2}{\sigma_d^2|H[n]|^2+\sigma_n^2} \quad (3.68)$$

şeklinde tanımlandığında, $|X_k[n-i]|^2 \approx \rho_{-i}[n]|X_k[n]|^2$ olarak kabul edilebilir. Alınan sinyal gücünün farklı noktalarındaki ilintisellik seviyesi, hem kanalın frekans tepkisine hemde EBGG gücüne bağlı olmaktadır. $|H[n-i]|^2$ ve $|H[n]|^2$ birbirine yakın değerler aldığında yani iki frekans noktası arasında yüksek ilintisellik bulunduğunda, $\rho_{-i}[n]$ değeri bire yakınsayacak ve $i=0$ alındığında $\rho_0[n] = \frac{\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}}{\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}} = 1$ olacaktır. İki farklı frekans noktası arasında ilintisellik bulunmasığında ise $\rho_{-i}[n]$ değeri birden farklı değerler alacaktır. Bir diğer nokta ise, kanal frekans tepkisi genliği sıfıra yakın /eşit değer alması veya EBGG gürültüsünün kanal frekans tepki genlik karesi değerinden çok büyük olması, $\sigma_n^2 \gg \sigma_d^2|H[n]|^2$, halinde, $\rho_{-i}[n]$ değeri bire yakın değer alacaktır.

$X_k[n]$ Gauss dağılımlı karmaşık sayı rastgele değişken olduğundan, $\mathbb{E}\{|X_k[n]|^4\} = 2(\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\})^2$ olacaktır. Bu durumda,

$$\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2|X_k[n-i]|^2\} = \begin{Bmatrix} 2(\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\})^2 & i=0 \\ \rho_{-i}[n](\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\})^2 & i \neq 0 \end{Bmatrix} \tag{3.69}$$

olmaktadır. (3.69) vasıtası ile (3.67) ifadesinin sağında bulunan kesirin payı,

$$\sum_{i=-m}^{m} \mathbb{E}\{|X_k[n]|^2|X_k[n-i]|^2\} = \left(\sum_{i=-m}^{m} \rho_{-i}[n] + 1\right)(\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\})^2 \tag{3.70}$$

olarak bulunmaktadır. $\mathbb{E}\{\|X_k[n]\|^4\}$ ifadesi (3.68) ile verilen ilintisellik göz önüne alınarak hesaplandığında,

$$\mathbb{E}\{\|X_k[n]\|^4\} = 2(\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\})^2\left\{\sum_{i=-m}^{m} \rho_{-i}^2[n] + \sum_{i=-m}^{m-1}\sum_{l=i+1}^{m} \rho_{-i}[n]\rho_{-l}[n]\right\} \tag{3.71}$$

olarak bulunmaktadır. (3.71) ifadesinde, gerekli düzenlemeler yapıldığında, $X_k[n]$ vektör normunun 4. momenti, $(\sum_{i=-m}^{m}\rho_{-i}[n])^2 = \sum_{i=-m}^{m}\rho_{-i}^2[n] + 2\sum_{i=-m}^{m-1}\sum_{l=i+1}^{m}\rho_{-i}[n]\rho_{-l}[n]$ olduğundan, n. frekans noktasının 2. derece momenti cinsinden $\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}$, ifade edildiğinde,

$$\mathbb{E}\{\|X_k[n]\|^4\} = 2(\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\})^2 \left\{ \left(\sum_{i=-m}^{m} \rho_{-i}[n] \right)^2 - \sum_{i=-m}^{m-1} \sum_{l=i+1}^{m} \rho_{-i}[n]\rho_{-l}[n] \right\} \tag{3.72}$$

elde edilir.

(3.20) ile verilen $P_k[n]$'in karesinin beklenen değeri alındığında,

$$\mathbb{E}\{P_k^2[n]\} = \gamma^{2(k+1)}P_{-1}^2[n] + \frac{2(1-\gamma^{k+1})\gamma^{k+1}}{1-\gamma} P_{-1}[n] \sum_{i=-m}^{m} \rho_{-i}[n]\, \mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\} + \frac{(1-\gamma)(1-\gamma^{2k+2})\mathbb{E}\{\|X_k[n]\|^4\} + 2\gamma(1-\gamma^k)(1-\gamma^{k+1})\left(\mathbb{E}\{\|X_k[n]\|^2\}\right)^2}{1+\gamma} \tag{3.73}$$

elde edilir. Kararlı durumda,

$$\mathbb{E}\{P_k^2[n]\} = \frac{(1-\gamma)\mathbb{E}\{\|X_k[n]\|^4\} + 2\gamma\left(\mathbb{E}\{\|X_k[n]\|^2\}\right)^2}{1+\gamma} = \frac{2\left(\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}\right)^2 \left\{ \left(\sum_{i=-m}^{m} \rho_{-i}[n]\right)^2 - (1-\gamma) \sum_{i=-m}^{m-1} \sum_{l=i+1}^{m} \rho_{-i}[n]\rho_{-l}[n] \right\}}{1+\gamma} \tag{3.74}$$

haline dönüşür. (3.67) ifadesine (3.70), (3.72) ve (3.74) ile elde edilen sonuçlar yerine konulduğunda,

$$\mathbb{E}\left\{\left|E_k^{a,GNLMS}[n]\right|^2\right\} = \frac{\mu(1+\gamma)\left(\sum_{i=-m}^{m} \rho_{-i}[n] + 1\right) N_{sym}\sigma_n^2}{2\left\{ \left(2-\mu(1+\gamma)\right)\left(\sum_{i=-m}^{m} \rho_{-i}[n]\right)^2 - \left(2-2\gamma-\mu(1+\gamma)\right) \sum_{i=-m}^{m-1} \sum_{l=i+1}^{m} \rho_{-i}[n]\rho_{-l}[n] \right\}} \tag{3.75}$$

olarak elde edilmektedir. Soncul hata değeri görüldüğü üzere, $\sum_{i=-m}^{m} \rho_{-i}[n]$ değerine ters orantılı olmaktadır. Bu durumda, GNLMS algoritması için elde edilen teorik sonuç, ilintili komşu frekans noktalarının göz önüne alınması halinde, performansta iyileşme sağladığını göstermektedir. Sonraki alt bölümde gösterilen benzetim sonuçları elde edilen teorik sonucu desteklemektedir.

(3.75) ifadesinden görüldüğü üzere, algoritmanın yakınsaması için μ katsayısının seçimi γ katsayısına bağlı olarak,

$$\frac{2\left(\sum_{i=-m}^{m}\rho_{-i}[n]\right)^{2}-2(1-\gamma)\sum_{i=-m}^{m-1}\sum_{l=i+1}^{m}\rho_{-i}[n]\rho_{-l}[n]}{(1+\gamma)\left\{\left(\sum_{i=-m}^{m}\rho_{-i}[n]\right)^{2}-\sum_{i=-m}^{m-1}\sum_{l=i+1}^{m}\rho_{-i}[n]\rho_{-l}[n]\right\}}>\mu>0 \tag{3.76}$$

şartını sağlayacak şeklinde yapılmalıdır. Görüldüğü üzere, algoritmanın yakınsama sağlayabilmesi için, seçilen γ değerine göre μ değerinin ayarlanması gerektiği anlaşılmaktadır.

2. bölümde açıklandığı üzere, yakınsamanın sağlanması için, ZB-NLMS için $2>\mu>0$ şeklinde, FB-NLMS algoritması için ise üst sınır ZB-NLMS algoritmasına göre azalarak $^{2}/_{(1+\gamma)}>\mu>0$ şeklinde seçilmesi gerekmektedir. GNLMS algoritması için bulunan sınır değerine bakıldığında, izdüşüm seviyesi arttırıldığında seçilebilecek en yüksek katsayı değerinin 2'ye doğru yakınsamakta olduğu görülmektedir. Sonuç olarak, GNLMS algoritması, yakınsama sağlayacak katsayı seçiminde kullanıcıya daha fazla esneklik vermektedir.

Şekil 3.3 ile GNLMS algoritmasının kararlı durumda elde edilen en uygun OHK değeri ile normalize edilmiş OHK değerinin, $\left(\frac{1+\mathbb{E}\left\{\left|E_k^{a,GNLMS}[n]\right|^2\right\}}{N_{sym}\sigma_n^2}\right)$, en uygun değere göre artışı seçilen γ ve μ değerlerine bağlı olarak dB cinsinden değişimi gösterilmektedir. Görüldüğü üzere, izdüşüm seviyesinin (2m+1) arttırılması ile elde edilen fazlalık OHK değerinde oldukça büyük azalma meydana gelmekte ve en uygun OHK değerine daha yakın olmaktadır. Ancak, γ ve μ değerleri arttırıldığında, OHK değeri de artmaktadır. Bu sebepten ötürü, GNLMS algoritmasında, γ ve μ değerlerinin küçük seçilmesi, elde edilecek kararlı durum OHK performansını olumlu yönde etkilemektedir.

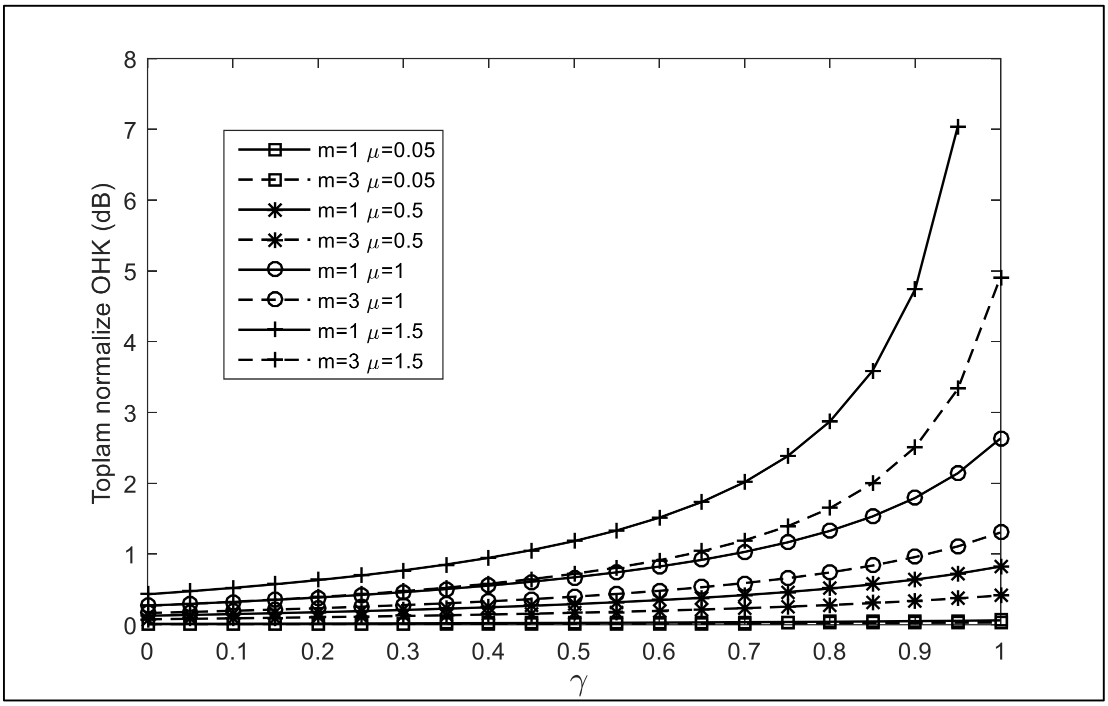
γ değerinin 1'e yakın seçilmesi özellikle yüksek μ değerlerinde kararlı durum OHK değerinde dramatik şekilde artışa neden olmaktadır. Her iki parametrenin yüksek seçilmesi halinde, kararlı durum OHK değeri en uygun OHK değerine göre 7dB değerlerine varan artışın meydana geldiği Şekil 3.3'ten görülmektedir. GNLMS algoritmasının izdüşüm seviyesinin yükseltilmesi, büyük γ ve μ seçilmesine olanak tanımaktadır.

(3.75) ile elde edilen OHK değerinden görüldüğü üzere, GNLMS algoritması ile elde edilen kararlı durum OHK değeri μ, γ ve kullanılan pencere içerisinde bulunan alınan sinyal güçlerinin arasındaki ilinti toplamına , $\sum_{i=-m}^{m} \rho_{-i}[n]$, ters orantılı şekilde bağlı olmaktadır. Bu durumda, kanalın tutarlı bant genişliği ne kadar büyük ise, yüksek izdüşüm seviyeleri ile daha düşük kararlı durum OHK değeri elde edilmesi mümkün olmaktadır.

GNLMS ayarsızlık değeri, $M^{GNLMS}[n]$

$$M^{GNLMS}[n] = \frac{\mu(1+\gamma)\left(\sum_{i=-m}^{m} \rho_{-i}[n]+1\right)}{2\left\{\left(2-\mu(1+\gamma)\right)\left(\sum_{i=-m}^{m} \rho_{-i}[n]\right)^2 - \left(2-2\gamma-\mu(1+\gamma)\right)\sum_{i=-m}^{m-1}\sum_{l=i+1}^{m} \rho_{-i}[n]\rho_{-l}[n]\right\}} \qquad (3.77)$$

olarak elde edilir. GNLMS pencere değeri içerisinde merkezde bulunan frekans noktası için ilintisellik değeri $\rho_0[n] = 1$ olacaktır. Komşu frekans noktaları ile aradaki ilinti seviyesi ise, $\rho_{-l}[n]$ değeri yüksek ilintisellik kabulünden dolayı 1'e yakın olacaktır. (3.76) ifadesine bakıldığında, $M^{GNLMS}[n][n]$ değerinin $\sum_{i=-m}^{m} \rho_{-i}[n]$ ile ters orantılı olduğu görülmektedir. İzdüşüm deviyesi 1 olarak seçildiğinde (γ, m=0), NLMS algoritması için ayarsızlık değeri $\frac{\mu}{(2-\mu)}$ olarak elde edilmektedir. İzdüşüm seviyesi 1'den büyük seçildiğinde ise NLMS'e göre daha düşük bir ayarsızlık değeri elde edilecektir. Ayrıca, ayarsızlık değerine bakıldığında, basamak büyüklüğü μ ile doğru ve toplam ilintisellik değeri ve $(1+\gamma)$ değerine bağımlı olduğu görülmektedir. Bundan dolayı, düşük ayarsızlık değeri elde edilebilmesi için düşük basamak değeri ile daha çok sayıda yüksek ilintiselliğe sahip frekans noktası kullanımı yani izdüşüm seviyesinin arttırılması gerekmektedir.



Şekil 3.3. GNLMS karalı durum normalize OHK değerin γ ve μ e göre değişimi

(3.77) ifadesinden görüldüğü üzere, GNLMS algoritmasının ayarsızlık değeri komşu frekans noktaları arasında yüksek ilinti seviyesinin bulunması halinde, NLMS algoritmasına göre daha düşük ayarsızlık değeri elde edilmektedir. Bir diğer husus ise, GNLMS algoritmasının izdüşüm seviyesi arttırıldıkça, birbirine daha uzak olan frekans noktaları katsayı hesaplamada göz önüne alınacak, ve bu uzak noktalar arasındaki frekans bandı artacağından, ilintisellik seviyesi daha düşük olacaktır. Örneği $\mu = 1$ olarak seçildiği, SGO değeri 10 dB yani ölçüm gürültüsü $\sigma_n{}^2 = -10dB$ olarak alındığında, izdüşüm seviyesinin 1, 3, 5 ve 7 olarak seçildiğinde elde edilen toplam OHK değerleri sırasıyla, -7dB, -8.75dB, -9.2dB ve -9.42dB olmaktadır. Görüldüğü üzere, teorik olarak elde edilen değerler, izdüşüm seviyesi arttırıldığında ideal değer olan -10dB'ye yaklaşmakta, ancak izdüşüm değerinin arttırılması ile bu değere yakınsama hızı düşmekte ve gittikçe azalan fayda sağlamaktadır. Bundan dolayı, izdüşüm seviyesinin 3'den daha yüksek seçilmesi elde edilecek toplam OHK değerinde büyük bir değişim sağlamayacağından, GNLMS algoritması için ayarsızlık değeri açısından teorik analiz sonucu izdüşüm seviyesinin 3 olarak seçilmesinin daha uygun olduğu düşünülmektedir.

Yapılan anlizde, komşu frekans noktaları arasında yeterince yüksek ilintisellik seviyesinin bulunduğu kabul edilmiştir. Söz konusu ilintiselliğin yeterli seviyede bulunmayan kanallarda ($mx\Delta f < B_c$), bulunan teorik ayarsızlık değeri geçerli olmayacaktır. Bu durumda

GNLMS algoritması ile ayarsızlık performansında iyileşme sağlanamayacaktır. İzdüşüm seviyesi 3 olarak seçildiğinde dahi GNLMS algoritması için (3.77) eşitliği ile elde edilen ayarsızlık değeri uygulamada elde edilecek ayarsızlık değerini doğru olarak kestiremeyecektir, olması gerekenden daha düşük bir değer bulunacaktır.

Yakınsama

GNLMS algoritmasının kararlı durum değerine yakınsama performansının hesaplanabilmesi için ortalama katsayı sapma ifadesinden yola çıkılması gerekmektedir. (3.50) ile verilen katsayı sapma ifadesinin norm karsi ve beklenen değeri alındığında, OHK değeri,

$$E\left\{\left|\Delta W_{k+1}^{GNLMS}[n]\right|^2\right\} = E\left\{\left(1 - \frac{\mu}{P_k[n]}\|X_k[n]\|^2\right)^2\right\} E\left\{\left|\Delta W_k^{GNLMS}[n]\right|^2\right\} + \mu^2 E\left\{\frac{1}{{P_k}^2[n]} N_k^H[n] X_k[n] X_k^H[n] N_k[n]\right\} \tag{3.78}$$

şeklinde elde edilmektedir. (3.65), (3.72) ifadeleri (3.78)'de yerine konulduğunda,

$$E\left\{\left|\Delta W_{k+1}^{GNLMS}[n]\right|^2\right\} = \left(1 - 2\mu \frac{\mathbb{E}\{\|X_k[n]\|^2\}}{\mathbb{E}\{P_k[n]\}} + \mu^2 \frac{\mathbb{E}\{\|X_k[n]\|^4\}}{\mathbb{E}\{{P_k}^2[n]\}}\right) E\left\{\left|\Delta W_k^{GNLMS}[n]\right|^2\right\} + \mu^2 \sigma_n^2 \frac{\sum_{i=-m}^{m} |X_k[n-i]|^2}{\mathbb{E}\{{P_k}^2[n]\}} \tag{3.79}$$

haline dönüşürür. $\mathbb{E}\{P_k[n]\}$ ve $\mathbb{E}\{{P_k}^2[n]\}$ terimlerinin (3.55) ve (3.73) ile verilen zamana bağlı değişimi kullanıldığı

$$\mathcal{S}_k[n] = \frac{2\sum_{i=-m}^{m} \rho_{-i}[n]}{\sum_{i=-m}^{m} \rho_{-i}[n] - \gamma^{k+1}\left\{\sum_{i=-m}^{m} \rho_{-i}[n] - \frac{P_{-1}[n]}{\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}}\right\}} \tag{3.80}$$

$$\mathcal{T}_k[n] = \frac{2\left\{\left(\sum_{i=-m}^{m} \rho_{-i}[n]\right)^2 - \sum_{i=-m}^{m-1} \sum_{l=i+1}^{m} \rho_{-i}[n]\rho_{-l}[n]\right\}}{\gamma^{2(k+1)} \frac{{P_{-1}}^2[n]}{\left(\mathbb{E}\left\{|X_k[n]|^2\right\}\right)^2} + 2\gamma^{k+1}\left(1-\gamma^{k+1}\right) \frac{P_{-1}[n]}{(1-\gamma)\mathbb{E}\left\{|X_k[n]|^2\right\}} + 2\left\{\left(\sum_{i=-m}^{m} \rho_{-i}[n]\right)^2 - (1-\gamma)\sum_{i=-m}^{m-1} \sum_{l=i+1}^{m} \rho_{-i}[n]\rho_{-l}[n]\right\}} \tag{3.81}$$

tanımları yapıldığında,

$$E\left\{\left|\Delta W_{k+1}^{GNLMS}[n]\right|^2\right\} = (1 - \mu\mathcal{S}_k[n] + \mu^2\mathcal{T}_k[n])E\left\{\left|\Delta W_k^{GNLMS}[n]\right|^2\right\} + \mu^2\mathcal{T}_k[n]N_{sym}\sigma_n^2 \tag{3.82}$$

haline dönüşür. (3.82) yinelemeli ifadesinden görüldüğü üzere, GNLMS algoritmasının kararlı durum seviyesine yakınsama hızı seçilen μ ve γ parametrelerine bağlı olmakta ve yakınsama hızı sabit olmayıp her adımda değişmektedir. Yakınsama hızının arttırılması için her iki değerin büyük seçilmesi gerekmektedir. Ancak bu durumda bir önceki bölümde açıklandığı üzere ayarasızlık değeri yani toplam OHK değerinde artış meydana gelmektedir.

Aşağıdaki tanımlamalar yapıldığında,

$$\mathcal{A}_k[n] = 1 - \mu\mathcal{S}_k[n] + \mu^2\mathcal{T}_k[n] \tag{3.83}$$

$$\mathcal{B}_k[n] = N_{sym}\sigma_n^2\mathcal{T}_k[n] \tag{3.84}$$

GNLMS katsayı sapma değeri,

$$E\left\{\left|\Delta W_{k+1}^{GNLMS}[n]\right|^2\right\} = \mathcal{A}_k[n]E\left\{\left|\Delta W_k^{GNLMS}[n]\right|^2\right\} + \mu^2\mathcal{B}_k[n] \tag{3.85}$$

halini almaktadır. $k = 0$ bloğundan itibaren (3.84) ifadesi hesaplandığında,

$$\begin{aligned} k = 0 &\Rightarrow E\{|\Delta W_1^{GNLMS}[n]|^2\} = \mathcal{A}_0[n]E\{|\Delta W_0^{GNLMS}[n]|^2\} + \mu^2\sigma_n^2\mathcal{B}_0[n] \\ k = 1 &\Rightarrow E\{|\Delta W_2^{GNLMS}[n]|^2\} = \mathcal{A}_1[n]\mathcal{A}_0[n]E\{|\Delta W_0^{GNLMS}[n]|^2\} + \mu^2\sigma_n^2(\mathcal{A}_1[n]\mathcal{B}_0[n] + \mathcal{B}_1[n]) \\ k = 2 &\Rightarrow E\{|\Delta W_3^{GNLMS}[n]|^2\} = \mathcal{A}_2[n]\mathcal{A}_1[n]\mathcal{A}_0[n]E\{|\Delta W_0^{GNLMS}[n]|^2\} + \mu^2\sigma_n^2(\mathcal{A}_2[n]\mathcal{A}_1[n]\mathcal{B}_0[n] \\ &\qquad + \mathcal{A}_2[n]\mathcal{B}_1[n] + \mathcal{B}_2[n]) \end{aligned} \tag{3.86}$$

olmaktadır. Herhangi bir k bloğundaki, elde edilen ifade, $\mathcal{A}_{-1}[n] = 1$ ve $\mathcal{B}_{-1}[n] = 0$ olarak ilk değer ataması yapıldığında,

$$E\{|\Delta W_k[n]|^2\} = \left(\prod_{i=0}^{k-1}\mathcal{A}_k[n]\right)E\{|\Delta W_0[n]|^2\} + \mu^2\sigma_n^2\left(\sum_{i=1}^{k-1}\prod_{l=i}^{k-1}\mathcal{A}_l[n]\,\mathcal{B}_{i-1}[n] + \mathcal{B}_{k-1}[n]\right) \tag{3.87}$$

şeklinde elde edilir. k. blok için artık GNLMS OHK değeri,

$$E\{|X_k[n]\Delta W_k[n]|^2\} = \left(\prod_{i=0}^{k-1} \mathcal{A}_k[n]\right) E\{|X_k[n]\Delta W_0[n]|^2\} + \mu^2\sigma_n^2\left(\sum_{i=1}^{k-1}\prod_{l=i}^{k-1} \mathcal{A}_l[n]\, E\{|X_k[n]|^2\mathcal{B}_{i-1}[n]\} + E\{|X_k[n]|^2\mathcal{B}_{k-1}[n]\}\right) \tag{3.88}$$

olmaktadır. $E\{|X_k[n]|^2\mathcal{B}_k[n]\}$ terimi,

$$\mathcal{C}_k[n] = E\{|X_k[n]|^2\mathcal{B}_{k-1}[n]\} \tag{3.89}$$

şeklinde olmaktadır. Bu durumda, (3.88) ifadesine (3.89) yerleştirildiğinde, toplam OHK değeri, ${\xi_k}^{GNLMS}[n]$, zamana bağlı değişimi, yani öğrenme eğrisi,

$${\xi_k}^{GNLMS}[n] = \left(\prod_{i=0}^{k-1} \mathcal{A}_i[n]\right) N_{sym}{\sigma_d}^2 + \left(\prod_{i=0}^{k-1} \mathcal{A}_i[n] + \mu^2\left(\sum_{i=1}^{k-1}\prod_{l=i}^{k-1} \mathcal{A}_l[n]\, \mathcal{C}_{i-1}[n] + \mathcal{C}_{k-1}[n]\right) + 1\right) \xi^o[n] \tag{3.90}$$

halinde elde edilmektedir.

Burada, $\xi^o[n] = N_{SYM}{\sigma_{n^0}}^2$ olup, en uygun filtre katsayısı kullanıldığında elde edilen EDOHK değerini göstermektedir. (3.90) ile verilen eşitliğe öğrenme eğrisi (learning curve) adı verilmekte olup, GNLMS algoritmasının zamana göre her adımda elde edilen OHK değerinin değişimini göstermektedir.

Her adımda hesaplanan $\mathcal{A}_i[n] < 1$ olduğundan, kararlı durum için, $\lim_{k\to\infty}\left(\prod_{i=0}^{k-1} \mathcal{A}_i[n]\right) = 0$ olacaktır. Ayrıca, $\lim_{k\to\infty} \mu^2\left(\sum_{i=1}^{k-1}\prod_{l=i}^{k-1} \mathcal{A}_l[n]\, \mathcal{C}_{i-1}[n] + \mathcal{C}_{k-1}[n]\right) = M^{GNLMS}[n]$ olduğundan ${\xi_k}^{GNLMS}[n] = \xi^o[n][1 + M^{GNLMS}[n]]$ olmakta, kararlı durumda en uygun hatadan $M^{GNLMS}[n]\xi^o[n]$ kadarlık bir fazlalık oluşmaktadır.

Takip performansı

Durağan olmayan kanal göz önüne alındığında, GNLMS ortalama sapma katsayısı,

$$\Delta W_k^{GNLMS}[n] = W_k^{GNLMS}[n] - W_k^o[n] \tag{3.91}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Ayrıca, n. frekans noktası için tanımlanan $D_k[n]$ vektörü, (3.43) ile verilen ifadeyi sağlamaktadır.

(3.21) GNLMS katsayı güncelleme ifadesinin her iki tarafından, $W_{k+1}^{o}[n]$ çıkarılarak (3.91) ve (3.43) ifadeleri kullanıldığında ortalama sapma katsayısı,

$$\Delta W_{k+1}^{GNLMS}[n] = W_k^{GNLMS}[n] + \frac{\mu}{P_k[n]} X_k^H[n] E_k[n] = W_k^{GNLMS}[n] - W_{k+1}^{o}[n] + \frac{\mu}{P_k[n]} X_k^H[n]\left(X_k[n] W_k{}^0[n] + \mathcal{N}_k[n] - X_k[n] W_k^{GNLMS}[n]\right) \quad (3.92)$$

haline dönüşmektedir. Bu ifade, (3.43) yardımıyla,

$$\Delta W_{k+1}^{GNLMS}[n] = \left(1 - \frac{\mu \|X_k[n]\|^2}{P_k[n]}\right) \Delta W_k^{GNLMS}[n] + \frac{\mu}{P_k[n]} X_k^H[n] \mathcal{N}_k[n] + (1 - a) W_{k-1}^{o}[n] - \mathfrak{N}_k[n] \quad (3.93)$$

olacaktır. a değeri 1'e çok yakın bir değer olduğundan $(0.999 < a < 1)$, $(1 - a) W_{k-1}^{o}[n] \approx 0$ olmaktadır. Ayrıca, algoritma kararlı duruma ulaştığında, $\frac{\|X_k[n]\|^2}{P_k[n]} \approx 1$ olarak kabul edilebilir. Bu durumda, katsayı sapma değeri,

$$\Delta W_{k+1}^{GNLMS}[n] = \left(1 - \frac{\mu \|X_k[n]\|^2}{P_k[n]}\right) \Delta W_k^{GNLMS}[n] + \frac{\mu}{P_k[n]} X_k^H[n] \mathcal{N}_k[n] - \mathfrak{N}_k[n] \quad (3.94)$$

şeklinde değişime uğrayacaktır. Burada, $\mathcal{N}_k[n]$, $\Delta W_k^{GNLMS}[n]$ ve $\mathfrak{N}_k[n]$ birbirinden istatistiki olarak bağımsızdır. Ayarsızlık değerinin hesabında yapıldığı şekilde, (3.94)'ün her iki tarafı $X_k[n]$ ile çarpılması, norm karesinin be beklenen değerinin alınması halinde,

$$\mathbb{E}\left\{\left|X_k[n] \Delta W_{k+1}^{GNLMS}[n]\right|^2\right\} = \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left\{\left|X_k[n] \Delta W_k^{GNLMS}[n]\right|^2\right\}\left(1 - \frac{\mu \|X_k[n]\|^2}{P_k[n]}\right)^2\right\} + \mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\} \mathbb{E}\{|\mathfrak{N}_k[n]|^2\} + \mu^2 \mathbb{E}\left\{\left(\frac{1}{P_k[n]}\right)^2 |X_k[n]|^2 \mathcal{N}_k^H[n][n] X_k[n] X_k^H[n] \mathcal{N}_k[n]\right\} \quad (3.95)$$

olmaktadır. GNLMS algoritması kararlı duruma geldiğinde, $\mathbb{E}\{|X_k[n]\ \Delta W_{k+1}[n]|^2\} \approx \mathbb{E}\left\{\left|X_k[n]\Delta W_k^{GNLMS}[n]\right|^2\right\}$ olacaktır. Gerekli düzenleme yapıldığında, zamanla değişen GBD olmayan durum için toplam OHK $\varsigma_k^{GNLMS}[n]$,

$$\varsigma_k^{GNLMS}[n] = \xi^0\,[n] + \mathbb{E}\{|X_k[n]\ \Delta W_k[n]|^2\} = \xi^0\,[n]\left(1 + \frac{\mu(1+\gamma)\left(\sum_{i=-m}^{m}\rho_{-i}[n]+1\right)}{2\left\{(2-\mu(1+\gamma))\left(\sum_{i=-m}^{m}\rho_{-i}[n]\right)^2-(2-2\gamma-\mu(1+\gamma))\sum_{i=-m}^{m-1}\sum_{l=i+1}^{m}\rho_{-i}[n]\rho_{-l}[n]\right\}}\right) + \frac{\left\{\left(\sum_{i=-m}^{m}\rho_{-i}[n]\right)^2-(1-\gamma)\sum_{i=-m}^{m-1}\sum_{l=i+1}^{m}\rho_{-i}[n]\rho_{-l}[n]\right\}N_{SYM}{\sigma_{\mathfrak{R}}}^2\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}}{2\mu\left\{(2-\mu(1+\gamma))\left(\sum_{i=-m}^{m}\rho_{-i}[n]\right)^2-(2-2\gamma-\mu(1+\gamma))\sum_{i=-m}^{m-1}\sum_{l=i+1}^{m}\rho_{-i}[n]\rho_{-l}[n]\right\}} \quad (3.96)$$

olarak elde edilir.

Zamanla değişen kanaldan elde edilen OHK değeri, $\varsigma_k^{GNLMS}[n]$ bakıldığında, GBD kanal için elde edilen OHK'ne ek olarak $\frac{\left\{\left(\sum_{i=-m}^{m}\rho_{-i}[n]\right)^2-(1-\gamma)\sum_{i=-m}^{m-1}\sum_{l=i+1}^{m}\rho_{-i}[n]\rho_{-l}[n]\right\}N_{SYM}{\sigma_{\mathfrak{R}}}^2\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}}{2\mu\left\{(2-\mu(1+\gamma))\left(\sum_{i=-m}^{m}\rho_{-i}[n]\right)^2-(2-2\gamma-\mu(1+\gamma))\sum_{i=-m}^{m-1}\sum_{l=i+1}^{m}\rho_{-i}[n]\rho_{-l}[n]\right\}}$ kadarlık, gecikme hatası (lag error) adı verilen fazladan OHK oluşmaktadır. Gecikme hatası, GNLMS algoritmasının zaman ile kanalda meydana gelen değişimi daha geç algılamasından kaynaklanmaktadır. Söz konusu fazlalık hata μ γ ile parametreleri ile orantılı olup, azaltılması için μ değerinin 1'e yakın, γ değerinin ise 0'a yakın seçilmesi gerekmektedir. Ancak bu durumda, ayarsızlıktan kaynaklanan OHK, yani ayarsızlık, değeri yükselmekte, seçilen değere göre toplam OHK, $\varsigma_k^{GNLMS}[n]$, değerinde değişim meydana gelmektedir. Bu değişim, ayarsızlık değeri, gecikme hatasının büyüklüğü ve seçilen μ katsayı değerine bağlı olmaktadır. μ değerinin değiştirilmesi ile toplam OHK, $\varsigma_k^{GNLMS}[n]$ artabileceği gibi azalması da mümkün olmaktadır. Bundan dolayı, zaman ile değişen kanallar için en uygun performansı sağlayacak μ değerinin optimizasyonu gerekmektedir. Aşağıda zamanla değişen kanallar için elde edilen teorik OHK değerini en düşük değere getirecek μ hesabı gösterilecektir.

Bir diğer husus ise, GNLMS algoritmasında, GBD kanallarda olduğu gibi, zamanla değişen kanal için de izdüşüm seviyesinin arttırılması, toplam OHK, $\varsigma_k^{GNLMS}[n]$ değerini düşürücü etki yapmaktadır.

Zaman ile değişen durağan olmayan kanallar için, toplam OHK değerini en düşük seviyeye getirecek en uygun katsayı değeri, μ^o bulmak için, (3.96) ile verilen toplam OHK değerinin μ'ye göre türevinin alınarak sıfıra eşitlenmesi gerekmektedir. Bu durumda,

$$\frac{\partial \varsigma_k^{GNLMS}[n]}{\partial \mu} = \frac{\partial}{\partial \mu}\left\{\frac{\mu(1+\gamma)\left(\sum_{i=-m}^{m}\rho_{-i}[n]+1\right)\xi^0[n]}{2\left\{\left(2-\mu(1+\gamma)\right)\left(\sum_{i=-m}^{m}\rho_{-i}[n]\right)^2-\left(2-2\gamma-\mu(1+\gamma)\right)\sum_{i=-m}^{m-1}\sum_{l=i+1}^{m}\rho_{-i}[n]\rho_{-l}[n]\right\}} + \frac{\left\{\left(\sum_{i=-m}^{m}\rho_{-i}[n]\right)^2-(1-\gamma)\sum_{i=-m}^{m-1}\sum_{l=i+1}^{m}\rho_{-i}[n]\rho_{-l}[n]\right\}N_{SYM}{\sigma_{\Re}}^2\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}}{2\mu\left\{\left(2-\mu(1+\gamma)\right)\left(\sum_{i=-m}^{m}\rho_{-i}[n]\right)^2-\left(2-2\gamma-\mu(1+\gamma)\right)\sum_{i=-m}^{m-1}\sum_{l=i+1}^{m}\rho_{-i}[n]\rho_{-l}[n]\right\}}\right\} = 0 \tag{3.97}$$

elde edilmektedir. Burada gerekli düzenlemeler yapıldığında, katsayıları

$$a = \frac{\left(\sum_{i=-m}^{m}\rho_{-i}[n]\right)^2-\sum_{i=-m}^{m-1}\sum_{l=i+1}^{m}\rho_{-i}[n]\rho_{-l}[n]}{(1+\gamma)\left(\sum_{i=-m}^{m}\rho_{-i}[n]+1\right)\xi^0[n]}N_{SYM}{\sigma_{\Re}}^2\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\} \tag{3.98}$$

$$b = \frac{\left(\sum_{i=-m}^{m}\rho_{-i}[n]\right)^2-(1-\gamma)\sum_{i=-m}^{m-1}\sum_{l=i+1}^{m}\rho_{-i}[n]\rho_{-l}[n]}{(1+\gamma)\left(\sum_{i=-m}^{m}\rho_{-i}[n]+1\right)\xi^0[n]}N_{SYM}{\sigma_{\Re}}^2\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\} \tag{3.99}$$

şeklinde olan

$$\mu^2 + a\mu - b = 0 \tag{3.100}$$

ikinci dereceden denklemi elde edilmektedir. En uygun katsayı değeri hesaplandığında,

$$\mu_{1,2}^o[n] = \frac{\left\{\left(\sum_{i=-m}^{m}\rho_{-i}[n]\right)^2-\sum_{i=-m}^{m}{\rho_{-i}}^2[n]\right\}\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}N_{SYM}{\sigma_{\Re}}^2}{2\left(\sum_{i=-m}^{m}\rho_{-i}[n]+1\right)\xi^0[n]}\left\{-1 \pm \sqrt{\left(1+\frac{4(1+\gamma)\left(\sum_{i=-m}^{m}\rho_{-i}[n]+1\right)\xi^0[n]\left\{\left(\sum_{i=-m}^{m}\rho_{-i}[n]\right)^2-(1-\gamma)\sum_{i=-m}^{m-1}\sum_{l=i+1}^{m}\rho_{-i}[n]\rho_{-l}[n]\right\}}{\left\{\left(\sum_{i=-m}^{m}\rho_{-i}[n]\right)^2-\sum_{i=-m}^{m-1}\sum_{l=i+1}^{m}\rho_{-i}[n]\rho_{-l}[n]\right\}^2\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}N_{SYM}{\sigma_{\Re}}^2}\right)}\right\} \tag{3.100}$$

olarak bulunmaktadır. En uygun katsayı değeri pozitif bir değer alması gerektiğinden, en uygun katsayının,

$$\mu^{0}[n] = \frac{\left\{\left(\sum_{i=-m}^{m} \rho_{-i}[n]\right)^{2} - \sum_{i=-m}^{m} \rho_{-i}{}^{2}[n]\right\} \mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\} N_{SYM} {\sigma_{\mathfrak{R}}}^{2}}{2\left(\sum_{i=-m}^{m} \rho_{-i}[n]+1\right)\xi^{0}[n]} \left\{-1 + \sqrt{\left(1 + \frac{4(1+\gamma)\left(\sum_{i=-m}^{m} \rho_{-i}[n]+1\right)\xi^{0}[n]\left\{\left(\sum_{i=-m}^{m} \rho_{-i}[n]\right)^{2} - (1-\gamma)\sum_{i=-m}^{m-1}\sum_{l=i+1}^{m} \rho_{-i}[n]\rho_{-l}[n]\right\}}{\left\{\left(\sum_{i=-m}^{m} \rho_{-i}[n]\right)^{2} - \sum_{i=-m}^{m-1}\sum_{l=i+1}^{m} \rho_{-i}[n]\rho_{-l}[n]\right\}^{2} \mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\} N_{SYM} {\sigma_{\mathfrak{R}}}^{2}}\right)}\right\} \tag{3.101}$$

olarak ayarlanması gerekmektedir. (3.101) ile bulunan değerin sınır değerlerini aşması halinde 0 veya 2 olarak ayarlanması gerekmektedir.

$\mu^{o}[n]$ değeri görüleceği üzere, $\xi^{0}[n]$, EDOHK değerine, en uygun katsayının değişim hızını belirleyen, $N_{SYM}{\sigma_{\mathfrak{R}}}^{2}$ değerine, γ parametre değeri ile sinyalin gücüne, $\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}$, bağlı olmaktadır. EDOHK değeri doğrusal denkleştirici için (2.25)'den görülebileceği üzere alınan sinyalin SGO değerine bağlı olmaktadır. Bu sebeple en uygun değerin kullanımında her iki faktör göz önüne alınarak ayarlanması gerekmektedir. Ayrıca, $\mu^{o}[n]$ değeri HFD ile elde edilen her nokta için, alınan sinyalin gücüne $\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}$ bağlı olarak belirlenmesi gerektiğinden, farklı değerler almaktadır. Bu durumda, GNLMS algoritmasında zamanla değişen kanal için uyarlamalı denkleştirme işleminden en uygun performans elde etmek için, her frekans noktası için (3.101) ile verilen $\mu^{o}[n]$ değerinin kullanılması halinde performans, tüm frekans noktaları için sabit değer kullanılmasına göre iyileşme sağlanmaktadır.

3.5.2. GRLS algoritmasının teorik performansı

GRLS algoritması için ayarsızlık, yakınsama ve takip performansı için gerekli teorik analizler bu alt bölümde gösterilmektedir. GNLMS algoritması için söz konusu parametrelerin belirlenmesi için izlenen yöntem, GRLS algoritması için de kullanılmak suretiyle söz konusu performans değerleri elde edilmektedir.

Ayarsızlık

GRLS algoritması için (3.40) ile verilen katsayı güncelleme eşitliğinde $\Delta W_k^{GRLS}[n] = W_k^{GRLS}[n] - W^{o}[n]$ ile en uygun Wiener değerinden sapma değeri tanımlanarak, kullanıldığında, n. frekans noktası için sapma değeri,

$$\Delta W_k^{GRLS}[n] = \Delta W_{k-1}^{GRLS}[n] + Z_{k,x}[n]X_k^H[n]E_k[n] \tag{3.102}$$

olarak elde edilir. GRLS, algoritmasının hata vektörü, $E_k[n] = D_k[n] - X_k[n]W_{k-1}^{GRLS}[n]$ ve (3.42) ile verilen çoklu regresyon bağıntısı kullanıldığında,

$$\Delta W_k^{GRLS}[n] = \Delta W_{k-1}^{GRLS}[n] + Z_{k,x}[n]X_k^H[n](X_k[n]W^o[n] + N_k[n] - X_k[n]W_{k-1}^{GRLS}[n]) \tag{3.103}$$

halini almaktadır. Sonrasında gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\Delta W_k^{GRLS}[n] = \left(1 - Z_{k,x}[n]\|X_k[n]\|^2\right)\Delta W_{k-1}^{GRLS}[n] + Z_{k,x}[n]X_k^H[n]N_k[n] \tag{3.104}$$

elde edilir. Her iki tarafın norm karesi ile beklenen değeri alındığında,

$$\mathbb{E}\left\{\left|\Delta W_k^{GRLS}[n]\right|^2\right\} = \mathbb{E}\left\{\left(1 - Z_{k,x}[n]\|X_k[n]\|^2\right)^2\right\}\mathbb{E}\left\{\left|\Delta W_{k-1}^{GRLS}[n]\right|^2\right\} - 2Re\left\{E\left\{Z_{k,x}[n]\Delta W_{k-1}[n]\left(1 - Z_{k,x}[n]\|X_k[n]\|^2\right)X_k^H[n]N_k[n]\right\}\right\} + \mathbb{E}\left\{\left(Z_{k,x}[n]\right)^2 N_k^H[n]X_k[n]X_k^H[n]N_k[n]\right\} \tag{3.105}$$

halini almaktadır. Gürültü ile alınan sinyal birbirinden bağımsız olduklarından (3.105) ifadesinin sağındaki ikinci terim,

$$\mathbb{E}\left\{Z_{k,x}[n]\left(1 - Z_{k,x}[n]\|X_k[n]\|^2\right)X_k^H[n]N_k[n]\right\} = \mathbb{E}\left\{Z_{k,x}[n]\left(1 - Z_{k,x}[n]\|X_k[n]\|^2\right)X_k^H[n]\right\}\mathbb{E}\left\{N_k\ [n]\right\} = 0 \tag{3.106}$$

olacaktır. Bu durumda, (3.105) ifadesi sadeleşerek,

$$\mathbb{E}\left\{\left|\Delta W_k^{GRLS}\right|^2\right\} = \mathbb{E}\left\{\left(1 - Z_{k,x}[n]\|X_k[n]\|^2\right)^2\right\}\mathbb{E}\left\{\left|\Delta W_{k-1}^{GRLS}[n]\right|^2\right\} + \mathbb{E}\left\{\left(Z_{k,x}[n]\right)^2 N_k^H[n]X_k[n]X_k^H[n]N_k[n]\right\} \tag{3.107}$$

elde edilmektedir. (3.107) ifadesindeki $\mathbb{E}\left\{\left(1 - Z_{k,x}[n]\|X_k[n]\|^2\right)^2\right\}$ terimi açıldığında,

$$\mathbb{E}\left\{\left(1 - Z_{k,x}[n]\|X_k[n]\|^2\right)^2\right\} = 1 - 2\mathbb{E}\{Z_{k,x}[n]\|X_k[n]\|^2\} + \mathbb{E}\left\{\left(Z_{k,x}[n]\right)^2\|X_k[n]\|^4\right\} \tag{3.108}$$

olmaktadır. (3.108) ifadesinin hesaplanabilmesi için $Z_{k,x}[n]\|X_k[n]\|^2$ rastgele değişkeninin beklenen değeri ve 2. dereceden momentinin belirlenmesi gerekmektedir.

(3.108) ifadesinde bulunan $Z_{k,x}[n]$ terimi, özilinti değeri, $R_{k,x}[n]$ nin tersi olarak tanımlanmaktadır. $Z_{k,x}[n]$ değerinin belirlenmesi için $R_{k,x}[n]$'in beklenen değeri hesaplanmalıdır. Sonrasında elde edilen $E\{R_{k,x}[n]\}$ değerinin tersi alınarak, $E\{Z_{k,x}[n]\}$ değeri elde edilmelidir. n. frekans noktası için (3.24) ile verilen, $R_{k,x}[n]$'in beklenen değeri alınır ise,

$$\mathbb{E}\{R_{k,x}[n]\} = \sum_{i=0}^{k} \beta^{k-i} E\{\|X_i[n]\|^2\} \tag{3.109}$$

elde edilmektedir. Görüldüğü üzere, özilinti değeri, $\|X_i[n]\|^2$ vektör norm karesinin (güç değerlerinin toplamı) beklenen değeri, $E\{\|X_i[n]\|^2\}$'nin unutma faktörü ile ağırlıklandırılmış hali başlangıç bloğundan itibaren toplanarak elde edilmektedir. $\|X_i[n]\|^2 = \sum_{l=-m}^{m} \mathbb{E}\{|X_i[n-i]|^2\}$ şeklinde tanımlandığından, (3.109)

$$\mathbb{E}\{R_{k,x}[n]\} = \sum_{i=0}^{k} \beta^{k-i} \sum_{l=-m}^{m} \mathbb{E}\{|X_i[n-i]|^2\} \tag{3.110}$$

haline dönüşecektir. Alınan sinyalin HFD ile elde edilen herhangi bir n. değeri için, $B_{c,\%90}$ bant genişliği civarındaki genlik değerleri, $|X_i[n-i]|$, arasında yüksek ilintisellik bulunmakta, bu durumda da komşu frekans noktalarının güç değerleri, $|X_i[n-i]|^2$, arasında da yüksek ilintisellik bulunması beklenmektedir. Bu sonuca bağlı olarak, $E\{|X_i[n]|^2\}, n = n-m, \dots 0, \dots, n+m$ değerleri birbirine yakın olmaktadır. Bu durumda alınan sinyalin frekans bölgesinde, n. ve n-i. frekans noktalarının güç oranı, $\rho_{-l}[n] = \frac{E\{|X_i[n-l]|^2\}}{E\{|X_i[n]|^2\}}$ olmaktadır. GRLS algoritması kararlı duruma ulaştığında, beklenen özilinti, $E\{R_{k,x}[n]\}$, değeri $E\{\|X_k[n]\|^2\} = E\{|X_i[n]|^2\}\sum_{l=-m}^{m}\rho_{-l}[n]$ cinsinden,

$$\mathbb{E}\{R_{k,x}[n]\} = \sum_{i=0}^{k}\beta^{k-i}\mathbb{E}\{|X_i[n]|^2\}\sum_{l=-m}^{m}\rho_{-l}[n] = \frac{\sum_{l=-m}^{m}\rho_{-l}[n](1-\beta^{k+1})}{1-\beta}\mathbb{E}\{|X_i[n]|^2\} \tag{3.111}$$

şeklinde ifade edilebilir. Ayrıca, GRLS kararlı duruma ulaştığında, $\mathbb{E}\left\{\frac{\|X_k[n]\|^2}{\sum_{i=0}^{k}\beta^{k-i}\|X_i[n]\|^2}\right\} \approx \frac{\mathbb{E}\{\|X_k[n]\|^2\}}{\mathbb{E}\{\sum_{i=0}^{k}\beta^{k-i}\|X_i[n]\|^2\}}$ ve $Z_{k,x}[n] \approx \left(E\{R_{k,x}[n]\}\right)^{-1}$ olarak alınabilir. $Z_{k,x}[n]$ ifadesi,kararlı durumda,

$$Z_{k,x}[n] = \frac{1-\beta}{\sum_{l=-m}^{m}\rho_{-l}[n]\,\mathbb{E}\{|X[n]|^2\}} \tag{3.112}$$

olarak elde edilir. GRLS kararlı duruma ulaştığında, $\mathbb{E}\{Z_{k,x}[n]\|X_k[n]\|^2\}$ değeri,

$$\mathbb{E}\{Z_{k,x}[n]\|X_k[n]\|^2\} = 1-\beta \tag{3.113}$$

olarak bulunmaktadır.

(3.112)'de bulunan $\mathbb{E}\left\{\left(Z_{k,x}[n]\right)^2\|X_k[n]\|^4\right\}$ terimi için, kararlı durumda gerekli hesaplama yapıldığında,

$$\mathbb{E}\left\{\left(Z_{k,x}[n]\right)^2\|X_k[n]\|^4\right\} = \mathbb{E}\left\{\frac{\|X_k[n]\|^4}{\left(\sum_{i=0}^{k}\beta^{k-i}\|X_i[n]\|^2\right)^2}\right\} \approx \frac{\mathbb{E}\{\|X_k[n]\|^4\}}{\mathbb{E}\left\{\left(\sum_{i=0}^{k}\beta^{k-i}\|X_i[n]\|^2\right)^2\right\}} \tag{3.114}$$

haline gelmektedir. $X_k[n]$ vektörünü oluşturan n. nokta merkezli pencere içerisindeki tüm bileşenlerin gücü göz önüne alındığında, $E\{\|X_k[n]\|^4\}$ terimi,

$$\mathbb{E}\{\|X_k[n]\|^4\} = \mathbb{E}\{(\sum_{i=-m}^{m}|X_k[n-i]|^2)^2\} = \sum_{i=-m}^{m}\mathbb{E}\{|X_k[n-i]|^4\} + 2\sum_{i=-m}^{m-1}\sum_{l=i+1}^{m}\mathbb{E}\{|X_k[n-i]|^2|X_k[n-l]|^2\} \tag{3.115}$$

olarak ifade edilebilir.

GNLMS algoritması için yapılan teorik analizde açıklandığı üzere, $X_k[n-i]$ rastgele değişkeni dairesl simetrik Gauss dağılıma sahip olması ve $mx\Delta f \leq B_{c,\%90}$ olması halinde, komşu frekans noktalarının güç değerleri arasında, $\mathbb{E}\{|X_k[n-i]|^2\} \approx \rho_{-l}[n]E\{|X_k[n]|^2\}$ ve $\mathbb{E}\{|X_k[n-i]|^4\} = 2(E\{|X_k[n-i]|^2\})^2 \approx 2\rho_{-i}^2[n](E\{|X_k[n]|^2\})^2$ olarak alınabilir. Bu durumda, (3.115),

$$\mathbb{E}\{\|X_k[n]\|^4\} \approx 2(\mathbb{E}\{|X[n]|^2\})^2\{\sum_{i=-m}^{m}\rho_{-i}^2[n] + \sum_{i=-m}^{m-1}\sum_{l=i+1}^{m}\rho_{-i}[n]\rho_{-l}[n]\} \tag{3.116}$$

şeklinde alınabilir. $(\sum_{i=-m}^{m}\rho_{-i}[n])^2 = \sum_{i=-m}^{m}\rho_{-i}^2[n] + 2\sum_{i=-m}^{m-1}\rho_{-i}[n]\sum_{l=i+1}^{m}\rho_{-l}[n]$, olduğundan,

$$\mathbb{E}\{\|X_k[n]\|^4\} \approx 2(\mathbb{E}\{|X[n]|^2\})^2\{(\sum_{i=-m}^{m}\rho_{-i}[n])^2 - \sum_{i=-m}^{m-1}\sum_{l=i+1}^{m}\rho_{-i}[n]\rho_{-l}[n]\} \tag{3.117}$$

halini almaktadır. (3.117) paydasında bulunan $E\left\{\left(\sum_{i=0}^{k}\beta^{k-i}\|X_i[n]\|^2\right)^2\right\}$ ifadesi açıldığında,

$$\mathbb{E}\left\{\left(\sum_{i=0}^{k}\beta^{k-i}\|X_i[n]\|^2\right)^2\right\} = \sum_{i=0}^{k}\beta^{2(k-i)}E\{\|X_i[n]\|^2\} + 2\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{l=i+1}^{k}\beta^{2k-i-l}E\{\|X_i[n]\|^2\|X_l[n]\|^2\} \tag{3.118}$$

elde edilir. $\|X_i[n]\|^2$ ile $\|X_l[n]\|^2$ farklı bloklar için vektör normu olduğundan, birbirleri arasında ilinti bulunmamaktadır. Bu durumda, (3.118)'nin sağındaki 2. toplam terimi, $\mathbb{E}\{\|X_i[n]\|^2\|X_l[n]\|^2\} = \mathbb{E}\{\|X_i[n]\|^2\}E\{\|X_l[n]\|^2\}$ olacaktır. Bu durumda, (3.118)

$$\mathbb{E}\left\{\left(\sum_{i=0}^{k}\beta^{k-i}\|X_i[n]\|^2\right)^2\right\} = \sum_{i=0}^{k}\beta^{2(k-i)}\mathbb{E}\{\|X_i[n]\|^4\} + 2\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{l=i+1}^{k}\beta^{2k-i-l}\mathbb{E}\{\|X_i[n]\|^2\}E\{\|X_l[n]\|^2\} \tag{3.119}$$

olmaktadır. Algoritma kararlı duruma geldiğinde, $\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{l=i+1}^{k}\beta^{2k-i-l} = \frac{\beta}{(1-\beta^2)(1-\beta)}$ olacaktır. (3.119) ifadesi bulunan eşdeğer ifadesi kullanıldığında,

$$\mathbb{E}\{|Z_k[n]|^2\} = \mathbb{E}\left\{\left(\sum_{i=0}^{k} \beta^{k-i} \|X_i[n]\|^2\right)^2\right\} = \\ 2(\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\})^2 \left[\frac{\left(\sum_{i=-m}^{m} \rho_{-i}[n]\right)^2 - (1-\beta)\sum_{i=-m}^{m-1}\sum_{l=i+1}^{m} \rho_{-i}[n]\rho_{-l}[n]}{(1-\beta^2)(1-\beta)}\right] \tag{3.120}$$

olmaktadır. Gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\mathbb{E}\left\{\left(Z_{k,x}[n]\right)^2 \|X_k[n]\|^4\right\} = \frac{(1-\beta^2)(1-\beta)\left\{\left(\sum_{i=-m}^{m} \rho_{-i}[n]\right)^2 - \sum_{i=-m}^{m-1}\sum_{l=i+1}^{m} \rho_{-i}[n]\rho_{-l}[n]\right\}}{\left(\sum_{i=-m}^{m} \rho_{-i}[n]\right)^2 - (1-\beta)\sum_{i=-m}^{m-1}\sum_{l=i+1}^{m} \rho_{-i}[n]\rho_{-l}[n]} \tag{3.121}$$

haline dönüşmektedir. (3.108) ifadesine, (3.113) ve (3.121)’de verilen ifadeler kullanıldığında,

$$\mathbb{E}\left\{\left(1 - Z_{k,x}[n]\|X_k[n]\|^2\right)^2\right\} = 1 - 2(1-\beta) + \\ \frac{(1-\beta^2)(1-\beta)\left\{\left(\sum_{i=-m}^{m} \rho_{-i}[n]\right)^2 - \sum_{i=-m}^{m-1}\sum_{l=i+1}^{m} \rho_{-i}[n]\rho_{-l}[n]\right\}}{\left(\sum_{i=-m}^{m} \rho_{-i}[n]\right)^2 - (1-\beta)\sum_{i=-m}^{m-1}\sum_{l=i+1}^{m} \rho_{-i}[n]\rho_{-l}[n]} \tag{3.122}$$

olarak bulunmaktadır. (3.122), (3.107) içerisine yerleştirildiğinde,

$$\mathbb{E}\left\{\left|\Delta W_k^{GRLS}[n]\right|^2\right\} = \Bigg(1 - 2(1-\beta) + \\ \frac{(1-\beta^2)(1-\beta)\left\{\left(\sum_{i=-m}^{m} \rho_{-i}[n]\right)^2 - \sum_{i=-m}^{m-1}\sum_{l=i+1}^{m} \rho_{-i}[n]\rho_{-l}[n]\right\}}{\left(\sum_{i=-m}^{m} \rho_{-i}[n]\right)^2 - (1-\beta)\sum_{i=-m}^{m-1}\sum_{l=i+1}^{m} \rho_{-i}[n]\rho_{-l}[n]}\Bigg) E\left\{\left|\Delta W_{k-1}^{GRLS}[n]\right|^2\right\} + \\ E\{|Z_k[n]|^2 N_k^H[n] X_k[n] X_k^H[n] N_k[n]\} \tag{3.123}$$

elde edilir. (3.123) ifadesi skaler sayı olduğundan, eşitliğin her iki tarafına iz alma işlemi yapılabilir. Bu durumda, $E\{|Z_k[n]|^2 N_k^H[n] X_k[n] X_k^H[n] N_k[n]\}$ terimi,

$$\mathbb{E}[Tr\{|Z_k[n]|^2 N_k^H[n] X_k[n] X_k^H[n] N_k[n]\}] \tag{3.124}$$

halini almaktadır. $Tr\{AB\} = Tr\{BA\}$ değişim özelliği uygulandığında,

$$\mathbb{E}[Tr\{|Z_k[n]|^2 N_k[n] N_k^H[n] X_k[n] X_k^H[n]\}] \tag{3.125}$$

elde edilmektedir. Ayrıca, beklenen değer ve iz alma operatörü tekrar yer değiştirildiğinde,

$$Tr[\mathbb{E}\{|Z_k[n]|^2 X_k[n] X_k^H[n][n] N_k[n] N_k^H[n]\}] \quad (3.126)$$

halini almaktadır. $X_k[n]$ ile $N_k[n]$ vektörleri istatistiki olarak bağımsız olduğundan,

$$Tr[\mathbb{E}\{|Z_k[n]|^2 X_k[n] X_k^H[n]\}\mathbb{E}\{N_k[n] N_k^H[n]\}] \quad (3.127)$$

şeklinde hesaplanabilir. Burada, $\mathbb{E}\{N_k[n] N_k^H[n]\} = N_{SYM}{\sigma_n}^2 I$ olmaktadır. $\mathbb{E}\{|Z_k[n]|^2 X_k[n] X_k^H[n]\}$, matrisi hesaplandığında,

$$\mathbb{E}\{|Z_k[n]|^2 X_k[n] X_k^H[n]\}$$
$$= \begin{bmatrix} \mathbb{E}\{|Z_k[n]|^2 |X_k[n-m]|^2\} & \cdots & \mathbb{E}\{|Z_k[n]|^2 X_k[n-m] {X_k}^*[n+m]\} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{E}\{|Z_k[n]|^2 X_k[n+m] {X_k}^*[n-m]\} & \cdots & \mathbb{E}\{|Z_k[n]|^2 |X_k[n+m]|^2\} \end{bmatrix} \quad (3.128)$$

olmaktadır. $\mathbb{E}\{X_k[n-i] {X_k}^*[n-l]\} = 0, i \neq l$ olduğundan, bu matrisin sadece köşegen değerleri sıfırdan farklı olmaktadır. Söz konusu köşegen değerleri, kararlı durumda, $|X_k[n]|^2$ ve $|X_k[n-i]|^2, i = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m$ için birbirinden bağımsız olduğundan,

$$\mathbb{E}\{|Z_k[n]|^2 |X_k[n-i]|^{\mathbf{2}}\} \approx \mathbb{E}\{|Z_k[n]|^2\}\mathbb{E}\{|X_k[n-i]|^2\} \quad (3.129)$$

şeklinde hesaplanabilir. (3.128) ve (3.129) ifadeleri (3.127) içerisinde kullanıldığında,

$$Tr[E\{|Z_k[n]|^2 X_k[n] X_k^H[n]\} E\{N_k[n] N_k^H[n]\}] =$$
$$N_{SYM}{\sigma_n}^2 \mathbb{E}\{|Z_k[n]|^2\} \sum_{i=-m}^{m} \mathbb{E}\{|X_k[n-i]|^2\} \quad (3.130)$$

elde edilmektedir. Komşu frekans noktalarının gücü arasındaki ilintisellik göz önüne alındığında,

$$Tr\left[E\left\{|Z_k[n]|^2 X_k[n] {X_k}^H[n]\right\} E\left\{N_k[n] {N_k}^H[n]\right\}\right] =$$
$$N_{SYM}{\sigma_n}^2 \mathbb{E}\{|Z_k[n]|^2\}\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\} \sum_{i=-m}^{m} \rho_{-i}[n] \quad (3.131)$$

olmaktadır.

$\mathbb{E}\{|Z_k[n]|^2\}\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}$ ifadesi ise,

$$\mathbb{E}\{|Z_k[n]|^2\}\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\} = \frac{(1-\beta^2)(1-\beta)\sum_{i=-m}^{m}\rho_{-i}[n]}{2\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}\left\{\left(\sum_{i=-m}^{m}\rho_{-i}[n]\right)^2-(1-\beta)\sum_{i=-m}^{m-1}\sum_{l=i+1}^{m}\rho_{-i}[n]\rho_{-l}[n]\right\}} \quad (3.132)$$

olarak elde edilmektedir.

Sonuç olarak fazlalık OHK değeri, $\mathbb{E}\left\{\left|E_k^{a,GRLS}[n]\right|^2\right\} = \mathbb{E}\left\{\left|\Delta W_{k-1}^{GRLS}[n]\right|^2|X_k[n]|^2\right\}$,

$$\mathbb{E}\left\{\left|E_k^{a,GRLS}[n]\right|^2\right\} = \frac{(1-\beta^2)\sum_{i=-m}^{m}\rho_{-i}[n]N_{SYM}{\sigma_n}^2}{2\left\{\left(\sum_{i=-m}^{m}\rho_{-i}[n]\right)^2(1+\beta^2)-(1-\beta)^2\sum_{i=-m}^{m-1}\sum_{l=i+1}^{m}\rho_{-i}[n]\rho_{-l}[n]\right\}} \quad (3.133)$$

olarak bulunmaktadır.

(3.133) kullanılarak kararlı durumda elde edilen GRLS algoritması ayarsızlık değeri,

$$M^{GRLS}[n] = \frac{(1-\beta^2)\sum_{i=-m}^{m}\rho_{-i}[n]}{2\{(\sum_{i=-m}^{m}\rho_{-i}[n])^2(1+\beta^2)-(1-\beta)^2\sum_{i=-m}^{m-1}\sum_{l=i+1}^{m}\rho_{-i}[n]\rho_{-l}[n]\}} \quad (3.134)$$

olarak bulunmaktadır. Ayarsızlık değerinden görüldüğü üzere, GRLS algoritmasında, GNLMS algoritması için olduğu gibi, izdüşüm seviyesinin yükseltilmesi ile elde edilen ayarsızlık değeri de düşmektedir. GRLS algoritmasının izdüşüm seviyesi 1 olarak seçildiğinde, geleneksel RLS algoritması için ayarsızlık değeri $\frac{(1-\beta^2)}{2(1+\beta^2)}$ elde edilmektedir.

(3.134) ifadesinden görüldüğü üzere ayarsızlık değeri $\sum_{i=-m}^{m}\rho_{-i}[n]$ ile yaklaşık olarak ters orantılı olmaktadır. Bu durumda, GRLS izdüşüm seviyesinin arttırılması ile, $\sum_{i=-m}^{m}\rho_{-i}[n]$ daha büyük değer alacağından, elde edilen ayarsızlık değeri azalması gerekmektedir. Ancak izdüşüm seviyesinin 3'den daha büyük ayarlanması halinde, GNLMS algortimasında olduğu gibi, kararlı durumda OHK performansında iyileşme marjinal seviyede olmaktadır. Örnek olarak $\beta = 0.5$ olarak alınması, $\rho_{-i}[n] = 1, i = -m, \ldots, m$ olarak kabul edilmesi ve GRLS izdüşüm seviyesinin 1, 3, 5 ve 7 olarak ayarlanması halinde, kararlı durum OHK değerlerinde EDOHK değerine göre ayarsızlıktan dolayı meydana gelen artık OHK değerleri sırası ile, 1.25dB, 0.53dB, 0.18 dB ve 0.029dB olmaktadır. İşlemsel karmaşıklık bölümünde açıklandığı üzere izdüşüm seviyesinin artması ile işlemsel karmaşıklık seviyesi yükselmektedir. Bu sebeple, GRLS algoritması için de izdüşüm seviyesinin 3 olarak seçilmesi, elde edilecek ayarsızlık değeri açısından en uygun olduğu düşünülmektedir.

Yakınsama

(3.131) kullanılarak, (3.107) ifadesinde yerine konulduğunda,

$$\mathbb{E}\left\{\left|\Delta W_k^{GRLS}[n]\right|^2\right\} = \mathbb{E}\{(1 - Z_k[n]\|X_k[n]\|^2)^2\}\mathbb{E}\left\{\left|\Delta W_{k-1}^{GRLS}[n]\right|^2\right\} + N_{SYM}{\sigma_n}^2\mathbb{E}\{|Z_k[n]|^2\}\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}\sum_{i=-m}^{m}\rho_{-i}[n] \tag{3.135}$$

elde edilir.

(3.135)'de bulunan, $\mathbb{E}\{Z_k[n]\}$ ve $\mathbb{E}\{|Z_k[n]|^2\}$ değerlerinin zamana bağlı değişimi, (3.111) ile hesaplandığında, sırasıyla,

$$\mathbb{E}\{Z_k[n]\} \approx \left(E\{R_{k,x}[n]\}\right)^{-1} = \frac{(1-\beta)Z_{-1}[n]}{\beta^{k+1}(1-\beta)+\left(1-\beta^{k+1}\right)\left(\sum_{l=-m}^{m}\rho_{-l}[n]\right)\mathbb{E}\{|X[n]|^2\}Z_{-1}[n]} \tag{3.136}$$

ve,

$$\mathbb{E}\{|Z_k[n]|^2\} = \frac{(1-\beta)\left(1-\beta^2\right)Z_{-1}^2[n]}{\beta^{2(k+1)}(1-\beta)(1-\beta^2)+2\beta^{k+1}\left(1-\beta^{k+1}\right)Z_{-1}[n]\left(\sum_{l=-m}^{m}\rho_{-l}[n]\right)E\{|X[n]|^2\}\left\{(1-\beta^2)+\beta\left(1-\beta^k\right)Z_{-1}[n]\left(\sum_{l=-m}^{m}\rho_{-l}[n]\right)E\{|X[n]|^2\}\right\}} \tag{3.137}$$

elde edilmektedir. (3.135) ifadesinde (3.136) ve (3.137) ile verilen sonuçlar kullanılarak, aşğıdaki tanımlamalar yapıldığında,

$$\mathcal{S}_k[n] = \frac{2(1-\beta)Z_{-1}[n]\left(\sum_{l=-m}^{m}\rho_{-l}[n]\right)\mathbb{E}\{|X[n]|^2\}}{\beta^{k+1}(1-\beta)+\left(1-\beta^{k+1}\right)\left(\sum_{l=-m}^{m}\rho_{-l}[n]\right)\mathbb{E}\{|X[n]|^2\}Z_{-1}[n]} \tag{3.138}$$

$$\mathcal{T}_k[n] = \frac{\mathbf{2}(1-\beta)\left(1-\beta^2\right)Z_{-1}^2[n]\left(\sum_{l=-m}^{m}\rho_{-l}[n]\right)^2\mathbb{E}\{|X[n]|^2\}}{\beta^{2(k+1)}(1-\beta)(1-\beta^2)+2\beta^{k+1}\left(1-\beta^{k+1}\right)Z_{-1}[n]\left(\sum_{l=-m}^{m}\rho_{-l}[n]\right)\mathbb{E}\{|X[n]|^2\}\left\{(1-\beta^2)+\beta\left(1-\beta^k\right)Z_{-1}[n]\left(\sum_{l=-m}^{m}\rho_{-l}[n]\right)\mathbb{E}\{|X[n]|^2\}\right\}} \tag{3.139}$$

(3.135) katsayı sapmanın OHK zamana bağlı değişimi,

$$\mathbb{E}\left\{\left|\Delta W_{k+1}^{GRLS}[n]\right|^2\right\} = (1 - \mathcal{S}_k[n] + \mathcal{T}_k[n])\mathbb{E}\left\{\left|\Delta W_k^{GRLS}[n]\right|^2\right\} + \mu^2\mathcal{T}_k[n]N_{sym}\sigma_n^2 \tag{3.140}$$

haline dönüşür. (3.140) ifadesini sadeleştirmek için

$$\mathcal{A}_k[n] = 1 - \mathcal{S}_k[n] + \mathcal{T}_k[n] \tag{3.141}$$

$$\mathcal{B}_k[n] = N_{sym}\sigma_n^2\mathcal{T}_k[n] \tag{3.142}$$

tanımlamaları kullanılması halinde,

$$E\left\{\left|\Delta W_k^{GRLS}[n]\right|^2\right\} = \mathcal{A}_k^{GRLS}[n]E\left\{\left|\Delta W_{k-1}^{GRLS}[n]\right|^2\right\} + \mathcal{B}_k^{GRLS}[n]N_{SYM}{\sigma_n}^2 \tag{3.143}$$

olarak elde edilir. (3.143) ifadesi başlangıç, $i = 0$ bloğundan itibaren hesaplanacak olur ise, ortalama katsayı sapma karesi beklenen değeri için,

$$E\left\{\left|\Delta W_k^{GRLS}[n]\right|^2\right\} = \prod_{i=0}^{k}\mathcal{A}_i^{GRLS}[n]\,\mathbb{E}\{|\Delta W_{-1}^{GRLS}[n]|^2\} + \sum_{i=0}^{k}\mathcal{A}_i^{GRLS}[n]\,\mathcal{B}_i^{GRLS}[n]N_{SYM}{\sigma_n}^2 \tag{3.144}$$

elde edilir. $\xi_k^{GRLS}[n] = E\{|E_k^a[n]|^2\} = E\left\{|X_k[n]|^2\left|\Delta W_{k-1}^{GRLS}[n]\right|^2\right\}$ olduğundan,

$$\xi_k^{GRLS}[n] = E\{|X_k[n]|^2\}\prod_{i=0}^{k}\mathcal{A}_i^{GRLS}[n]\,\mathbb{E}\{|\Delta W_{-1}^{GRLS}[n]|^2\} + E\{|X_k[n]|^2\}\sum_{i=0}^{k}\mathcal{A}_i^{GRLS}[n]\,\mathcal{B}_i^{GRLS}[n]N_{SYM}{\sigma_n}^2 \tag{3.145}$$

şeklinde GRLS algoritmasının öğrenmesi eğrisi elde edilir. GNLMS algoritmasının tersine, GRLS algoritmasının yakınsama hızı izdüşüm seviyesinin arttırılması ile, $\mathcal{A}_i^{GRLS}[n] > \mathcal{A}_i^{RLS}[n]$ olduğundan daha hızlı olmaktadır. GRLS algoriştmasının izdüşüm seviyesinin arttırılması, yakınsama performansını iyileştirici etki göstermektedir. Ayrıca, zaman bölgesi geleneksel RLS algortimasında olduğu gibi, GRLS algoritmasında her adımda elde edilen yakınsama hızı, her blokta farklı olmaktadır.

Takip performansı

Durağan olmayan kanal göz önüne alındığında, GRLS ortalama sapma katsayısı,

$$\Delta W_k^{GRLS}[n] = W_k^{GRLS}[n] - W_k^{o}[n] \tag{3.146}$$

şeklinde hesaplanmaktadır. Ayrıca, n. frekans noktası için tanımlanan $D_k[n]$ vektörün, (3.42) ile verilen ifadeyi sağladığı kabul edilmektedir.

GRLS algoritması katsayı güncelleme ifadesi (3.41) ifadesinin her iki tarafından, ${W_k}^0[n]$ çıkarılarak ortalama sapma katsayısı,

$$\Delta W_k^{GRLS}[n] = \Delta W_{k-1}^{GRLS}[n] - W_{k-1}^{o}[n] + Z_{k,x}[n]{X_k}^H[n]\big(X_k[n]{W_k}^0[n] + \mathcal{N}_k[n] - X_k[n]W_k[n]\big) \tag{3.147}$$

haline dönüşmektedir. Zamanla değişen en uygun katsayı değeri, (2.67) ile verilen 1. dereceden Markov zinciri şeklinde kabul edildiğinde, $\Delta W_k^{GRLS}[n]$

$$\Delta W_k^{GRLS}[n] = \big(1 - Z_{k,x}[n]\|X_k[n]\|^2\big)\Delta W_{k-1}^{GRLS}[n] + Z_{k,x}[n]{X_k}^H[n]\mathcal{N}_k[n] + (1 - a)W_{k-1}^{o}[n] - \mathfrak{N}_k[n] \tag{3.148}$$

olacaktır. a değeri 1'e çok yakın bir değer olduğundan $(0.999 < a < 1)$, $(1 - a)W_{k-1}^{o}[n] \approx 0$ olmaktadır. Bu durumda, katsayı sapma değeri,

$$\Delta W_k^{GRLS}[n] = \big(1 - Z_{k,x}[n]\|X_k[n]\|^2\big)\Delta W_{k-1}^{GRLS}[n] + Z_k[n]{X_k}^H[n]\mathcal{N}_k[n] - \mathfrak{N}_k[n] \tag{3.149}$$

şeklinde değişime uğrayacaktır. Burada $\mathcal{N}_k[n]$, $\Delta W_k[n]$ ve $\mathfrak{N}_k[n]$ birbirinden istatistiki olarak bağımsızdır. Ayarsızlık değerinin hesabında yapıldığı şekilde, (3.149)'un her iki tarafı $X_k[n]$ ile çarpılması, norm karesinin beklenen değerinin alınması halinde,

$$\mathbb{E}\left\{\left|X_k[n]\,\Delta W_k^{GRLS}[n]\right|^2\right\} = \mathbb{E}\left\{\left(1 - Z_{k,x}[n]\|X_k[n]\|^2\right)^2\right\}\mathbb{E}\left\{\left|X_k[n]\,\Delta W_{k-1}^{GRLS}[n]\right|^2\right\} + \mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}\mathbb{E}\{|\mathfrak{N}_k[n]|^2\} + \mathbb{E}\left\{\left(Z_{k,x}[n]\right)^2|X_k[n]|^2\,\mathcal{N}_k{}^H[n]X_k[n]X_k{}^H[n]\mathcal{N}_k[n]\right\} \tag{3.150}$$

olmaktadır. GRLS algoritması kararlı duruma geldiğinde, $\mathbb{E}\{|X_k[n]\,\Delta W_{k+1}[n]|^2\} \approx \mathbb{E}\{|X_k[n]\,\Delta W_k[n]|^2\}$ olacaktır. (3.150) eşitliğinin sağındaki son ifade, ayarsızlık değeri hesaplanmasında bulunmuş olup, (3.131) ile verilmektedir. Gerekli düzenleme yapıldığında, zamanla değişen GBD olmayan durum için toplam OHK $\varsigma_k^{GRLS}[n]$,

$$\varsigma_k^{GRLS}[n] = \xi^0\,[n] + \frac{1}{\left\{\left(\sum_{i=-m}^{m}\rho_{-i}[n]\right)^2(1+\beta^2) - (1-\beta)^2\sum_{i=-m}^{m-1}\sum_{l=i+1}^{m}\rho_{-i}[n]\rho_{-l}[n]\right\}}\left\{\frac{(1-\beta^2)\sum_{i=-m}^{m}\rho_{-i}[n]\,\xi^0\,[n]}{2} + \frac{\left\{(\sum_{i=-m}^{m}\rho_{-i}[n])^2 - (1-\beta)\sum_{i=-m}^{m-1}\sum_{l=i+1}^{m}\rho_{-i}[n]\rho_{-l}[n]\right\}\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}N_{sym}\sigma_{\mathfrak{N}}{}^2}{(1-\beta)}\right\} \tag{3.151}$$

olarak elde edilir.

Zamanla değişen kanaldan elde edilen OHK değeri, $\varsigma_k^{GRLS}[n]$ bakıldığında, GBD kanal için elde edilen OHK'ne ek olarak $\frac{\left\{\sum_{i=-m}^{m}\rho_{-i}[n]-(1-\beta)\sum_{i=-m}^{m-1}\sum_{l=i+1}^{m}\rho_{-i}[n]\rho_{-l}[n]\right\}\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}N_{sym}\sigma_{\mathfrak{N}}{}^2}{(1-\beta)\left\{\left(\sum_{i=-m}^{m}\rho_{-i}[n]\right)^2(1+\beta^2)-(1-\beta)^2\sum_{i=-m}^{m-1}\sum_{l=i+1}^{m}\rho_{-i}[n]\rho_{-l}[n]\right\}}$ kadarlık, gecikme hatası (lag error) adı verilen fazladan OHK oluşmaktadır. Gecikme hatası, GRLS algoritmasının zaman ile kanalda meydana gelen değişimi daha geç algılamasından kaynaklanmaktadır. Söz konusu fazlalık hata $(1-\beta)$ ile ters orantılıdır. Gecikme hatasının azaltılması için β değerinin 0'a yakın seçilmesi gerekmektedir. Ancak bu durumda, ayarsızlıktan kaynaklanan OHK, yani ayarsızlık, değeri yükselmekte, seçilen değere göre toplam OHK, $\varsigma_k^{GRLS}[n]$, değerinde değişim meydana gelmektedir. Bu değişim, ayarsızlık değeri, gecikme hatasının büyüklüğü ve seçilen β katsayı değerine bağlı olmaktadır. β değerinin değiştirilmesi ile toplam OHK, $\varsigma_k^{GRLS}[n]$ artabileceği gibi azalması da mümkün olmaktadır. Bundan dolayı, zaman ile değişen kanallar için en uygun performansı sağlayacak β değerinin optimizasyonu gerekmektedir. Aşağıda zamanla değişen kanallar için elde edilen teorik OHK değerini en düşük değere getirecek β hesabı gösterilecektir.

Bir diğer husus ise, GRLS algoritmasında, GBD kanallarda olduğu gibi, zamanla değişen kanal için de izdüşüm seviyesinin arttırılması, toplam OHK, $\varsigma_k^{GRLS}[n]$ değerini düşürücü etki yapmaktadır.

Zaman ile değişen durağan olmayan kanallar için, toplam OHK değerini en düşük seviyeye getirecek en uygun katsayı değeri, β^o bulmak için, (3.151) ile verilen toplam OHK değerinin β'ye göre türevinin alınarak sıfıra eşitlenmesi gerekmektedir. Bu durumda,

$$\frac{\partial \varsigma_k^{GRLS}[n]}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{(1-\beta^2)(1-\beta)\sum_{i=-m}^{m} \rho_{-i}[n]\, \xi^0\,[n] + 2\{(\sum_{i=-m}^{m} \rho_{-i}[n])^2 - (1-\beta)\sum_{i=-m}^{m-1}\sum_{l=i+1}^{m} \rho_{-i}[n]\rho_{-l}[n]\}\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}N_{sym}{\sigma_{\mathfrak{N}}}^2}{(1-\beta)\{(\sum_{i=-m}^{m} \rho_{-i}[n])^2(1+\beta^2) - (1-\beta)^2\sum_{i=-m}^{m-1}\sum_{l=i+1}^{m} \rho_{-i}[n]\rho_{-l}[n]\}} \right) \tag{3.152}$$

elde edilir. (3.152) çözüldüğünde, katsayıları

$$\mathcal{h} = \xi^o\,[n] \tag{3.153}$$

$$\mathcal{k} = \mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}N_{sym}{\sigma_{\mathfrak{N}}}^2 \tag{3.154}$$

$$\ell = \sum_{i=-m}^{m} \rho_{-i}[n] \tag{3.155}$$

$$\mathcal{m} = \sum_{i=-m}^{m-1}\sum_{l=i+1}^{m} \rho_{-i}[n]\rho_{-l}[n] \tag{3.156}$$

$$4\{\mathcal{k}\mathcal{m}(\ell^2+\mathcal{m}) - \ell^3\mathcal{h}\}\beta^3 + (4\mathcal{h} - 3\mathcal{k})\beta^2 + 4\{\mathcal{k}\mathcal{m}^2 - \ell^3(\mathcal{h}+\mathcal{k})\}\beta + 2\ell^2\mathcal{k}(\ell^2 - \mathcal{m}) = 0 \tag{3.157}$$

olarak üçüncü dereceden denklem bulunmaktadır. Söz konusu debklemin kökleri,

$$\beta_{1,2}^o = \left(1 + \frac{\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}N_{SYM}{\sigma_{\mathfrak{N}}}^2}{2\xi^0\,[n]}\right) \pm \sqrt{\left(1 + \frac{\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}N_{SYM}{\sigma_{\mathfrak{N}}}^2}{2\xi^0\,[n]}\right)^2 - 1} \tag{3.158}$$

elde edilir. En uygun unutma faktörü değeri 0 ile 1 arasında pozitif bir değer alması gerektiğinden,

$$\beta^{o}\,[n] = \left(1 + \frac{\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}N_{SYM}{\sigma_{\mathfrak{R}}}^2}{2\xi^0\,[n]}\right) - \sqrt{\left(1 + \frac{\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}N_{SYM}{\sigma_{\mathfrak{R}}}^2}{2\xi^0\,[n]}\right)^2 - 1} \qquad (3.159)$$

olarak ayarlanması, bulunan değer sınır değerlerini aşması halinde 0 veya 1 olarak ayarlanması gerekmektedir. En uygun katsayı değeri görüleceği üzere, hem EDOHK'ne hem de katsayının değişim hızını belirleyen, $N_{SYM}{\sigma_{\mathfrak{R}}}^2$ değerine bağlı olmaktadır. EDOHK değeri doğrusal denkleştirici için (2.22)'den görülebileceği üzere alınan sinyalin SGO değerine bağlı olmaktadır. Bu sebeple en uygun değerin kullanımında her iki faktör göz önüne alınarak ayarlanması gerekmektedir. (3.159)'dan görülebileceği üzere, en uygun katsayı değeri HFD ile elde edilen her nokta için farklı bir değer alması gerekmektedir. her frekans noktası için en uygun bir katsayı değerinin kullanılması halinde performans, sabit değerli algoritmaya göre iyileşme sağlanmaktadır.

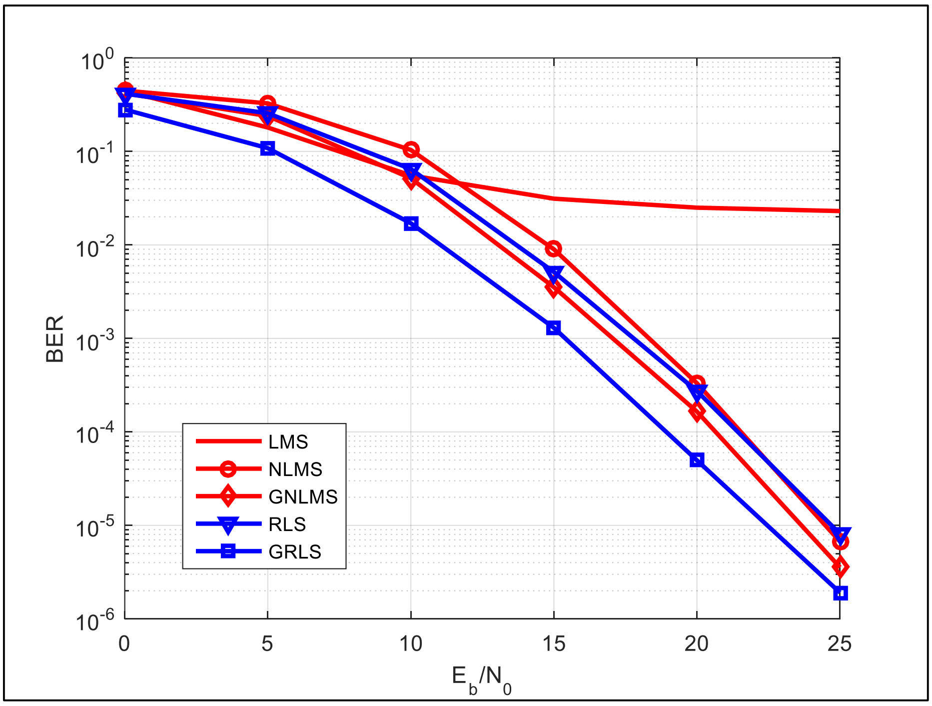
3.6. Sayısal Benzetim Sonuçları

TT-FBD için geliştirilen, GRLS ve GNLMS algoritmalarının performansını belirlemek üzere yapılan bilgisayar benzetim sonuçları bu alt bölümde sunulmaktadır. Benzetim çalışmaları için Rayleigh sönümlemeli, ITU-T Extended Vehicular A kanalı (3GPP TS 36.10, 2008) göz önüne alınmıştır. Alıcı verici sistem parametreleri olarak, her blokta N_{SYM}=256 sembol bulunduğu, her çerçevenin N_B=100 bloktan oluştuğu, her çerçevenin başında N_T=5 eğitim dizisi bloğu bulunduğu kabul edilmiştir. Ayrıca, haberleşmede kullanılan frekans f=2Ghz olarak, haberleşme hızı ise 4Mbaud olarak alınmıştır.

GNLMS ve GRLS uyarlamalı algoritma parametreleri: $\mu = 0.9, \gamma = 0.1, \beta = 0.5$ olarak ayarlanmıştır.

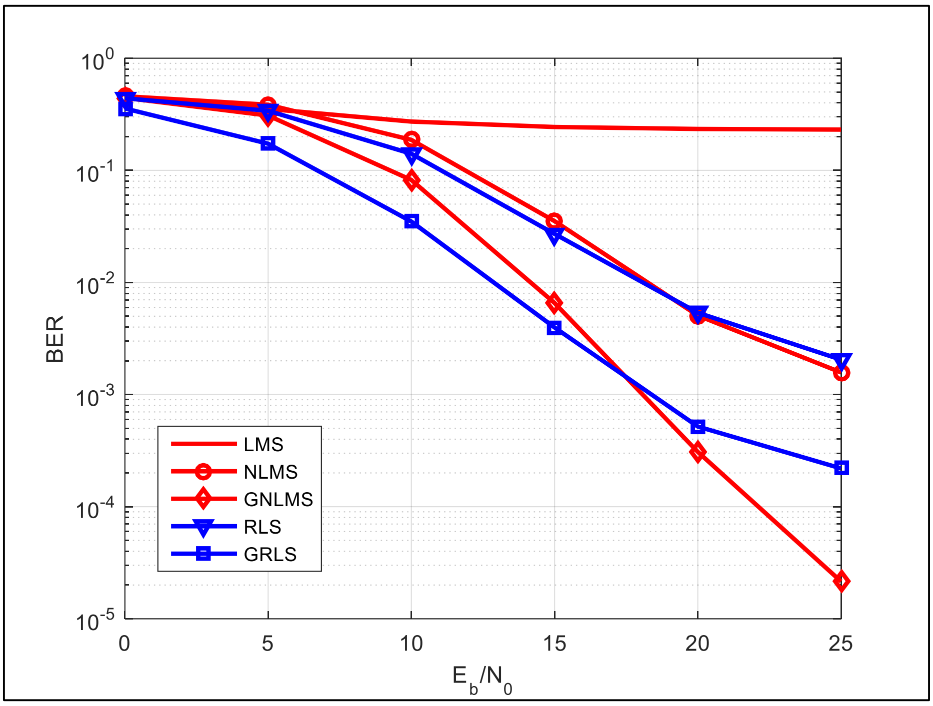
Şekil 3.4-3.5'te GNLMS ve GRLS algoritmalarının farklı kullanıcı hızlarında, yani Doppler kayma frekanslarında elde edilen BHO performansı, geleneksel LMS ve RLS algoritma performansları ile karşılaştırmalı olarak gösterilmektedir. Bu benzetim çalışmasında kipleme metodu olarak BPSK (ikili faz kaydırma) metodu uygulanmıştır. Elde edilen performans sonuçlarından, LMS algoritmasının tüm hızlarda en kötü performansı sergilediği görülmektedir. LMS algoritmasının yakınsama hızının düşüklüğünden dolayı, algortima yavaş bir şekilde yakınsama sağlamakta ve denkleştirici katsayısı yeterli doğruluk seviyesine gelemektedir. Bundan dolayı, LMS algoritmasında yakınsama problemi yaşanmakta, performans oldukça yetersiz kalmaktadır. NLMS, RLS ve yeni önerilen GNLMS algoritmalarının düşük doppler frekans kayma değerinde birbirine yakın performans sergilemekle beraber, GNLMS algoritması diğer algoritmalara göre bir miktar daha iyileşme sağlamaktadır. Bu durumda en iyi performansı GRLS algoritması sergilemektedir. GRLS algoritması, diğer algoritmalara göre yaklaşık olarak 2dB'lik bir iyileşme sağlamaktadır. Söz konusu iyileşme, algoritmanın yüksek ilintisellik bulunan komşu frekans noktalarını göz önüne alarak, gürültünün katsayı güncellemedeki etkisini azaltması ile sağlanmaktadır.

Doppler kayma frekansının artması ile beraber, GNLMS ve GRLS algoritmaları, geleneksel algoritmalara göre daha iyi performans sağlamakta, ve Doppler frekansı yüksek seviyelere ulaştığında, GNLMS algoritması tüm algoritmalar içerisinde en iyi performansı sağlamaktadır.

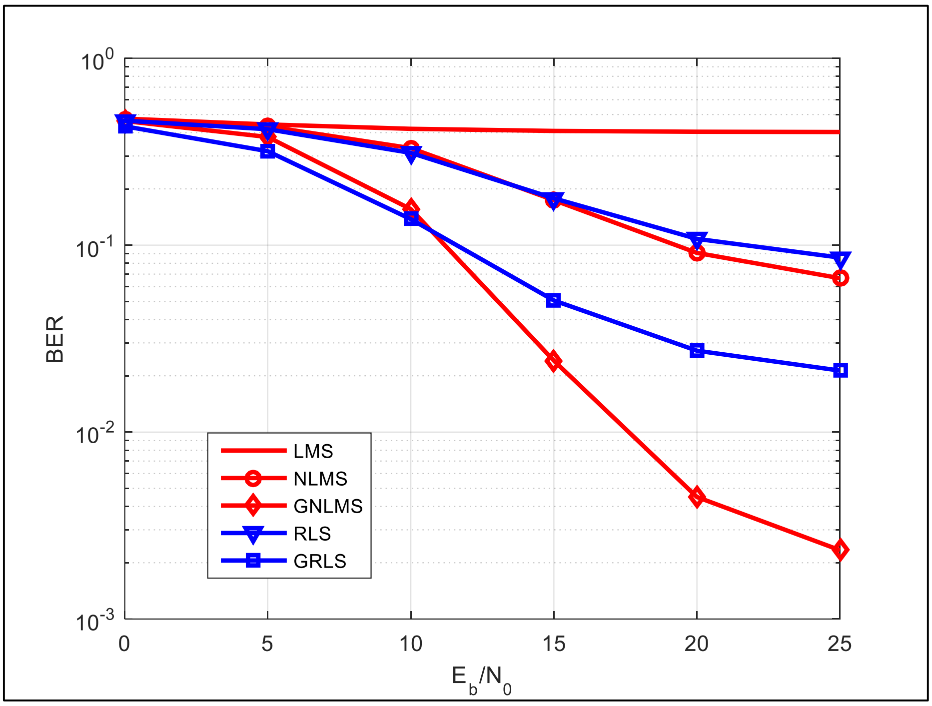


Şekil 3.4. GNLMS ve GRLS algoritmalarının BHO performansları, v= 25km/s

Kullanılan tüm algoritmaların, OHK performanslarına yakınsamasını gösteren öğrenme eğrileri, 75km/saat kullanıcı hızı (f_D=141Hz) ve 25dB sinyal gürültü oranı, SGO, için karşılaştırma yapabilmek üzere Şekil 3.6 ile gösterilmektedir. Görüldüğü üzere GRLS ve GNLMS algoritmaları en düşük OHK değerinin elde edilmesini sağlamakta, ve en hızlı şekilde en uygun çözüme yakınsama performansı göstermektedir. GNLMS algoritması kararlı duruma yaklaşık bir blok sonunda ulaşırken, NLMS ve RLS algoritmaları için bu değerler sırasıyla 3 ve 5 blok sonunda olmaktadır. LMS algoritması ise, diğer algoritmalara göre çok daha düşük hızda çözüme yakınsamaya çalışmakta, ancak eğitim dizisinin bitmesinden itibaren ıraksamaya başlamaktadır. Bu sebepten ötürü, frekans bölgesinde çalışan LMS algoritmasının kullanımı uygun olmamaktadır.

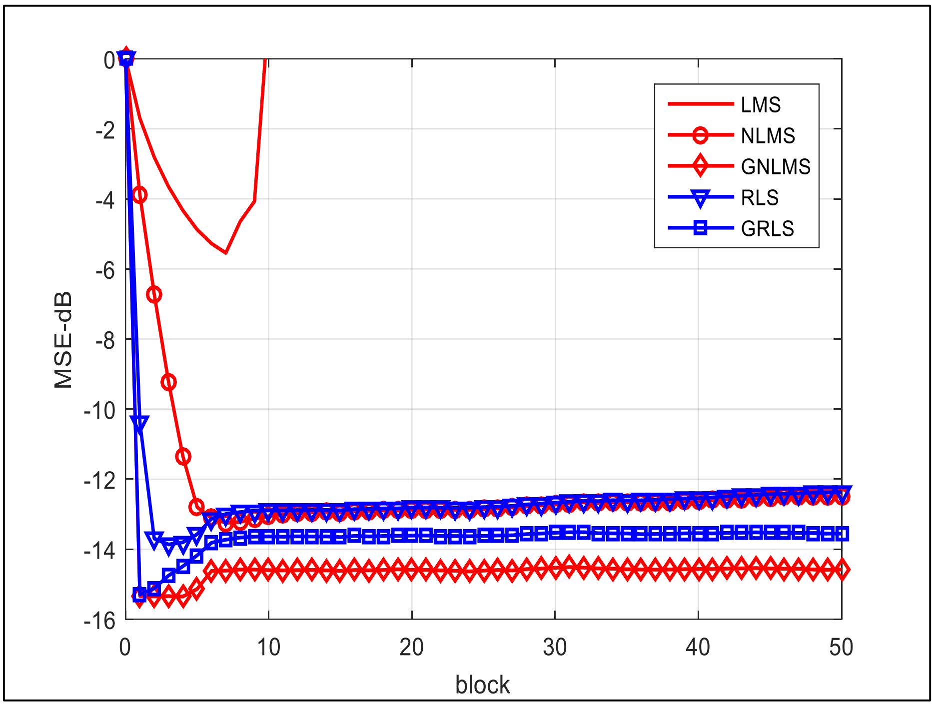


Şekil 3.5. GNLMS ve GRLS algoritmalarının BHO performansları, v= 75km/s



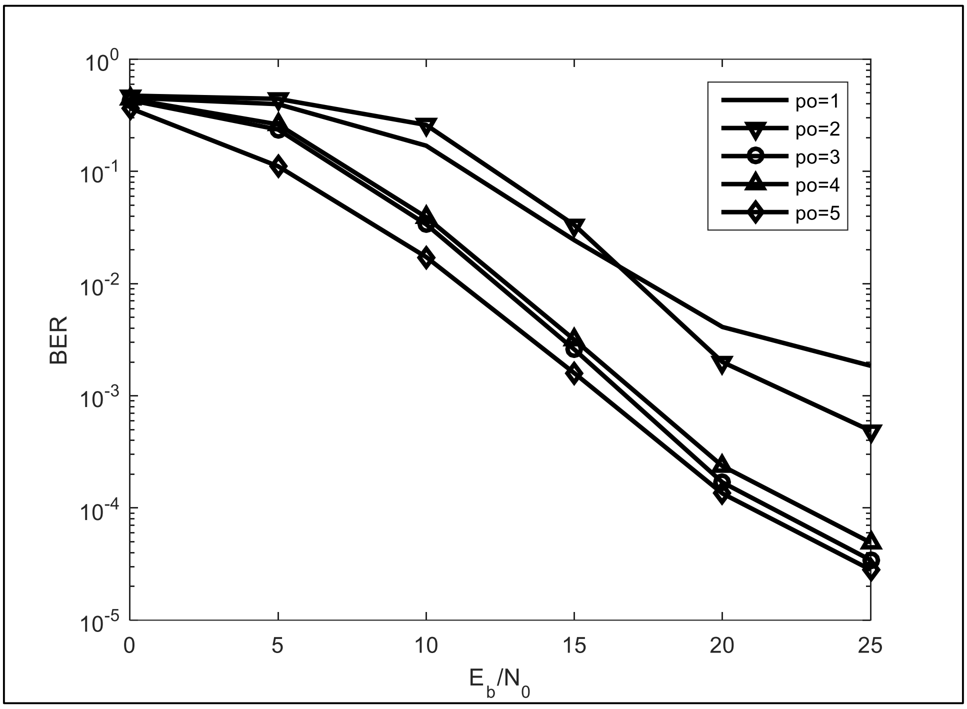
Şekil 3.6. GNLMS ve GRLS algoritmalarının BHO performansları, v= 150km/s

GNLMS ve GRLS algoritmalarında, projeksiyon seviyesinin etkisini göstermek üzere, farklı projeksiyon seviyelerine göre elde edilen BHO Şekil 3.7'de gösterilmektedir. Benzetim çalışmaları için, 6 yollu Rayleigh sönümlü kanal göz önüne alınmış olup, kipleme metodu olarak QPSK alınmıştır. Her iki algoritmada, projeksiyon seviyesinin 1'den, yani standart NLMS ve RLS algoritmasından, projeksiyon seviyesinin 3'e yükseltilmesi halinde oldukça önemli seviyede BHO performansında iyileşme görülmektedir. Ancak, bu iyileşmenin seviyesi daha yüksek projeksiyon seviyelerinde, teorik analizde de gösterildiği şekilde, azalmakta ve birbirine yakın performans sergilemektedir. NLMS algoritması ile karşılaştırıldığında, projeksiyon seviyesi 5 olan GNLMS algoritmasının kullanımı, performansta yaklaşık olarak 7dB'lik bir kazanç sağlamaktadır.



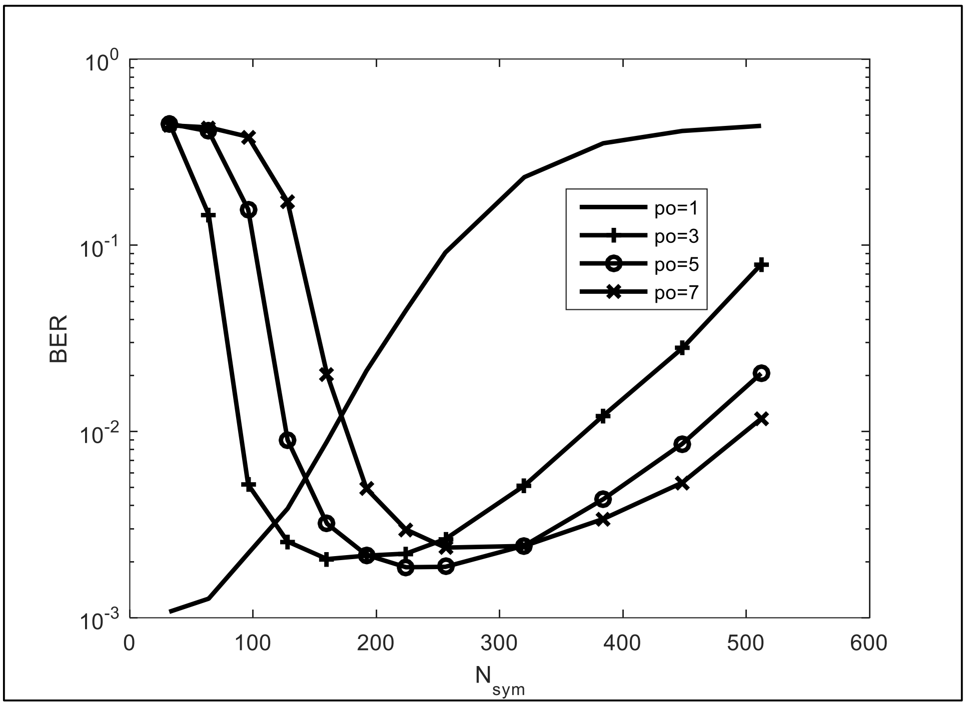
Şekil 3.7. Uyarlanabilir algoritmalarının öğrenme eğrisi performansları, v= 75km/h, SGO=25dB

TT-FBD sisteminde, bir blokta kullanılan sembol sayısı ile, GNLMS algoritmasının farklı projeksiyon seviyelerindeki bit hata oranının değişimi Şekil 3.8'de verilmektedir. NLMS algoritması kullanıldığında, bloktaki sembol sayısının artması ile, bit hata oranı performansı monoton olarak kötüleşmektedir. GNLMS algoritmasında ise, blokta bulunan sembol sayısının düşük seçilmesi, performansı olumsuz etkilemekte olduğu anlaşılmaktadır. Bu durum, komşu frekans noktalarında ilintisellik seviyesinin azalmasından kaynaklanmaktadır. Bloktaki sembol sayısının azaltılması ile, TT-FBD sistemindeki alt taşıyıcıların bant genişliklerinin artması, yani hızlı fourier dönüşümü ile elde edilen frekans noktalarının birbirinden daha uzak olmasına neden olmaktadır. Bundan dolayı da komşu frekans noktalarındaki ilintisellik kaybolmakta, dolayısı ile her frekans noktasında uygulanacak denkleştirici katsayıları birbiri ile ilintili olmamaktadır. Bu durumda da GNLMS algoritması daha kötü performans göstermeye başlamaktadır. Sembol sayısı arttırıldıkça, GNLMS algoritmasının performansında önemli miktarda iyileşme sağlamaktadır. Tüm projeksiyon seviyelerinde, en uygun bir sembol sayısı oluşmaktadır ve bu en uygun seviye projeksiyon seviyesinin artması ile daha yüksek sembol sayısında ulaşılmaktadır. Böylece, GNLMS algoritması ile, performansta kötüleşme olmaksızın, bir blokta daha yüksek sayıda sembol kullanımı mümkün olmakta ve spektrum kullanım verimliliği artmaktadır.

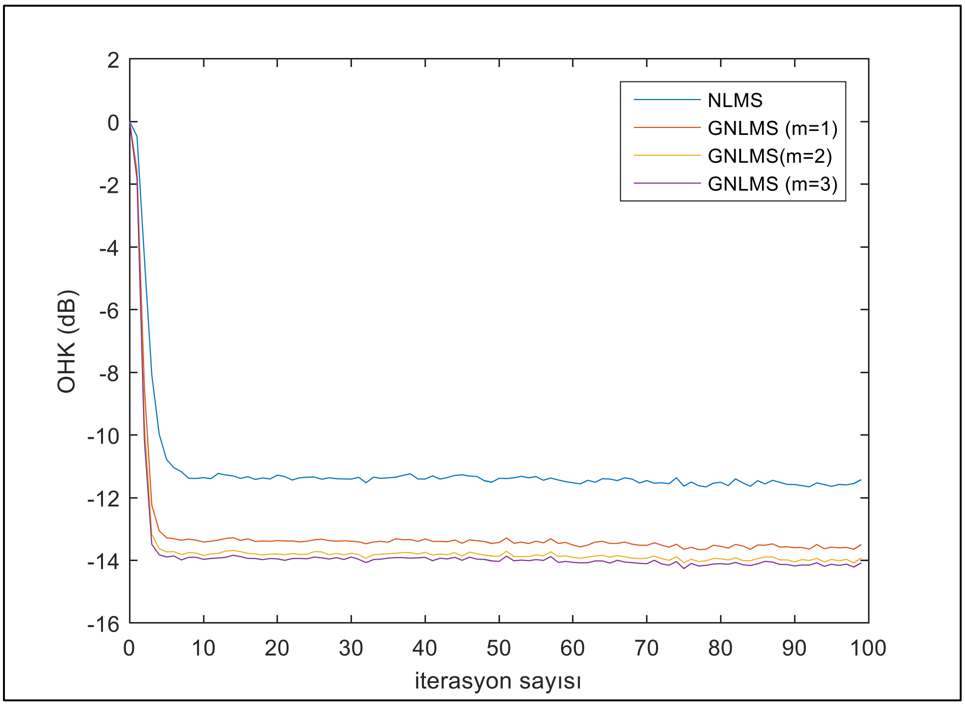


Şekil 3.8. GNLMS algoritmasında farklı projeksiyon seviyeleri için elde edilen BHO performansları, f_D=100Hz

Şekil 3.9'da N_{SYM}=512 olarak alınması halinde elde edilen öğrenme eğrileri gösterilmektedir. Şekil 3.8'den görülebileceği üzere, GNLMS algoritmasında, projeksiyon seviyesinin arttırılmasının, ortalama hata karesini azaltıcı etkiye sahip olmaktadır. Performanstaki artış miktarı, projeksiyon seviyesinin 1'den 3'e arttırılması halinde yaklaşık 2dB kazanç, 3'den 5'e arttırılması halinde kazanç miktarı azalarak 0.5dB değerinde, 5'den 7'ye arttırılması halinde ise 0.2dB değerinde olmaktadır. Daha önce de belirtildiği üzere, projeksiyon seviyesindeki artış ile elde edilen kazanç, ortalama hata karesi performansında da görülmektedir.

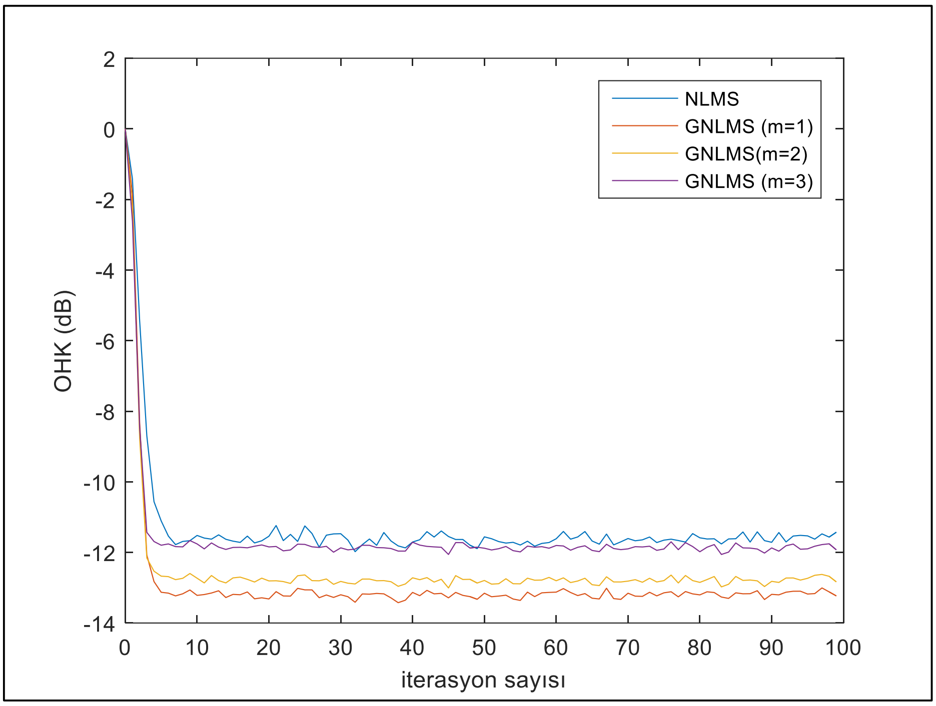


Şekil 3.9. GNLMS algoritmasında farklı projeksiyon seviyeleri için elde edilen BHO performansları, f_D=100Hz, E_b/N_0=15dB



Şekil 3.10. GNLMS algoritmasında farklı projeksiyon seviyeleri için elde edilen öğrenme eğrisi performansları, f_D=5.56Hz, E_b/N_0=20dB, BPSK, N_{sym}=256, μ =0.9

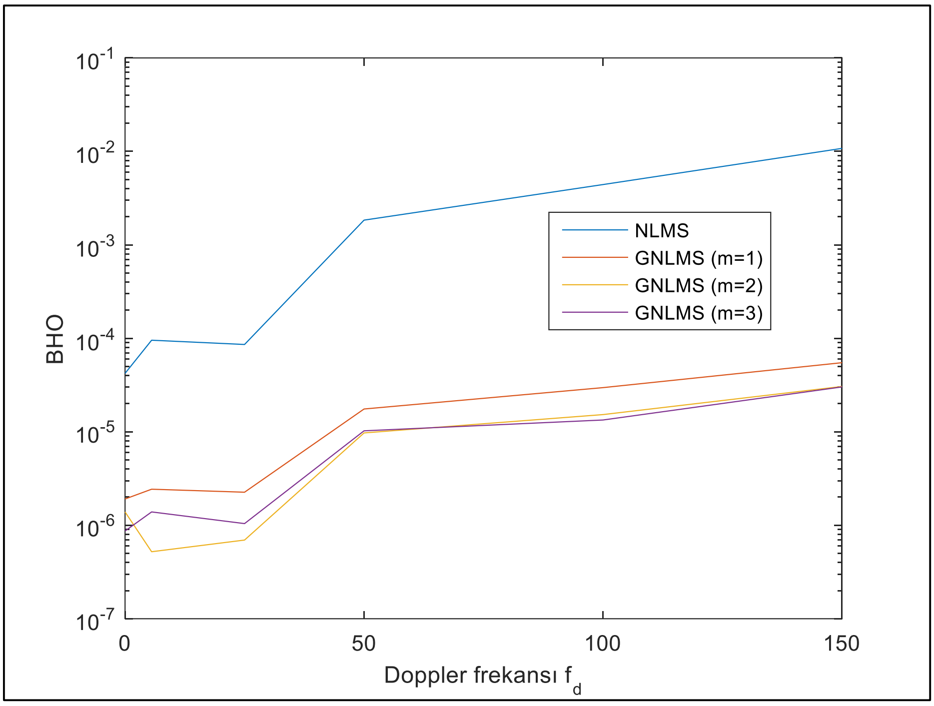
Blok başına sembol miktarı 128'e düşürüldüğünde ise, elde edilen öğrenme eğrisi performansı Şekil 3.9 ile verilmektedir. Bu durumda, projeksiyon seviyesinin 1'den 3'e arttırılması ile 1.7dB'lik bir iyileşme sağlanır iken, projeksiyon seviyesinin 3'den daha yüksek seviyelere çıkarılması, hata karesinin artmasına ve yüksek projeksiyon seviyelerinde NLMS algoritmasının değerine yakınsamasına yol açmaktadır. Bu durumun nedeni, yüksek projeksiyon seviyelerinde kullanılan daha uzaktaki alt taşıyıcıların ilintisilllik seviyesinin yeterince yüksek olmamasıdır. N_{sym}=512 olarak belirlendiğinde, alt taşıyıcıların bant genişlikleri, Δf=4Mhz/512=7.8kHz iken bu değer N_{sym}=128 için Δf=4Mhz/128=31,2kHz olmaktadır. Projeksiyon seviyesinin 7'ye yükseltilmesi durumunda, katsayı güncellemesi için N_{sym}=512 olarak alındığında 3x7.8kHz=23.4kHz uzaklıktaki sinyal göz önüne alınır iken, N_{sym}=128 için bu değer 3x31,2kHz=93,6kHz'e çıkmaktadır. Dolayısı ile, birbirine bu kadar uzak frekans noktaları arasındaki ilintisellik azaldığından veya kaybolduğundan, algoritmanın performansı da buna bağlı olarak azalmaktadır.



Şekil 3.11. GNLMS algoritmasında farklı projeksiyon seviyeleri için elde edilen öğrenme eğrisi performansları, f_D=5.56Hz, E_b/N_0=20dB, BPSK, N_{sym}=128, μ=0.9

Doppler frekansının GNLMS algoritmasının performansına etkisini incelemek üzere, farklı projeksiyon seviyelerine göre değişimi Şekil 3.11'de gösterilmektedir. GNLMS algoritmasında projeksiyon seviyesinin arttırılması, Doppler frekansına karşı dayanımı önemli seviyede arttırmaktadır. GNLMS algoritması, NLMS algoritmasına göre tüm Doppler frekanslarına göre performansı çok daha iyi olmaktadır. Ayrıca, NLMS algoritmasında Dopler frekansının arttırılması, performansı düşük Doppler frekanslarında

1e-4 bita hata oranı elde edilmekte iken, yüksek Doppler frekanslarında bu seviye 1e-2 olmakta, yani bit hata oranı performansı 100 kat kadar azaltmakta iken, GNLMS algoritmasındaki performans azalması, NLMS algoritmasına göre çok daha az olacak şekilde 20 kat olmaktadır.



Şekil 3.12. GNLMS algoritmasında farklı projeksiyon seviyeleri için Doppler frekansına göre BHO değişimi, f_D=5.56Hz, E_b/N_0=20dB, BPSK, Nsym=256, μ=0.9

4. TT-FBD İÇİN EUAÇ UYARLANABİLİR KANAL KESTİRİM ALGORİTMALARI

Bir önceki bölümde, FB'de çalışan uyarlanabilir denkleştirici algoritmalar geliştirilerek, performansları incelenmiştir. Elde edilen bulgular, önerilen algoritmaların önemli seviyede performans artışı sağladığını ve özellikle yüksek Doppler frekans kaymalarında geliştirilem algoritmaların geleneksel algoritmalardan üstün olduğu gösterilmiştir.

Bu bölümde ise, kanal denkleştirme için bir diğer kullanılabilecek yöntem olan kanal kestirimi yapılarak denkleştirme işleminin yapılması irdelenecek ve FB'de çalışan yeni kanal kestirim algoritmaları geliştirilecektir.

FB'de çalışan uyarlanabilir kanal kestirim algoritmaları ilk olarak Morelli ve diğerleri (2005) tarafından ortaya atılmıştır. Bu çalışmada, kanal kestirimi için iki farklı yöntem ortaya atılmıştır. Yöntemlerden ilki yapılandırılmamış kanal kestirim metodu olarak isimlendirilmiş ve geleneksel LMS ve RLS algoritmaları ile kanalın frekans kestirimi uyarlamalı olarak bulunmuştur. Diğer yöntemde ise, kanalın zamandaki birim dürtü tepkisinin, dönel ön ek kısmının uzunluğundan az olduğu varsayılarak, yapılandırılmış kanal kestirim metodu önerilmiştir. Yapılandırılmış kanal kestirim metodunda, uyarlanabilir algoritma olarak, LMS algoritması kullanılmıştır. Ortaya atılan modeller ve LMS ile RLS tabanlı doğrudan kanal denkleştirme algoritmaları kullanılarak yapılan karşılaştırmalı performans analizinde, yapılandırılmış kanal kestirim metodunun performansı daha iyi seviyelere çektiği, çeşitlilik (diversite) kullanılması halinde, sistem performansının mükemmel kanal kestirim performansına yüksek Doppler frekanslarında 3dB fark ile yakınsadığı görülmüştür.

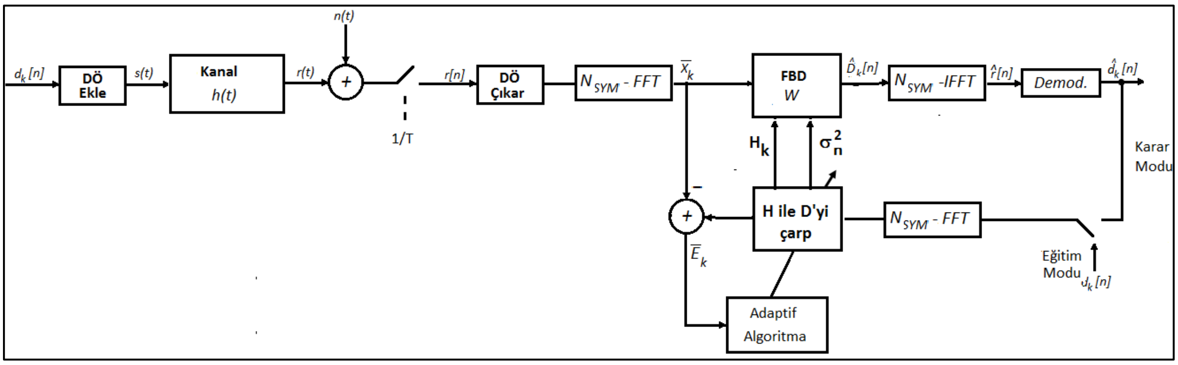
Performanstaki bu artışın nedeni, yapılandırılmış kanal kestiriminde, kanalın zamandaki birim dürtü tepkisinin en yüksek dönel ön ek uzunluğunda olması ile Gauss gürültüsünün etkisinin ortalamasının alınması ile azaltılmasından kaynaklanmaktadır.

Tezin bu bölümünde, bir önceki bölümde ortaya atılan doğrudan kanal denkleştirme algoritmalarının, kanal kestirim yapılacak şekilde adapte edilmesi ve bu yöntemlere ait yapılandırılmış kanal kestirim algoritmalarının geliştirilmesi amaçlanmıştır.

Bu bölümün takip eden alt bölümlerinde, ilk olarak, yapılandırılmış yapılandırılmamış LMS ve RLS tabanlı uyarlanabilir frekans bölgesi kanal kestirim algoritmaları açıklanacak, sonraki alt bölümlerde ise geliştirilen GNLMS ve GRLS algoritmalarının kanal kestirimi için uyarlanacaktır. Ayrıca, GNLMS algoritmasının yapılandırılmış kanal kestirim metodu geliştirilecektir. Son olarak ise, frekans bölgesi kanal kestirim algoritmaları için değişken katsayılı metot verilecektir.

4.1. Uyarlanabilir Kanal Kestirim Sistem Modeli

TT-FBD sistemleri için, uyarlanabilir kanal kestirim yapılarak denkleştirme sistem modeli, Şekil 4.1 ile verilmektedir. Doğrudan denkleştirme işleminden farklı olarak, uyarlanabilir kanal kestirim algoritması, kanalın frekans tepkisi uyarlanabilir algoritma ile yinelemeli olarak hesaplanmaktadır. Sonrasında kestirimi yapılan kanal frekans tepkisi ve gürültünün varyans değeri kullanılarak denkleştirici katsayısı hesaplanır. Son aşamada ise alınan sinyal üzerindeki SAG etkisi hesaplanan denkleştirici ile gidermeye çalışmaktadır. Kanalın frekans tepkisine göre FB-DD katsayı değeri,



Şekil 4.1. TT-FBD uyarlanabilir kanal kestirim algoritması kullanan sistem modeli

$$W[n] = \frac{\sigma_d{}^2 H^*[n]}{\sigma_d{}^2 |H[n]|^2 + \sigma_n{}^2} \tag{4.1}$$

ile hesaplanmaktadır. Eşitlikten görüldüğü üzere, denkleştirici katsayısının hesaplanmasında, EBGG varyans değeri $\sigma_n{}^2$, kanalın frekans tepkisi $H[n]$e ek olarak gereksinim duyulmaktadır. Alıcının bu değeri de kestirmesi gerekmektedir. Tez kapsamında yapılan çalışmalarda, alıcının gürültünün varyans değerini mükemmel şekilde kestirdiği varsayılmıştır.

4.2. Mevcut Uyarlamalı Frekans Bölgesi Kanal Kestirim Algoritmaları

Bu alt bölümde, literatürde önerilmiş olan mevcut kanal kestirim algoritmaları kısaca tanıtılacaktır. Genel olarak mevcut kanal kestirim algoritmaları için LMS ve RLS tabanlı algoritmalar kullanılmıştır.

4.2.1. LMS tabanlı yapılandırılmamış kanal kestirim algoritması

Yapılandırılmamış LMS tabanlı frekans bölgesi kanal kestirim algoritması için maliyet fonksiyonu, anlık hata değeri $E_k[n]$ minimize edilecek şekilde, aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır,

$$J_k^{LMS}[n] = |E_k[n]|^2 \tag{4.2}$$

Burada, kanal kestirim algoritması için hata değeri, $E_k[n] = X_k[n] - D_k[n]H_k[n]$ olarak tanımlanmaktadır. LMS algoritmasının katsayı güncelleme eşitliği,

$$H_{k+1}[n] = H_k[n] - \mu \frac{\partial J_k^{LMS}[n]}{\partial H_k[n]} \tag{4.3}$$

şeklinde hesaplanmaktadır. J_k^{LMS}'in türevi hesaplanıp yerine konulduğunda,

$$H_{k+1}[n] = H_k[n] + \mu {D_k}^*[n]E_k[n] \tag{4.4}$$

elde edilir.

4.2.2. RLS tabanlı yapılandırılmamış kanal kestirim algoritması

RLS metodu kullanan uyarlanabilir kanal kestirim algoritması için maliyet fonksiyonu,

$$\partial J_k^{RLS}[n] = \sum_{i=0}^{k} \beta^{k-i} \left\| E_{k,i}[n] \right\|^2 \tag{4.5}$$

Burada, kanal kestirim algoritması için öncül hata değeri, $E_{k,i}[n] = X_i[n] - D_i[n]H_k[n]$ olmaktadır. RLS algoritması için katsayı güncelleme eşitliği, maliyet fonksiyonunun türevinin sıfıra eşitlenmesi ile bulunabilir. Bu durumda,

$$\frac{\partial J_k^{RLS}[n]}{\partial H_k[n]} = \sum_{i=0}^{k} \beta^{k-i} D_i{}^*[n] E_{k,i}[n] = 0 \tag{4.6}$$

elde edilir. (4.6) düzenlendiğinde,

$$\left(\sum_{i=0}^{k} \beta^{k-i} |D_i[n]|^2\right) H_k[n] = \left(\sum_{i=0}^{k} \beta^{k-i} D_i{}^*[n] X_i[n]\right) \tag{4.7}$$

halini almaktadır. Burada, aşağıdaki tanımlamalar yapıldığında,

$$R_{k,D}[n] = \sum_{i=0}^{k} \beta^{k-i} |D_i[n]|^2 \tag{4.8}$$

$$p_{k,(X,D)}[n] = \sum_{i=0}^{k} \beta^{k-i} D_i{}^*[n] X_i[n] \tag{4.9}$$

(4.8) ve (4.9) eşitliklerindeki, $R_{k,D}[n]$ ifadesi vericiden gönderilen sinyalin öz ilinti değerini, $p_{k,(X,D)}[n]$ vericiden gönderilen sinyal ile alınan sinyal arasındaki çapraz ilinti değerini göstermektedir. Bu durumda, katsayı değeri,

$$H_k[n] = \left(R_{k,D}[n]\right)^{-1} p_{k,(X,D)}[n] \tag{4.10}$$

eşitliği ile hesaplanabilmektedir. $R_{k,D}[n]$ değeri yinelemeli olarak,

$$R_{k,D}[n] = \beta R_{k-1,D}[n] + |D_k[n]|^2 \tag{4.11}$$

şekilinde bulunabilir. $p_{k,(D,X)}[n]$ değeri ise,

$$p_{k,(X,D)}[n] = \beta p_{k-1,(X,D)}[n] + D_k^*[n] X_k[n] \tag{4.12}$$

şeklinde yinelemeli olarak bulunabilir. Matris tersleme önsavı kullanılarak, $Z_{k,D}[n] = \left(R_{k,D}[n]\right)^{-1}$ değeri,

$$Z_{k,D}[n] = \beta^{-1} Z_{k-1,D}[n] - \beta^{-1} Z_{k-1,D}[n] D_k^*[n] \big(1 + D_k[n] \beta^{-1} Z_{k-1,x}[n] D_k^*[n]\big)^{-1} D_k[n] \beta^{-1} Z_{k-1,D}[n] \tag{4.13}$$

Bu eşitlik yerine konulduğunda, ve Kalman kazanç değeri, $K_k[n]$,

$$K_k[n] = \frac{Z_{k-1,D}[n] D_k^*[n]}{\beta + Z_{k-1,x}[n] |D_k[n]|^2} \tag{4.14}$$

şeklinde tanımlandığında,

$$Z_{k,D}[n] = (1 - K_k[n] D_k[n]) \frac{Z_{k-1,D}[n]}{\beta} = \frac{Z_{k-1,D}[n]}{\beta + Z_{k-1,x}[n] |D_k[n]|^2} \tag{4.15}$$

olarak bulunur. Ayrıca, $K_k[n]$ ile $Z_{k,D}[n]$ arasında,

$$Z_{k,D}[n] D_k^*[n] = \frac{Z_{k-1,D}[n] D_k^*[n]}{\beta + Z_{k-1,D}[n] |D_k[n]|^2} = K_k[n] Z_{k,D}[n] \tag{4.16}$$

olarak bir ilişki bulunmaktadır. Yukarıdaki eşitlikler kullanıldığında, RLS algoritmasının katsayısı güncelleme eşitliği,

$$H_k[n] = (1 - K_k[n] X_D[n]) \frac{Z_{k-1,D}[n]}{\beta} \big(\beta p_{k-1,(X,D)}[n] + D_k^*[n] X_k[n]\big) \tag{4.17}$$

halini almaktadır. (4.17) düzenlendiğinde, katsayı güncellenme ifadesi,

$$H_k[n] = Z_{k-1,x}[n] p_{k-1,(x,D)}[n] - K_k[n] D_k[n] Z_{k-1,D}[n] p_{k-1,(x,D)}[n] + Z_{k,D}[n] D_k^*[n] X_k[n] \tag{4.18}$$

halini alır. $H_{k-1}[n] = Z_{k-1,D}[n] p_{k-1,(X,D)}[n]$ olduğundan ve $E_k[n] = X_k[n] - D_k[n] H_{k-1}[n]$ olarak tanımlandığında, (4.17),

$$H_k[n] = H_{k-1}[n] + K_k[n] E_k[n] \tag{4.19}$$

olarak FB-RLS kanal kestirim katsayı güncelleme eşitliği bulunmaktadır. $K_k[n]$ ifadesi yerine konulduğunda, katsayı güncelleme eşitliği,

$$H_k[n] = H_{k-1}[n] + \frac{Z_{k-1,D}[n]}{\beta + Z_{k-1,D}[n] |D_k[n]|^2} D_k{}^*[n] E_k[n] \tag{4.20}$$

halini alır.

4.2.3. LMS tabanlı yapılandırılmış kanal kestirim algoritması

Yapılandırılmamış kanal kestirim metodlarında, kanalın birim dürtü tepkisi için herhangi bir kısıtlama bulunmamaktadır. Eğer, kanalın birim dürtü tepkisi, DÖE kısmından daha düşük olduğu kabul edilir ise, maliyet fonksiyonu, LMS metodu kullanılması halinde,

$$J_k^{LMS-YKK} = \|E_k\|^2 = \|X_k - D_k F G F^H H_k\|^2 \tag{4.21}$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada $D_k = [D_k[0], D_k[1], \ldots, D_k[N_{SYM} - 1]]^T$ olan gönderilen sinyalin frekans değerlerinden oluşan kolon vektörünü, $H_k = [H_k[0], H_k[1], \ldots, H_k[N_{SYM} - 1]]^T$ olan, kanalın frekans tepkisinden oluşan kolon vektörünü, F HFD matrisini, F^H ise ters HFD matrisini, X_k ise alınan frekans bölgesi sinyalinden oluşan köşegen matrisi göstermektedir. Ayrık Fourier dönüşüm matrisinin ortonormallik özelliğinden dolayı $FF^H = I$ olmaktadır. Eşitlikteki G matrisi ise kanalın zaman bölgesindeki uzunluğunu DÖE kadar kısaltmak için kullanılmakta olup, aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir

$$G = \begin{bmatrix} I_{N_{CP}} & 0_{N_{SYM}-N_{CP}} \\ 0_{(N_{SYM}-N_{CP})xN_{CP}} & 0_{(N_{SYM}-N_{CP})x(N_{SYM}-N_{CP})} \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

Burada I birim matrisi, 0 ise tüm elemanları sıfırdan oluşan matrisi göstermektedir. Bu durumda, yapılandırılmış LMS tabanlı yapılandırılmış kanal kestirim algoritmasının, katsayı güncelleme eşitliği,

$$H_{k+1} = H_k - \mu \frac{\partial J_{k,LMS-YKK}}{\partial H_k} \tag{4.23}$$

halini alır. $\frac{\partial J_{k,LMS-YKK}}{\partial H_k}$ hesaplandığında, katsayı güncelleme ifadesi,

$$H_{k+1}[n] = H_k[n] + \mu F G F^H {D_k}^H E_k \tag{4.24}$$

olarak ifade edilmektedir. Katsayı güncelleme eşitliğindeki $\mu F G F^H {D_k}^H E_k$ ifadesi için, ${X_k}^H E_k$ değeri hesaplandıktan sonra, THFD ile zamana döndürülmesi, zamandaki değerlerin baştaki DÖE uzunluğu kadarının alınması ve diğer değerlerin sıfıra eşitlenmesi ve tekrar HFD, frekans bölgesine dönüştürülmesi gerekmektedir.

4.2.4. RLS tabanlı yapılandırılmış frekans bölgesi kanal kestirim algoritması

RLS metodu kullanılması halinde, kullanılacak maliyet fonksiyonu, yapılandırılmış kanal kestirimi için aşağıdaki şekilde ifade edilebilir,

$$J_k^{RLS-YKK} = \sum_{i=0}^{k} \beta^{k-i} \left\| E_{k,i} \right\|^2 = \sum_{i=0}^{k} \beta^{k-i} \| X_i - D_i F G F^H H_k \|^2 \tag{4.23}$$

şeklindedir. RLS algoritması için katsayı güncelleme eşitliği, maliyet fonksiyonunun türevinin sıfıra eşitlenmesi ile

$$\frac{\partial J_k^{RLS-YKK}}{\partial H_k} = \sum_{i=0}^{k} \beta^{k-i} {X_i}^H F G F^H E_{k,i} = 0 \tag{4.24}$$

şekilinde bulunabilir. (4.24) düzenlendiğinde,

$$\left(\sum_{i=0}^{k} \beta^{k-i} FGF^H D_i{}^H D_i FGF^H\right) H_k = \left(\sum_{i=0}^{k} \beta^{k-i} FGF^H D_i{}^H X_i\right) \tag{4.25}$$

Burada, aşağıdaki öz ilinti matrisi, $R_{k,D}$ ve çapraz ilinti vektörü, $p_{k,(X,D)}$ tanımlamaları yapıldığında,

$$R_{k,D} = \sum_{i=0}^{k} \beta^{k-i} FGF^H D_i{}^H D_i FGF^H \tag{4.26}$$

$$p_{k,(X,D)} = \sum_{i=0}^{k} \beta^{k-i} FGF^H D_i{}^H X_i \tag{4.27}$$

Eşitlikteki, $R_{k,D}$ ifadesi öz ilinti matrisini göstermekte, $p_{k,(X,D)}$ çapraz ilinti vektörünü göstermektedir. Bu durumda, katsayı değeri,

$$H_k = R_{k,D}{}^{-1} p_{k,(X,D)} \tag{4.28}$$

eşitliği ile hesaplanabilmektedir. $R_{k,D}{}^{-1}$ değeri yinelemeli olarak, bulunması yapılandırılmış RLS algoritması için işlemsel karmaşıklığı $N_{sym}{}^3$ seviyelerine getirmektedir. Bu durumda, yapılandırılmış RLS kanal kestirim algoritması için, doğrudan öz ilinti matrisinin hesaplanarak tersinin alınması gerekmektedir. Bu denli fazla işlemsel karmaşıklık seviyesi gereksinimi, RLS metodu kullanılarak yapılandırılmış kanal kestirim yapılmasını neredeyse imkânsız hale getirmektedir. Bu sebeple, yapılandırılmış RLS metodu yapılan çalışmalarda göz önüne alınmamıştır.

4.3. Önerilen Frekans Bölgesi Kanal Kestirim Algoritmaları

Doğrudan kanal denkleştirme algoritmalarında kullanılan metodlar, kanal frekans tepkisinin kestirilmesinde de kullanılabilmektedir. Bu alt bölümde frekans bölgesinde çalışan uyarlanabilir kanal kestirim algoritmalarına yönelik yapılan çalışmalar ile elde edilen kestirim yöntemleri açıklanmaktadır.

4.3.1. Yapılandırılmamış GNLMS kanal kestirim algoritması

Yapılandırılmamış GNLMS kanal kestirim algoritması için, denkleştirme kısmında olduğu gibi, alınan sinyalin komşu frekans noktalarındaki ilintisellik göz önüne alınarak, kanal kestirim için maliyet fonksiyonu,

$$minimum|H_{k+1}[n] - H_k[n]|^2$$

$$kısıtlama: \quad \begin{array}{c} X_k[n-m] = D_k[n-m]H_{k+1}[n] \\ \vdots \\ X_k[n] = D_k[n]H_{k+1}[n] \\ \vdots \\ X_k[n+m] = D_k[n+m]H_{k+1}[n] \end{array}$$

ile ifade edilir. Yukarıdaki maliyet fonksiyonunun matematiksel ifade karşılığı,

$$J_k^{GNLMS}[n] = |H_{k+1}[n] - H_k[n]|^2 + 2Re\{\lambda^H(X_k[n] - D_k[n]H_{k+1}[n])\} \quad (4.29)$$

Burada, $Re\{\ \}$ gerçek değer işlevini, $D_k[n] = [D_k[n-m], D_k[n-m], \cdots, D_k[n], \cdots, D_k[n+m]\ ]^T$ merkezi n. Frekans noktası olan 2m+1 uzunluğunda, gönderilen veri bloğunun frekans bölgesi değerlerinden oluşan kolon vektörünü, $X_k[n] = [X_k[n-m], X_k[n-m], \cdots, X_k[n], \cdots, X_k[n+m]\ ]^T$ merkezi n. Frekans noktası olan 2m+1 uzunluğunda, alınan veri bloğunun frekans bölgesi değerlerinden oluşan kolon vektörünü, λ uzunluğu 2m+1 olan Lagrange vektörünü göstermektedir. İlgin izdüşüm algoritmasındaki iz düşüm seviyesi ile frekans bölgesindeki verilerin yeniden kullanım sayısı benzer olmaktadır.

En uygun denkleştirici katsayısını bulmak üzere, (4.30) ifadesinin gradyantını hesaplayıp sıfıra eşitlenmesi gereklidir. Bu işlem yapılacak olur ise,

$$\frac{\partial J_k^{GNLMS}[n]}{\partial H_{k+1}[n]} = H_{k+1}[n] - H_k[n] + (D_k[n])^H\lambda = 0 \quad (4.30)$$

elde edilir. Buradan katsayı güncelleme ifadesi,

$$H_{k+1}[n] = H_k[n] + {D_k}^H[n]\lambda \quad (4.31)$$

olarak bulunur. Ayrıca, Lagrange çarpım vektörü için,

$$\frac{\partial J_k^{GNLMS}[n]}{\partial \lambda} = X_k[n] - D_k[n]H_{k+1}[n] = 0 \tag{4.32}$$

ifadesi elde edilebilir. Yukarıdaki ifade kullanıldığı durumda:

$$E_k[n] = X_k[n] - D_k[n]H_k[n] = D_k[n]{D_k}^H[n]\lambda \tag{4.33}$$

halini almaktadır. Buradan Lagrange çarpım vektörü

$$\lambda = \left(D_k[n]{D_k}^H[n]\right)^{-1} E_k[n] \tag{4.34}$$

hesaplanmaktadır. İfadeden görüldüğü üzere, Lagrange çarpım vektörünün hesaplanması için $D_k[n]{D_k}^H[n]$ matrisinin tersinin hesaplanması gerekmektedir. Ancak, söz konusu matris rankı 1 e eşit olmakta, yani bu matrisin tersi bulunmamakta ve sonsuz çözüm kümesine sahip olmaktadır. Bu yüzden, matrisin doğrudan tersinin kullanılması yerine, sanal tersinin (pseudo inverse) kullanılması sağlanabilir. Böylece, bulunan çözümün minimum norma sahip olması sağlanır. Tekil değer bozunması (singular value decomposition) kullanılarak sanal ters aşağıdaki şekilde bulunabilir. İlk olarak sanal tersi alınacak matris ile matrisin Hermitianının çarpımının öz değerleri (eigenvalues) ve öz değer vektörleri (eigenvectors) bulunmalıdır. Bu değerler,

$$A = D_k[n]{D_k}^H[n] \Rightarrow AA^H = \|D_k[n]\|^2 D_k[n]{D_k}^H[n] \tag{4.35}$$

Bu matrisin sadece bir adet sıfırdan farklı öz değer ve özdeğer vektörü bulunmaktadır. Bu değerler, sırasıyla $\|D_k[n]\|^4$ ve $D_k[n]$ olmaktadır. Sonuç olarak, sanal tersi,

$$A^+ = \frac{1}{\|D_k[n]\|^4} D_k[n]{D_k}^H[n] \tag{4.36}$$

olarak bulunmaktadır. Bulunan değeri kısıtlama için eşitliğinde kullanıldığında,

$$\lambda = \frac{1}{\|D_k[n]\|^4} D_k[n] {D_k}^H[n] E_k[n] \tag{4.37}$$

elde edilir. Bu değer katsayı güncelleme eşitliği (4.31)'de yerine konulduğunda, ve katsayı eklenildiğinde,

$$H_{k+1}[n] = H_k[n] + \frac{\mu}{\|D_k[n]\|^2} {D_k}^H[n] E_k[n] \tag{4.38}$$

elde edilir. Bu bağıntıdaki $\|D_k[n]\|^2$ ifadesi uyarlanabilir algoritmada göz önüne alınan frekans noktalarının tümünün güçlerinin toplamına eşittir. uyarlanabilir algoritmanın çalışma ortamı durağan olmayan bir ortam olması veya her frekans noktasındaki güç değerlerinin hesaplanamaması durumunda aşağıdaki şekilde hesaplama yapılmaktadır (Haykin, 2010:367)

$$P_k[n] = \gamma P_{k-1}[n] + (1-\gamma)\|D_k[n]\|^2 \tag{4.39}$$

şeklinde olmaktadır. Sonuç olarak GNLMS algoritması için katsayı güncelleme formülü, yakınsama için birim basamak boyutu μ kullanılması durumunda,

$$H_{k+1}[n] = H_k[n] + \frac{\mu}{P_k[n]} {D_k}^H[n] E_k[n] \tag{4.40}$$

halini almaktadır. Katsayı güncelleme eşitliği (4.40)'dan görüleceği üzere, izdüşüm seviyesi bir olarak seçildiğinde, GNLMS algoritması NLMS algoritmasına dönüşmektedir. Bu yüzden, geliştirilen algoritmaya Genelleştirilmiş NLMS algoritması adı verilmiştir.

4.3.2. Yapılandırılmamış GRLS kanal kestirim algoritması

GRLS yöntemi için, yapılandırılmamış kanal kestirim metodu maliyet fonksiyon ifadesi,

$$J_k^{GRLS}[n] = \sum_{i=0}^{k} \beta^{k-i} \left\|E_{k,i}[n]\right\|^2 \tag{4.41}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada, hata vektörü, $E_{k,i}[n]$

$$E_{k,i}[n] = X_i[n] - D_i[n]H_k[n] \tag{4.42}$$

olarak tanımlanmıştır. Maliyet fonksiyonunun minimum değerini sağlayan denkleştirici katsayısı, maliyet fonksiyonunun türevinin sıfıra eşitlenmesi,

$$\frac{\partial J_k^{GRLS}}{\partial W_{k+1}[n]} = \sum_{i=0}^{k} \beta^{k-i}(D_k[n])^H E_{k,i}[n] = 0 \tag{4.43}$$

ile bulunur. Bu durumda, eşitlik düzenlendiğinde,

$$\left(\sum_{i=0}^{k} \beta^{k-i}(D_k[n])^H D_k[n]\right) H_k[n] = \left(\sum_{i=0}^{k} \beta^{k-i}(D_k[n])^H D_k[n]\right) \tag{4.44}$$

elde edilir. Burada, , $R_{k,D}[n]$ ifadesi öz ilinti değeri ile $p_{k,(X,D)}[n]$ çapraz ilinti değeri için aşağıdaki tanımlamalar yapıldığında,

$$R_{k,D}[n] = \sum_{i=0}^{k} \beta^{k-i}(D_k[n])^H D_k[n] = \sum_{i=0}^{k} \beta^{k-i} \|D_k[n]\|^2 \tag{4.45}$$

$$p_{k,(X,D)}[n] = \sum_{i=0}^{k} \beta^{k-i}(D_k[n])^H X_k[n] \tag{4.46}$$

denkleştirici katsayı değeri,

$$W_k[n] = \left(R_{k,D}[n]\right)^{-1} p_{k,(X,D)}[n] \tag{4.47}$$

olarak bulunmaktadır. $R_{k,D}[n]$ değeri yinelemeli olarak,

$$R_{k,D}[n] = \beta R_{k-1,D}[n] + \|D_k[n]\|^2 \tag{4.48}$$

ve $p_{k,(X,D)}[n]$ değeri,

$$p_{k,(X,D)}[n] = \beta p_{k-1,(X,D)}[n] + (D_k[n])^H X_k[n] \tag{4.49}$$

yinelemeli olarak bulunabilir. Matris tersleme lemması kullanılarak, $Z_{k,D}[n] = \left(R_{k,D}[n]\right)^{-1}$ değeri,

$$Z_{k,D}[n] = \beta^{-1} Z_{k-1,D}[n] - \beta^{-1} Z_{k-1,D}[n](D_k[n])^H \big(I + D_k[n]\beta^{-1} Z_{k-1,D}[n](D_k[n])^H\big)^{-1} D_k[n]\beta^{-1} Z_{k-1,D}[n] \tag{4.50}$$

şeklinde bulunur. (4.50)’de bulunan $\left(I + D_k[n]\beta^{-1} Z_{k-1,x}[n](D_k[n])^H\right)^{-1}$ ifadesinin hesaplanması için tekrar matris ters alma lemması kullanılacak olur ise,

$$\left(I + D_k[n]\beta^{-1} Z_{k-1,x}[n](D_k[n])^H\right)^{-1} = I - D_k[n]\left(\beta\left(Z_{k-1,x}[n]\right)^{-1} + \|D_k[n]\|^2\right)^{-1}(D_k[n])^H \tag{4.51}$$

elde edilir. Bulunan (4.51) ifadesi (4.50)’de yerine konulduğunda, ve Kalman kazanç vektörü, $K_k[n]$ tanımlandığında, $Z_{k,D}[n]$ değeri,

$$K_k[n] = \frac{Z_{k-1,D}[n] D_k^H[n]}{\beta + Z_{k-1,D}[n]\|D_k[n]\|^2} \tag{4.52}$$

$$Z_{k,D}[n] = (1 - K_k[n]D_k[n])\frac{Z_{k-1,D}[n]}{\beta} = \frac{Z_{k-1,D}[n]}{\beta + Z_{k-1,D}[n]\|D_k[n]\|^2} \tag{4.53}$$

olarak bulunur. Ayrıca,

$$Z_{k,D}[n](D_k[n])^H = \frac{Z_{k-1,x}[n] D_k^H[n]}{\beta + Z_{k-1,x}[n]\|D_k[n]\|^2} = K_k[n] \tag{4.54}$$

olarak bulunmaktadır. (4.52)-(4.54) GRLS güncelleme eşitliği (4.47)’de kullanıldığında,

$$H_k[n] = (1 - K_k[n]D_k[n])\frac{Z_{k-1,D}[n]}{\beta}\left(\beta p_{k-1,(X,D)}[n] + D_k^H[n]X_k[n]\right) \tag{4.55}$$

$$\begin{aligned} H_k[n] = Z_{k-1,D}[n]p_{k-1,(X,D)}[n] - K_k[n]D_k[n]Z_{k-1,D}[n]p_{k-1,(X,D)}[n] + \\ Z_{k,D}[n]D_k^H[n]X_k[n] \end{aligned} \tag{4.56}$$

$H_{k-1}[n] = Z_{k-1,D}[n]p_{k-1,(X,D)}[n]$ olduğundan, (4.56) düzenlenir ise, katsayı güncelleme eşitliği,

$$H_k[n] = H_{k-1}[n] + K_k[n](X_k[n] - D_k[n]H_{k-1}[n]) \tag{4.57}$$

$$H_k[n] = H_{k-1}[n] + K_k[n]E_k[n] \tag{4.58}$$

olarak bulunmaktadır. (4.52) ile verilen $K_k[n]$ ifadesi yerine konulduğunda, katsayı güncelleme eşitliği,

$$H_k[n] = H_{k-1}[n] + \frac{Z_{k-1,D}[n]}{\beta + Z_{k-1,D}[n]\|D_k[n]\|^2}D_k^H[n]E_k[n] \tag{4.59}$$

halini alır.

4.3.3. Yapılandırılmış GNLMS kanal kestirim algoritması

Yapılandırılmış GNLMS kanal kestirim algoritması için, maliyet fonksiyonu,

$$\begin{aligned} &minimum\|h_{k+1} - h_k\|^2 \\ &\qquad\qquad {X_k}^{(-m)} = {D_k}^{(-m)}FGh_{k+1} \\ &\qquad\qquad\qquad \vdots \\ &kısıtlama\text{:}\quad {X_k}^{(0)} = {D_k}^{(0)}FGh_{k+1} \\ &\qquad\qquad\qquad \vdots \\ &\qquad\qquad {X_k}^{(m)} = {D_k}^{(m)}FGh_{k+1} \end{aligned}$$

ile ifade edilir. Burada, ${X_k}^{(-l)}$ ile ${D_k}^{(-l)}$ sırası ile alınan ve kestirim yapılacak sinyal değerlerinden oluşan, köşegen matrisler olup, köşeden değerleri l kadar dönel bir şekilde döndürülmüştür. Yukarıdaki maliyet fonksiyonunun matematiksel ifade karşılığı,

$$J_k^{GNLMS-YKK}[n] = \|h_{k+1} - h_k\|^2 + 2Re\left\{\sum_{i=-m}^{m} \lambda_i{}^H\left(X_k{}^{(i)} - D_k{}^{(i)}FGh_{k+1}\right)\right\} \quad (4.60)$$

şeklinde olmaktadır. Yukarıdaki maliyet fonksiyonunun, en düşük değeri sağlayan H_{k+1} vektörüne göre türevinin alınması ile çözüm bulunamamaktadır. Ancak, yine de, kanalın birim dürtü tepkisini dönel ön ekten küçük olduğu varsayılarak, güncelleme eşitliği yapılandırılmış LMS kanal kestirim algoritmasına benzer şekilde, zamanda uzunluk sınırlaması uygulanarak, aşağıdaki şekilde ifade edilebilir,

$$H_{k+1} = H_k + \mu FGF^H P^{-1}{}_{k,GNLMS-YKK} \sum_{i=-m}^{m} D_k{}^{(i),H} E_k{}^{(i)} \quad (4.61)$$

Burada $E_k{}^{(i)} = X_k{}^{(i)} - D_k{}^{(i)} H_{k+1}$ olarak tanımlanmaktadır.

4.4. Değişken Katsayılı Frekans Bölgesinde Çalışan Denkleştirici

Shin, Sayed, ve Song (2004). tarafından yapılan çalışmada, zaman bölgesinde çalışan NLMS ve APA uyarlamalı algoritmaları için ortalama sapma karesi tabanlı değişken katsayılı algoritma önerilmiştir. Söz konusu çalışmada, değişken katsayılı algoritmaların daha iyi sonuç verdiği görülmüştür. Bu nedenle, frekans bölgesinde çalışan algoritmalar içinde söz konusu değişken katsayılı zaman bölgesi için önerilen algoritmalar genişletilmiştir.

H^0 kestirimi yapılacak gerçek kanal frekans tepkisini göstersin. Algoritmanın kestirim sonucunun gerçek değerden sapmasını $\Delta H_k = H^0 - H_k$ şeklinde tanımlayabiliriz. Bu şekilde NLMS-UCE algoritması için, düzenlileştirme katsayısının sıfır olarak kabul edildiği durumda, ortalama hata karesi aşağıdaki şekilde hesaplanabilir:

$$\Delta H_{k+1} = \Delta H_k - \mu D_k^H P_k^{-1} E_k \quad (4.62)$$

Yukarıdaki ifadenin beklenen değeri ile normu alındığında,

$$\mathbb{E}\{\|\Delta H_{k+1}\|^2\} = \mathbb{E}\{\|\Delta H_k\|^2\} + \mu^2 \mathbb{E}\{E_k^H[n] P_k^{-1} D_k \Delta H_k D_k^H P_k^{-1} E_k\} \\ - 2\mu Re\left\{\mathbb{E}\{E_k^H P_k^{-1} D_k \Delta H_k\}\right\} \tag{4.63}$$

elde edilir. Algoritmanın $\mathbb{E}\{\|\Delta H_{k+1}\|^2\} \cong \mathbb{E}\{\|\Delta H_k\|^2\}$ kabul edilir ise (4.62)'yi en düşük değere getiren en uygun sabit katsayı değeri, yukarıdaki ifadenin türevinin sıfıra eşitlenmesi ile,

$$\mu^o = \frac{Re\left\{\mathbb{E}\{E_k^H P_k^{-1} D_k \Delta H_k\}\right\}}{\mathbb{E}\{E_k^H[n] P_k^{-1} D_k \Delta H_k D_k^H P_k^{-1} E_k\}} \tag{4.64}$$

olarak bulunur. Ortalama sapma, ΔH_k, ile hata, E_k, arasındaki eşitlik,

$$E_k = X_k - D_k H_k = D_k \Delta H_k + N_k \tag{4.65}$$

şeklindedir. Bu bağıntıda gürültü vektörünün sıfır olduğu varsayılır ise $E_k \cong D_k \Delta H_k$ olarak alınabilir. Buradan sapma vektörü $\Delta H_k = D_k^{-1} E_k = D_k^H (D_k D_k^H)^{-1} E_k$ halini alır. $(D_k D_k^H)^{-1}$ ifadesi her frekans noktasındaki istenilen sinyalin gücünün tersini verdiğinden, bu değer kestirim değeri ile P_k^{-1} matrisi ile yer değiştirilebilir.Bu durumda,

$$Re\left\{\mathbb{E}\{E_k^H P_k^{-1} D_k \Delta H_k\}\right\} \cong \mathbb{E}\{\|\Delta H_k\|^2\} = \mathbb{E}\{E_k^H[n] P_k^{-1} D_k \Delta H_k D_k^H P_k^{-1} E_k\} \tag{4.66}$$

(4.64) ifadesinin payı,

$$\mathbb{E}\{E_k^H[n] P_k^{-1} D_k \Delta H_k D_k^H P_k^{-1} E_k\} \\ = \mathbb{E}\{\Delta H_k^H[n] D_k^H P_k^{-1} D_k \Delta H_k D_k^H P_k^{-1} D_k \Delta H_k\} \\ + \mathbb{E}\{N_k^H[n] P_k^{-1} D_k \Delta H_k D_k^H P_k^{-1} E_k\} \tag{4.67}$$

$$E\left(\boldsymbol{E_k}^{\boldsymbol{H}} \boldsymbol{D_k} \boldsymbol{P_k}^{-1} \boldsymbol{D_k}^{\boldsymbol{H}} \boldsymbol{P_k}^{-1} \boldsymbol{E_k}\right) = E\left(\tilde{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{k}}^{H} \boldsymbol{D_k}^{\boldsymbol{H}} \boldsymbol{D_k} \boldsymbol{P_k}^{-1} \boldsymbol{P_k}^{-1} \boldsymbol{D_k}^{\boldsymbol{H}} \boldsymbol{D_k} \tilde{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{k}}\right) \\ + E\left(\boldsymbol{N_k}^{H} \boldsymbol{D_k} \boldsymbol{P_k}^{-1} \boldsymbol{P_k}^{-1} \boldsymbol{D_k}^{\boldsymbol{H}} \boldsymbol{N_k}\right) \\ + \mathrm{Re}\left\{E\left(\boldsymbol{N_k}^{H} \boldsymbol{D_k} \boldsymbol{P_k}^{-1} \boldsymbol{P_k}^{-1} \boldsymbol{D_k} \tilde{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{k}}\right)\right\} \tag{4.68}$$

halini alır. Burada $\boldsymbol{D_k}^{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{D_k}\boldsymbol{P_k}^{-1}$ ifadesindeki terimi, $\boldsymbol{D_k}^{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{D_k}$ yaklaşık olarak her frekans noktasındaki istenilen veri bloğunun gücünü vermekte olup, $\boldsymbol{P_k}^{-1}$ terimi ise bu güç değerinin kestirim değerinin tersidir. Bu durumda, söz konusu çarpımın yaklaşık olarak birim matrise eşit olduğu varsayılabilir.

Ayrıca gürültü vektörü $\boldsymbol{N_k}$ 'nın istatistiki olarak $\boldsymbol{D_k}$ 'dan bağımsız olduğu kabul edilebilir.

$$E\left(\tilde{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{k}}{}^{H}\boldsymbol{D_k}^{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{D_k}\boldsymbol{P_k}^{-1}\boldsymbol{P_k}^{-1}\boldsymbol{D_k}^{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{D_k}\tilde{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{k}}\right)=E\left(\left\|\tilde{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{k}}\right\|^2\right)=E\left(\boldsymbol{E_k}^{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{P_k}^{\boldsymbol{-1}}\boldsymbol{D_k}\boldsymbol{D_k}^{H}\boldsymbol{P_k}^{\boldsymbol{-1}}\boldsymbol{E_k}\right) \tag{4.69}$$

$$E\left(\boldsymbol{N_k}^{H}\boldsymbol{D_k}\boldsymbol{P_k}^{-1}\boldsymbol{P_k}^{-1}\boldsymbol{D_k}^{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{N_k}\right)=E\left(\boldsymbol{N_k}^{H}\boldsymbol{P_k}^{-1}\boldsymbol{N_k}\right)=\sigma_n{}^2Tr\left\{\boldsymbol{P_k}^{-1}\right\} \tag{4.70}$$

$$E\left(\boldsymbol{N_k}^{H}\boldsymbol{D_k}\boldsymbol{P_k}^{-1}\boldsymbol{P_k}^{-1}\boldsymbol{D_k}^{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{N_k}\right)=E\left(\boldsymbol{N_k}^{H}\boldsymbol{P_k}^{-1}\boldsymbol{N_k}\right)=\sigma_n{}^2Tr\left\{\boldsymbol{P_k}^{-1}\right\} \tag{4.71}$$

$$E\left(\boldsymbol{N_k}^{H}\boldsymbol{D_k}\boldsymbol{P_k}^{-1}\boldsymbol{P_k}^{-1}\boldsymbol{D_k}^{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{N_k}\right)=E\left(\boldsymbol{N_k}^{H}\boldsymbol{P_k}^{-1}\boldsymbol{N_k}\right)=\sigma_n{}^2Tr\left\{\boldsymbol{P_k}^{-1}\right\} \tag{4.72}$$

Yukarıdaki değerler yerine konulduğunda, en uygun katsayı,

$$\mu^o=\frac{E\left(\left\|\boldsymbol{Q_k}\right\|^2\right)}{E\left(\left\|\boldsymbol{Q_k}\right\|^2\right)+\sigma_n{}^2Tr\left\{\boldsymbol{P_k}^{-1}\right\}} \tag{4.73}$$

şeklinde bulunur. Burada $\boldsymbol{Q_k}=\boldsymbol{D_k}^{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{P_k}^{-1}\boldsymbol{E_k}$ göstermektedir. Bu bağıntıda, $\boldsymbol{Q_k}$ vektör normunun beklenen değerinin önceden bilinmemektedir. Bu değerin belirlenebilmesi için aşağıdaki kestirim işlemi yapılabilir (Shin ve diğerleri, 2004):

$$\hat{\boldsymbol{Q}}_k=\xi\hat{\boldsymbol{Q}}_{k-1}+(1-\xi)\boldsymbol{D_k}^{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{P_k}^{-1}\boldsymbol{E_k} \tag{4.74}$$

Burada ξ , kestirim için kullanılan pozitif ve sıfırdan küçük bir sayıdır.

Kestirim değeri yukarıdaki şekilde elde edildiğinden en uygun katsayı değeri,

$$\mu^{o} = \mu_{\max} \frac{\left\| \hat{\boldsymbol{Q}}_{\boldsymbol{k}} \right\|^{2}}{\left\| \hat{\boldsymbol{Q}}_{\boldsymbol{k}} \right\|^{2} + \sigma_{n}^{2} Tr\left\{ \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{k}}^{-1} \right\}} \tag{4.75}$$

bağıntısı ile elde edilebilir. Burada $\mu_{\max} < 2$ şeklinde seçilmelidir. Bilindiği üzere NLMS algoritmasında kullanılabilecek en büyük katsayı değeri 2'dir. Görüldüğü üzere bu terim dışındaki bölümlü ifade en yüksek 1 değerini alabilmektedir.

NLMS-SCE algoritması içinde benzer şekilde değişken katsayılı algoritma geliştirilebilir. Bu durumda elde edilen katsayı hesaplama bağıntısı:

$$\mu^{o} = \mu_{\max} \frac{\left\| \hat{\boldsymbol{Q}}_{\boldsymbol{k}} \right\|^{2}}{\left\| \hat{\boldsymbol{Q}}_{\boldsymbol{k}} \right\|^{2} + (L / N_{SYM}) \sigma_{n}^{2} Tr\left\{ \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{k}}^{-1} \right\}} \tag{4.76}$$

$$\hat{\boldsymbol{Q}}_{\boldsymbol{k}} = \xi \hat{\boldsymbol{Q}}_{\boldsymbol{k-1}} + (1-\xi) \boldsymbol{F G F}^{\boldsymbol{H}} \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{H}} \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{k}}^{-1} \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}} \tag{4.77}$$

şeklinde olmaktadır.

4.5. İşlemsel Karmaşık

Uyarlamalı kanal kestirim metodları için işlemsel karmaşıklık seviyeleri, uyarlamalı denkleştici algoritmalarına benzer şekilde bu alt bölümde belirlenmektedir. Yapılan karşılaştırmada, hızlı Fourier dönüşümü (FFT/IFFT) işlemlerinin her birinin $N_{SYM}/2\log_2(N_{SYM})$ karmaşık sayı çarpımı ve $N_{SYM}\log_2(N_{SYM})$ sayıda karmaşık sayı toplamı gerektirdiği varsayılmıştır. Her algoritmanın gerçekleştirilmesi için 3 adet FFT/IFFT işlemine gereksinim duyulmaktadır. Ancak, yapılandırılmış kanal kestirim metodları için, katsayı güncellemede kanalın zaman bölgesindeki uzunluğunu sınırlandırmak için, ek olarak bir hızlı Fourier dönüşümü ile ters hızlı frekans dönüşüm işlemine ihtiyaç duyulmaktadır. Hesaplanan kanal frekans değerlerine göre, denkleştirici katsayısının hesaplanması için 2 gerçel çarpım ile 2 gerçel bölme işlemine ihtiyaç duyulmaktadır. Hesaplanan kanal kestirim vasıtası ile denkleştirme işleminin frekans bölgesinde gerçekleştirilmesi için N_{SYM} sayıda karmaşık sayı çarpımı, N_{SYM}-1 adet karmaşık sayı toplamı gerekmektedir. GNLMS ve GRLS algoritmalarında her frekans noktasında hesaplanan vektör normları için iki adet gerçel çarpım işlemine gerek olduğu kabul edilmiştir. Ayrıca her karmaşık sayı çarpımı gerçel olarak dört adet çarpıma, karmaşık sayı toplama işleminin ise iki adet gerçel sayı toplamına karşılık geldiği varsayılmıştır. Bu durumda, yukarıdaki açıklamalara göre, kanal kestirim için tüm algoritmalara ait hesaplanan karmaşıklık seviyeleri Çizelge 3.1'de verilmektedir. Elde edilen işlemsel karmaşıklık seviyelerine bakıldığında, denkleştirme algoritmalarında olduğu gibi, LMS algoritmasının en düşük karmaşıklık seviyesine sahip olduğu görülmekte, GNLMS ve GRLS algoritmalarının karmaşıklık seviyelerinin, kullanılan projeksiyon seviyesinin arttırılması ile arttığı anlaşılmaktadır. Kanal kestirim işlemi ile denkleştirme algoritmalarının sayısal olarak işlemsel karmaşıklığına bakıldığında, örneğin N_{SYM}=256 olarak seçildiğinde, geleneksel algoritmalar olan yapılandırılmamış LMS, RLS, GNLMS ve GRLS kanal kestirim algoritmaları, sırası ile sembol başına 64 ve 65 gerçel çarpım işlemine gereksinim duymaktadır. Görüldüğü üzere geleneksel LMS ve RLS algoritmalarının karmaşıklığı birbirine oldukça yakın olmakta, doğrudan denkleştirme işleminin karmaşıklık seviyesine oldukça yakın olmaktadırlar. Aynı durum yapılandırılmamış GNLMS, GRLS algoritmaları için de geçerli olup, karmaşıklık seviyeleri projeksiyon seviyesi 3, yani m=1 olarak yapılandırılmış kanal kestirim algoritmaları, LMS-YKK ve GNLMS-YKK için ise işlemsel karmaşıklık seviyeleri sırasıyla, 96 ve 111 olmakta ve bu seviye en düşük karmaşıklığa sahip kanal kestirim algoritması olan yapılandırılmamış LMS algoritmasına göre % 80'lik bir artışa denk düşmektedir. Ayrıca yapılandırılmış GNLMS-YKK kanal kestirim algoritmasının işlemsel karmaşıklığı, doğrudan denkleştirme kullanan GNLMS algoritmasına göre %44 daha fazla gerçel sayı çarpım işlemine ihtiyaç duyduğu anlaşılmaktadır. Ancak, benzetim sonuçlarından elde edilen sonuçlardan, özellikle GNLMS-YKK algoritmasının kullanılması ile, hızlı değişim gösteren kanallarda performansın önemli ölçüde artmaktadır. Bu nedenle, işlemsel karmaşıklık seviyesinin artmasına karşın, GNLMS-YKK algoritmasından elde edilen performans artışının daha önemli olduğu düşünülmekte, işlemci teknolojisindeki gelişmelerden dolayı da bu artışın üstesinden gelinebileceği değerlendirilmektedir.

4.6. Kanal Kestirim Algoritmalarının Teorik Performansı

Bu alt bölümde, 2. ve 3. bölümlerde kanal denkleştirme algoritmaları için yapıldığı gibi, bölüm kapsamında gösterilen kanal kestirim algoritmalarının ayarsızlık, yakınsama ve izleme değerlerinin teorik olarak hesaplanması gösterilmektedir.

Yukarıda belirtilen ayarsızlık ve yakınsama performanslarının belirlenmesinde, kanalın tutarlı bant genişliği içerisinde, kanal $H[n]$, ve alınan sinyal $X_k[n]$ arasında yüksek ilintisellik bulunması halinde, GNLMS ve GRLS algoritmaları için, izdüşüm seviyesine bağlı olarak kullanılan pencere içerisinde çoklu regresyon bağıntısını,

$$X_k[n] = D_k[n]H^o[n] + \mathcal{N}_k^o[n] \tag{4.68}$$

sağladığı, işlemlerde kullanılan sinyallerin ise GBD olduğu kabul edilmektedir. Burada $H^o[n]$ kanalın frekans bölgesinde n. nokta için aldığı değeri, $\mathcal{N}_k^o[n]$ ise sıfır ortalamalı öz ilinti matrisi $N_{sym}\sigma_{\eta^o}^2 I$ olan beyaz Gauss gürültüsünü göstermektedir. Söz konusu gürültü hata taban değerini göstermekte olup, OHK tabanlı herhangi bir uyarlamalı algoritma bu hata değerinden düşük bir OHK değeri sağlayamaz.

Zamanla değişen kanallarda ise en uygun katsayı değeri her adımda değişkenlik gösterdiğinden, çoklu regresyon bağıntısı,

$$X_k[n] = D_k[n]H_{k-i}^o[n] + \mathcal{N}_k[n] \tag{4.69}$$

haline dönüşmektedir. Burada $H_{k-i}^o[n]$ zamanla değişen kanal katsayısını göstermekte olup, LMS, LMS-YKK, NLMS, GNLMS için $i = 0$, RLS ve GRLS için $i = 1$ olarak alınmaktadır.

Bu durumda kanal kestirim için uyarlanabilir algoritmaların kullanımı ile, GBD kanallar için n. frekans noktası için elde edilen OHK değeri, $\xi_k[n]$,

$$\xi_k[n] = E\{|E_k[n]|^2\} = E\{|X_k[n] - D_k[n]H_k[n]|^2\} \tag{4.70}$$

ile hesaplanmaktadır. (4.78) eşitliği (4.80) içerisinde kullanıldığında,

$$\xi_k[n] = E\{|D_k[n]H^o[n] + N_k[n] - D_k[n]H_k[n]|^2\} \tag{4.71}$$

elde edilir. Uyarlamalı algoritmanın, en uygun değerden sapma miktarı $\Delta H_k[n] = H_k[n] - H^o[n]$ olarak tanımlanır ve (4.81) ifadesinde yerine konulur ise,

$$\xi_k[n] = E\{|N_k[n] - D_k[n]\,\Delta H_k[n]|^2\} \tag{4.82}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki ifade açıldığında,

$$\xi_k[n] = E\{|N_k[n]|^2\} + E\{|D_k[n]\Delta H_k[n]|^2\} - 2Re\{E[N_k{}^*[n]D_k[n]\Delta H_k[n]]\} \tag{4.83}$$

halini almaktadır. Gauss gürültüsü, $\mathcal{N}_k[n]$, gönderilen sinyal $D_k[n]$ ve $\Delta H_k[n]$ parametrelerinden bağımsız olduğu kabul edilir ise, OHK değeri,

$$\xi_k[n] = N_{SYM}\sigma_n{}^2 + E\{|D_k[n]\Delta H_k[n]|^2\} = N_{SYM}(\sigma_n{}^2 + \sigma_d{}^2E\{|\Delta H_k[n]|^2\}) \tag{4.84}$$

olarak bulunmaktadır. Eşitlikten anlaşıldığı üzere, kullanılan uyarlanabilir kanal kestirim algoritmalarında, EDOHK çözümü üzerine $E\{|D_k[n]\Delta H_k[n]|^2\}$ kadarlık fazladan bir OHK oluşmasına yol açmaktadır. Bu değer, EDOHK değeri ile normalize edilir ise ayarsızlık değeri, $M = E\{|D_k[n]\Delta H_k[n]|^2\}/N_{SYM}\sigma_n{}^2$ şeklinde tanımlanmaktadır. Bu değer, 0 ile 1 arasında olup, incelenen uyarlamalı algoritmanın EDOHK değerine göre ne kadarlık fazladan OHK oluştuğunu göstermektedir. İdealde istenilen istenilen M nin olabildiğince düşük değere, yani sıfıra yakın bir değer almasıdır.

Aşağıda, bölüm kapsamında gösterilen her algoritmaya ait ayarsızlık, yakınsama hızı ve takip performanslarının teorik olarak elde edilmesi gösterilmektedir. Söz konusu parametreler karşılaştırılarak algoritmaların teorik olarak avantaj ve dezavantajlarının belirlenmesi amaçlanmaktadır.

4.6.1. LMS tabanlı kanal kestirim algoritmalarının teorik performansı

LMS ve LMS-YKK algoritmalarının teorik performans analizi sırasıyla, ayarsızlık, yakınsama ve takip şeklinde aşağıda teorik analizi yapılarak elde edilen sonuçlar verilmektedir.

Ayarsızlık

$\Delta H_k = H_k - H^o$ şeklinde tanımlanan kanal kestirim katsayı vektörünün en uygun değerinden sapma değeri kullanılarak LMS ve LMS-YKK algoritmaları için (4.4) ve (4.24)'de yerine konulacak olur ise, sapma değerleri,

$$\Delta H_{k+1}^{LMS} = (I - \mu D_k^H D_k)\Delta H_k^{LMS} + \mu D_k^H N_k \tag{4.85}$$

$$\Delta H_{k+1}^{LMS-YKK} = (I - \mu FGF^H D_k^H D_k)\Delta H_k^{LMS-YKK} + \mu FGF^H D_k^H N_k \tag{4.86}$$

şeklinde zaman içerisinde değişim göstermektedir. (4.85) ve (4.86)'de, her iki taraf, gönderilen sinyalin frekans bölgesi değerlerinden oluşan köşegen D_k ile çarpılır ise,

$$D_k\Delta H_{k+1}^{LMS} = (I - \mu D_k D_k^H)D_k\Delta H_k^{LMS} + \mu D_k D_k^H N_k \tag{4.87}$$

$$D_k\Delta H_{k+1}^{LMS-YKK} = (I - \mu D_k FGF^H D_k^H)D_k\Delta H_k^{LMS-YKK} + \mu D_k FGF^H D_k^H N_k \tag{4.88}$$

elde edilir. (4.87) ve (4.88)'de, soncul hata, ${E_k}^{p,LMS} = D_k\Delta H_{k+1}^{LMS}$, $D_k\Delta H_{k+1}^{LMS-YKK}$ ve öncül hata ${E_k}^{a,LMS} = D_k\Delta H_k^{LMS}$, ${E_k}^{a,LMS-YKK} = D_k\Delta H_k^{LMS-YKK}$ vektör tanımları kullanıldığında,

$$E_k^{p,LMS} = (I - \mu D_k^H D_k)E_k^{a,LMS} + \mu D_k D_k^H N_k \tag{4.89}$$

$$E_k^{p,LMS-YKK} = (I - \mu D_k FGF^H D_k^H)E_k^{a,LMS-YKK} + \mu D_k FGF^H D_k^H N_k \tag{4.90}$$

elde edilir. Soncul hata vektörleri, ${E_k}^{p,LMS}$ ve ${E_k}^{p,LMS-YKK}$ uyarlanabilir algoritmanın k. blokta kestirilen kanal frekans tepkisi değeri güncellendikten sonra elde edilen hata vektörünü, öncül hata değeri ise, kestirilen kanal frekans tepkisi değeri (k-1. blokta elde edilen) değeri, H_k kullanılarak elde edilen hata değerini göstermektedir.

(4.89) ve (4.90) ifadelerinin her iki tarafının norm karesi alındıktan sonra beklenen değer işlevi kullanıldığında, öncül ve soncul OHK arasında, LMS algoritması için,

$$\mathbb{E}\left\{\left\|E_k^{p,LMS}\right\|^2\right\} = \mathbb{E}\left\{E_k^{a,LMS,H}(I - \mu D_k^H D_k)^2 E_k^{a,LMS}\right\} + \mu^2 \mathbb{E}\{N_k^H D_k D_k^H D_k D_k^H N_k\} \tag{4.93}$$

şeklinde ve LMS-YKK algoritması için,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left\{\left\|E_k^{p,LMS-YKK}\right\|^2\right\} \\ &= \mathbb{E}\left\{E_k^{a,LMS-YKK,H}(I - \mu D_k F G F^H D_k^H)^2 E_k^{a,LMS-YKK}\right\} \\ &+ \mu^2 \mathbb{E}\{N_k^H D_k F G F^H D_k^H D_k F G F^H D_k^H N_k\}\end{aligned} \tag{4.94}$$

şeklinde ilişki elde edilir.

LMS algoritması için, ${E_k}^{a,LMS}$, N_k ile D_k istatistiki olarak birbirinden bağımsız kabul edildiğinde, (4.93) ifadesinin sağındaki ilk iki terim,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left\{E_k^{a,LMS,H}(I - \mu D_k^H D_k)^2 E_k^{a,LMS}\right\} &= \sum_{n=0}^{N_{sym}-1} \mathbb{E}\{(1 - \mu |D_k[n]|^2)^2\} \mathbb{E}\{|{E_k}^a[n]|^2\} \\ &= \left\{1 - 2\mu N_{sym}\sigma_d^2 + 2\mu^2 N_{sym}^2 \sigma_d^4\right\} \mathbb{E}\left\{\left\|E_k^{a,LMS}\right\|^2\right\}\end{aligned} \tag{4.95}$$

$$\mathbb{E}\{N_k^H D_k D_k^H D_k D_k^H N_k\} = \textstyle\sum_{n=0}^{N_{sym}-1} \mathbb{E}\{|N_k[n]|^2\} \mathbb{E}\{|D_k[n]|^4\} = 2N_{sym}^3 \sigma_d^4 \sigma_n^2 \tag{4.96}$$

haline dönüşmektedir. Bu durumda, LMS algoritması kararlı duruma ulaştığında, ($k \to \infty$) için, $\mathbb{E}\left\{\left\|{E_k}^{a,LMS}\right\|^2\right\} \approx \mathbb{E}\left\{\left\|{E_k}^{p,LMS}\right\|^2\right\}$ olacağından,

$$\mathbb{E}\left\{\left\|E_k^{a,LMS}\right\|^2\right\} = \frac{\mu N_{sym}^2 \sigma_d^2 \sigma_n^2}{1 - \mu N_{sym} \sigma_d^2} \tag{4.97}$$

olacaktır. LMS algoritması için ayarsızlık değeri,

$$M^{LMS} = \frac{\mathbb{E}\left\{\left\|E_k^{a,LMS}\right\|^2\right\}}{N_{sym}\sigma_n^2} = \frac{\mu N_{sym} \sigma_d^2}{1 - \mu N_{sym} \sigma_d^2} \tag{4.98}$$

olarak bulunmaktadır. (4.98) ifadesinden görüldüğü üzere, LMS algoritmasının yakınsaması için $1/N_{sym}\sigma_d^2 < \mu < 0$ olarak seçilmesi gerekmektedir.

LMS-YKK algoritması için, kararlı durumda $\mathbb{E}\left\{\left\|E_k^{p,LMS-YKK}\right\|^2\right\} \approx \mathbb{E}\left\{\left\|E_k^{a,LMS-YKK}\right\|^2\right\}$ olacağından, (4.93)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{E_k^{a,LMS-YKK,H} D_k FGF^H D_k^H (I-\mu D_k FGF^H D_k^H) E_k^{a,LMS-YKK}\} \\ = \mu\mathbb{E}\{N_k^H D_k FGF^H D_k^H D_k FGF^H D_k^H N_k\}\end{aligned} \tag{4.99}$$

haline dönüşür. (4.99)'da eşitliğin her iki tarafı skaler sayı olduğundan iz alma işlemi her iki tarafa uygulanabilir. Ayrıca iz alma operatörünün beklen değer işlemi ile yer değiştirilmesi ve $Tr\{AB\} = Tr\{BA\}$ özelliği kullanıldığında,

$$\begin{aligned}Tr\left\{\mathbb{E}\{E_k^{a,LMS-YKK} E_k^{a,LMS-YKK,H}\}\mathbb{E}\{D_k FGF^H D_k^H (I-\mu D_k FGF^H D_k^H)\}\right\} \\ = \mu Tr\left\{\mathbb{E}\{N_k N_k^H\}\mathbb{E}\{D_k FGF^H D_k^H D_k FGF^H D_k^H\}\right\}\end{aligned} \tag{4.100}$$

haline dönüşür. $\mathbb{E}\{N_k N_k^H\}$ köşegen matris olduğundan,

$$\begin{aligned}Tr\left\{\mathbb{E}\{E_k^{a,LMS-YKK} E_k^{a,LMS-YKK,H}\}\mathbb{E}\{D_k FGF^H D_k^H (I-\mu D_k FGF^H D_k^H)\}\right\} \\ = N_{sym}\sigma_n^2 Tr\left\{\mathbb{E}\{D_k FGF^H D_k^H D_k FGF^H D_k^H\}\right\}\end{aligned} \tag{4.101}$$

şeklinde ifade edilebilir. $\mathbb{E}\{D_k FGF^H D_k^H\}$ ve $\mathbb{E}\{D_k FGF^H D_k^H D_k FGF^H D_k^H\}$ matrislerinin köşegen elemanları sırasıyla, $L\sigma_d^2$ ve $2L^2\sigma_d^4$ olduğundan,

$$\mathbb{E}\left\{D_k FGF^H {D_k}^H\left(I-\mu D_k FGF^H {D_k}^H\right)\right\} = 2LN_{sym}\sigma_d^2(1-\mu L\,\sigma_n^2) \tag{4.102}$$

halinde ifade edilebilir. Bu durumda artık OHK değeri,

$$\mathbb{E}\left\{\left\|E_k^{a,LMS-YKK}\right\|^2\right\} = \frac{\mu L\sigma_d^2\sigma_n^2}{1-\mu L\sigma_d^2} \tag{4.103}$$

şeklinde bulunur. LMS-YKK algoritması için ayarsızlık değeri,

$$M^{LMS-YKK} = \frac{{}^{\mu L}/_{N_{sym}} \sigma_d^2}{1-\mu L\sigma_d^2} \tag{4.103}$$

olarak bulunmaktadır. Ayarsızlık ifadesinden görüldüğü üzere, LMS-YKK algoritmasının yakınsamasının sağlanması için ${}^{1}/_{L\sigma_d^2} < \mu < 0$ şeklinde seçilmelidir. LMS algoritması için yakınsama değerleri ile karşılaştırıldığında, LMS-YKK algoritmasının yakınsaması için daha büyük μ değerlerinin seçilebileceği anlaşılmaktadır.

LMS ile LMS-YKK algoritmalarının ayarsızlık değerleri karşılaştırıldığında,

$$\varrho = \frac{M^{LMS}}{M^{LMS-YKK}} = \frac{1-\mu L\sigma_d^2}{1-\mu N_{sym}\sigma_d^2} {}^{N_{sym}}/_{L} \tag{4.104}$$

olarak bulunmaktadır. Görüldüğü üzere $L < N_{sym}$ olarak seçildiğinde, LMS-YKK algoritması her zaman daha düşük ayarsızlık değeri sağlayacaktır. LMS-YKK algoritmasında katsayı güncelleme işleminde zaman bölgesine dönüştürülen gradyan kestirim vektörünün baştaki L kadarlık kısmı göz önüne alınarak kalan $N_{sym} - L$ kadarlık kısmı göz ardı edilmektedir. Bu durumda atılan kısımdaki gürültünün etkisi ortadan kaldırıldığından, L kadarlık kısmı frekans bölgesine dönüştürülen sinyalde gürültünün etkisi azaltılmakta ve kanal frekans tepkisinin daha iyi kestirimi mümkün olmaktadır.

Yakınsama

LMS algoritmasının için OHK değeri, aşağıda verilen $\mathcal{S}_k$ ve $\mathcal{T}_k$ katsayı tanımlamaları kullanıldığındai

$$\mathcal{S} = \left(N_{sym} - 2\mu N_{sym}^2\sigma_d^2 + 2\mu N_{sym}^5\sigma_d^4\right) \tag{4.105}$$

$$\mathcal{T} = 2N_{sym}^4\sigma_d^4\sigma_n^2 \tag{4.106}$$

$$\mathbb{E}\left\{\left\|\Delta H_{k+1}^{LMS}\right\|^2\right\} = \mathcal{S}\mathbb{E}\left\{\left\|\Delta H_k^{LMS}\right\|^2\right\} + \mu^2\mathcal{T} \tag{4.107}$$

haline dönüşür. (4.107) yinelemeli ifadesi görüldüğü üzere sabit katsayılı bir denklemdir. Bu durumda LMS algoritmasının kararlı durum seviyesine yakınsama hızı girişe uygulanan sinyalin beyaz olmasından dolayı, RLS algoritmasının tersine her blokta sabit olacaktır. Yakınsama hızını belirleyen parametre μ'dür. Yakınsama hızının arttırılması için μ değerinin büyük seçilmesi gerekmektedir. Ancak bu durumda bir önceki bölümde açıklandığı üzere ayarasızlık değeri yani toplam OHK değerinde artış meydana gelmektedir.

(4.107) ifadesinin başlangıç bloğundan itibaren değişimi hesaplandığında,

$$\mathbb{E}\left\{\left\|\Delta H_k^{LMS}\right\|^2\right\} = \mathcal{S}^k \mathbb{E}\{\|\Delta H_0^{LMS}\|^2\} + \mu^2 \mathcal{T} \sum_{i=0}^{k-1} \mathcal{S}^i \tag{4.108}$$

elde edilir.

k. blok için artık OHK değeri, $\Delta\xi_k^{LMS} = \mathbb{E}\left\{\left\|X_k \Delta H_k^{LMS}\right\|^2\right\}$, olrak alınması halinde, toplam OHK değeri, $\xi_k^{LMS} = \xi_k^0 + \Delta\xi_k^{LMS}$, zamana bağlı değişimi, yani öğrenme eğrisi,

$$\xi_k^{LMS} = \xi_k^0 \left(1 + \mathcal{S}^k + \mu^2 \mathcal{T} \frac{1-\mathcal{S}^k}{1-\mathcal{S}}\right) \tag{4.109}$$

olarak elde edilmektedir.

(4.109) ile verilen eşitliğe öğrenme eğrisi (learning curve) adı verilmekte olup, LMS algoritmasının zamana göre her adımda elde edilen OHK değerinin değişimini göstermektedir.

Takip performansı

LMS ve NLMS algoritmasının zamanla değişen katsayıları izleme performansını elde etmek için, kanal frekans tepki vektörü, H_k^o' nin zamanda 1. dereceden Markov zinciri olarak, değişim gösterdiği kabul edilmiş olup, değişimin ifadesi

$$H_k^o = aH_{k-1}^o + \mathfrak{N}_k \tag{4.110}$$

şeklindedir. Burada, $\mathfrak{N}_k$ sıfır ortalamalı, ilinti matrisi $\mathbb{E}\{\mathfrak{N}_k\mathfrak{N}_k^H\} = N_{sym}{\sigma_{\mathfrak{N}}}^2 I$ olan frekans bölgesindeki EBGG vektörünü, a 1'e çok yakın seçilen değeri göstermektedir. Eş. (4.110)'dan görüldüğü üzere H_k^o zamanda değişimi, a parametresinin 1'e yakın olmasından dolayı, $\mathfrak{N}_k[n]$ EBGG'nin dar bant genişliğine sahip alçak geçiren filtrelenmiş halidir.

Durağan olmayan kanal göz önüne alındığında, LMS ortalama sapma katsayısı, ΔH_k^{LMS},

$$\Delta H_k^{LMS} = H_k^{LMS} - H_k^o \tag{4.111}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Ayrıca, n. frekans noktası için tanımlanan $X_k[n]$ değeri, (4.78) ile verilen ifadeyi sağlamaktadır.

Eş. (4.110)'dan görüldüğü üzere en uygun katsayı H_k^o zamanda değişim göstermekte, değişimin miktarı ise a katsayı değerine bağlı olmaktadır. a katsayı değeri 0'a doğru yaklaştığında en uygun katsayı değeri de zaman içerisinde daha hızlı değişim gösterecektir.

LMS algoritması için zamanla değişen en uygun katsayı için, her adımdaki katsayı sapma değeri,

$$\Delta H_{k+1}^{LMS} = H_k^{LMS} + \mu D_k^H(D_k H_k^o + \mathcal{N}_k - D_k H_k^{LMS}) - H_k^o \tag{4.112}$$

şeklindedir. Bu ifade, (4.78) yardımıyla,

$$\Delta H_{k+1}^{LMS} = (I - \mu D_k^H D_k)\Delta H_k^{LMS} + \mu D_k^H \mathcal{N}_k + (1-a)H_k^o + \mathfrak{N}_k \tag{4.113}$$

olacaktır. Uyarlanabilir algoritmaların değişimi takip edebilmesi için zamansal değişimin sınırlı olması gerekmektedir. Bu nedenle a değeri 1'e çok yakın bir değer $(0.999 < a < 1)$, $(1-a)H_k^o \approx 0$ olarak kabul edilebilir. Sonuçta, katsayı sapma değeri yaklaşık,

$$\Delta H_{k+1}^{LMS} = (I - \mu D_k^H D_k)\Delta H_k^{LMS} + \mu D_k^H \mathcal{N}_k + \mathfrak{N}_k \tag{4.114}$$

olarak alınabilir. Burada, $\mathcal{N}_k$, ΔH_{k+1}^{LMS} ve $\mathfrak{N}_k$ birbirinden istatistiki olarak bağımsızdır. (4.114)'ün her iki tarafı norm karesinin beklenen değerinin alınması halinde,

$$\mathbb{E}\left\{\left\|D_k \Delta H_{k+1}^{LMS}\right\|^2\right\}$$
$$= \mathbb{E}\{\Delta H_k^{LMS,H} D_k^H (I - \mu D_k^H D_k)^2 D_k \Delta H_k^{LMS}\} + \mathbb{E}\{\mathfrak{N}_k^H D_k^H D_k \mathfrak{N}_k\} \tag{4.115}$$
$$+ \mu^2 \mathbb{E}\{\mathcal{N}_k^H D_k D_k^H D_k^H D_k \mathcal{N}_k\}$$

olmaktadır. (4.115) eşitliğinin sağındaki son ifade, ayarsızlık değeri hesaplanmasında bulunmuştur. Bu durumda algoritma, zaman ile değişen kanal katsayısı için kararlı duruma u+laştıktan elde edilen toplam katsayı sapma vektör normunun beklenen dğeri,

$$\mathbb{E}\left\{\left\|D_k \Delta H_{k+1}^{LMS}\right\|^2\right\}$$
$$= \{1 - 2\mu N_{sym}\sigma_d^2 + 2\mu^2 N_{sym}^2 \sigma_d^4\} \mathbb{E}\left\{\left\|D_k \Delta H_k^{LMS}\right\|^2\right\} + N_{sym}^2 \sigma_d^2 \sigma_{\mathfrak{N}}^2 \tag{4.116}$$
$$+ \mu^2 2 N_{sym}^3 \sigma_d^4 \sigma_n^2$$

Gerekli düzenleme yapıldığında, zamanla değişen GBD olmayan durum için kararlı durum toplam OHK ς_k^{LMS},

$$\varsigma_k^{LMS} = \xi^0 + \mathbb{E}\left\{\left\|D_k \Delta H_{k+1}^{LMS}\right\|^2\right\} = \xi^0 \left(1 + \frac{\mu N_{sym}\sigma_d^2}{1 - \mu N_{sym}\sigma_d^2}\right) + \frac{N_{sym}\sigma_{\mathfrak{N}}^2}{2\mu(1 - \mu N_{sym}\sigma_d^2)} \tag{4.117}$$

olarak elde edilir.

$\varsigma_k^{LMS}[n]$ ifadesine bakıldığında, GBD kanal için elde edilen OHK'ne ek olarak $\frac{N_{sym}{\sigma_{\mathfrak{N}}}^2}{2\mu(1-\mu N_{sym}\sigma_d^2)}$ OHK oluşmaktadır. Gecikme hatası adı verilen bu hata, LMS algoritmasının zaman ile kanalda meydana gelen değişimi daha geç algılamasından kaynaklanmaktadır. Söz konusu fazlalık hata μ parametresi ile ters orantılı olup, azaltılması için μ değerinin arttırılması gerekmektedir. Ancak bu durumda, ayarsızlıktan kaynaklanan OHK yükselmekte, seçilen değere göre toplam OHK, $\varsigma_k^{LMS}[n]$, değerinde değişim meydana gelmektedir. Bu değişim, ayarsızlık değeri, ${\sigma_{\mathfrak{N}}}^2$ ve seçilen μ katsayı değerine bağlı olmaktadır. μ değerinin değiştirilmesi ile toplam OHK, $\varsigma_k^{LMS}[n]$ artabileceği gibi azalması da mümkün olmaktadır. Bundan dolayı, zaman ile değişen kanallar için en uygun performansı sağlayacak μ değerinin optimizasyonu gerekmektedir. Aşağıda zamanla değişen kanallar için elde edilen teorik OHK değerini en düşük değere getirecek μ hesabı gösterilecektir.

Zaman ile değişen durağan olmayan kanallar için, toplam OHK değerini en düşük seviyeye getirecek en uygun katsayı değeri, μ^o bulmak için, (4.117) ile verilen toplam OHK değerinin μ'ye göre türevinin alınarak sıfıra eşitlenmesi gerekmektedir. Bu durumda,

$$\frac{\partial \varsigma_k^{LMS}}{\partial \mu} = \xi^0 \frac{\partial}{\partial \mu}\left\{1 + \frac{\mu N_{sym}\sigma_d^2}{1-\mu N_{sym}\sigma_d^2}\right\} + \frac{\partial}{\partial \mu}\left\{\frac{N_{sym}{\sigma_{\Re}}^2}{\mu(1-\mu N_{sym}\sigma_d^2)}\right\} = 0 \tag{4.118}$$

elde edilmektedir. Burada $\xi^0 = N_{sym}\sigma_n^2$ olup gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\xi^0 \sigma_d^2\mu^2 + 2N_{sym}\sigma_{\Re}^2\sigma_d^2\mu - {\sigma_{\Re}}^2 = 0 \tag{4.119}$$

ikinci dereceden denklemi elde edilmektedir. En uygun katsayı değeri hesaplandığında,

$$\mu_{1,2}^o[n] = \frac{{\sigma_{\Re}}^2}{\sigma_n^2}\left\{-1 \pm \sqrt{1 + \frac{\sigma_n^2}{{\sigma_{\Re}}^2\sigma_d^2}}\right\} \tag{4.120}$$

olarak bulunmaktadır. En uygun katsayı değeri pozitif bir değer alması gerektiğinden, en uygun katsayının,

$$\mu^{0,LMS} = \frac{{\sigma_{\Re}}^2}{\sigma_n^2}\left\{-1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma_n^2}{{\sigma_{\Re}}^2\sigma_d^2}}\right\} \tag{4.121}$$

olarak ayarlanması gerekmektedir.

$\mu^o\,[n]$ değeri görüleceği üzere, $\xi^0\,[n]$, EDOHK değerine, en uygun katsayının değişim hızını belirleyen, $\frac{{\sigma_{\Re}}^2}{\sigma_n^2}$ değerine, σ_d^2, bağlı olmaktadır. EDOHK değeri doğrusal denkleştirici için (4.121)'den görülebileceği üzere alınan sinyalin SGO değerine bağlı olmaktadır. Bu sebeple en uygun değerin kullanımında her iki faktör göz önüne alınarak ayarlanması gerekmektedir. Görüldüğü üzere, kanal denkleştirme algoritmalarının tersine, kanal kestirim algoritmalarında en uygun performansın elde edilmesi için her frekans noktası için sabit bir en uygun katsayı kullanılması gerekmektedir. (4.121) ile verilen en uygun katsayı değerinin seçiminde, kullanılabilecek en üst sınır değerin göz önüne alınması gerekmektedir.

4.6.2. RLS kanal kestirim algoritmasının teorik performansı

Ayarsızlık

(4.20) ile verilen RLS algoritması katsayı güncelleme eşitliğinde, $\Delta H_k^{RLS}[n] = H_k^{RLS} - H^o[n]$ ile gerçek kanal frekans değerinden sapma değeri tanımlandığında,

$$\Delta H_k^{RLS}[n] = \Delta H_{k-1}^{RLS}[n] + Z_{k,D}[n] D_k^*[n] E_k[n] \tag{4.122}$$

olarak elde edilir. RLS, algoritmasının hata vektörü, $E_k[n] = X_k[n] - D_k[n] H_{k-1}[n]$ ve (4.78) ile verilen regresyon bağıntısı kullanıldığında,

$$\Delta H_k^{RLS}[n] = \Delta H_{k-1}^{RLS}[n] + Z_{k,D}[n] D_k^*[n] (D_k[n] H^o[n] + N_k[n] - D_k[n] W_{k-1}[n]) \tag{4.122}$$

halini almaktadır. Sonrasında gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\Delta H_k^{RLS}[n] = \left(1 - Z_{k,D}[n] |H_k[n]|^2\right) \Delta H_{k-1}^{RLS}[n] + Z_{k,D}[n] D_k^*[n] N_k[n] \tag{4.123}$$

elde edilir. Her iki tarafın norm karesi ile beklenen değeri alındığında,

$$\begin{aligned} E\left\{\left|\Delta H_k^{RLS}[n]\right|^2\right\} & \\ &= E\left\{\left(1 - Z_{k,D}[n] |D_k[n]|^2\right)^2\right\} E\left\{\left|\Delta H_{k-1}^{RLS}[n]\right|^2\right\} \\ &- 2Re\left\{E\left\{Z_{k,D}[n] D_k[n] \Delta H_{k-1}^{RLS}[n] \left(1 \right.\right.\right. \\ &\left.\left.\left. - Z_{k,D}[n] |H_k[n]|^2\right) D_k^*[n] N_k[n]\right\}\right\} \\ &+ E\left\{\left(Z_{k,D}[n]\right)^2 |D_k[n]|^2 |N_k[n]|^2\right\} \end{aligned} \tag{4.124}$$

halini almaktadır. Görüldüğü üzere, tezin 2. Bölümü, (2.148)'de kanal denkleştirme için bulunan katsayı sapma OHK eşitliği ile (4.108) aynı yapıdadır. Bu durumda kanal kestirim için ayarsızlık değeri hesaplandığında,

$$M^{RLS} = \frac{E\{|D_k[n]|^2 |\Delta H_{k-1}[n]|^2\}}{N_{SYM} {\sigma_n}^2} = \frac{1-\beta^2}{2(1+\beta^2)} \tag{4.125}$$

olarak bulunmaktadır. Ayarsızlık değerinden görüldüğü üzere, kanal denkleştirme için kullanılan RLS algoritmasında olduğu gibi, RLS algoritmasında, ayarsızlık değeri giriş sinyalinden bağımsız olmakta, sadece, unutma faktörü değerine bağlı olmaktadır.

Yakınsama

RLS algoritmasının ortalama katsayı sapma kare değeri,

$$\mathbb{E}\left\{\left|\Delta H_k^{RLS}[n]\right|^2\right\}$$
$$= \mathbb{E}\left\{\left(1 - Z_{k,D}[n]|D_k[n]|^2\right)^2\right\}\mathbb{E}\left\{\left|\Delta H_{k-1}^{RLS}[n]\right|^2\right\} \tag{4.126}$$
$$+ N_{SYM}{\sigma_n}^2\mathbb{E}\left\{\left|Z_{k,D}[n]\right|^2\right\}\mathbb{E}\{|D_k[n]|^2\}$$

şeklindedir. Burada, $Z_{k,D}[n]$ değerinin blok ile değişimi beklenen değeri alınarak hesaplandığında,

$$Z_{k,D}[n] \approx (\mathbb{E}\{R_k[n]\})^{-1} = \frac{1}{\frac{\beta^{k+1}}{Z_{-1}[n]} + \left(\sum_{i=0}^{k}\beta^{k-i}\right)E\{|D[n]|^2\}} \tag{4.127}$$

şeklinde elde edilir. Burada, $Z_{-1,x}[n]$ algoritmada verilen ilk değeri göstermektedir.

$$\sum_{i=0}^{k}\beta^{k-i} = \frac{1-\beta^{k+1}}{1-\beta} \tag{4.128}$$

olduğundan,

$$\mathbb{E}\{Z_{k,D}[n]\} = \frac{(1-\beta)Z_{-1}[n]}{\beta^{k+1}(1-\beta) + \left(1-\beta^{k+1}\right)E\{|D[n]|^2\}Z_{-1}[n]} \tag{4.129}$$

şeklinde zaman içinde değişim göstermektedir. $\mathbb{E}\left\{\left|Z_{k,D}[n]\right|^2\right\}$ ise,

$$\mathbb{E}\left\{\left|Z_{k,D}[n]\right|^2\right\}$$
$$= \frac{(1-\beta)(1-\beta^2)Z_{-1}^2[n]}{\beta^{2(k+1)}(1-\beta)(1-\beta^2) + 2\beta^{k+1}(1-\beta^{k+1})Z_{-1}[n]E\{|D[n]|^2\}\left\{(1-\beta^2) + \beta(1-\beta^k)Z_{-1}[n]E\{|D[n]|^2\}\right\}} \tag{4.130}$$

olacaktır. RLS algoritması katsayı sapma OHK'nin bloğa bağlı olarak değişimi, (4.130) kullanılarak,

$$E\left\{\left|\Delta H_k^{RLS}[n]\right|^2\right\}$$
$$= \left[1 - 2\frac{(1-\beta)Z_{-1}[n]E\{|D[n]|^2\}}{\beta^{k+1}(1-\beta) + (1-\beta^{k+1})E\{|D[n]|^2\}Z_{-1}[n]} + \frac{2(1-\beta)(1-\beta^2)Z_{-1}^2[n](E\{|D[n]|^2\})^2}{\beta^{2(k+1)} + 2(1-\beta^{k+1})Z_{-1}[n]E\{|D[n]|^2\}\{\beta^{k+1}(1-\beta^2) + \beta(1-\beta^k)Z_{-1}[n]E\{|D[n]|^2\}\}}\right] E\left\{\left|\Delta H_{k-1}^{RLS}[n]\right|^2\right\}$$
$$+ N_{SYM}{\sigma_n}^2\left[\frac{(1-\beta)(1-\beta^2)Z_{-1}^2[n]E\{|D[n]|^2\}}{\beta^{2(k+1)} + 2(1-\beta^{k+1})Z_{-1}[n]E\{|D[n]|^2\}\{\beta^{k+1}(1-\beta^2) + \beta(1-\beta^k)Z_{-1}[n]E\{|D[n]|^2\}\}}\right] \quad (4.131)$$

olmaktadır. Burada,

$$\mathcal{A}_k^{RLS}$$
$$= 1 - 2\frac{(1-\beta)Z_{-1}[n]E\{|D[n]|^2\}}{\beta^{k+1}(1-\beta) + (1-\beta^{k+1})E\{|D[n]|^2\}Z_{-1}[n]} + \frac{2(1-\beta)(1-\beta^2)Z_{-1}^2[n](E\{|D[n]|^2\})^2}{\beta^{2(k+1)} + 2(1-\beta^{k+1})Z_{-1}[n]E\{|D[n]|^2\}\{\beta^{k+1}(1-\beta^2) + \beta(1-\beta^k)Z_{-1}[n]E\{|D[n]|^2\}\}} \quad (4.132)$$

$$\mathcal{B}_k^{RLS} = \frac{(1-\beta)(1-\beta^2)Z_{-1}^2[n]E\{|D[n]|^2\}}{\beta^{2(k+1)}+2(1-\beta^{k+1})Z_{-1}[n]E\{|D[n]|^2\}\{\beta^{k+1}(1-\beta^2)+\beta(1-\beta^k)Z_{-1}[n]E\{|D[n]|^2\}\}} \quad (4.132)$$

tanımlamaları kullanılması halinde,

$$E\left\{\left|\Delta H_k^{RLS}[n]\right|^2\right\} = \mathcal{A}_k^{RLS} E\left\{\left|\Delta H_{k-1}^{RLS}[n]\right|^2\right\} + \mathcal{B}_k^{RLS} N_{SYM}{\sigma_n}^2 \quad (4.133)$$

olarak elde edilir. $Z_{-1}[n]$ başlangıç değeri her frekans noktası için aynı seçilmesi halinde $\mathcal{A}_k^{RLS}$ $\mathcal{B}_k^{RLS}$ değerleri her frekans noktası için aynı değere sahip olacaktır.

(4.133) ifadesi başlangıç, $i = 0$ bloğundan itibaren hesaplanacak olur ise, ortalama katsayı sapma karesi beklenen değeri için,

$$E\left\{\left|\Delta H_k^{RLS}[n]\right|^2\right\} = \prod_{i=0}^{k} \mathcal{A}_i^{RLS}\, \mathbb{E}\{|\Delta H_{-1}^{RLS}[n]|^2\} + \sum_{i=0}^{k} \mathcal{A}_i^{RLS}\, \mathcal{B}_i^{RLS}[n] N_{SYM}{\sigma_n}^2 \quad (4.134)$$

elde edilir. $\xi_k^{RLS}[n] = E\{|E_k^a[n]|^2\} = E\left\{|D_k[n]|^2\left|\Delta H_{k-1}^{RLS}[n]\right|^2\right\}$ olduğundan,

$$\xi_k^{RLS}[n] = N_{SYM}{\sigma_d}^2 \prod_{i=0}^{k} \mathcal{A}_i^{RLS}\, \mathbb{E}\left\{\left|\Delta H_{-1}^{RLS}[n]\right|^2\right\} + |H_k[n]|^2 \sum_{i=0}^{k} \mathcal{A}_i^{RLS}\, \mathcal{B}_i^{RLS} N_{SYM}{\sigma_n}^2 \qquad (4.135)$$

şeklinde RLS algoritmasının öğrenmesi eğrisi elde edilir. RLS algoritmasında, her adımda elde edilen yakınsama hızı, her blokta farklı olmaktadır.

<u>Takip performansı</u>

RLS algoritmasının zamanla değişen katsayı durumunda, ortalama katsayı sapma değerinin ifadesi,

$$\Delta H_k[n] = \left(1 - Z_{k,D}[n]|D_k[n]|^2\right)\Delta H_{k-1}[n] + Z_{k,D}[n]D_k^*[n]\mathcal{N}_k[n] + (1-\mathcal{a})H_{k-1}^o[n] - \mathfrak{N}_k[n] \qquad (4.136)$$

şeklinde olmaktadır. $\mathcal{a}$ değeri 1'e çok yakın bir değer olduğundan ($0.999 < \mathcal{a} < 1$), $(1-\mathcal{a})H_{k-1}^o[n] \approx 0$ olmaktadır. Bu durumda, katsayı sapma değeri,

$$\Delta H_{k+1}[n] = \left(1 - Z_{k,D}[n]|D_k[n]|^2\right)\Delta H_k[n] + Z_{k,D}[n]D_k^*[n]\mathcal{N}_k[n] - \mathfrak{N}_k[n] \qquad (4.137)$$

şeklinde değişime uğrayacaktır. Burada $\mathcal{N}_k[n]$, $\Delta H_k[n]$ ve $\mathfrak{N}_k[n]$ birbirinden istatistiki olarak bağımsızdır. Ayarsızlık değerinin hesabında yapıldığı şekilde, (4.137)'in her iki tarafı $D_k[n]$ ile çarpılması, norm karesinin beklenen değerinin alınması halinde,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{|D_k[n]\,\Delta H_k[n]|^2\} \\ &= \mathbb{E}\left\{\left(1 - Z_{k,D}[n]|D_k[n]|^2\right)^2\right\}\mathbb{E}\{|D_k[n]\,\Delta H_{k-1}[n]|^2\} \\ &\quad + \mathbb{E}\{|H_k[n]|^2\}\mathbb{E}\{|\mathfrak{N}_k[n]|^2\} + \mathbb{E}\left\{\left(Z_{k,D}[n]\right)^2|D_k[n]|^4|\mathcal{N}_k[n]|^2\right\}\end{aligned} \qquad (4.138)$$

olmaktadır. RLS algoritması kararlı duruma geldiğinde, $\mathbb{E}\{|D_k[n]\,\Delta H_{k+1}[n]|^2\} \approx \mathbb{E}\{|D_k[n]\,\Delta H_k[n]|^2\}$ olacaktır. Gerekli düzenleme yapıldığında, zamanla değişen GBD olmayan durum için toplam OHK $\varsigma_k^{RLS}[n]$,

$$\varsigma_k^{RLS}[n] = \xi^0\,[n] + \mathbb{E}\{|D_k[n]\,\Delta H_{k-1}[n]|^2\} = \xi^0\,[n]\left(1 + \frac{1-\beta^2}{2(1+\beta^2)}\right) + \frac{\mathbb{E}\{|D_k[n]|^2\}N_{SYM}{\sigma_{\mathfrak{N}}}^2}{(1-\beta)(1+\beta^2)} \qquad (4.139)$$

olarak elde edilir.

Zamanla değişen kanaldan elde edilen OHK değeri, $\varsigma_k^{RLS}[n]$ bakıldığında, GBD kanal için elde edilen OHK'ne ek olarak $\frac{1}{(1-\beta)(1+\beta^2)}\mathbb{E}\{|D_k[n]|^2\}N_{SYM}{\sigma_{\mathfrak{N}}}^2$ kadarlık, gecikme hatası (lag error) adı verilen fazladan OHK oluşmaktadır. Gecikme hatasının azaltılması için β değerinin 0'a yakın seçilmesi gerekmektedir. Ancak bu durumda, ayarsızlıktan kaynaklanan OHK, yani ayarsızlık, değeri yükselmekte, seçilen değere göre toplam OHK, $\varsigma_k^{RLS}[n]$, değerinde değişim meydana gelmektedir. Bu değişim, ayarsızlık değeri, gecikme hatasının büyüklüğü ve seçilen β katsayı değerine bağlı olmaktadır. β değerinin değiştirilmesi ile toplam OHK, $\varsigma_k^{GRLS}[n]$ artabileceği gibi azalması da mümkün olmaktadır. Bundan dolayı, zaman ile değişen kanallar için en uygun performansı sağlayacak β değerinin optimizasyonu gerekmektedir. Aşağıda zamanla değişen kanallar için elde edilen teorik OHK değerini en düşük değere getirecek β hesabı gösterilecektir.

Zaman ile değişen durağan olmayan kanallar için, toplam OHK değerini en düşük seviyeye getirecek en uygun katsayı değeri, β^o bulmak için, (4.139) ile verilen toplam OHK değerinin β'ye göre türevinin alınarak sıfıra eşitlenmesi gerekmektedir. Bu durumda,

$$\frac{\partial\varsigma_k^{RLS}[n]}{\partial\beta} = \frac{\partial}{\partial\beta}\left\{1+\frac{1-\beta^2}{2(1+\beta^2)}\right\}\xi^o\,[n] + \frac{\partial}{\partial\beta}\left\{\frac{\mathbb{E}\{|D_k[n]|^2\}N_{SYM}{\sigma_{\mathfrak{N}}}^2}{(1-\beta)(1+\beta^2)}\right\} = 0 \tag{4.140}$$

elde edilmektedir. (4.140) çözüldüğünde,

$$\hbar = \xi^o\,[n] \tag{4.141}$$

$$\hbar\!\!\!/ = \mathbb{E}\{|D_k[n]|^2\}N_{SYM}{\sigma_{\mathfrak{N}}}^2 \tag{4.142}$$

$$-2\hbar\beta^3 + (4\hbar + 3\hbar\!\!\!/)\beta^2 - 2(\hbar + \hbar\!\!\!/)\beta + \hbar\!\!\!/ = 0 \tag{4.143}$$

olarak üçüncü dereceden denklem bulunmaktadır. Söz konusu kök değeri,

$$\ell = \left(\frac{(4\hbar+3\hbar\!\!\!/)^3}{216\hbar^3} - \frac{2(4\hbar+3\hbar\!\!\!/)(\hbar+\hbar\!\!\!/)}{24\hbar^2} + \frac{\hbar\!\!\!/}{4\hbar}\right) \tag{4.144}$$

$$m = \sqrt{\left(\frac{(4\hbar+3\hbar\!\!\!/)^3}{216\hbar^3} - \frac{2(4\hbar+3\hbar\!\!\!/)(\hbar+\hbar\!\!\!/)}{24\hbar^2} + \frac{\hbar\!\!\!/}{4\hbar}\right)^2 + \left(\frac{(\hbar+\hbar\!\!\!/)}{3\hbar} - \frac{(4\hbar+3\hbar\!\!\!/)^2}{36\hbar^2}\right)^3} \tag{4.145}$$

tanımlamaları kullanılarak,

$$\beta^o = \sqrt[3]{l+m} + \sqrt[3]{l-m} - \frac{(4\hbar+3\hbar)}{6\hbar} \tag{4.146}$$

ile hesaplanabilmektedir. (4.146) eşitliğinin [0 1) aralığında kalan kök değeri en uygun unutma faktörü değerini vermektedir.

En uygun katsayı ifadesinden görüleceği üzere, hem EDOHK'ne hem de katsayının değişim hızını belirleyen, $N_{SYM}\sigma_{\mathfrak{R}}{}^2$ değerine bağlı olmaktadır. EDOHK değeri doğrusal denkleştirici için (2.22)'den görülebileceği üzere alınan sinyalin SGO değerine bağlı olmaktadır. Bu sebeple en uygun değerin kullanımında her iki faktör göz önüne alınarak ayarlanması gerekmektedir.

4.6.3. GNLMS kanal kestirim algoritmalarının teorik performansı

Ayarsızlık

GNLMS ve GNLMS-YKK algoritmaları için, kanal denkleştirme için önerilen GNLMS ve GRLS algoritmalarının teorik performansında yapıldığı gibi, komşu frekans noktaları arasında yeterince yüksek ilintisellik seviyesinin bulunduğu kabul edilmiştir. Söz konusu ilintiselliğin yeterli seviyede bulunmayan kanallarda ($mx\Delta f < B_c$), bulunan teorik ayarsızlık değeri geçerli olmayacaktır.

GNLMS ve GNLMS-YKK algoritmaları için ΔH_{k+1}^{GNLMS} ve $\Delta H_{k+1}^{GNLMS-YKK}$ şeklinde katsayı sapma vektör blok güncelleme ifadeleri sırasıyla,

$$\Delta H_{k+1}^{GNLMS} = (I - \mu P_k^{-1} \mathcal{J}_k^H \mathcal{J}_k)\Delta H_k^{GNLMS} + \mu P_k^{-1} \mathcal{J}_k^H N_k' \tag{4.147}$$

$$\Delta H_{k+1}^{GNLMS-YKK} = (I - \mu F G F^H P_k^{-1} \mathcal{J}_k^H \mathcal{J}_k)\Delta H_k^{GNLMS-YKK} + \mu F G F^H P_k^{-1} \mathcal{J}_k^H N_k' \tag{4.148}$$

şeklinde bulunmaktadır. Burada, $\mathcal{J}_k$ matrisi $(2m+1)N_{SYM}xN_{SYM}$ boyutunda olup, $D_k[0]$ ve $N_k[0], i = 0 \dots, N-1$ vektörlerini içermektedir. N_k' ise $(2m+1)N_{SYM}x1$ boyuntunda EBGG'den oluşan vektördür. P_k , $\mathcal{J}_k$ matrisleri ve N_k' vektörü,

$$\mathcal{J}_k = \begin{bmatrix} D_k[0] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_k[1] & & 0 \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_k[N_{SYM}-1] \end{bmatrix}_{(2m+1)N_{SYM}xN_{SYM}} \quad (4.149)$$

$$N_k' = \begin{bmatrix} N_k[0] \\ N_k[1] \\ \vdots \\ N_k[N_{SYM}-1] \end{bmatrix}_{(2m+1)N_{SYM}x1} \quad (4.150)$$

$$P_k = \begin{bmatrix} P_k[0] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_k[1] & & 0 \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_k[N_{SYM}-1] \end{bmatrix}_{N_{SYM}xN_{SYM}} \quad (4.149)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada 0 ile boyutu $(2m+1)N_{SYM}x1$ olan sıfır değerinden oluşan vektörü göstermektedir. Gürültü vektörü, $N_k[l]$ öz ilinti ve çapraz ilinti matrisleri sırasıyla, $\mathbb{E}\{N_k[l]N_k^H[l]\} = N_{SYM}\sigma_n^2 I$ ve $\mathbb{E}\{N_k[l]N_k^H[m]\} = 0$ olmaktadır.

Bu durumda Ω_k ,

$$\Omega_k = P_k^{-1}\mathcal{J}_k^H\mathcal{J}_k = diag\left[\frac{\|D_k[i]\|^2}{P_k[i]}\right] \quad i = 0, \dots, N_{SYM}-1 \quad (4.151)$$

köşegen reel sayılardan oluşan matrisi ve $\Psi_k$vektörü,

$$\Psi_k = P_k^{-1}\mathcal{J}_k^H N_k' = \left[\frac{{D_k}^H[i]{N_k}^H[i]}{P_k[i]}\right] \quad i = 0, \dots, N_{SYM}-1 \quad (4.152)$$

şeklinde tanımlanabilir.

(4.114) ve (4.115) ile verilen tanımlar, (4.110) ve (4.111)'de kullanılarak elde edilen denklemlerin her iki tarafı, gönderilen sinyalin köşegen D_k matrisi ile çarpılır ise,

$$D_k\Delta H_{k+1}^{GNLMS} = (I - \mu\Omega_k)D_k\Delta H_k^{GNLMS} + \mu D_k\Psi_k \quad (4.153)$$

$$D_k\Delta H_{k+1}^{GNLMS-YKK} = (I - \mu D_k FGF^H\Omega_k D_k^{-1})D_k\Delta H_k^{GNLMS-YKK} + \mu D_k FGF^H\Psi_k \quad (4.154)$$

elde edilir. (4.153) ve (4.154)'de, soncul hata, $E_k^{p,GNLMS} = D_k \Delta H_{k+1}^{GNLMS}$, $E_k^{p,GNLMS-YKK} = D_k \Delta H_{k+1}^{GNLMS-YKK}$ ve öncül hata $E_k^{a,GNLMS} = D_k \Delta H_k^{GNLMS}$, $E_k^{a,GNLMS-YKK} = D_k \Delta H_k^{GNLMS-YKK}$ vektör tanımları kullanıldığında,

$$E_k^{p,GNLMS} = (I - \mu\Omega_k) E_k^{a,GNLMS} + \mu D_k \Psi_k \tag{4.155}$$

$$E_k^{p,GNLMS-YKK} = (I - \mu D_k F G F^H \Omega_k D_k^{-1}) E_k^{a,GNLMS-YKK} + \mu D_k F G F^H \Psi_k \tag{4.156}$$

GNLMS algoritması için (4.155) ifadesinin her iki tarafının norm karesi alındıktan sonra beklenen değer işlevi kullanıldığında, öncül ve soncul OHK arasında,

$$\mathbb{E}\left\{\left\|E_k^{p,GNLMS}\right\|^2\right\} = \mathbb{E}\left\{E_k^{a,GNLMS,H} (I - \mu\Omega_k)^2 E_k^{a,GNLMS}\right\} + \mu^2 \mathbb{E}\{\Psi_k^H D_k^H D_k \Psi_k\} \tag{4.157}$$

şeklinde ilişki elde edilir. (4.157), ifadesinin her iki tarafı skaler sayıolduğundan, iz alma işlevi uygulanabilir. Beklenen değer ve iz alma işlevleri kullanıldığında, (4.157),

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left\{\left\|E_k^{p,GNLMS}\right\|^2\right\} &= \mathbb{E}\left\{Tr\{E_k^{a,GNLMS} E_k^{a,GNLMS,H} (I - \mu\Omega_k)^2\}\right\} \\ &\quad + \mu^2 \sum_{i=0}^{N_{SYM}-1} \mathbb{E}\left\{\frac{|D_k[i]|^2 \|D_k[i]\|^2 \|N_k[i]\|^2}{(P_k[i])^2}\right\}\end{aligned} \tag{4.158}$$

olmaktadır. $E_k^{a,GNLMS}$ ve Ω_k birbirinden bağımsız olduğu kabul edildiğinde, (4.158) eşitliğinin sağındaki ilk terim,

$$\mathbb{E}\left\{Tr\{E_k^{a,GNLMS} E_k^{a,GNLMS,H} (I - \mu\Omega_k)^2\}\right\} = Tr\left\{\mathbb{E}\{E_k^{a,GNLMS} E_k^{a,GNLMS,H}\} \mathbb{E}\{(I - \mu\Omega_k)^2\}\right\} \tag{4.159}$$

halini alır. Ω_k köşegen olduğundan,

$$Tr\left\{\mathbb{E}\{E_k^{a,GNLMS} E_k^{a,GNLMS,H}\} \mathbb{E}\{(I - \mu\Omega_k)^2\}\right\} = \mathbb{E}\left\{\left\|E_k^{a,GNLMS}\right\|^2\right\} \mathbb{E}\left\{\left(1 - \mu \frac{\|D_k[i]\|^2}{P_k[i]}\right)^2\right\} \tag{4.160}$$

halini almaktadır. (4.160) ifadesi (4.158)'de kullanıldığında,

$$\mathbb{E}\left\{\left\|E_k^{p,GNLMS,H}\right\|^2\right\}$$

$$= \mathbb{E}\left\{\left\|E_k^{a,GNLMS,H}\right\|^2\right\}\mathbb{E}\left\{\sum_{i=0}^{N_{SYM}-1}\mathbb{E}\left(1-\mu\frac{\|D_k[i]\|^2}{P_k[i]}\right)^2\right\} + \mu^2\sum_{i=0}^{N_{SYM}-1}\mathbb{E}\left\{\frac{|D_k[i]|^2\|D_k[i]\|^2\|N_k[i]\|^2}{(P_k[i])^2}\right\} \tag{4.161}$$

elde edilir.

(4.161)'in son terimi, $N_k[i]$ vektörü ile $D_k[i]$ vektörü istatistiki olarak bağımsız olduklarından,

$$\sum_{i=0}^{N_{SYM}-1}\mathbb{E}\left\{\frac{|D_k[i]|^2\|D_k[i]\|^2\|N_k[i]\|^2}{(P_k[i])^2}\right\} = N_{SYM}{\sigma_n}^2\sum_{i=0}^{N_{SYM}-1}\mathbb{E}\left\{\frac{|D_k[i]|^2\|D_k[i]\|^2}{(P_k[i])^2}\right\} \tag{4.162}$$

halini almaktadır.

(4.161)'de bulunan $\mathbb{E}\left\{\left(1-\mu\frac{\|D_k[i]\|^2}{P_k[i]}\right)^2\right\}$ terimi açıldığında,

$$\left(1-\mu\frac{\|D_k[i]\|^2}{P_k[i]}\right)^2 = 1-2\mu\mathbb{E}\left\{\frac{\|D_k[i]\|^2}{P_k[i]}\right\}+\mu^2\mathbb{E}\left\{\frac{\|D_k[i]\|^4}{(P_k[i])^2}\right\} \tag{4.163}$$

haline dönüşmektedir.

Görüldüğü üzere (4.162) ve (4.163) ifadelerinin hesaplanabilmesi için, $\mathbb{E}\left\{\frac{\|D_k[i]\|^2}{P_k[i]}\right\}$, $\mathbb{E}\left\{\frac{|D_k[i]|^2\|D_k[i]\|^2}{(P_k[i])^2}\right\}$ ve $\mathbb{E}\left\{\frac{\|D_k[i]\|^4}{(P_k[i])^2}\right\}$ değerlerinin belirlenmesi gerekmektedir. Söz konusu değerler, algoritma kararlı duruma ulaştığında,

$$\lim_{k\to\infty}\mathbb{E}\left\{\frac{\|D_k[i]\|^2}{P_k[i]}\right\} \approx \frac{\mathbb{E}\{\|D_k[i]\|^2\}}{\mathbb{E}\{P_k[i]\}} \tag{4.164}$$

$$\lim_{k\to\infty}\mathbb{E}\left\{\frac{|D_k[i]|^2\|D_k[i]\|^2}{(P_k[i])^2}\right\} \approx \frac{\mathbb{E}\{|D_k[i]|^2\|D_k[i]\|^2\}}{\mathbb{E}\{(P_k[i])^2\}} \tag{4.165}$$

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\left\{\frac{\|D_k[i]\|^4}{(P_k[i])^2}\right\} \approx \frac{\mathbb{E}\{\|D_k[i]\|^4\}}{\mathbb{E}\{(P_k[i])^2\}} \tag{4.166}$$

ile bulunmaktadır. (4.164)-(4.168) ifadelerinin hesaplabilmesi için, $\mathbb{E}\{\|D_k[i]\|^2\}$, $\mathbb{E}\{|D_k[i]|^2\|D_k[i]\|^2\}$, $\mathbb{E}\{\|D_k[i]\|^4\}$, $\mathbb{E}\{P_k[i]\}$ ve $\mathbb{E}\{(P_k[i])^2\}$ terimlerinin bulunması gerekmektedir. Verici tarafından gönderilen semboller, sıfır ortalamalı ve varyansı $\sigma_d{}^2$ olduğundan, HFD ile elde edilen $D_k[i]$ vektörü sıfır ortalamaya, Gauss dağılımına ve beyaz spektruma sahip olacaktır. Bu durumda,

$$\mathbb{E}\{\|D_k[i]\|^2\} = \sum_{l=-m}^{m} \mathbb{E}\{|D_k[n-l]|^2\} = (2m+1)N_{sym}\sigma_d{}^2 \tag{4.167}$$

$$\mathbb{E}\{|D_k[i]|^2\|D_k[i]\|^2\} = \sum_{l=-m}^{m} \mathbb{E}\{|D_k[i]|^2|D_k[n-l]|^2\} = 2(m+1)N_{sym}^2\sigma_d{}^4 \tag{4.168}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{\|D_k[i]\|^4\} &= \mathbb{E}\left\{\left(\sum_{l=-m}^{m} |D_k[n-l]|^2\right)^2\right\} \\ &= \sum_{l=-m}^{m} \mathbb{E}\{|D_k[n-l]|^4\} + 2\sum_{i=-m}^{m-1}\sum_{l=i+1}^{m} \mathbb{E}\{|D_k[n-i]|^2|D_k[n-l]|^2\} \\ &= 2(m+1)(2m+1)N_{sym}^2\sigma_d^4\end{aligned} \tag{4.169}$$

olarak bulunmaktadır.

(4.41) ile verilen gönderilen sinyalin frekans bölgesinde n. noktasındaki güç kestirim değerinin ortalama değeri, $\mathbb{E}\{P_k[i]\}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{P_k[i]\} &= \mathbb{E}\{\gamma P_{k-1}[i] + (1-\gamma)\|D_k[i]\|^2\} = \gamma^{k+1}P_{-1}[n] + (1-\gamma)\mathbb{E}\{\|D_k[i]\|^2\}\sum_{i=0}^{k}\gamma^{k-i} \\ &= \gamma^{k+1}P_{-1}[i] + (1-\gamma^{k+1})\mathbb{E}\{\|D_k[i]\|^2\}\end{aligned} \tag{4.170}$$

şeklinde blok zamanına göre değişim göstermektedir. Algoritma kararlı duruma ulaştığında, zaman ile değişim gösteren terimlerdeki $\gamma^{k+1} \to 0$ olacağından,

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\{P_k[i]\} = \mathbb{E}\{\|D_k[i]\|^2\} = (2m+1)N_{sym}\sigma_d{}^2 \tag{4.171}$$

olacaktır.

Benzer şekilde (4.41) ile verilen $P_k[n]$'in 2. dereceden momenti alındığında,

$$\mathbb{E}\left\{{P_k}^2[n]\right\} = \gamma^{2(k+1)}{P_{-1}}^2[n] + 2(1-\gamma)\gamma^{k+1}P_{-1}[n]\sum_{i=0}^{k}\gamma^{k-i}\,\mathbb{E}\{\|D_k[n]\|^2\}$$
$$+ (1-\gamma)^2\mathbb{E}\left\{\left[\sum_{i=0}^{k}\gamma^{k-i}\|D_k[n]\|^2\right]^2\right\} \tag{4.172}$$

elde edilir. Kararlı durumda,

$$\lim_{k\to\infty}\mathbb{E}\left\{{P_k}^2[n]\right\} = (1-\gamma)^2\lim_{k\to\infty}\mathbb{E}\left\{\left[\sum_{i=0}^{k}\gamma^i\|D_i[n]\|^2\right]^2\right\} \tag{4.173}$$

olmaktadır. $\mathbb{E}\left\{\left[\sum_{i=0}^{k}\gamma^i\mathbb{E}\{\|D_i[n]\|^2\}\right]^2\right\}$ hesaplandığında,

$$\lim_{k\to\infty}\mathbb{E}\left\{\left[\sum_{i=0}^{k}\gamma^{k-i}\mathbb{E}\{\|D_i[n]\|^2\}\right]^2\right\}$$
$$= \lim_{k\to\infty}\mathbb{E}\left\{\sum_{i=0}^{k}\gamma^{2(k-i)}\right\}\mathbb{E}\{\|D_i[n]\|^4\} \tag{4.174}$$
$$+ 2\lim_{k\to\infty}\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{l=i+1}^{k}\gamma^{2k-i-l}\mathbb{E}\{\|D_i[n]\|^2\|D_l[n]\|^2\}$$

elde edilmektedir. Farklı bloklara ait alınan sinyalin HFD değerleri birbirinden bağımsız olduklarından, $\mathbb{E}\{\|D_i[n]\|^2\|D_l[n]\|^2\} = \mathbb{E}\{\|D_i[n]\|^2\}\mathbb{E}\{\|D_i[n]\|^2\} = (\mathbb{E}\{\|D_i[n]\|^2\})^2$ olmaktadır. Ayrıca, $\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{l=i+1}^{k}\gamma^{2k-i-l} = \frac{(1-\gamma^k)(\gamma-\gamma^{k+1})}{(1-\gamma)(1-\gamma^2)}$ olacak, kararlı durumda ise, $\lim_{k\to\infty}\frac{1-\gamma^{2(k+1)}}{1-\gamma^2} - 1 = \frac{1}{1-\gamma^2}$, $\lim_{k\to\infty}\frac{(1-\gamma^{k+1})(\gamma-\gamma^{k+1})}{(1-\gamma)^2} = \frac{\gamma}{(1-\gamma)^2} - 1$ olacaktır. (4.174) ifadesi kararlı durumda,

$$\lim_{k\to\infty}\mathbb{E}\left\{{P_k}^2[n]\right\} = (1-\gamma)^2\left\{\frac{1}{1-\gamma^2}\mathbb{E}\{\|D_k[n]\|^4\} + \frac{2\gamma}{(1-\gamma)^2}(\mathbb{E}\{\|D_i[n]\|^2\})^2\right\}$$
$$= \frac{2(2m+1)\{1+2m\gamma\}}{1+\gamma}N_{sym}^2\sigma_d^4 \tag{4.175}$$

elde edilmektedir.

(4.170), (4.171) ve (4.175) verilen sonuçlar (4.164)-(4.166) ifadelerinin bulunması için kullanıldığında,

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\left\{\frac{\|D_k[i]\|^2}{P_k[i]}\right\} \approx 1 \tag{4.176}$$

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\left\{\frac{|D_k[i]|^2\|D_k[i]\|^2}{(P_k[i])^2}\right\} \approx \frac{(m+1)(1+\gamma)}{(2m+1)(1+2m\gamma)} \tag{4.177}$$

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\left\{\frac{\|D_k[i]\|^4}{(P_k[i])^2}\right\} \approx \frac{(m+1)(1+\gamma)}{(1+2m\gamma)} \tag{4.178}$$

olarak bulunmaktadır. (4.124), (4.136)-(4.138) sonuçları, (4.123)'de kullanıldığında,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}&\left\{\left\|E_k^{p,GNLMS,H}\right\|^2\right\} \\ &= \mathbb{E}\left\{\left\|E_k^{a,GNLMS,H}\right\|^2\right\}\left\{1 - 2\mu + \mu^2\frac{(m+1)(1+\gamma)}{(1+2m\gamma)}\right\} \\ &+ \mu^2 N_{SYM}{\sigma_n}^2\frac{(m+1)(1+\gamma)}{(2m+1)(1+2m\gamma)} \end{aligned} \tag{4.179}$$

elde edilmektedir. Kararlı durumda, $\mathbb{E}\left\{\left\|E_k^{p,GNLMS,H}\right\|^2\right\} = \mathbb{E}\left\{\left\|E_k^{a,GNLMS,H}\right\|^2\right\}$ olduğundan,

$$\mathbb{E}\left\{\left\|E_k^{a,GNLMS,H}\right\|^2\right\} = \frac{(m+1)(1+\gamma)N_{sym}{\sigma_n}^2\mu}{(2m+1)\{2+4m\gamma-\mu(m+1)(1+\gamma)\}} \tag{4.180}$$

olmaktadır. Bu durumda GNLMS algoritmasının ayarsızlık değeri,

$$M^{GNLMS} = \frac{\mathbb{E}\left\{\left\|E_k^{a,GNLMS,H}\right\|^2\right\}}{N_{sym}{\sigma_n}^2} = \frac{(m+1)(1+\gamma)\mu}{(2m+1)\{2+4m\gamma-\mu(m+1)(1+\gamma)\}} \tag{4.181}$$

olmaktadır. (4.181)'den görüldüğü üzere, ayarsızlık değeri kullanılan izdüşüm seviyesinin arttırılması ile düşürülmesi sağlanmaktadır. Kanal denkleştirme ile elde edilen performans ile karşılaştırıldığında, kanal kestirim ile elde edilen performansın girişe uygulanan sinyalin beyaz ve GBD olmasından dolayı, giriş sinyal spektrumunda bulunan sıfırlardan etkilenmemektedir.

GNLMS-YKK algoritması için (4.154) ifadesinin her iki tarafının norm karesi alındıktan sonra beklenen değer işlevi kullanıldığında, öncül ve soncul OHK arasında,

$$\mathbb{E}\left\{\left\|E_k^{p,GNLMS-YKK}\right\|^2\right\} = \mathbb{E}\left\{E_k^{a,GNLMS-YKK,H}\left(I - \mu D_k^{-1,H}\Omega_k FGF^H D_k^H\right)\left(I - \mu D_k FGF^H \Omega_k D_k^{-1}\right)E_k^{a,GNLMS-YKK}\right\} + \mu^2 \mathbb{E}\left\{\Psi_k{}^H FGF^H D_k^H D_k FGF^H \Psi_k\right\} \tag{4.182}$$

şeklinde ilişki elde edilir. (4.182), ifadesi skaler sayı olduğundan, iz alma işlevi uygulanabilir. Beklenen değer ve iz alma işlevleri ile iz alma işlevinin yerdeğiştirme özelliği kullanıldığında,

$$\mathbb{E}\left\{\left\|E_k^{p,GNLMS-YKK}\right\|^2\right\} = \mathbb{E}\left\{Tr\left\{E_k^{a,GNLMS-YKK,H} E_k^{a,GNLMS-YKK,H}\left(I - \mu D_k FGF^H \Omega_k D_k{}^{-1}\right)\right\}\right\} + \mu^2 \mathbb{E}\left\{Tr\left\{\Psi_k FGF^H D_k^H D_k FGF^H \Psi_k{}^H\right\}\right\} \tag{4.183}$$

elde edilmektedir. İz alma işlevinin beklenen değer işlevi ile yerdeğiştirme özelliği kullanıldığında,

$$\mathbb{E}\left\{\left\|E_k^{p,GNLMS-YKK}\right\|^2\right\} = Tr\left\{\mathbb{E}\{E_k^{a,GNLMS-YKK,H} E_k^{a,GNLMS-YKK,H}\}\mathbb{E}\{\left(I - \mu D_k^{-1,H}\Omega_k FGF^H D_k^H\right)(I - \mu D_k FGF^H \Omega_k D_k^{-1})\}\right\} + \mu^2 Tr\left\{\mathbb{E}\{\Psi_k \Psi_k^H\}\mathbb{E}\{FGF^H D_k^H D_k FGF^H\}\right\} \tag{4.184}$$

halini almaktadır. Eşitliğin sağ tarafındaki ikinci beklenen değer işlemi, $\mathbb{E}\left\{\left(I - \mu D_k^{-1,H}\Omega_k FGF^H D_k^H\right)\left(I - \mu D_k FGF^H \Omega_k D_k^{-1}\right)\right\}$ ile $\mathbb{E}\{FGF^H D_k^H D_k FGF^H\}$ terimleri hesaplandığında,

$$\mathbb{E}\left\{\left(I - \mu D_k^{-1,H}\Omega_k FGF^H D_k^H\right)\left(I - \mu D_k FGF^H \Omega_k D_k^{-1}\right)\right\} = I - \mu\mathbb{E}\left\{D_k^{-1,H}\Omega_k FGF^H D_k^H\right\} - \mu\mathbb{E}\left\{D_k FGF^H \Omega_k D_k^{-1}\right\} + \mu^2 \mathbb{E}\left\{D_k^{-1,H}\Omega_k FGF^H D_k{}^H D_k FGF^H \Omega_k D_k^{-1}\right\} \tag{4.185}$$

$$\mathbb{E}\{FGF^H D_k^H D_k FGF^H\} = FGF^H \mathbb{E}\{D_k^H D_k\} FGF^H \tag{4.186}$$

elde edilmektedir. $\mathbb{E}\{\Psi_k \Psi_k^H\}$ ve $\mathbb{E}\left\{E_k^{a,GNLMS-YKK} E_k^{a,GNLMS-YKK,H}\right\}$ matrisleri köşegen olduğundan,

$$\begin{aligned} Tr&\left\{\mathbb{E}\left\{E_k^{a,GNLMS-YKK} E_k^{a,GNLMS-YKK,H}\right\}\mathbb{E}\left\{\left(I - \mu D_k^{-1,H} \Omega_k FGF^H D_k^H\right)\left(I \right.\right.\right.\\ &\left.\left.\left.- \mu D_k FGF^H \Omega_k D_k^{-1}\right)\right\}\right\} \\ &= \mathbb{E}\left\{\left\|E_k^{a,GNLMS-YKK}\right\|^2\right\}\left(1 - 2\mu \frac{L}{N_{sym}} \mathbb{E}\left\{\frac{\|D_k[i]\|^2}{P_k[i]}\right\}\right. \\ &\left.+ \mu^2 \frac{L^2}{N_{sym}^2} \mathbb{E}\left\{\frac{\|D_k[i]\|^4}{(P_k[i])^2}\right\}\right) \end{aligned} \tag{4.187}$$

olmaktadır. (4.176)-(4.178) de verilen özellikler kullanıldığında, (4.187),

$$Tr\left\{\mathbb{E}\left\{\Psi_k {\Psi_k}^H\right\}\left\{\mathbb{E}\{FGF^H D_k^H D_k FGF^H\}\right\}\right\} = \frac{(1+\gamma)(m+1)L^2 {\sigma_n}^2}{N_{sym}(2m+1)(1+2m\gamma)} \tag{4.188}$$

halini alır. Elde edilen (4.187) ve (4.188) sonuçları kullanıldığında, (4.184),

$$\begin{aligned} \mathbb{E}&\left\{\left\|E_k^{p,GNLMS-YKK}\right\|^2\right\} \\ &= Tr\left\{\mathbb{E}\left\{\left\|E_k^{a,GNLMS-YKK}\right\|^2\right\}\left(1 - 2\mu \frac{L}{N_{sym}} \mathbb{E}\left\{\frac{\|D_k[i]\|^2}{P_k[i]}\right\}\right.\right. \\ &\left.\left.+ 2\mu^2 \frac{L^2}{N_{sym}^2} \mathbb{E}\left\{\frac{\|D_k[i]\|^4}{(P_k[i])^2}\right\}\right)\right\} + \mu^2 \frac{(1+\gamma)L^2 {\sigma_n}^2}{N_{sym}(1+2m\gamma)} \end{aligned} \tag{4.189}$$

Kararlı durumda $E_k^{p,GNLMS-YKK} \approx E_k^{a,GNLMS-YKK}$ olacağından,

$$\begin{aligned} &\left(\mu \frac{L}{N_{sym}}\left(2\mathbb{E}\left\{\frac{\|D_k[i]\|^2}{P_k[i]}\right\} - \mu \frac{L}{N_{sym}} \mathbb{E}\left\{\frac{\|D_k[i]\|^4}{(P_k[i])^2}\right\}\right)\right) \mathbb{E}\left\{\left\|E_k^{a,GNLMS-YKK}\right\|^2\right\} \\ &\qquad = \mu^2 \frac{(1+\gamma)L^2 {\sigma_n}^2}{N_{sym}(1+2m\gamma)} \end{aligned} \tag{4.190}$$

halini alır. (4.189)-(4.190) kullanıldığında,

$$\mathbb{E}\left\{\left\|E_k^{a,GNLMS-YKK}\right\|^2\right\} = \frac{(1+\gamma)(m+1)L{\sigma_n}^2\mu}{(2m+1)(1+2m\gamma)\left(2-\mu\frac{L}{N_{sym}}\frac{(m+1)(1+\gamma)}{(1+2m\gamma)}\right)} \tag{4.191}$$

elde edilmektedir. Ayarsızlık değeri (4.191) kullanılarak hesaplandığında,

$$M^{GNLMS-YKK} = \frac{\mathbb{E}\left\{\left\|E_k^{a,GNLMS,H}\right\|^2\right\}}{N_{sym}{\sigma_n}^2} = \frac{(1+\gamma)(m+1)L\mu}{N_{sym}(2m+1)(1+2m\gamma)\left(2-\mu\frac{L}{N_{sym}}\frac{(m+1)(1+\gamma)}{(1+2m\gamma)}\right)} \tag{4.192}$$

elde edilmektedir. (4.192) ile elde edilen ayarsızlık değerinden görüldüğü üzere, GNLMS algoritması ayarsızlık değerinin yaklaşık $\frac{L}{N_{sym}}$ kadarlık kısmı elde edilmekte, yani ayarsızlık performansı daha iyi hale gelmektedir. $L = N_{sym}$ seçildiğinde ise GNLMS ve GNLMS-YKK algoritmalarının ayarsızlık değerleri aynı olmaktadır

Yakınsama

GNLMS algoritmasının ortalama katsayı sapma kare değeri,

$$\mathbb{E}\left\{\left\|\Delta H_{k+1}^{GNLMS}\right\|^2\right\} = \mathbb{E}\left\{\Delta H_k^{GNLMS,H}(I-\mu\Omega_k)^2\Delta H_k^{GNLMS}\right\} + \mu^2\mathbb{E}\{\Psi_k^H\Psi_k\} \tag{4.193}$$

şeklindedir. Burada, $\Omega_k = P_k^{-1}\mathcal{J}_k^H\mathcal{J}_k$ matrisi köşegen ve $\Psi_k = P_k^{-1}\mathcal{J}_k^H N_k'$ olduğundan,

$$\mathbb{E}\left\{\left|\Delta H_{k+1}^{GNLMS}[n]\right|^2\right\} = \mathbb{E}\left\{\left(1-\mu\frac{\|D_k[n]\|^2}{P_k[n]}\right)^2\right\}\mathbb{E}\left\{\left|\Delta H_k^{GNLMS}[n]\right|^2\right\} + \mu^2\mathbb{E}\left\{\frac{\|D_k[n]\|^2\|N_k[n]\|^2}{P_k^2[n]}\right\} \tag{4.194}$$

Burada, $P_k[n]$ n. frekans noktası için $D_k[n]$ vektörünün normunun kestirim değerini göstermektedir.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left\{\left|\Delta H_{k+1}^{GNLMS}[n]\right|^2\right\} &= \mathbb{E}\left\{1-2\mu\frac{\mathbb{E}\{\|D_k[n]\|^2\}}{\mathbb{E}\{P_k[n]\}}+\mu^2\frac{\mathbb{E}\{\|D_k[n]\|^4\}}{\mathbb{E}\{P_k^2[n]\}}\right\}\mathbb{E}\left\{\left|\Delta H_k^{GNLMS}[n]\right|^2\right\} \\ &+ \mu^2\frac{\mathbb{E}\{\|D_k[n]\|^2\|N_k[n]\|^2\}}{\mathbb{E}\{P_k^2[n]\}}\end{aligned} \tag{4.195}$$

(4.194) ve (4.195) kullanıldığında, $\mathbb{E}\{P_k[n]\}$ ve $\mathbb{E}\{P_k^2[n]\}$ değerlerinin zamana bağlı olarak değişimi,

$$\mathbb{E}\{P_k[n]\} = \gamma^{k+1}P_{-1}[i] + (2m+1)(1-\gamma^{k+1})N_{sym}\sigma_d^2 \tag{4.196}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{P_k^2[n]\} = {} & \gamma^{2(k+1)}{P_{-1}}^2[n] + 2\left(1-\gamma^{k+1}\right)\gamma^{k+1}P_{-1}[n](2m+1)N_{sym}\sigma_d^2 \\ & + 2\left(1-\gamma^{k+1}\right)\left\{(1-\gamma)\left(1+\gamma^{k+1}\right) + \gamma\left(1-\gamma^k\right)\left(1-\gamma^{k+1}\right)\right\}2(m \\ & + 1)(2m+1)N_{sym}^2\sigma_d^4\end{aligned} \tag{4.197}$$

olacaktır. GNLMS algoritması katsayı sapma OHK'nin bloğa bağlı olarak değişimi, (4.130) kullanılarak,

$$\begin{aligned}E\left\{\left|\Delta H_k^{GNLMS}[n]\right|^2\right\} \\ = & \left[1 - 2\mu\frac{(2\mathrm{m}+1)N_{sym}\sigma_d^2}{\gamma^{k+1}P_{-1}[i] + (2m+1)(1-\gamma^{k+1})N_{sym}\sigma_d^2}\right. \\ & \left. + \mu^2\frac{2(m+1)(2m+1)N_{sym}^2\sigma_d^4}{\mathbb{E}\{P_k^2[n]\}}\right]E\left\{\left|\Delta H_{k-1}^{GNLMS}[n]\right|^2\right\} + \frac{N_{sym}^2\sigma_d^2\sigma_n^2}{\mathbb{E}\{P_k^2[n]\}}\end{aligned} \tag{4.198}$$

olmaktadır. Burada,

$$\mathcal{A}_k^{GNLMS} = 1 - 2\mu\frac{(2\mathrm{m}+1)N_{sym}\sigma_d^2}{\gamma^{k+1}P_{-1}[i]+(2m+1)\left(1-\gamma^{k+1}\right)N_{sym}\sigma_d^2} + \mu^2\frac{2(m+1)(2m+1)N_{sym}^2\sigma_d^4}{\mathbb{E}\left\{P_k^2[n]\right\}} \tag{4.199}$$

$$\mathcal{B}_k^{GNLMS} = \frac{N_{sym}^2\sigma_d^2\sigma_n^2}{\mathbb{E}\left\{P_k^2[n]\right\}} \tag{4.200}$$

tanımlamaları kullanılması halinde,

$$E\left\{\left|\Delta H_k^{GNLMS}[n]\right|^2\right\} = \mathcal{A}_k^{GNLMS}E\left\{\left|\Delta H_{k-1}^{GNLMS}[n]\right|^2\right\} + \mathcal{B}_k^{GNLMS} \tag{4.201}$$

olarak elde edilir. $P_{-1}[n]$ başlangıç değeri her frekans noktası için aynı seçilmesi halinde $\mathcal{A}_k^{GNLMS}$ $\mathcal{B}_k^{GNLMS}$ değerleri her frekans noktası için aynı değere sahip olacaktır.

(4.133) ifadesi başlangıç, $i = 0$ bloğundan itibaren hesaplanacak olur ise, ortalama katsayı sapma karesi beklenen değeri için,

$$E\left\{\left|\Delta H_k^{GNLMS}[n]\right|^2\right\} = \prod_{i=0}^{k} \mathcal{A}_i^{GNLMS}\, \mathbb{E}\{|\Delta H_{-1}^{GNLMS}[n]|^2\} + \sum_{i=0}^{k} \mathcal{A}_i^{GNLMS}\, \mathcal{B}_i^{GNLMS}[n] \quad (4.202)$$

elde edilir. $\xi_k^{GNLMS}[n] = E\{|E_k^a[n]|^2\} = E\left\{|D_k[n]|^2\left|\Delta H_k^{GNLMS}[n]\right|^2\right\}$ olduğundan,

$$\xi_k^{GNLMS}[n] = E\{|D_k[n]|^2\} \prod_{i=0}^{k} \mathcal{A}_i^{GNLMS}\, \mathbb{E}\{|\Delta H_{-1}^{GNLMS}[n]|^2\} + |H_k[n]|^2 \sum_{i=0}^{k} \mathcal{A}_i^{GNLMS}\, \mathcal{B}_i^{GNLMS} \quad (4.203)$$

şeklinde GNLMS algoritmasının öğrenmesi eğrisi elde edilir.

Takip performansı

GNLMS algoritmasının zamanla değişen katsayıları izleme performansını elde etmek için, en uygun katsayı değeri, LMS, LMS-YKK ve RLS algoritmalarında olduğu gibi, ${H_k}^0[n]$' nin zamanda 1. dereceden Markov zinciri olarak, değişim gösterdiği kabul edilmiştir.

Zamanla değişen kanal için, n. frekans noktasında ortalama sapma katsayısı, $\Delta H_{k+1}^{GNLMS}[n]$, hesaplandığında,

$$\Delta H_{k+1}^{GNLMS}[n] = \left(1 - \frac{\mu\|D_k[n]\|^2}{P_k[n]}\right)\Delta H_k^{GNLMS}[n] + \frac{\mu}{P_k[n]} D_k^H[n]\mathcal{N}_k[n] + (1-a)H_{k-1}^o[n] - \mathfrak{N}_k[n] \quad (4.204)$$

Elde edilmektedir. a değeri 1'e çok yakın bir değer olduğundan $(0.999 < a < 1)$, $(1-a)H_{k-1}^o[n] \approx 0$ olmaktadır. Ayrıca, algoritma kararlı duruma ulaştığında, $\frac{\|D_k[n]\|^2}{P_k[n]} \approx 1$ olarak kabul edilebilir. Bu durumda, katsayı sapma değeri,

$$\Delta H_{k+1}^{GNLMS}[n] = \left(1 - \frac{\mu\|D_k[n]\|^2}{P_k[n]}\right)\Delta H_k^{GNLMS}[n] + \frac{\mu}{P_k[n]} D_k^H[n]\mathcal{N}_k[n] - \mathfrak{N}_k[n] \quad (4.205)$$

şeklinde değişime uğrayacaktır. Burada, $\mathcal{N}_k[n]$, $\Delta H_k^{GNLMS}[n]$ ve $\mathfrak{N}_k[n]$ birbirinden istatistiki olarak bağımsızdır. Ayarsızlık değerinin hesabında yapıldığı şekilde, (4.205)'in her iki tarafı $D_k[n]$ ile çarpılması, norm karesinin be beklenen değerinin alınması halinde,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left\{\left|D_k[n]\Delta H_{k+1}^{GNLMS}[n]\right|^2\right\} \\
&\quad = \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left\{\left|D_k[n]\Delta H_k^{GNLMS}[n]\right|^2\right\}\left(1-\frac{\mu\|D_k[n]\|^2}{P_k[n]}\right)^2\right\} + \mathbb{E}\{|D_k[n]|^2\}\mathbb{E}\{|\mathfrak{N}_k[n]|^2\} \\
&\quad + \mathbb{E}\left\{\left(\frac{\mu}{P_k[n]}\right)^2 |D_k[n]|^2 \mathcal{N}_k^H[n] D_k[n] D_k^H[n] \mathcal{N}_k[n]\right\}
\end{aligned} \tag{4.206}$$

olmaktadır. GNLMS algoritması kararlı duruma geldiğinde, $\mathbb{E}\left\{\left|D_k[n]\Delta H_{k+1}^{GNLMS}[n]\right|^2\right\} \approx \mathbb{E}\left\{\left|D_k[n]\Delta H_k^{GNLMS}[n]\right|^2\right\}$ olacaktır. (4.206) eşitliğinin sağındaki son ifade, ayarsızlık değeri hesaplanmasında bulunmuş olup, (3.76) eşitliği ile verilmektedir. Gerekli düzenleme yapıldığında, zamanla değişen GBD olmayan durum için toplam OHK $\varsigma_k^{GNLMS}[n]$,

$$\begin{aligned}
\varsigma_k^{GNLMS}[n] &= \xi^0\,[n] + \mathbb{E}\{|D_k[n]\,\Delta H_k[n]|^2\} \\
&= \xi^0\,[n]\left(1+\frac{(m+1)(1+\gamma)\mu}{(2m+1)\{2+4m\gamma-\mu(m+1)(1+\gamma)\}}\right) \\
&+ \frac{N_{sym}^2\sigma_d^2\sigma_n^2}{2\mu(2m+1)\{2+4m\gamma-\mu(m+1)(1+\gamma)\}}
\end{aligned} \tag{4.207}$$

olarak elde edilir.

Zamanla değişen kanaldan elde edilen OHK değeri, $\varsigma_k^{GNLMS}[n]$ bakıldığında, GBD kanal için elde edilen OHK'ne ek olarak $\frac{N_{sym}{\sigma_d}^2{\sigma_\eta}^2}{2\mu(2m+1)\{2+4m\gamma-\mu(m+1)(1+\gamma)\}}$ kadarlık, gecikme hatası (lag error) adı verilen fazladan OHK oluşmaktadır. Gecikme hatası, GNLMS algoritmasının zaman ile kanalda meydana gelen değişimi daha geç algılamasından kaynaklanmaktadır. Söz konusu fazlalık hata μ γ ile parametreleri ile orantılı olup, azaltılması için μ değerinin 1'e yakın, γ değerinin ise 0'a yakın seçilmesi gerekmektedir. Ancak bu durumda, ayarsızlıktan kaynaklanan OHK, yani ayarsızlık, değeri yükselmekte, seçilen değere göre toplam OHK, $\varsigma_k^{GNLMS}[n]$, değerinde değişim meydana gelmektedir. Bu değişim, ayarsızlık değeri, gecikme hatasının büyüklüğü ve seçilen μ katsayı değerine bağlı olmaktadır. μ değerinin değiştirilmesi ile toplam OHK, $\varsigma_k^{GNLMS}[n]$ artabileceği gibi azalması da mümkün olmaktadır.

Bundan dolayı, zaman ile değişen kanallar için en uygun performansı sağlayacak μ değerinin optimizasyonu gerekmektedir. Aşağıda zamanla değişen kanallar için elde edilen teorik OHK değerini en düşük değere getirecek μ hesabı gösterilecektir.

Bir diğer husus ise, GNLMS algoritmasında, GBD kanallarda olduğu gibi, zamanla değişen kanal için de izdüşüm seviyesinin arttırılması, toplam OHK, $\varsigma_k^{GNLMS}[n]$ değerini düşürücü etki yapmaktadır.

Zaman ile değişen durağan olmayan kanallar için, toplam OHK değerini en düşük seviyeye getirecek en uygun katsayı değeri, μ^o bulmak için, (3.81) ile verilen toplam OHK değerinin μ'ye göre türevinin alınarak sıfıra eşitlenmesi gerekmektedir. Bu durumda,

$$\frac{\partial \varsigma_k^{GNLMS}[n]}{\partial \mu} = \frac{\partial}{\partial \mu}\left\{\frac{\xi^0\,[n](m+1)(1+\gamma)\mu}{(2m+1)\{2+4m\gamma-\mu(m+1)(1+\gamma)\}} + \frac{N_{sym}^2\sigma_d^2\sigma_{\mathfrak{n}}^2}{2\mu(2m+1)\{2+4m\gamma-\mu(m+1)(1+\gamma)\}}\right\} = 0 \quad (4.208)$$

elde edilmektedir. Burada gerekli düzenlemeler yapıldığında, katsayıları

$$a = \frac{(2m+1)^2-m(2m+1)}{(1+\gamma)(2m+2)\xi^0\,[n]}N_{sym}^2\sigma_d^2\sigma_{\mathfrak{N}}^2 \quad (4.209)$$

$$b = \frac{(2m+1)^2-(1-\gamma)m(2m+1)}{(1+\gamma)(2m+2)\xi^0\,[n]}N_{sym}^2\sigma_d^2\sigma_{\mathfrak{N}}^2 \quad (4.210)$$

şeklinde olan

$$\mu^2 + a\mu - b = 0 \quad (4.211)$$

ikinci dereceden denklemi elde edilmektedir. En uygun katsayı değeri hesaplandığında,

$$\mu_{1,2}^o[n] = \frac{\{(2m+1)^2-m(2m+1)\}N_{sym}^2\sigma_d^2\sigma_{\mathfrak{N}}^2}{2(2m+2)\xi^0\,[n]}\left\{-1 \pm \sqrt{\left(1+\frac{4(1+\gamma)(2m+2)\xi^0\,[n]\{(2m+1)^2-(1-\gamma)m(2m+1)\}}{\{(2m+1)^2-m(2m+1)\}^2N_{sym}^2\sigma_d^2\sigma_{\mathfrak{N}}^2}\right)}\right\} \quad (4.212)$$

olarak bulunmaktadır. En uygun katsayı değeri pozitif bir değer alması gerektiğinden, en uygun katsayının,

$$\mu^0[n] = \frac{\{(2m+1)^2 - m(2m+1)\}N_{sym}^2\sigma_d^2\sigma_{\mathfrak{R}}^2}{2(2m+2)\xi^0\,[n]}\left\{-1 + \sqrt{\left(1+\frac{4(1+\gamma)(2m+2)\xi^0\,[n]\{(2m+1)^2-(1-\gamma)m(2m+1)\}}{\{(2m+1)^2-m(2m+1)\}^2N_{sym}^2\sigma_d^2\sigma_{\mathfrak{R}}^2}\right)}\right\} \quad (4.213)$$

olarak ayarlanması gerekmektedir. (3.102) ile bulunan değerin sınır değerlerini aşması halinde 0 veya 2 olarak ayarlanması gerekmektedir.

$\mu^o\,[n]$ değeri görüleceği üzere, $\xi^0\,[n]$, EDOHK değerine, en uygun katsayının değişim hızını belirleyen, $N_{SYM}\sigma_{\mathfrak{R}}{}^2$ değerine, γ parametre değeri ile sinyalin gücüne, $\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}$, bağlı olmaktadır. EDOHK değeri doğrusal denkleştirici için (2.22)'den görülebileceği üzere alınan sinyalin SGO değerine bağlı olmaktadır. Bu sebeple en uygun değerin kullanımında her iki faktör göz önüne alınarak ayarlanması gerekmektedir. Ayrıca, $\mu^o\,[n]$ değeri HFD ile elde edilen her nokta için, alınan sinyalin gücüne $\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\}$ bağlı olarak belirlenmesi gerektiğinden, farklı değerler almaktadır. Bu durumda, GNLMS algoritmasında zamanla değişen kanal için uyarlamalı denkleştirme işleminden en uygun performans elde etmek için, her frekans noktası için (3.85) ile verilen $\mu^o\,[n]$ değerinin kullanılması halinde performans, tüm frekans noktaları için sabit değer kullanılmasına göre iyileşme sağlanmaktadır.

4.7. Sayısal Benzetim Sonuçları

Bu bölümde, frekans bölgesi kanal kestirim algoritmaları kullanılarak yapılan benzetim çalışmalarının sonuçları verilmektedir.

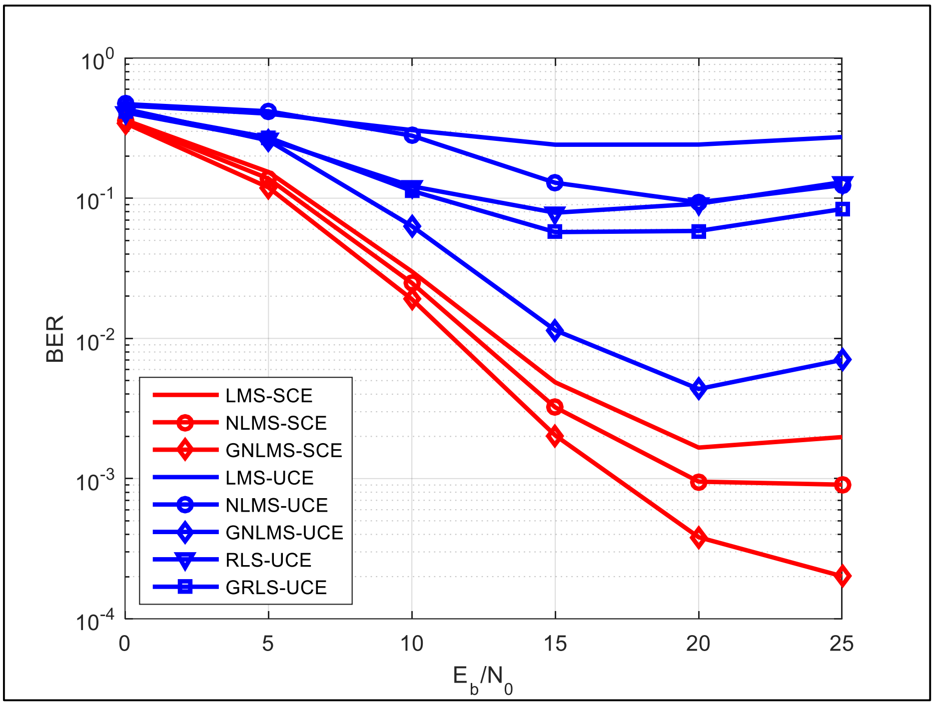
Şekil 4.2 ile yukarıdaki algoritmaların, kanal kestirimi yapılarak dengeleme yapılması halinde elde edilen 150km/s hız için bit hata oranı performanslarını göstermektedir. Bit hata oranı açısından yapılandırılmış kanal kestirim algoritmalarının, yapılandırılmış algoritmalara göre çok daha iyi performans sağladığı anlaşılmaktadır. Yapılandırılmamış kanal kestirim algoritmaları içerisinde, GNLMS algoritması diğer algoritmalara göre performansında büyük iyileşme sağladığı gözlemlenmektedir.

Yapılandırılmış kanal kestirim algoritmaları arasında ise GNLMS algoritmasının diğer algoritmalarına nazaran daha iyi olduğu görülmektedir. Örnek olarak, GNLMS algoritması kullanıldığında en iyi $2x10^{-4}$ bit hata oranı elde edilir iken, LMS-SCE algoritması $2x10^{-3}$ seviyelerinde performans sergilemektedir. Kanal kestirim algoritması ile kanal dengeleme algoritmaları karşılaştırıldığında, yapılandırılmış kanal kestirim algoritmalarının daha avantajlı olduğu görülmektedir. Kanal kestirim işleminde, algoritmanın girişinde kullanılan sinyal hem beyaz hem de geniş bağlamda durağan (WSS) dır. Kanal denkleştirmede ise giriş sinyali hem renkli hem de zamanla değişen bir sinyaldir. Bu durum, kanal denkleştirme algoritmalarının en uygun dengeleyici katsayıların hesaplanması karmaşıklaştırmakta ve zorlaştırmaktadır. Aynı zamanda, yapılandırılmış kanal kestirim algoritmaları, sonlu kanal dürtü tepkisi kabul edildiğinden, gürültünün ortalaması alınarak performans iyileşmesi sağlanmaktadır. Bu sebeple, yapılandırılmış kanal kestirim algoritmaları yüksek Doppler kayması için, hızlı yakınsama ve daha iyi zaman değişen kanal takibi yapabilmektedir.

Çizelge 4.1. Sembol başına FB uyarlamalı kanal kestirim ile denkleştirme algoritmalarının işlemsel karmaşıklığı

Algoritma	Çarpım (Gerçel)	Bölme	Toplama(Gerçel)
LMS	$6log_2N_{sym} + 16$	2	$6log_2N_{sym} + 10$
RLS	$6log_2N_{sym} + 17$	3	$6log_2N_{sym} + 11$
GNLMS	$6log_2N_{sym} + 16m + 15$	3	$6log_2N_{sym} + 14m + 9$
GRLS	$6log_2N_{sym} + 16m + 17$	3	$6log_2N_{sym} + 14m + 11$
LMS-YKK	$10log_2N_{sym} + 16$	2	$10log_2N_{sym} + 8$
GNLMS-YKK	$10log_2N_{sym} + 16m + 15$	3	$10log_2N_{sym} + 46m + 9$

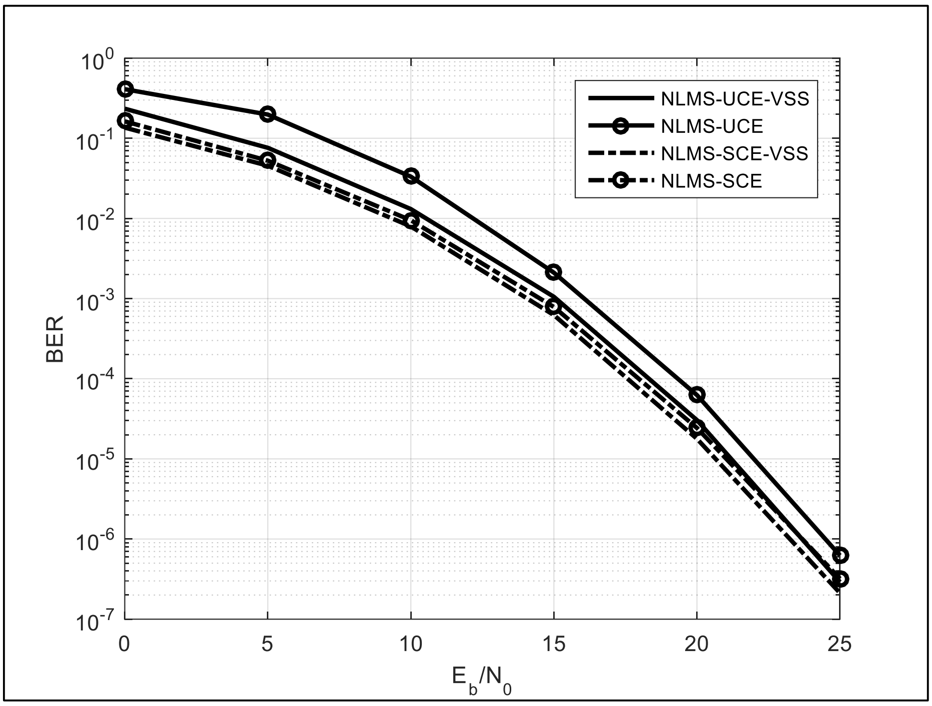
Değişken katsayılı yapılandırılmış ve yapılandırılmamış NLMS algoritmalarına ait bit hata oranı ve öğrenme eğrisi performansları Şekil 4.3. ile verilmektedir. Yapılandırılmamış NLMS algoritması için, değişken katsayılı algoritma kullanımının düşük Doppler kayması ve düşük SNR bölgesinde sistem performansı için faydalı olduğu gözlenmektedir. Ancak, Doppler kayması arttıkça, performans iyileştirmesi yerine, performansın daha kötü hale getirmektedir. Bu durum, değişken katsayılı algoritma için kullanılan ortalama sapma karesi tabanlı algoritmanın yetersiz kanal takip yeteneğinden kaynaklanmaktadır. Yüksek Doppler kaymalarında kanal daha hızlı değiştiğinden değişken katsayılı algoritmalar katsayıyı olması gereken en uygun değere getirememektedir.



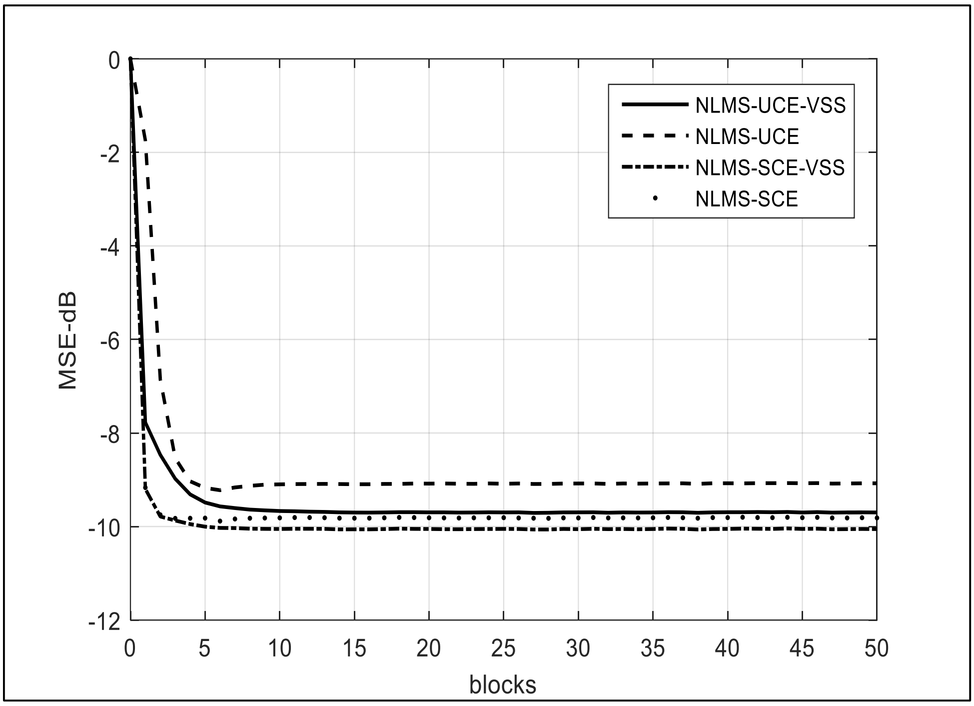
Şekil 4.2. Uyarlanabilir kanal kestirim BHO sonuçları, v=150km/h

Diğer yandan, değişken katsayılı algoritmanın yapılandırılmış NLMS algoritması için kullanımının kayda değer bir iyileşme sağlamadığı anlaşılmaktadır. değişken katsayılı yapılandırılmamış NLMS, yapılandırılmış NLMS ve değişken katsayılı yapılandırılmış NLMS algoritmaları birbirlerinden 1dB'lik bir farkta sonuç vermektedir.

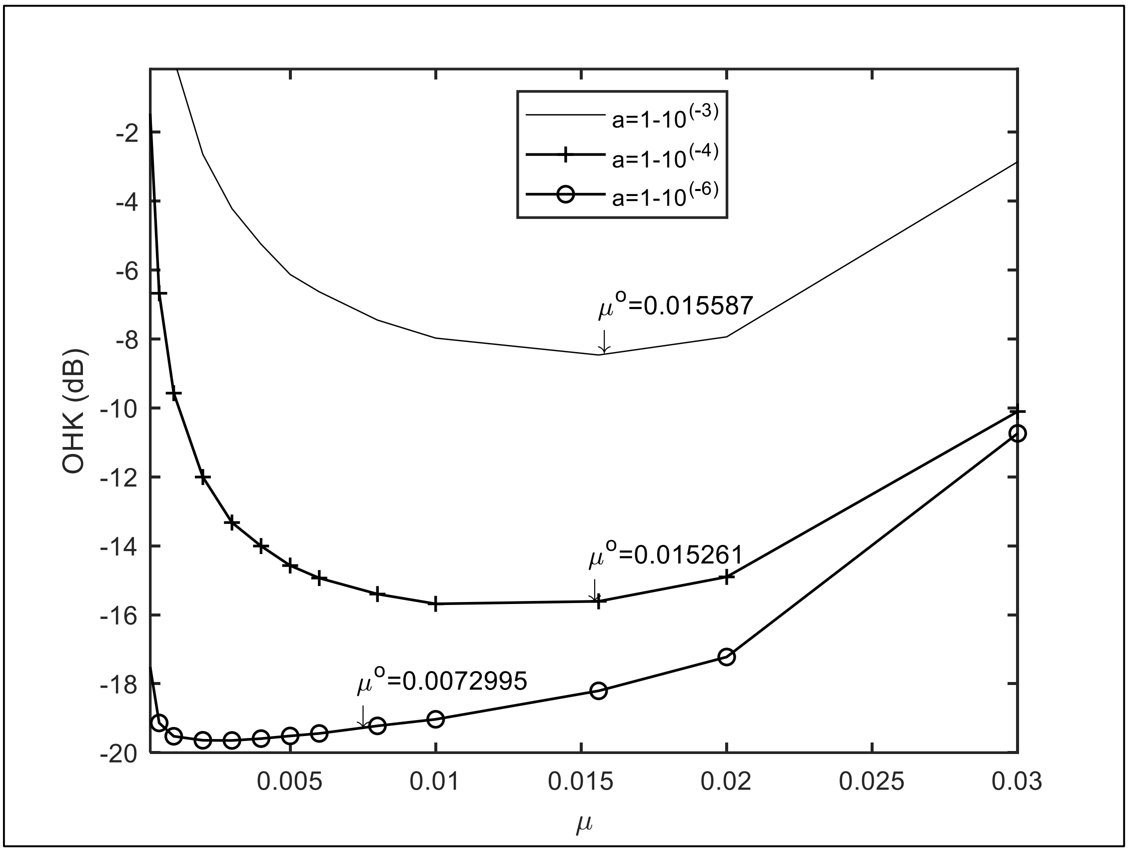
Şekil 4.4'te verilen ortalama hata karesi performansında, kararlı durum ortalama hata karesinde iyileşme sağlandığı görülmektedir. Değişken katsayılı yapılandırılmış NLMS algoritmasının en iyi sonucu vermekle beraber, değişken katsayılı yapılandırılmamış NLMS algoritması ile yapılandırılmış NLMS algoritmasının performansı yakalanmaktadır. Bu durumda değişken katsayılı algoritmalar için, düşük Doppler kaymalarında yapılandırılmış NLMS yerine değişken katsayılı yapılandırılmamış NLMS algoritmasının kullanımı işlemsel karmaşıklığın azaltılması amacı ile kullanılabilir. Bilindiği üzere yapılandırılmış NLMS algoritması için işlemsel karmaşıklık açısından ek olarak FFT/IFFT işlemleri kanal dürtü tepkisini L uzunluğuna sınırlamak için kullanılmaktadır.



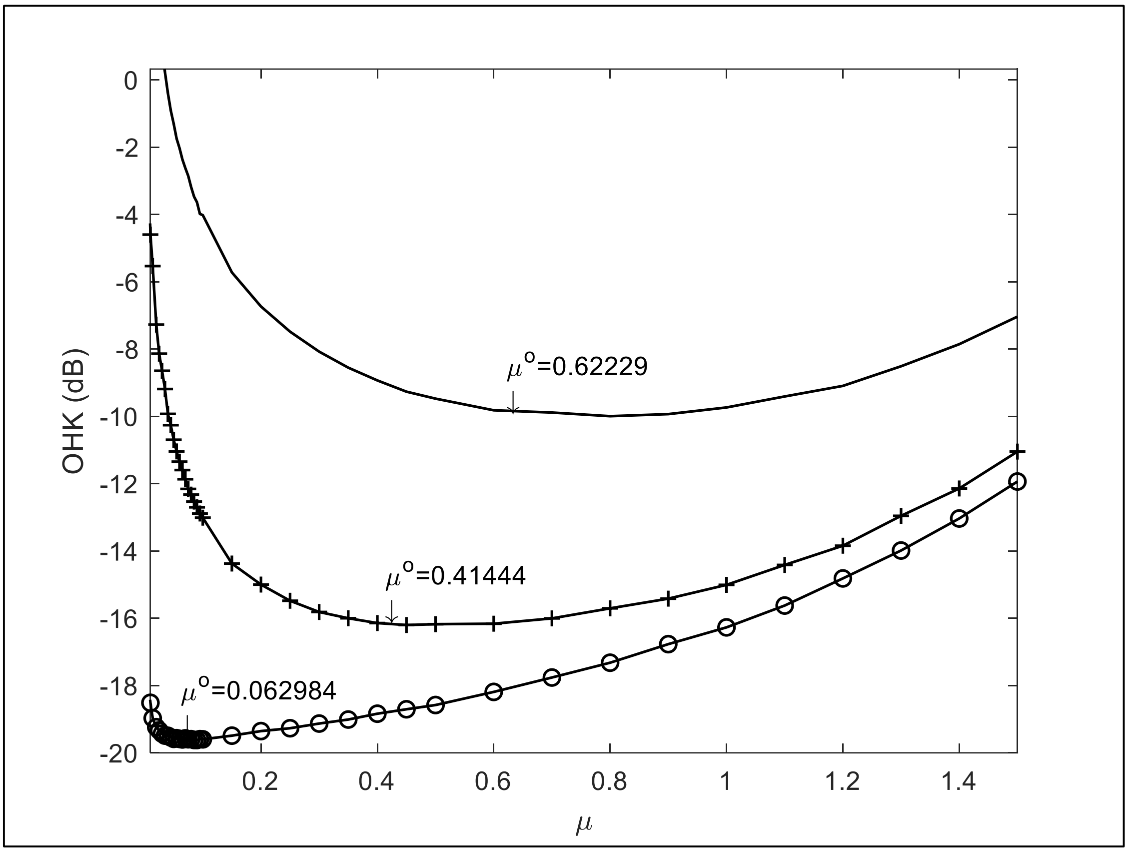
Şekil 4.3. Sabit ve değişken katsayılı uyarlamalı kanal kestirim BHO sonuçları, v=3km/h



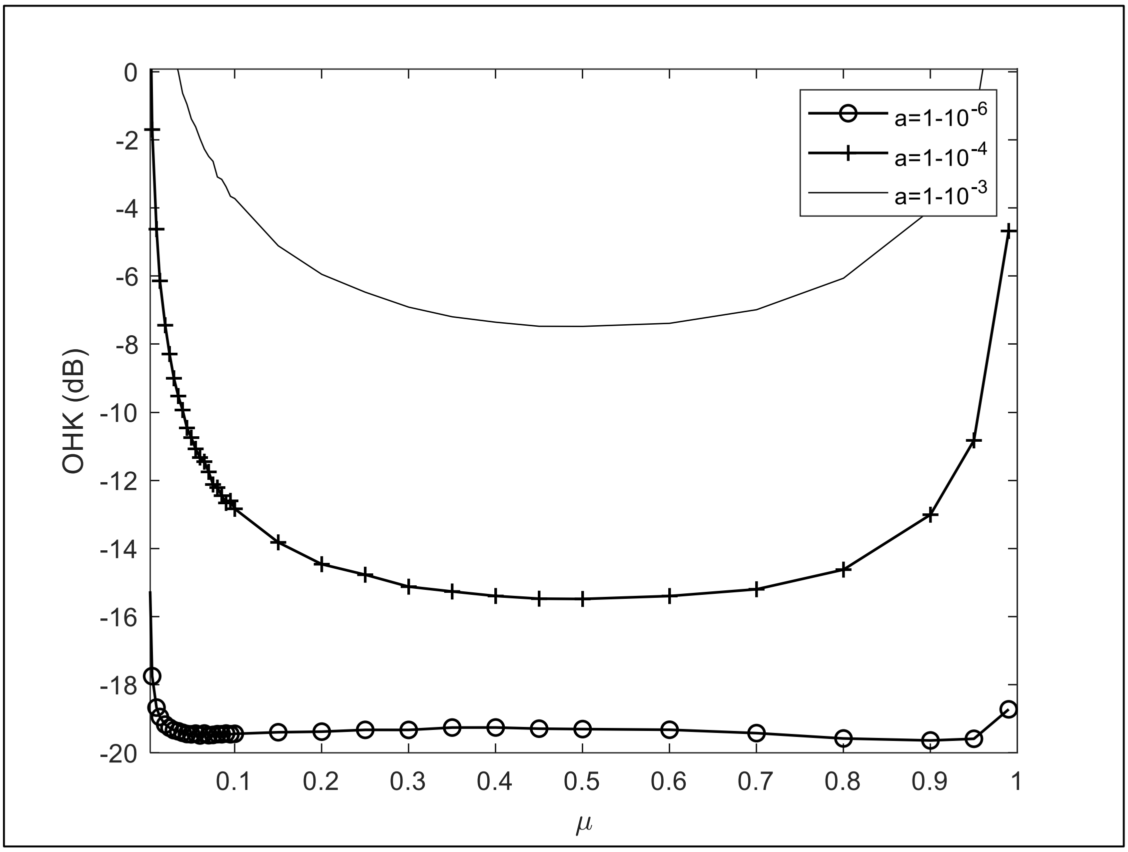
Şekil 4.4. Sabit ve değişken katsayılı uyarlamalı uyarlamalı algoritmaların öğrenme eğrisi performansları, v=3km/s, SGO=15dB



Şekil 4.5. FB-LMS kanal kestirim algoritması takip performansı



Şekil 4.6. FB-NLMS kanal kestirim takip performansı



Şekil 4.7. FB-RLS kanal kestirim algoritması takip performansı

Şekil 4.4 - Şekil 4.6 ile sırasıyla FB-LMS, FB-NLMS ve FB-RLS algortimalarının kanal takip performansları verilmektedir. Kanal takip performansının iyileştirebilmek için her algoritmanın en uygun katsayı değeri bulunmaktadır. Söz konusu değer teorik olark hesaplanabilmektedir.

5. FREKANS BÖLGESİ İTERATİF BLOK KARAR GERİ BESLEME ALGORİTMALARI

Önceki bölümlerde, SAG etkisini gidermek üzere doğrusal yapıda olan frekans bölgesi doğrusal denkleştirme algoritmaları tartışılmıştır. Doğrusal denkleştiriciler, bilindiği üzere haberleşme kanalının frekans tepkisinde sıfıra yakın veya eşit olması, denkleştirme performansını olumsuz yönde etkilemektedir. Doğrusal denkleştiricilerde oluşan bu etkiye gürültü kuvvetlendirmesi adı verilmektedir. Kanalın frekans bölgesinde sıfıra yakın ya da eşit olduğu spektrum bölgesinde, doğrusal denkleştirici yüksek kazanç değerine sahip olması gerekmektedir. Ancak, alınan sinyal içerisinde bulunan EBGG de yüksek kazanç değeri ile genliğinin artmasına neden olmaktadır. Doğrusal denkleştirme işleminde sıfıra yakın yada eşit spektruma sahip kanalların denkleştirildiğinde oluşan EBGG güçlenme etkisini azaltmak üzere, KGB (karar geri beslemeli) denkleştiriciler kullanılmaktadır. Bu denkleştirici yapısında, denkleştiricinin SAG etkisini giderdikten sonra, denkleştirilmiş sinyali demodüle etmesi, ve bu demodüle edilmiş sinyali SAG etkisini daha da gidermek için kullanılmasıdır.

Doğrusal denkleştiriciler de olduğu gibi, ZB-KGB algoritmalarının en önemli dezavantajı, işlemsel karmaşıklığın kanalın uzunluğuna bağlı olması ve yüksek saçılmaya sahip kanallar için işlemsel karmaşıklığın yüksek seviyelere ulaşmasıdır. Bu karmaşıklığı azaltmak üzere, frekans bölgesinde çalışan denkleştiriciler kullanılabilmektedir. Frekans bölgesinde çalışan, TT-FBD sistemleri için denkleştirme algoritmaları için ilk olarak Benvenuto ve Tomasin (2002) tarafından, karar geri beslemenin doğrusal kısmı için frekans bölgesi, karar geri besleme kısmı için ise zaman bölgesinde çalışacak şekilde karma bir yapı önerilmiştir. Bu yapıda, alıcının kanalın frekans tepkisini mükemmel olarak bildiği varsayılmış olup, kanalı kestirimi ve takibi yapılmamaktadır. Bu yapı kullanılarak yapılan sayısal benzetim sonuçlarından işlemsel karmaşıklığın önemli ölçüde azaltıldığı ve performansın doğrusal denkleştiricilere göre önemli ölçüde arttığı gösterilmiştir. Daha sonra, bu hibrid yapı, TT-FBD sisteminin çok kullanıcılı versiyonu olan tek taşıyıcılı-frekans bölmeli çoklu erişim (TT-FBÇE) sistemlerine de uyarlanmıştır (Gillian, Nix ve Armour, 2008).

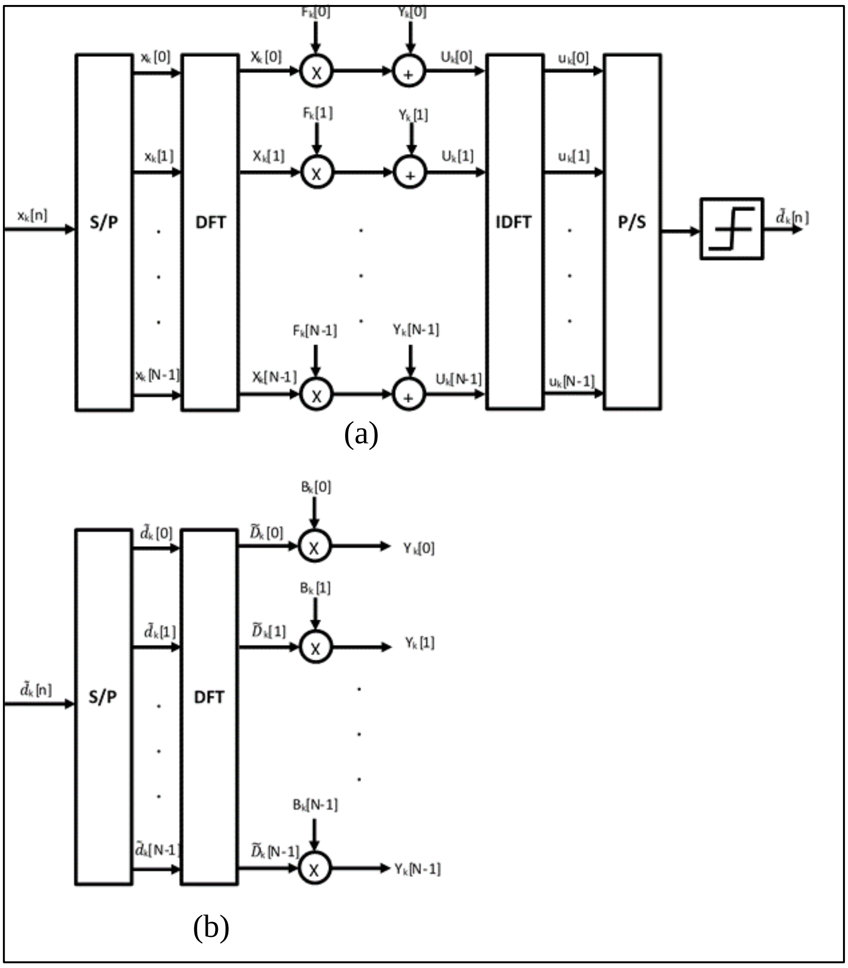
Söz konusu karma karar geri besleme denkleştiricisinin en önemli dezavantajı, karar geri besleme mekanizmasında, sadece sembolün kendinden önceki semboller ile karışımın giderilmesini sağlamsıdır. Bundan dolayı, karma yapıda SAG etkisinin kendinden sonra gelen sembollerden kaynaklanan SAG etkisi göz ardı edilmekte, bu durumda da SAG etkisinin bir kısmı giderilebilmektedir. Benvenuto ve Tomasin (2005) tarafından yapılan çalışmada ise, karma yapı daha geliştirilerek, TT-FBD sistemleri için tümüyle frekans bölgesinde çalışan yinelemeli frekans bölgesi karar geri besleme denkleştirme algoritması önerilmiştir. Önerilen yapının, hem karma yapıya göre daha az karmaşıklığa gereksinim duyduğu, hem de SAG etkisini gidermek için kendinden önceki ve sonraki sembollerde göz önüne alındığından, daha iyi BHO performansı sağladığı gösterilmiştir. Zhang, Wang, Wang ve Song (2010) tarafından yapılan çalışmada ise, TT-FBD sistemleri için geliştirilmiş bu yapı, TT-FBÇE sistemleri için genişletilmiştir. Her iki çalışmada, uyarlanabilir algoritma kullanılmamış olup, alıcının kanalın frekans değerlerini mükemmel şekilde bildiği varsayılmıştır.

Uyarlanabilir frekans bölgesinde çalışan denkleştiricilere ait çalışma Iqbal ve diğerleri (2015) tarafından AFD-DFE-RLS adı verilen bir algoritma önerilmiştir. Bu çalışmada, uyarlanabilir frekans bölgesi karar geri besleme algoritmasının, doppler kaymasına ve taşıyıcı frekans kaymasına karşı yüksek dayanımlı olduğu gösterilmiştir. Algoritmanın geliştirilmesinde, sembollerin kendinden önceki ve sonraki sembollere ait karışım etkisine dair bir kısıtlama yapılmamıştır. Sonrasında ise, bu etkiyi de içerecek şekilde söz konusu algoritma geliştirilmiştir (Iqbal, ve Zerguine, 2017). Söz konusu algoritmada, kısıtlama etkisinin gerçek değeri yerine, stokastik gradyant metodu ile kestirim yapılmıştır. Bu sayede, AFD-DFE algoritmasına göre daha iyi performans elde edildiği gösterilmiştir (Benvenuto, Dinis, Falconer, ve Tomasin, 2009).

5.1. Sistem Modeli

Şekil 5.1 ile kullanılmakta olan frekans bölgesi uyarlanabilir KGB sisteminin yapısı verilmektedir.

Alıcı ilk olarak sinyal üzerindeki her bloktaki dönel ön ek kısmını kaldırdıktan sonra, bloğu HFD ile frekans bölgesine dönüştürmekte, sonrasında ise ilk aşamada doğrusal denkleştirici kısmı ile sinyal üzerindeki SAG etkisininin bir bölümü gidermeye çalışmaktadır. Doğrusal denkleştiricinin SAG etkisini gideremediği kısmı ise, geri besleme katsayıları ile gidermeye çalışmaktadır. Bu sayede, karar geri besleme denkleşticinin SAG etkisini gidermekte doğrusal denkleştiricilere göre daha başarılı olmaktadır.



Şekil 5.1. Uyarlanabilir frekans bölgesi karar geri besleme denkleştirici sistemi (a) doğrusal, (b) geri besleme kısmı

5.1.1. Wiener çözümü

Frekans bölgesinde çalışan karar geri besleme için maliyet fonksiyonu, $J_{FB-KGB}[n]$

$$J^{FB-KGB}[n] = E\{|E[n]|^2\} + 2Re\left\{\lambda^* \sum_{l=0}^{N_{sym}-1} B[l]\right\} \tag{5.1}$$

$$E[n] = D[n] - X[n]F[n] - D[n]B[n] \tag{5.2}$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada, $E[n]$ hatayı, $D[n]$ gönderilen sembolün n. frekans noktasındaki değerini, $X[n]$ kanal üzerinden geçerek bozulmuş, sonrasında EBGG ile gürültüye maruz kalmış, alınan sinyalin HFD ile elde edilen n. frekans noktasındaki değerini, $F[n]$ karar geri besleme denkleştiricinin doğrusal yapısının n. frekans noktasındaki değerini, $B[n]$ ise karar geri besleme denkleştiricinin doğrusal yapısının n. frekans noktasındaki değerini, Lagrange çarpım değerini göstermektedir. Maliyet fonksiyonundaki kısıtlama faktörü $\sum_{l=0}^{N_{sym}-1} B[l]$, SAG etkisini gidermek için, denkleştirme işlemi sonucunda istenilen sinyal değerinin ortadan kaldırılmasını önlemekte, ayrıca sembolün kendinden önceki ve sonraki SAG etkisini gidermeyi sağlamaktadır (Benvenuto ve Tomasin, 2005).

Maliyet fonksiyonunun minimum noktasını sağlayan $F[n]$ değeri,

$$\frac{\partial J^{FB-KGB}}{\partial F[n]} = E\{X^*[n]E[n]\} = E\{X^*[n](D[n] - X[n]F[n] - D[n]B[n])\} = 0 \tag{5.3}$$

denklemi ile hesaplanmaktadır. Buradan,

$$E\{X^*[n]D[n]\}(1 - B[n]) = E\{|X[n]|^2\}F[n] \tag{5.4}$$

olarak bulunmaktadır. Alınan sinyal ifadesi, $X[n] = D[n]H[n] + N[n]$ ifadesi yerine konulduğunda, ayrıca, gürültünün, sıfır ortalamalı, varyansı N_{sym} gönderilen sinyalden istatistiki olarak bağımsız olduğu kabul edilir ise,

$$F[n] = \frac{N_{sym}\sigma_d^2 H^*[n]}{N_{sym}\sigma_d^2 |H[n]|^2 + N_{sym}\sigma_n^2}(1 - B[n]) \tag{5.5}$$

olarak bulunur. Görüldüğü üzere $F[n]$ değeri geri besleme katsayısına $B[n]$ bağlıdır.

Maliyet fonksiyonunun minimum noktasını sağlayan $B[n]$ değeri,

$$\frac{\partial J^{FB-KGB}}{\partial B[n]} = E\{D^*[n]E[n]\} = E\{D^*[n](D[n] - X[n]F[n] - D[n]B[n])\} - \lambda = 0 \tag{5.6}$$

Buradan,

$$E\{|D[n]|^2\} - E\{D^*[n]X[n]\}F[n] - \lambda = E\{|D[n]|^2\}B[n] \tag{5.7}$$

olarak bulunmaktadır. Alınan sinyal ifadesi, $X[n] = D[n]H[n] + N[n]$ ifadesi yerine konulduğunda, ayrıca, gürültünün, sıfır ortalamalı, varyansı N_{sym} gönderilen sinyalden istatistiki olarak bağımsız olduğu kabul edilir ise,

$$B[n] = 1 - H[n]F[n] - \frac{1}{N_{sym}\sigma_d^2}\lambda \tag{5.8}$$

olmaktadır. Burada, $B[n]$ $F[n]$ifadesinde yerine konulduğunda,

$$F[n] = \frac{N_{sym}\sigma_d^2 H^*[n]}{N_{sym}\sigma_d^2|H[n]|^2 + N_{sym}\sigma_n^2}\left(H[n]F[n] + \frac{1}{N_{sym}\sigma_d^2}\lambda\right) \tag{5.9}$$

$$\left(1 - \frac{N_{sym}\sigma_d^2|H[n]|^2}{N_{sym}\sigma_d^2|H[n]|^2 + N_{sym}\sigma_n^2}\right)F[n] = \frac{H^*[n]}{N_{sym}\sigma_d^2|H[n]|^2 + N_{sym}\sigma_n^2}\lambda \tag{5.10}$$

$$F[n] = \frac{H^*[n]}{N_{sym}\sigma_n^2}\lambda \tag{5.11}$$

olmaktadır. Bu değer, $F[n]$ ifadesinde yerine konulduğunda,

$$B[n] = 1 - H[n]F[n] - \frac{1}{N_{sym}\sigma_d^2}\lambda = 1 - \left(\frac{|H[n]|^2}{N_{sym}\sigma_n^2} + \frac{1}{N_{sym}\sigma_d^2}\right)\lambda \tag{5.12}$$

olmaktadır. Kısıtlamadan dolayı $\sum_{l=0}^{N_{SYM}-1} B[l]$ olmalıdır. Bu durumda,

$$\sum_{l=0}^{N_{SYM}-1} B[l] = \sum_{l=0}^{N_{SYM}-1}\left[1 - \left(\frac{|H[l]|^2}{N_{SYM}\sigma_n^2} + \frac{1}{N_{SYM}\sigma_d^2}\right)\lambda\right] = 0 \tag{5.13}$$

$$\lambda = \frac{N_{SYM}^2\sigma_n^2\,\sigma_d^2}{\sigma_d^2\sum_{l=0}^{N_{SYM}-1}|H[l]|^2 + N_{SYM}\sigma_n^2} \tag{5.14}$$

olarak bulunur. Bu değer, $B[n]$ ve $F[n]$ ifadelerinde yerine konulduğunda, katsayı eşitlikleri,

$$F[n] = \frac{N_{sym}\sigma_d^2\,H^*[n]}{\sigma_d^2\sum_{l=0}^{N_{SYM}-1}|H[l]|^2 + N_{sym}\sigma_n^2} \tag{5.15}$$

$$B[n] = \frac{N_{sym}\sigma_d^2\,|H[n]|^2 - \sigma_d^2\sum_{l=0}^{N_{sym}-1}|H[l]|^2}{\sigma_d^2\sum_{l=0}^{N_{sym}-1}|H[l]|^2 + N_{sym}\sigma_n^2} \tag{5.16}$$

olarak ifade edilmektedir. Bu eşitliklerin hesaplanabilmesi için kanalın frekans tepkisi $H[n]$, ile geri beslemede kullanılacak veri değerlerinin $D[n]$ mükemmel olarak bilinmesi gerekmektedir. Uygulamada, her iki verinin de alıcıda kestirim yapılması gerektiğinden, bu formül ideal katsayıları göstermektedir.

İdeal durum için, $F[n]$ ve $B[n]$ bulunan değerler kullanılarak EDOHK hesaplanacak olur ise,

$$\xi_{min}[n] = E\{|E[n]|^2\} = \frac{N_{sym}\sigma_d^2\,\sigma_n^2\left(|H[n]|^2+N_{sym}\sigma_n^2\right)}{\left(\sigma_d^2\sum_{l=0}^{N_{sym}-1}|H[l]|^2+N_{sym}\sigma_n^2\right)^2} \tag{5.17}$$

olarak bulunur.

5.1.2. AFD-CRLS-DFE algoritması

Iqbal ve Zerguine (2017) tarafından, uyarlamalı karar geri besleme algoritması için aşağıdaki şekilde doğrusal ve geri besleme katsayılarının güncelleme eşitliği, RLS algoritmasına göre,

$$U_k = [X_k \quad D_k], W_k = \begin{bmatrix} F_k \\ B_k \end{bmatrix} \tag{5.18}$$

$$E_k = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_k \\ \mathcal{E}_k \end{bmatrix}, \mathcal{E}_k = D_k - U_k W_k \tag{5.19}$$

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k + \theta \sum_{l=0}^{N_{sym}-1} B_k[l] \tag{5.20}$$

$$W_k = W_{k-1} + P_k U_k^H\left(E_k - \alpha_{k+1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \quad , P_k = \begin{bmatrix} P_{k,x} \\ P_{k,D} \end{bmatrix} \tag{5.21}$$

$$P_{k,x} = \beta^{-1}\left(P_{k,x} - \beta^{-1}P_{k,x}X_k\left(\beta I + X_k P_{k,x} {X_k}^H\right)^{-1}{X_k}^H P_{k,x}\right) \tag{5.22}$$

$$P_{k,D} = \beta^{-1}\left(P_{k,D} - \beta^{-1}P_{k,D}D_k\left(\beta I + D_k P_{k,D} {D_k}^H\right)^{-1}{D_k}^H P_{k,D}\right) \tag{5.23}$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada, U_k X_k ve D_k köşegen matrislerinden oluşan $N_{sym}x2N_{sym}$

boyutundaki matrisi, W_k ileri ve geri besleme katsayılarından oluşan $2N_{sym}x1$ boyundaki KGB denkleştirici katsayılarını, P_k alınan ve gönderilen sinyalin köşegen özilinti matrisini, β RLS algoritmasının unutma faktörünü, α_k öncül ve sonsul SAG etkisini gidernek için iteratif olarak hesaplanan katsayıyı göstermektedir.

Katsayı güncelleme eşitliklerinden görüleceği üzere, semboller arası karışım etkisini gidermek üzere kullanılan katsayı α_kHer ne kadar bu yöntem ile stokastik gradyant metodu ile iteratif olarak her blokta kestirim yapılarak katsayı güncelleme eşitliğinde uygulanmaktadır. Semboller arası karışım etkisinin, sembolün kendinden önceki ve sonraki karışım etkisini gidermeye çalışsa da, kullanılan stokastik gradyant yaklaşımından dolayı gerekli kesin çözümü yaklaşık olarak bulmaktadır.

5.2. Önerilen Frekans Bölgesi Uyarlamalı Karar Geri Besleme Algoritması

Bu alt bölümde, frekans bölgesi uyarlamalı karar geri besleme algoritması için yeni bir yöntem önerilecektir. Önerilen algoritma Iqbal ve Zerguine (2017) tarafından önerilen algoritmadaki, kısıtlamanın stokastik gradyant metodu ile güncellenmesi yerine, katsayı güncelleme eşitliğinde kesin çözümünün uygulanması amaçlanmaktadır. Bu durum için kullanılacak maliyet fonksiyonu, RLS algoritması uyarlamalı algoritma olarak seçildiğinde,

$$J^{FB-KGB}[n][n] = \sum_{i=0}^{k} \beta^{k-i} \left|E_{k,i}[n]\right|^2 + 2Re\left\{\lambda^* \sum_{l=0}^{N_{SYM}-1} B_k[l]\right\} \tag{5.24}$$

şeklinde olmaktadır. Burada, doğrusal denkleştiricilerde olduğu gibi, β unutma faktörü değerini, $E_{k,i}[n] = D_i[n] - X_i[n]F_k[n] - D_i[n]B_k[n]$ ise n. Frekans noktasındaki soncul hatayı göstermektedir. Karar geri besleme denkleştiricinin, doğrusal kısmı için maliyet fonksiyonunun en düşük değerini sağlayan değeri,

$$\frac{\partial J^{FB-KGB}[n]}{\partial F_k[n]} = \sum_{i=0}^{k} \beta^{k-i} (-X_i[n])^* E_{k,i}[n] = 0 \tag{5.25}$$

ile bulunmaktadır. Gerekli matematiksel işlemler yapıldığında,

$$\left(\sum_{i=0}^{k} \beta^{k-i} |X_i[n]|^2\right) F_k[n] = \left(\sum_{i=0}^{k} \beta^{k-i} X_i^*[n] D_i[n]\right)(1 - B_k[n]) \tag{5.26}$$

Burada, $R_{k,x} = \sum_{i=0}^{k} \beta^{k-i} |X_i[n]|^2$ alınan sinyalin n. frekans noktası için öz ilinti değerini, $p_{k,(D,X)}[n] = \sum_{i=0}^{k} \beta^{k-i} X_i^*[n] D_i[n]$ alınan sinyal ile gönderilen sinyal arasındaki çapraz ilinti ifadesini göstermektedir. Tanımlanan ifadeler yerine konulup, eşitlik düzenlendiğinde,

$$F_k[n] = R_{k,x}^{-1}[n] p_{k,(D,X)}[n] (1 - B_k[n]) \tag{5.27}$$

eşitlikten görüldüğü üzere, $F_k[n]$ değeri, karar geri besleme katsayılarına $B_k[n]$ bağlıdır. Ayrıca, $R_{k,x}^{-1}[n] p_{k,(D,X)}[n]$ ifadesi, doğrusal denkleştici katsayısı, $W_k[n]$'e karşılık gelmektedir. Bu durumda,

$$F_k[n] = W_k[n](1 - B_k[n]) \tag{5.28}$$

olmakta, yani karar geri besleme katsayısının değeri hem doğrusal denkleştirici katsayısı, hem de karar geri besleme katsayısına bağlı olmaktadır.

Karar geri besleme katsayısı maliyet fonksiyonu kullanılarak bulunduğu takdirde,

$$\frac{\partial J^{FB-KGB}[n][n]}{\partial B_k[n]} = \sum_{i=0}^{k} \beta^{k-i} (-D_i[n])^* E_{k,i}[n] + \lambda = 0 \tag{5.29}$$

eşitliği elde edilir. Buradan gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\left(\sum_{i=0}^{k} \beta^{k-i} |D_i[n]|^2\right) B_k[n] = \left(\sum_{i=0}^{k} \beta^{k-i} |D_i[n]|^2\right) - \left(\sum_{i=0}^{k} \beta^{k-i} D_i^*[n] X_i[n]\right) B_k[n] - \lambda \tag{5.30}$$

bulunmaktadır. Eşitlikteki $R_{k,D}[n] = \sum_{i=0}^{k} \beta^{k-i} |D_i[n]|^2$ alınan sinyalin n. Frekans noktasındaki öz ilinti değerini, $p_{k,(X,D)}[n] = \sum_{i=0}^{k} \beta^{k-i} D_i^*[n] X_i[n]$ ise çapraz ilinti değerini göstermektedir. Bu durumda yukarıdaki ifade,

$$B_k[n] = 1 - R_{k,D}^{-1}[n] p_{k,(X,D)}[n] F_k[n] - \lambda R_{k,D}^{-1}[n] \tag{5.31}$$

olmaktadır. $H_k[n] = R_{k,D}^{-1}[n] p_{k,(X,D)}$ kanalın kestirilen frekans değerini gösterdiğinden, $B_k[n]$ ifadesi,

$$B_k[n] = 1 - R_{k,D}^{-1}[n]p_{k,(X,D)}[n]F_k[n] - \lambda R_{k,D}^{-1}[n] \quad (5.32)$$

halini almaktadır. $B_k[n]$ eşitliği, $F_k[n]$ eşitliğinde yerine konulacak olur ise,

$$F_k[n] = W_k[n]\big(H_k[n]F_k[n] + \lambda R_{k,D}^{-1}[n]\big) \quad (5.33)$$

elde edilir. Buradan da,

$$F_k[n] = \lambda \frac{W_k[n]R_{k,D}^{-1}[n]}{1-H_k[n]W_k[n]} = \frac{N_{sym}}{\sum_{l=0}^{N_{sym}-1}(1-H_k[l]W_k[l])^{-1}R_{k,D}^{-1}[l]} \frac{W_k[n]R_{k,D}^{-1}[n]}{1-H_k[n]W_k[n]} \quad (5.34)$$

Bu eşitlik, $B_k[n]$ eşitliğinde yerine konulduğunda,

$$B_k[n] = 1 - \lambda \frac{H_k[n]W_k[n]R_{k,D}^{-1}[n]}{1-H_k[n]W_k[n]} - \lambda R_{k,D}^{-1}[n] = 1 - \frac{\lambda}{1-H_k[n]W_k[n]} R_{k,D}^{-1}[n] \quad (5.35)$$

$\sum_{l=0}^{N_{SYM}-1} B_k[l] = 0$ olduğundan, λ değeri,

$$\lambda = \frac{N_{sym}}{\sum_{l=0}^{N_{sym}-1}(1-H_k[l]W_k[l])^{-1}R_{k,D}^{-1}[l]} \quad (5.36)$$

olarak bulunur.

$F_k[n]$ ve $B_k[n]$ ifadelerinde bulunan, doğrusal denkleştirici katsayısı $W_k[n]$ ile kanalın frekans tepkisi $H_k[n]$, iteratif olarak bulunabilir.

$$W_k[n] = R_{k,x}^{-1}[n]p_{k,(D,X)}[n], \;\; H_k[n] = R_{k,D}^{-1}[n]p_{k,(X,D)}[n] \quad (5.34)$$

olarak ifade edilmiştir. Buradaki öz ilinti ve çapraz ilinti değerleri,

$$R_{k,x}^{-1}[n] = \beta R_{k-1,x}^{-1}[n] + |X_k[n]|^2, R_{k,D}^{-1}[n] = \beta R_{k-1,D}^{-1}[n] + |D_k[n]|^2 \quad (5.35)$$

$$p_{k,(X,D)}[n] = \beta p_{k-1,(X,D)}[n] + D_k^*[n]X_k[n] \quad (5.36)$$

olmaktadır. Görüldüğü üzere, $W_k[n]$ ve $H_k[n]$ katsayılarının hesaplanması standart doğrusal denkleştirme işlemi ile temelde aynı olmaktadır. Bu durumda, ilgili katsayı güncelleme eşitlikleri,

$$W_k[n] = W_{k-1}[n] + \frac{Z_{k-1,x}[n]}{\beta+|X_k[n]|^2 Z_{k-1,x}[n]} X_k^*[n] E_{k,w}[n], \tag{5.37}$$

$$H_k[n] = H_{k-1}[n] + \frac{Z_{k-,D}[n]}{\beta+|D_k[n]|^2 Z_{k-1,D}[n]} D_k^*[n] E_{k,D}[n], \tag{5.38}$$

$$E_{k,w}[n] = D_k[n] - X_k[n] W_{k-1}[n], \tag{5.39}$$

$$E_{k,D}[n] = X_k[n] - D_k[n] H_{k-1}[n] \tag{5.40}$$

halini almaktadır. Burada, $Z_{k-1,x}[n] = R_{k-1,x}^{-1}[n], Z_{k-1,D}[n] = R_{k-1,D}^{-1}[n]$ olarak tanımlanmaktadır.

Katsayı güncelleme eşitliğinden görüldüğü üzere, gönderilen sinyal değeri $D_k[n]$ nin hesaplamalarda önceden bilinmesi gerekmektedir (nedensellik problemi). Ancak bu değer kestirmek istenilen değer olduğundan, alıcıda bulunmamaktadır. Literatürde, bu durumun çözmek üzere yinelemeli bir yapı kullanılabilmektedir. Bu durum için, algoritma, eğitim periyodunun sonunda ilk olarak, hesaplamış olduğu denkleştirici katsayılarını döngüsel olarak belirli bir sayıda tekrar tekrar alınan sinyale uygulanması ve demodüle edilmesi ile çözülmekte ve istenilen sinyale her adımda daha da yaklaşılması sağlanmaktadır. Belirlenen bir sayıda bu işlem döngüsel olarak yapıldıktan sonra, algoritma yeterince güvenilir şekilde istenilen sinyali elde edebilmekte ve bu değeri katsayı güncelleme işleminde kullanmaktadır (Berberidis ve Kraivazoglou, 2002; Kekatos, Berberidis, ve Rontogiannis, 2007).

Yeni önerilen frekans bölgesi uyarlamalı denkleştiricinin, akış çizelgesi Çizelge 4.1 ile verilmektedir.

5.3. İteratif Blok Karar Geri Besleme Algoritmasının İşlemsel Karmaşıklığı

Uyarlamalı iteratif karar geri besleme algoritması için belirlenen işlemsel karmaşıklık seviyeleri çizelge 4.2'de belirlenmiştir. Görüldüğü üzere, karmaşıklık seviyesi karar modunda kullanılan yineleme sayısı N_I ile orantılı olmaktadır. Ayrıca, doğrusal denkleştirme ve kanal kestirim ile denkleştirme algoritmalarında göre, iteratif kanal geri besleme algoritmalarının, daha fazla işlemsel karmaşıklığa sahip olduğu görülmektedir. Karmaşıklık seviyelerine bakıldığında, yeni önerilen algoritmanın karmaşıklık seviyesinin, Iqbal ve Zerguine (2017) tarafından önerilen algoritmanın karmaşıklık seviyesine oldukça yakın olduğu anlaşılmıştır. Yapılan benzetim çalışmalarında, her iki algoritmanın performansları karşılaştırılmıştır.

Çizelge 5.1. Yeni önerilen frekans bölgesi uyarlamalı karar geri besleme algoritması akış çizelgesi

Adım	İşlem
1.	$H_0[n]=0, W_0[n]=0, F_0[n]=0, B_0[n]=0$ ilk değer ata, k=0
2.	$Z_{0,x}[n]=\delta_x$, $Z_{0,D}[n]=\delta_D$(δ_x büyük bir sayı, δ_D küçük bir sayı)
3.	Karar modu için yineleme sayısı, N_I belirle
4.	$k=k+1$
4.	k. blok eğitim bloğu ise, $\widehat{D}_k[n]=X_k[n]F_k[n]+D_k[n]B_k[n]$
5.	k. blok veri bloğu ise, $\widehat{D}_k{}^0[n]=X_k[n]W_k[n]$ Yinele p=1:N_I $\widehat{D}_k{}^{p+1}[n]=X_k[n]F_k[n]+\widehat{D}_k{}^p[n]B_k[n]$ $\widehat{D}_k{}^{p+1}[n]$ ters hızlı fourier işlemi ile zaman bölgesine dönüştür, demodüle et ve hızlı fourier dönüşümü ile frekans bölgesine dönüştür
6.	$E_{k,w}[n]=D_k[n]-X_k[n]W_{k-1}[n]$ $E_{k,D}[n]=X_k[n]-D_k[n]H_{k-1}[n]$ $W_k[n]$ ve $H_k[n]$ için Hata değerlerini hesapla
7.	$W_k[n]=W_{k-1}[n]+\frac{Z_{k-1,x}[n]}{\beta+\lvert X_k[n]\rvert^2 Z_{k-1,x}[n]}X_k^*[n]E_{k,w}[n]$ $H_k[n]=H_{k-1}[n]+\frac{Z_{k-,D}[n]}{\beta+\lvert D_k[n]\rvert^2 Z_{k-1,D}[n]}D_k^*[n]E_{k,D}[n]$ $W_k[n]$ ve $H_k[n]$ katsayılarını güncelle
8.	$\lambda=\frac{N_{SYM}}{\sum_{l=0}^{N_{SYM}-1}(1-H_k[l]W_k[l])R_{k,D}^{-1}[n]}$ λ değerini $W_k[n]$ ve $H_k[n]$ kullanarak hesapla
9.	$F_k[n]=\lambda\frac{W_k[n]R_{k,D}^{-1}[n]}{1-H_k[n]W_k[n]}$ $B_k[n]=1-\frac{\lambda}{1-H_k[n]W_k[n]}R_{k,D}^{-1}[n]$ $F_k[n]$ ve $B_k[n]$ katsayılarını güncelle
10.	4. adıma geri dön

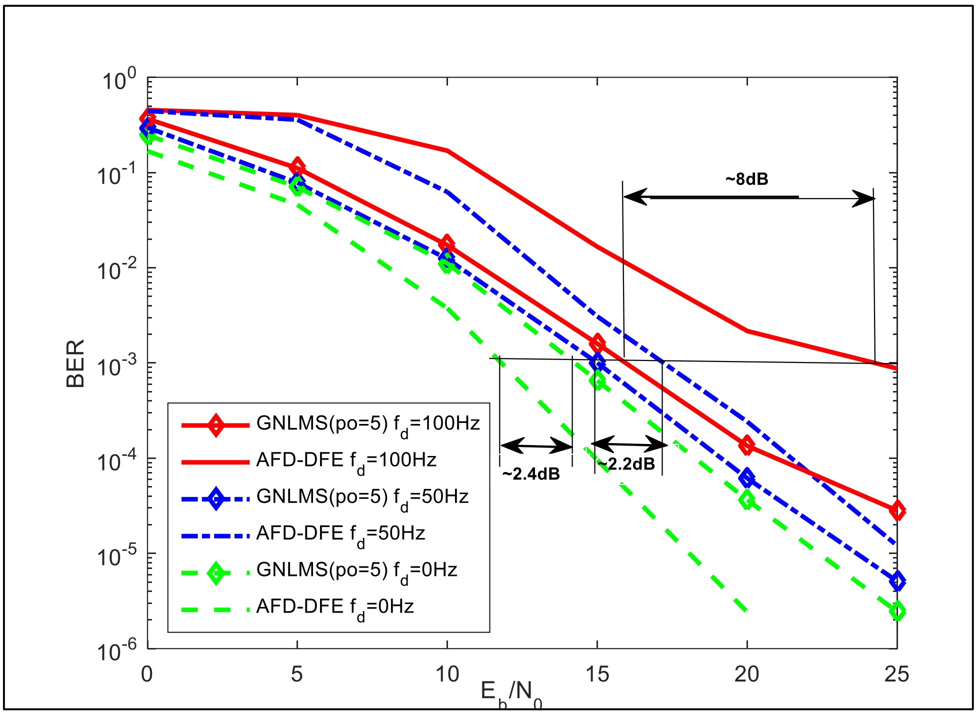
Çizelge 5.2. Sembol başına uyarlamalı iteratif denkleştirme algoritmalarının işlemsel karmaşıklığı

Algoritma	Çarpım (Gerçel)	Bölme	Gerçel Toplama
AFD-CRLS-DFE	$6log_2N_{SYM} + 8N_I log_2N_{SYM} + 8N_I + 20$	2	$6log_2N_{SYM} + 7N_I + 21$
Önerilen AFD-CRLS	$6log_2N_{SYM} + 8N_I log_2N_{SYM} + 8N_I + 22$	2	$6log_2N_{SYM} + 7N_I + 21$

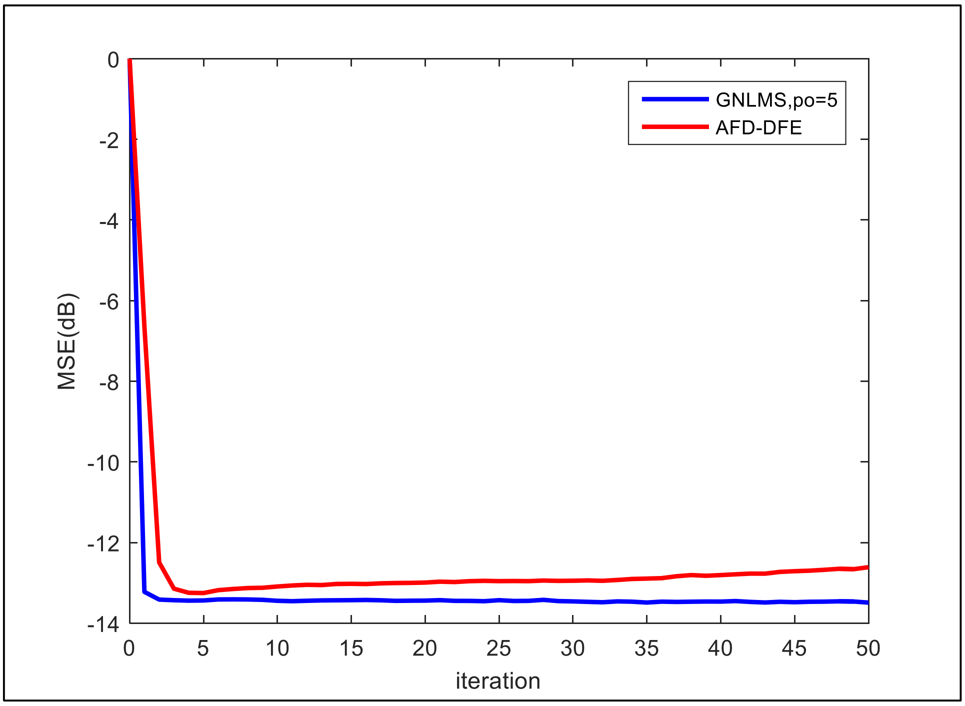
5.4. Sayısal Benzetim Sonuçları

Bu alt bölümde, yeni önerilen frekans bölgesi uyarlamalı geri besleme algoritması kullanılarak yapılmış olan benzetim çalışmalarının sonuçları verilmektedir. İlk olarak 6 yollu Rayleigh sönümlü kanalda yapılan simülasyon sonuçları, doğrusal denkleştirici algoritmaları ile karşılaştırmalı olarak, Iqbal ve Zerguine (2017) tarafından önerilen uyarlamalı karar geri beslemeli denkleştirici ile karşılaştırmalı olarak Şekil 5.1 ile verilmektedir. Simülasyonlar için N_{SYM}=128 olarak alınmış, ve QPSK kipleme metodu kullanılmıştır. Düşük doppler kayma frekanslarında, karar geri beslemeli denkleştirici daha iyi sonuç vermekte iken, doppler kayma frekansının artması ile, doğrusal GNLMS algoritması daha iyi bit hata oranı performansı sağlamaktadır. Özellikle bu performans artışı yükse doppler frekanslarında daha belirgin hale gelmekte ve 8dB e yakın bir SGO artışı sağlanmaktadır. Yüksek doppler frekanslarında meydana gelen performans artışının sebebi, karar geri beslemede kestirim hatalarının artmasına bağlı olarak, semboller arası karışım etkisinin doğru bir şekilde alınan sinyalden ayrıştırılamamasından kaynaklanmaktadır.

Bu durum, algoritmaların Şekil 5.3 ile verilen öğrenme eğrisi performanslarından daha net bir şekilde anlaşılmaktadır. GNLMS algoritmasının kullanılması ile tüm iterasyon boyunca sabit ortalama hata karesi elde edilir iken, AFD-DFE-CRLS algoritması minimum değere ulaştıktan sonra ortalama hata karesi performansı artmaya başlamaktadır. İterasyon boyunca, meydana gelen hatalar, diğer iterasyonlar da denkleştirmenin güvenilirliğini azaltmakta ve ortalama hata karesinin düzenli bir şekilde artmasına yol açmaktadır. Ayrıca GNLMS algoritması, AFD-DFE algoritmasına göre daha hızlı yakınsama performansı sergilemektedir.

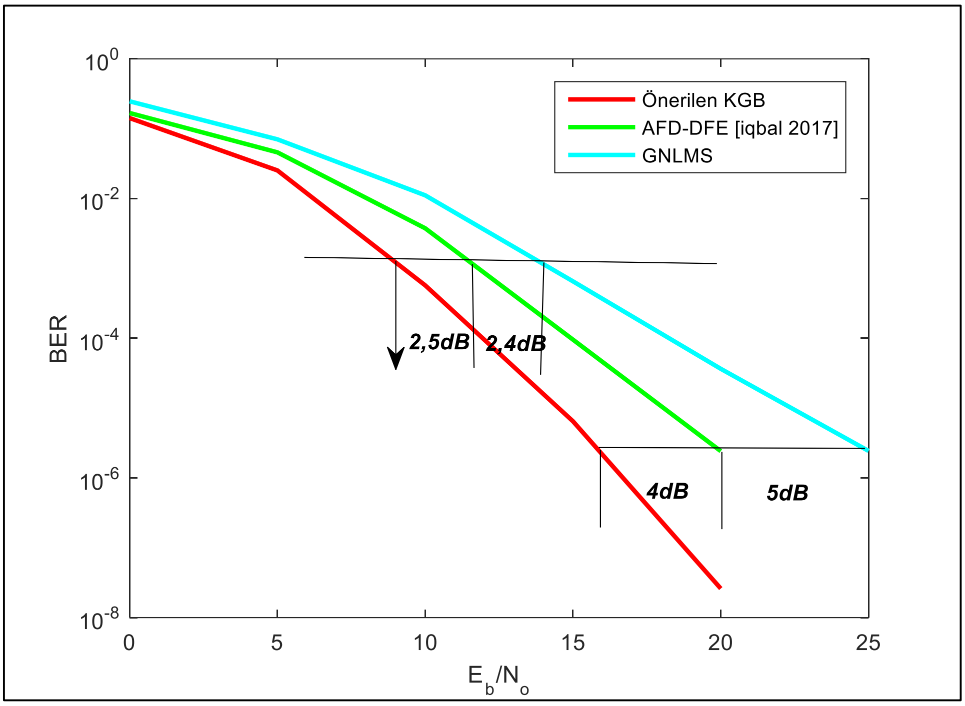


Şekil 5.2. AFD-DFE ile GNLMS algoritmalarının BHO performansları



Şekil 5.3. AFD-DFE ile GNLMS algoritmalarının öğrenme eğrisi performansları

Şekil 5.4 ile, yeni önerilen frekans bölgesi karar geri besleme algoritması ile AFD-DFE ve doğrusal GNLMS algoritmalarının bit hata oranı performansları durağan kanal için verilmektedir. GNLMS algoritmasının, durağan kanallarda en kötü performansı vermekte iken, yeni önerilen frekans bölgesi algoritması hem GNLMS hemde AFD-DFE algoritmasına göre çok daha iyi performans sergilemekte, AFD-DFE algoritmasına göre 4dB’ye, GNLMS algoritmasına göre ise 9dB lik bir kazanç sağlamaktadır.



Şekil 5.4. AFD-DFE, GNLMS ve yeni önerilen KGB algoritmalarının bit hata oranı performansları

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Frekans bölgesinde çalışan uyarlamalı denkleştiricilere yönelik yapılan araştırmalar sonucunda, klasik LMS ve RLS tabanlı algoritmalar zamansal değişim hızı yüksek olan kanallarda performansından daha yüksek olan algoritmalar önerilmiştir. Önerilen algoritmalar, haberleşme kanalının frekans bölgesinde göstermiş olduğu yüksek ilintisellik göz önüne alınarak geliştirilmiştir. İlintisellik sayesinde, komşu frekans noktaları için en uygun denkleştici katsayısının bulunmasında kullanılacak birbirinden bağımsız denklem sayısı arttırılmış, bu sayede de gürültünün etkisinin ortalamasının alınması ile azaltılması ve performansın arttırılması sağlanmıştır.

Tez kapsamında önerilen GNLMS ve GRLS adı verilen algoritmaların, performansı teorik ve benzetim çalışmaları sonucunda ortaya konulmuştur. Her iki algoritma hem kanal denkleştirme hem de kanal denkleştirme senaryoları için genişletilmiştir. Klasik LMS ve RLS algoritmalarının performanslarına göre, önerilen algoritmalar daha iyi sonuç vermektedir. Doğrusal denkleştirici yapısı için yapısal frekans bölgesinde kanal kestirimi yapılarak denkleştirmenin daha iyi sonuç verdiği anlaşılmıştır. İşlemsel karmaşıklık açısından, önerilen algoritmaların işlemsel karmaşıklık seviyesinin klasik RLS ve LMS tabanlı algoritmalara göre bir miktar daha yüksek olduğu görülmüş, ancak algoritmaların sağladığı performans artışına bakıldığında söz konusu artışın karşılanabilir olduğu görülmüştür. Frekans bölgesi kanal kestirimi algoritmalarının işlemsel karmaşıklığının, frekans bölgesi doğrudan kanal denkleştirmeye göre daha fazla belirlenmiştir.

Ek olarak, geliştirilen algoritmalar, en uygun çözüme literatürdeki diğer uyarlanabilir algoritmalara göre çok daha hızlı bir yakınsama performansının elde edilmesini sağlamaktadır. Ayrıca, geleneksel uyarlanabilir LMS ve RLS algoritmalarında, farklı doppler kayma değerlerine göre seçilmesi gereken en uygun algoritma parametreleri (unutma faktörü vb.) önemli oranda değişim göstermektedir. Söz konusu parametreler uygun seçilmediği takdirde, performans oldukça yetersiz hale gelmektedir. Bu nedenle klasik algoritmalarda en uygun performans için farklı doppler ve SGO değerleri için alıcının en uygun parametre değerlerini hesaplaması gerekmektedir. Önerilen GNLMS ve GRLS algoritmaları ile, bu değerlerin doppler kayması ve SGO değerlerine daha az bağımlı olmasını sağlamaktadır. Her ne kadar belirli bir bağımlılık olsa da, bu değerler daha serbest şekilde doppler kayma ve SGO değerlerinden bağımsız olarak kullanılmasını olanaklı kılmaktadır.

Tez kapsamında yapılan çalışmalarda, doğrusal denkleştiricilere ek olarak, frekans bölgesinde çalışan iteratif blok karar geri besleme algoritması önerilmiştir. Önerilen algoritmanın yeni ortaya atılmış algoritmalara nazaran 5dB'ye varan SGO avantajı sağladığı gösterilmiştir.

Yukarıda belirtilen çalışmaların ileri aşaması olarak, GRLS algoritmasının iteratif blok karar geri besleme algoritmaları için genişletilmesi düşünülebilir. Bu tez kapsamında, tek kullanıcılı sistem olan TT-FBD sistemi göz önüne alınmıştır. TT-FBD sistemi yerine lokalize taşıyıcılı TT-FBÇE sisteminde söz konusu algoritmaların genişletilmesi ve performanslarının incelenebilir. Ek olarak, Tek Giriş Tek Çıkışlı sistemler yerine, Çok girişli Çok Çıkışlı sistemler de bir diğer araştırma konusu olarak ele alınabilir.

Her ne kadar, önerilen algoritmalar TT-FBD sistemleri için geliştirilmiş olsa da, söz konusu algoritmalar DFBÇ sistemleri için de kullanılabileceği değerlendirilebilir. Ayrıca, TT-FBD ve DFBÇ sistemlerinin çok kullanıcılı erişim versiyonları olan TT-FBÇE ve DKFBÇE sistemlerine de aynı şekilde uygulanarak performansları karşılaştırılabilir.

Tez kapsamında yapılan çalışmalarda, sabit katsayılı ve sabit unutma faktörlü uyarlanabilir algoritmalar önerilmiştir. Yapılan çalışmalar esnasında, elde edilen performansın seçilecek katsayıların doppler kayması, ve SGO değerine bağlı olarak en uygun bir değerde en iyi performansı sağladığı gözlemlenmiştir. Bu durumda, uyarlanabilir algoritmanın söz konusu en uygun parametrelerini doppler kayması ve SGO'ya bağlı olarak otomatik hesaplayacak yeni bir yöntem geliştirilebileceği değerlendirilmektedir. Daha ileri aşama olarak, frekans bölgesinde tüm alt taşıyıcılara aynı parametrelerin uygulanması yerine her alt taşıyıcı için söz konusu değerin en uygun şekilde uygulanması ile elde edilecek performansı çok daha iyileştirebilecektir.

Uyarlanabilir algoritmanın zamansal değişimi daha iyi algılayabilmesi ve SAG etkisini hızlı bir şekilde gidermesi için daha düşük unutma değeri ve birim basamak değerinin kullanılması gerekmektedir. Ancak, söz konusu parametre değerlerinin düşürülmesi, kararlı durumda elde edilen OHK ve BHO performanslarını azalmasına neden olmaktadır. Alınan sinyalin ve kestirim yapılacak sinyalin istatistiki parametrelerinin zamansal olarak değişimi incelendiğinde, alınan sinyalin özilinti değerinin zamanla değişen kanallarda çok doppler kaymasının artması ile hızlı bir değişim geçirdiği görülmektedir. Kestirim yapılan sinyal için ise, özilinti değeri zamanla bir değişim göstermemektedir. Kestirimi yapılacak en uygun katsayı değerleri, kanal denkleştirme için alınan sinyalin özilinti değeri ile alınan sinyal ile kestirim yapılacak sinyalin çapraz ilinti değerinin çarpımı ile bulunmaktadır. Bu durumda, alınan sinyalin zamanla değişim hızı, çapraz ilinti değerinin zamanla değişim hızından daha yüksek seviyededir. Bu durumda, alınan sinyalin öz ilinti değerindeki değişimi algılayabilmek için daha düşük parametre değerinin ayarlanması, buna karşın çapraz ilinti değerinin, özilinti değerine göre daha yavaş değişim gösterdiğinden, daha yüksek parametre değerinin kullanılması, uyarlanabilir algoritmanın ayarsızlık değerini düşürmesine, yani daha düşük kararlı durum OHK ve daha düşük BHO performansının elde edilmesini sağlayacaktır.

Yukarıda belirtildiği üzere, ilintisellik seviyesinin yüksek olması halinde GNLMS ve GRLS algoritmalarının performansı artmaktadır. Alt taşıyıcılar arasındaki ilintisellik seviyesinin düşük olması yani alt taşıyıcı bant genişliğinin Bc'den yüksek olması halinde önerilen algoritmaların performansı azalmaktadır. Bu nedenle, alt taşıyıcılar arasındaki ilintiselliği arttırabilecek yöntemlerin bulunması ile bu durum içinde performans artışı sağlanabilir. Zaman ve/veya frekans bölgesinde aşırı örnekleme ile alt taşıyıcılar arasındaki ilintiselliğin arttırılması sağlanabilir. Bu nedenle, önerilen algoritmalar ile zaman ve/veya frekans bölgesinde, aşırı örnekleme ile elde edilecek performansların incelenmesi de ayrı bir araştırılacak konu olarak düşünülebilir. Frekans bölgesi aşırı örnekleme için yapılan çalışmalarda, uyarlanabilir olmayan haberleşme sistemleri için frekans bölgesi aşırı örneklemenin sönümlü kanallarda performansının daha iyi olduğu gösterilmiştir.

Tez kapsamında, frekans bölgesinde çalışan denkleştiricinin tek katsayıdan oluştuğu durum ele alınmıştır. Bu durum aslında, en uygun blok uzunluğu boyunca, frekans kaymasının alttaşıyıcılar üzerinde birbirine girişimini önlemekte ve blok uzunluğu boyunca kanalın sabit olmasını sağlamakta, bu sayede de tek katsıdan oluşan denkleştirici ile SAG etkisinin giderilmesi sağlanmaktadır. Tersi durumda ise, kanal hem blok boyunca zamansal olarak değişmekte, hem de alt taşıyıcılar arasında önemli oranda girişim meydana gelmektedir. Bu tip senaryoda kullanılmak üzere, her frekans noktasında kullanılacak denkleştiricinin tek katsayı yerine uzunluğunun arttırılması ile elde edilecek performansın incelenmesi gereklidir. Özellikle, bu tarz yaklaşımın zaman/frekans bölgesi aşırı örnekleme ile denkleştirme performansının arttırılabileceği öngörülmektedir. Bu tarz bir yapı sayesinde, her blokta kullanılan DÖ sebebi ile kaybedilen spektrumun bir kısmının kompanse edilmesi ve verimliliğin arttırılması avantajı sağlanabilir.

KAYNAKLAR

Baltar, L. G., Mueck, M., and Sabella, D. (2018). Heterogeneous vehicular communications-multi-standard solutions to enable interoperability. *In 2018 IEEE Conference on Standards for Communications and Networking (CSCN)* (pp. 1-6). IEEE.

Benvenuto, N., and Tomasin S. (2005). Iterative design and detection of a DFE in the frequency domain. *IEEE Transactions On Communications*, 53(11), 1867-1875.

Benvenuto, N., and Tomasin, S. (2002). On the comparison between OFDM and single carrier modulation with a DFE using a frequency domain feedforward filter. *IEEE Transactions On Signal Processing*, 50, 2273-2285.

Benvenuto, N., Dinis, R., Falconer, D., and Tomasin, S. (2009). Single carrier modulation with nonlinear frequency domain equalization: An idea whose time has come—Again. *Proceedings of the IEEE*, 98(1), 69-96.

Berberidis, K., and Karaivazoglou, P. (2002). An efficient block adaptive decision feedback equalizer implemented in frequency domain. *IEEE Transactions On Communications*, 50(6), 947-955.

Clarck, M. V. (1998). Adaptive frequency-domain equalization and diversity combining for broadband wireless communications. *IEEE Journal of Selected Areas in Communications*, 16(8), 1385-1395.

Coon, J., Armour, S. M. B., and McGeehan, J. (2005). Adaptive frequency-domain equalization for single-carrier multiple-input multiple-output wireless transmissions. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 53(8), 3247 - 3256.

Ekmekci, N. H. (2018, May). Adaptive frequency-domain equalizer structure for SC-FDE systems in fast-fading channels. In 2018 26th Signal Processing and Communications Applications Conference (SIU) (pp. 1-4). IEEE.

Falconer, D., Ariyavisitakul, S. L., Benyamin-Seeyar, A., and Eidson, B. (2002). Frequency domain equalization for single-carrier broadband systems. *IEEE Communications Magazine*, 40(4), 58-66.

Gillian, H., Nix, A., and Armour, S. (2008, September). Decision feedback equalization in SC-FDMA. *19th IEEE International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications*, 1-5.

Goldsmith, A. (2005). *Wireless communications.* (5th Edition). Cambridge: Cambridge University Press.

Haykin S. (2010). *Adaptive filter theory.* (5th Edition), New Jersey: Pearson.

Iqbal, N., Al-Dhahrir, N., Zerguine, A., and Zidouri, A. (2015). Adaptive frequency domain RLS DFE for uplink MIMO SC-FDMA. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 64(7), 2819-2833.

Iqbal, N., and Zerguine, A. (May, 2017). AFD-DFE using constraint-based RLS and phase noise compensation for uplink SC-FDMA. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 66(5), 4435-4443.

Kekatos, V., Berberidis, K., and Rontogiannis, A. A. (2007). *A block adaptive frequency domain MIMO DFE for wideband channels*. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), III-197-III-2000.

Lucky, R. W. (1965). Automatic equalization for digital communication. *Bell Labs Technical Journal*, 44(3), 547-588.

Morelli, M., Sanguinetti, L., and Mengali, U. (2005). Channel estimation for adaptive frequency-domain equalization. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 4(5), 2508-2518.

Ozeki , K., and Umeda, T. (1984). An adaptive filtering algorithm using an orthogonal projection to an affine subspace and its properties. *Electronics and Communications in Japan*, 67(5), 19-27.

Proakis , J. G. (2007). *Digital communications* (5th edition). ABD: McGraw-Hill Press.

Rappaport , T. S. (2007). *Wireless communications: Principles and practice* (2nd edition). New Jersey: Prentice Hall Press.

Sari, H., Karam, G., and Jeanclaude, I. (1995). Transmission techniques for digital terrestrial tv receivers. *IEEE Communications Magazine*, 33(2), 100-109.

Shin, H. C., Sayed, A. H. and Song, W. J. (February. 2004). Variable step-size NLMS and affine projection algorithms. *IEEE Signal Processing Letters*, 11(2), 132-135.

Shynk, J. J. (1992). Frequency-domain and multirate adaptive filtering. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 9(1), 14-55.

Tufts, D. W. (1965). Nyquist’s Problem - the joint optimization of transmitter and receiver in pulse amplitude modulation. *Proceedings of the IEEE*, 53(3), 248-259.

Walzman, T., and Schwartz, M. (1973). Automatic equalization using the discrete frequency domain. *IEEE Transactions on Information Theory*, 19(1), 56-68.

Wang, X., Mao, S., and Gong, M. X. (2017). An overview of 3GPP cellular vehicle-to-everything standards. *GetMobile: Mobile Computing and Communications*, 21(3), 19-25.

Yang, F., Enzer, G., and Yang, J. (2017). Statistical convergence analysis for optimal control of DFT domain adaptive echo canceller. *IEEE/ACM Transactions onAudio, Speech and Language Processing*, 25(5), 1095-1106.

Younis, W., Sayed, A., and Al-Dhahir, N. (November. 2003). Efficient adaptive receivers for joint equalization and interference cancellation in multiuser space-time block coded systems. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 51(6), 2849-2862.

Zhang, C., Wang, Z., Wang, J., and Song, J. (2010, June). Frequency domain decision feedback equalization for uplink SC-FDMA. *IEEE Transactions On Broadcasting*, 56(6), 253-257.

EKLER

EK-1. FB'de Sinyalin 2. ve 4. Dereceden Momentlerinin Bulunması

Tez içerisinde, alıcıdaki $r_k[n]$ ve gönderilen sinyal $d_k[n]$ sinyalin FB'deki ortalama, varyans (2. Dereceden moment) ve 4. Dereceden moment ifadeleri LMS, GNLMS, GRLS algoritmaları için kullanılmaktadır. Söz konusu ifadelerin hesabı burada gösterilmektedir.

İlk olarak, HFD ile FB'de gönderilen sinyal $d_k[n]$'nın ifadesi,

$$D_k[n] = \sum_{l=0}^{N_{sym}-1} d_k[l] e^{-j\frac{2\pi}{N_{sym}}ln} = \sum_{l=0}^{N_{sym}-1}\left\{Re\{d_k[l]\}\cos\left(\frac{2\pi}{N_{sym}}ln\right) + Im\{d_k[l]\}\sin\left(\frac{2\pi}{N_{sym}}ln\right)\right\} + j\sum_{l=0}^{N_{sym}-1}\left\{Im\{d_k[l]\}\cos\left(\frac{2\pi}{N_{sym}}ln\right) - Re\{d_k[l]\}\sin\left(\frac{2\pi}{N_{sym}}ln\right)\right\} \quad (1.1)$$

şeklindedir. Burada, $d_k[l] = Re\{d_k[l]\} + jIm\{d_k[l]\}$ düzgün dağılımlı, sıfır ortalamalı, varyansı σ_d^2, özilinti fonksiyonu $\mathbb{E}\{d_k[l]d_k^*[m]\} = \sigma_d^2\delta(l-m)$ olan, modüle edilmiş dairesel karmaşık rasgele sayı dizisini göstermektedir. $Re\{d_k[l]\}$ ve $Im\{d_k[l]\}$ istatistiki olarak birbirinden bağımsız ($\mathbb{E}\{Re\{d_k[l]\}Im\{d_k[l]\}\} = 0$), düzgün dağılımlı sıfır ortalamalı ($\mathbb{E}\{Re\{d_k[l]\}\} = \mathbb{E}\{Im\{d_k[l]\}\} = 0$) rasgele değişkenlerdir.

$D_k[n]$ görüldüğü üzere $d_k[l]$ rasgele sayı dizisinin sabit katsayılar ile çarpılmış hallerinin toplamı olmaktadır. Bu durumda, $D_k[n]$ merkezi limit teoremine göre Gauss dağılımına sahip olmaktadır. $D_k[n]$ rasgele sürecinin ortalama değeri,

$$\mathbb{E}\{D_k[n]\} = \sum_{l=0}^{N_{sym}-1} \mathbb{E}\{d_k[l]\} e^{-j\frac{2\pi}{N_{sym}}ln} = 0 \quad (1.2)$$

olarak hesaplanmaktadır.

$Re\{D_k[n]\} = \sum_{l=0}^{N_{sym}-1}\left\{Re\{d_k[l]\}\cos\left(\frac{2\pi}{N_{sym}}ln\right) + Im\{d_k[l]\}\sin\left(\frac{2\pi}{N_{sym}}ln\right)\right\}$ olduğundan, merkezi limit teoreminden dolayı, $Re\{D_k[n]\}$ Gauss dağılımına sahip olmaktadır. Reel kısmın varyansı hesaplandığında,

$$\mathbb{E}\{|Re\{D_k[n]\}|^2\} = \mathbb{E}\left\{\left|\sum_{l=0}^{N_{sym}-1}\left\{Re\{d_k[l]\}\cos\left(\frac{2\pi}{N_{sym}}ln\right) + Im\{d_k[l]\}\sin\left(\frac{2\pi}{N_{sym}}ln\right)\right\}\right|^2\right\} = N_{sym}\sigma_d^2/2 \quad (1.2)$$

olmaktadır. $Im\{D_k[n]\}$ ve $Re\{D_k[n]\}$ bağımsız rastgele değişkenler ve aynı olasılık dağılımına sahip olduklarından,

$$\mathbb{E}\{|D_k[n]|^2\} = \mathbb{E}\{|Re\{D_k[n]\}|^2\} + \mathbb{E}\{|Im\{D_k[n]\}|^2\} = N_{sym}\sigma_d^2 \quad (1.3)$$

olacaktır. 4. dereceden moment ifadesinin bulunması için, $D_k[n]$'nin sıfır ortalamalı dairesel karmaşık rastgele değişken olduğundan, $D_k[n]$'in reel ve imajiner kısımlarının 4. Dereceden moment değerleri, birbirine eşit ve

$$\mathbb{E}\{|Im\{D_k[n]\}|^4\} = \mathbb{E}\{|Re\{D_k[n]\}|^4\} = 3N_{sym}^2\sigma_d^4/4 \quad (1.3)$$

şeklinde olmaktadır. Yukarıdaki sonuç kullanıldığında 4. dereceden moment,

EK-1. (devam) FB'de Sinyalin 2. ve 4. Dereceden Momentlerinin Bulunması

$$\mathbb{E}\{|D_k[n]|^4\} = \mathbb{E}\{|Re\{D_k[n]\}|^4\} + \mathbb{E}\{|Im\{D_k[n]\}|^4\} + 2\mathbb{E}\{|Re\{D_k[n]\}|^2\}\mathbb{E}\{|Im\{D_k[n]\}|^2\} = 2N_{sym}^2\sigma_d^4 = 2(\mathbb{E}\{|D_k[n]|^4\})^2 \quad (1.4)$$

olarak bulunmaktadır.

Benzer şekilde alınan sinyal $r_k[n]$ 'in FB'deki moment değerleri belirlenebilir. Alınan sinyalin FB'deki ifadesi, $X_k[n]$,

$$X_k[n] = D_k[n]H[n] + N_k[n] \quad (1.5)$$

şeklindedir. Burada, $X_k[n]$ rasgele sürecin bir elemanı olarak tarif edilmektedir. $X_k[n]$ rasgele sürecinin ortalama (1. Dereceden moment), varyans (2. Dereceden moment) ve 4. Dereceden moment değerleri belirlenebilmektedir. ZB'deki EBGG rasgele süreç elemanı $\eta_k[n]$'nın HFD ile FB'deki değeri $N_k[n]$ olduğundan, $N_k[n]$ rasgele değişkeni Gauss dağılımına sahip olacak ve ortalaması 0, varyansı $N_{sym}\sigma_n^2$, 4. Dereceden momenti ise $2N_{sym}^2\sigma_n^4$ olmaktadır. $D_k[n]$ rasgele değişkeni ise, ZB'deki modüle edilmiş sayısal $d_k[n]$

düzgün dağılımlı, sıfır ortalamalı ve σ_d^2 varyansına sahip rasgele süreç elemanının FB'deki değerini göstermektedir. Merkezi limit teoreminden ötürü, HFD ile elde edilen $D_k[n]$ rastgele değişkeni, karmaşık, dairesel simetrik Gauss dağılımına sahip olacak, ve ortalaması 0, varyansı$N_{sym}\sigma_d^2$, 4. Dereceden momenti ise $2N_{sym}^2\sigma_d^4$ olacaktır. Yapılan çalışmada $D_k[n]$ ile $N_k[n]$ rasgele değişkenlerinin birbirinden bağımsız oldukları kabul edilmiştir.

İlk aşama olarak $X_k[n]$ rasgele sürecinin ortalaması (1. Dereceden momenti),

$$\mathbb{E}\{X_k[n]\} = \mathbb{E}\{D_k[n]\}H[n] + \mathbb{E}\{N_k[n]\} = 0 \quad (1.6)$$

olmaktadır. FB'de n. frekans noktası için alınan sinyalin anlık gücü (varyansı),

$$|X_k[n]|^2 = |D_k[n]|^2|H[n]|^2 + 2Re\{D_k[n]H[n]N^*[n]\} + |N[n]|^2 \quad (1.7)$$

Şeklindedir. Anlık gücün beklenen değeri alındığında,

$$\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\} = \mathbb{E}\{|D_k[n]|^2\}|H[n]|^2 + 2Re\{\mathbb{E}\{D_k[n]N^*[n]\}H[n]\} + \mathbb{E}\{|N[n]|^2\} \quad (1.8)$$

olmaktadır. $N[n]$ ile $D_k[n]$ istatistiki olarak bağımsız olduklarından, $\mathbb{E}\{D_k[n]N^*[n]\} = \mathbb{E}\{D_k[n]\}\mathbb{E}\{N^*[n]\} = 0$ olacaktır. Bu durumda n. frekans noktası için beklenen güç değeri,

$$\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\} = N_{sym}\left(\sigma_d^2|H[n]|^2 + \sigma_n^2\right) \quad (1.8)$$

olmaktadır. $X_k[n]$ rasgele değişkeninin 4. dereceden momenti,

$$\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\} = \mathbb{E}\{(|D_k[n]|^2|H[n]|^2 + 2Re\{D_k[n]H[n]N^*[n]\} + |N_k[n]|^2)^2\} \quad (1.8)$$

halinde olmaktadır. İfade açıldığında,

$$\mathbb{E}\{|X_k[n]|^4\} = \mathbb{E}\{|D_k[n]|^4\}|H[n]|^4 + 4\mathbb{E}\{|Re\{D_k[n]N^*[n]H[n]\}|^2\} + \mathbb{E}\{|N_k[n]|^4\} + 4\mathbb{E}\{|D_k[n]|^2\}\mathbb{E}\{Re\{D_k[n]N^*[n]H[n]\}\} + 2\mathbb{E}\{|D_k[n]|^2\}\mathbb{E}\{|N_k[n]|^2\}|H[n]|^2 + 4\mathbb{E}\{|N_k[n]|^2\}\mathbb{E}\{Re\{D_k[n]N^*[n]H[n]\}\} \quad (1.9)$$

EK-1. (devam) FB'de Sinyalin 2. ve 4. Dereceden Momentlerinin Bulunması

olmaktadır. $\mathbb{E}\{Re\{D_k[n]N^*[n]\}\} = 0$ olmaktadır. $\mathbb{E}\{|D_k[n]|^4\} = 2N_{sym}^2\sigma_d^4$ ve $\mathbb{E}\{|N_k[n]|^4\} = 2N_{sym}^2\sigma_n^4$ olmaktadır. Bu sonuçlar yerine koyulduğunda,

$$\mathbb{E}\{|X_k[n]|^4\} = 2N_{sym}^2\sigma_d^4|H[n]|^2 + 4\mathbb{E}\{|Re\{D_k[n]H[n]N^*[n]\}|^2\} + 2N_{sym}^2\sigma_n^4 + 2N_{sym}^2\sigma_d^2\sigma_n^2|H[n]|^2 \tag{1.10}$$

olmaktadır.

$$\mathbb{E}\{|Re\{D_k[n]H[n]N^*[n]\}|^2\} = \frac{1}{4}\mathbb{E}\left\{2|D_k[n]|^2|N_k[n]|^2|H[n]|^2 + 2Re\left\{D_k^2[n]N_k^2[n]H^2[n]\right\}\right\} \tag{1.11}$$

$\mathbb{E}\left\{Re\left\{D_k^2[n]N_k^2[n]H^2[n]\right\}\right\} = 0$ olduğundan,

$$\mathbb{E}\{|Re\{D_k[n]H[n]N^*[n]\}|^2\} = \frac{1}{2}N_{sym}^2\sigma_d^2\sigma_n^2|H[n]|^2 \tag{1.12}$$

olacaktır. Sonuç olarak alınan sinyalin FB'deki 4. dereceden moment ifadesi

$$\mathbb{E}\{|X_k[n]|^4\} = 2N_{sym}^2\left(\sigma_d^2|H[n]|^2 + \sigma_n^2\right)^2 = 2(\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\})^2 \tag{1.13}$$

Benzer şekilde, GNLMS ve GRLS algoritmaları için, vektör normlarının varyans ve 4. Dereceden moment ifadeleri tez içerisinde kullanılmaktadır. Söz konusu vektörler,

$$\boldsymbol{\Upsilon_k[n]} = [\Upsilon_k[n-l], \dots, \Upsilon_k[n], \dots, \Upsilon_k[n+l]]^{\boldsymbol{T}} \tag{1.14}$$

Şeklinde tanımlanmaktadır. Burada $\Upsilon_k[n]$**,** sinyali, alınan sinyal $X_k[n]$, veya gönderilen sinyal $D_k[n]$ olabilmektedir. $\boldsymbol{\Upsilon_k[n]}$ vektörünün beklenen değeri, yani ortalaması,

$$\mathbb{E}\{\boldsymbol{\Upsilon_k[n]}\} = [\mathbb{E}\{\Upsilon_k[n-l]\}, \dots, \mathbb{E}\{\Upsilon_k[n]\}, \dots, \mathbb{E}\{\Upsilon_k[n+l]\}]^{\boldsymbol{T}} = [0, \dots, 0, \dots, 0]^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{0} \tag{1.15}$$

olmaktadır. Vektör normunun varyansı,

$$\mathbb{E}\left\{\|\boldsymbol{\Upsilon_k[n]}\|^{\boldsymbol{2}}\right\} = \mathbb{E}\left\{\boldsymbol{\Upsilon_k^H[n]\Upsilon_k[n]}\right\} = \sum_{\boldsymbol{u=-l}}^{\boldsymbol{l}}\mathbb{E}\{|\Upsilon_k[n-u]|^2\} \tag{1.16}$$

olmaktadır.

$$\mathbb{E}\left\{\|\boldsymbol{D_k[n]}\|^{\boldsymbol{2}}\right\} = \mathbb{E}\left\{\boldsymbol{D_k^H[n]D_k[n]}\right\} = \sum_{\boldsymbol{u=-m}}^{\boldsymbol{m}}\mathbb{E}\{|\mathrm{D}_k[n-u]|^2\} = 2(l+1)N_{sym}\sigma_d^2 \tag{1.17}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left\{\|\boldsymbol{X_k[n]}\|^{\boldsymbol{2}}\right\} = \mathbb{E}\left\{\boldsymbol{X_k^H[n]X_k[n]}\right\} &= \sum_{\boldsymbol{u=-m}}^{\boldsymbol{m}}\mathbb{E}\{|\mathrm{X}_k[n-u]|^2\} \\ &= N_{sym}\sum_{u=-m}^{m}\left(\sigma_d^2|H[n-u]|^2 + \sigma_n^2\right) \\ &= N_{sym}\sigma_d^2\sum_{u=-m}^{m}|H[n-u]|^2 + 2(l+1)N_{sym}\sigma_n^2\end{aligned} \tag{1.18}$$

olarak bulunmaktadır.

4. dereceden moment değerleri ise,

$$\mathbb{E}\{\|\boldsymbol{\Upsilon_k[n]}\|^{\boldsymbol{4}}\} = \left(\sum_{\boldsymbol{u=-l}}^{\boldsymbol{l}}\mathbb{E}\{|\Upsilon_k[n-u]|^2\}\right)^{\boldsymbol{2}} = \sum_{\boldsymbol{u=-l}}^{\boldsymbol{l}}\mathbb{E}\{|\Upsilon_k[n-u]|^4\} + 2\sum_{u=-l}^{l-1}\sum_{t=u+1}^{l}\mathbb{E}\{||\Upsilon_k[n-u]|^2\Upsilon_k[n-t]|^2\} \tag{1.19}$$

EK-1. (devam) FB'de Sinyalin 2. ve 4. Dereceden Momentlerinin Bulunması

$\Upsilon_k[n-u]$ ve $\Upsilon_k[n-t]$ birbirlerinden istatistiki olarak bağımsız olduklarından,

$$\mathbb{E}\{\|\boldsymbol{\Upsilon_k[n]}\|^{\boldsymbol{4}}\} = \sum_{\boldsymbol{u=-l}}^{\boldsymbol{l}} \mathbb{E}\{|\Upsilon_k[n-u]|^4\} + 2\sum_{u=-l}^{l-1}\sum_{t=u+1}^{l} \mathbb{E}\{|\Upsilon_k[n-u]|^2\}\mathbb{E}\{|\Upsilon_k[n-t]|^2\} \tag{1.20}$$

olmaktadır.

$\Upsilon_k[n]$ yerine $D_k[n]$ konulduğunda, $\mathbb{E}\{|D_k[n-u]|^4\} = 2N_{sym}^2\sigma_d^4, u = -l, \dots, l,$ $X_k[n]$ konulduğunda,

$$\mathbb{E}\{\|\boldsymbol{D_k[n]}\|^{\boldsymbol{4}}\} = 2(2l+1)(l+1)N_{sym}^2\sigma_d^4 \tag{1.21}$$

olarak bulunmaktadır.

$$\mathbb{E}\{|X_k[n-u]|^4\} = 2N_{sym}^2\left(\sigma_d^2|H[n]|^2 + \sigma_n^2\right)^2 = 2(\mathbb{E}\{|X_k[n]|^2\})^2 \tag{1.22}$$

olmaktadır. Gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\mathbb{E}\{\|\boldsymbol{X_k[n]}\|^{\boldsymbol{4}}\} = \sum_{\boldsymbol{u=-l}}^{\boldsymbol{l}} \mathbb{E}\{|X_k[n-u]|^4\} + 2\sum_{u=-l}^{l-1}\sum_{t=u+1}^{l} \mathbb{E}\{|X_k[n-u]|^2\}\mathbb{E}\{|X_k[n-t]|^2\} \tag{1.23}$$

Elde edilir. Burada (1.22) ile verilen sonuç kullanıldığında,

$$\mathbb{E}\{\|\boldsymbol{X_k[n]}\|^{\boldsymbol{4}}\} = 2N_{sym}^2\left(\sum_{\boldsymbol{u=-l}}^{\boldsymbol{l}}\left(\sigma_d^2|H[n-u]|^2 + \sigma_n^2\right)^2 + \sum_{u=-l}^{l-1}\sum_{t=u+1}^{l}\left(\sigma_d^2|H[n-u]|^2 + \sigma_n^2\right)\left(\sigma_d^2|H[n-t]|^2 + \sigma_n^2\right)\right) \tag{1.24}$$

olarak 4. Dereceden moment ifadesi bulunmaktadır.

EK-2. GNLMS Algoritmasında FB'de Sinyalin Beklenen Güç Kestirim Değerinin Hesaplanması

Tez kapsamında yapılan çalışmalarda GNLMS algoritmasında $\boldsymbol{Y_k}[\boldsymbol{n}]$ vektörü için güç kestirim değeri,

$$P_k[n] = \gamma P_k[n] + (1-\gamma)\|\boldsymbol{Y_k}[\boldsymbol{n}]\| \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanmış olup, γ 0 ile 1 değerleri arasında seçilen unutma faktörüdür. Burada $\boldsymbol{Y_k}[\boldsymbol{n}]$ vektörü, kanal denkleştirme için $\boldsymbol{X_k}[\boldsymbol{n}]$**,** kanal kestirim için $D_k[n]$ olarak alınmaktadır.

Başlangıç k=0 bloğundan itibaren itibaren güç kestirim değeri hesaplandığında,

$$P_k[n] = \gamma^{k+1}P_{-1}[n] + (1-\gamma)\textstyle\sum_{l=0}^{k}\gamma^{k-l}\|\boldsymbol{Y_l}[\boldsymbol{n}]\|^2 \tag{2.2}$$

şeklinde başlangıçta verilen ilk değer $P_{-1}[n]$'e bağlı olarak zamansal değişimi gösteren ilişki elde edilmektedir. Güç kestirim fonksiyonunun beklenen değeri alındığında,

$$\mathbb{E}\{P_k[n]\} = \gamma^{k+1}P_{-1}[n] + (1-\gamma)\textstyle\sum_{l=0}^{k}\gamma^{k-l}\mathbb{E}\{\|\boldsymbol{Y_l}[\boldsymbol{n}]\|^2\} \tag{2.3}$$

elde edilmektedir. $\boldsymbol{D_k}[\boldsymbol{n}]$ ve $\boldsymbol{X_k}[\boldsymbol{n}]$ GBD olduklarından, $\mathbb{E}\{\|\boldsymbol{D_k}[\boldsymbol{n}]\|^2\}$ ve $\mathbb{E}\{\|\boldsymbol{X_k}[\boldsymbol{n}]\|^2\}$ her blok için sabit ve aynı değeri alacaktır. Bu durumda $\mathbb{E}\{P_k[n]\}$,

$$\mathbb{E}\{P_k[n]\} = \gamma^{k+1}P_{-1}[n] + (1-\gamma^{k+1})\mathbb{E}\{\|\boldsymbol{Y}[\boldsymbol{n}]\|^2\} \tag{2.4}$$

haline dönüşmektedir. $\boldsymbol{Y}[\boldsymbol{n}]$ yerine $\boldsymbol{D}[\boldsymbol{n}]$ **ve** $\boldsymbol{X}[\boldsymbol{n}]$ konulduğunda, sırasıyla beklenen güç kestirim değerleri,

$$\mathbb{E}\{P_{k,D}[n]\} = \gamma^{k+1}P_{-1}[n] + N_{sym}(2l+1)(1-\gamma^{k+1})\sigma_d^2 \tag{2.5}$$

$$\mathbb{E}\{P_{k,X}[n]\} = \gamma^{k+1}P_{-1}[n] + N_{sym}(2l+1)(1-\gamma^{k+1})\textstyle\sum_{u=-m}^{m}\left(\sigma_d^2|H[n-u]|^2 + \sigma_n^2\right) \tag{2.6}$$

şeklinde elde edilmektedir. Güç kestirim değerinin asimtotik yani kararlı durum değeri ise,

$$\lim_{k\to\infty}\mathbb{E}\{P_k[n]\} = \mathbb{E}\{\|\boldsymbol{Y}[\boldsymbol{n}]\|^2\} \tag{2.7}$$

olarak elde edilmektedir. Elde edilen sonuca göre $P_k[n]$ tarafsız (unbiased) güç kestirim değeri olmaktadır.

$P_k[n]$ rasgele değişkeninin bir diğer parametresi olan varyansı ise,

$$P_k^2[n] = \gamma^{2(k+1)}P_{-1}^2[n] + \gamma^{k+1}(1-\gamma)P_{-1}[n]\textstyle\sum_{l=0}^{k}\gamma^{k-l}\|\boldsymbol{Y_l}[\boldsymbol{n}]\|^2 + 2(1-\gamma)^2\left(\sum_{l=0}^{k}\gamma^{k-l}\|\boldsymbol{Y_l}[\boldsymbol{n}]\|^2\right)^2 \tag{2.8}$$

şeklinde hesaplanmaktadır. Yukarıdaki ifadenin son terimi,

$$\left(\textstyle\sum_{l=0}^{k}\gamma^{k-l}\|\boldsymbol{Y_l}[\boldsymbol{n}]\|^2\right)^2 = \sum_{l=0}^{k}\gamma^{2(k-l)}\|\boldsymbol{Y_l}[\boldsymbol{n}]\|^4 + 2\sum_{l=0}^{k-1}\sum_{m=l+1}^{k}\gamma^{2k-l-m}\|\boldsymbol{Y_l}[\boldsymbol{n}]\|^2\|\boldsymbol{Y_m}[\boldsymbol{n}]\|^2 \tag{2.9}$$

şeklinde hesaplanmaktadır. Bu durumda $\mathbb{E}\{P_k^2[n]\}$,

$$\mathbb{E}\{P_k^2[n]\} = \gamma^{2(k+1)}P_{-1}^2[n] + \gamma^{k+1}(1-\gamma^{k+1})P_{-1}[n]\mathbb{E}\{\|\boldsymbol{Y}[\boldsymbol{n}]\|^2\} + 2(1-\gamma)^2(\mathbb{E}\{\|\boldsymbol{Y}[\boldsymbol{n}]\|^2\})^2\left\{\textstyle\sum_{l=0}^{k}\gamma^{2(k-l)} + \sum_{l=0}^{k-1}\sum_{m=l+1}^{k}\gamma^{2k-l-m}\right\} \tag{2.10}$$

olmaktadır. Yukarıdaki ifadenin sağında kalan son toplam terimi düzenlendiğinde, EK-2. (devam) GNLMS Algoritmasında FB'de Sinyalin Beklenen Güç Kestirim Değerinin Hesaplanması

$$\sum_{l=0}^{k}\gamma^{2(k-l)}+\sum_{l=0}^{k-1}\sum_{m=l+1}^{k}\gamma^{2k-l-m}=\frac{1-\gamma^{2(k+1)}}{1-\gamma^2}+\frac{(1-\gamma^k)(\gamma-\gamma^k)}{(1-\gamma)^2(1+\gamma)} \quad (2.11)$$

halini almaktadır.

$$\mathbb{E}\left(\sum_{l=0}^{k}\gamma^{k-l}\|\boldsymbol{Y_l}[\boldsymbol{n}]\|^2\right)^2=\frac{1-\gamma^{2(k+1)}}{1-\gamma^2}\mathbb{E}\{\|\boldsymbol{Y}[\boldsymbol{n}]\|^4\}+2\frac{(1-\gamma^k)(\gamma-\gamma^k)}{(1-\gamma)^2(1+\gamma)}(\mathbb{E}\{\|\boldsymbol{Y}[\boldsymbol{n}]\|^2\})^2 \quad (2.12)$$

$$\lim_{k\to\infty}\mathbb{E}\{P_k^2[n]\}=\frac{1}{1-\gamma^2}\mathbb{E}\{\|\boldsymbol{Y}[\boldsymbol{n}]\|^4\}+\frac{2\gamma}{(1-\gamma)^2(1+\gamma)}(\mathbb{E}\{\|\boldsymbol{Y}[\boldsymbol{n}]\|^2\})^2 \quad (2.13)$$

$$\lim_{k\to\infty}\mathbb{E}\{P_k^2[n]\}=\frac{2}{1-\gamma^2}(\mathbb{E}\{\|\boldsymbol{Y}[\boldsymbol{n}]\|^2\})^2+\frac{2\gamma}{(1-\gamma)^2(1+\gamma)}(\mathbb{E}\{\|\boldsymbol{Y}[\boldsymbol{n}]\|^2\})^2 \quad (2.14)$$

$$\lim_{k\to\infty}\mathbb{E}\{P_k^2[n]\}=\frac{2}{1-\gamma^2}(\mathbb{E}\{\|\boldsymbol{Y}[\boldsymbol{n}]\|^2\})^2+\frac{2\gamma}{(1-\gamma)^2(1+\gamma)}(\mathbb{E}\{\|\boldsymbol{Y}[\boldsymbol{n}]\|^2\})^2 \quad (2.15)$$

$$\lim_{k\to\infty}\mathbb{E}\{P_k^2[n]\}=\frac{2\left(\mathbb{E}\{\|\boldsymbol{Y}[\boldsymbol{n}]\|^2\}\right)^2}{(1+\gamma)} \quad (2.16)$$

$$\lim_{k\to\infty}\mathbb{E}\{P_k^2[n]\}=\frac{2(2l+1)^2N_{sym}^2\sigma_d^4}{(1+\gamma)} \quad (2.17)$$

$$\lim_{k\to\infty}\mathbb{E}\{P_k^2[n]\}=\frac{2N_{sym}^2}{(1+\gamma)}\left(\sum_{u=-m}^{m}\left(\sigma_d^2|H[n-u]|^2+\sigma_n^2\right)\right)^2 \quad (2.18)$$

EK-3. $\left\{\frac{|\boldsymbol{D_k[n]}|^2}{\boldsymbol{P_k[n]}}\right\}$, $\mathbb{E}\left\{\frac{|\boldsymbol{D_k[n]}|^2}{\boldsymbol{P_k^2[n]}}\right\}$, $\mathbb{E}\left\{\frac{|\boldsymbol{D_k[n]}|^4}{\boldsymbol{P_k^2[n]}}\right\}$ ifadelerinin hesaplanması

Burada FB-NLMS algoritması için $\mathbb{E}\left\{\frac{|D_k[n]|^2}{P_k[n]}\right\}$, $\mathbb{E}\left\{\frac{|D_k[n]|^2}{P_k^2[n]}\right\}$, $\mathbb{E}\left\{\frac{|D_k[n]|^4}{P_k^2[n]}\right\}$ ve FB-RLS algoritmasında, $\mathbb{E}\{|D_k[n]|^2 Z_k[n]\}$, $\mathbb{E}\{|D_k[n]|^2 |Z_k[n]|^2\}$, $\mathbb{E}\{|D_k[n]|^2 |Z_k[n]|^4\}$ beklenen değerleri çözümü verilmektedir.

FB-NLMS algoritması için güç kestirim değeri, $P_k[n]$,

$$P_k[n] = \gamma^{k+1} P_{-1}[n] + (1-\gamma)\sum_{i=0}^{k} \gamma^{k-i} |D_i[n]|^2 = \gamma^{k+1} P_{-1}[n] + (1-\gamma)\sum_{i=0}^{k-1} \gamma^{k-i} |D_i[n]|^2 + |D_k[n]|^2 \tag{3.1}$$

şeklindedir. FB-RLS algoritması için güç kestirim değeri, $Z_k[n]$,

$$Z_k[n] = \frac{Z_{-1}[n]}{\gamma^{k+1} + \sum_{i=0}^{k-1} \beta^{k-i} |D_i[n]|^2 + |D_k[n]|^2} \tag{3.2}$$

şeklinde bulunmaktadır. Burada,

$$X = |D_k[n]|^2 \ , Y = \sum_{i=0}^{k-1} \gamma^{k-i} |D_i[n]|^2 \tag{3.3}$$

tanımları yapıldığında, kararlı durumda, $\mathbb{E}\left\{\frac{|D_k[n]|^2}{P_k[n]}\right\}$ ve $\mathbb{E}\{|D_k[n]|^2 Z_k[n]\}$ değerleri,

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\left\{\frac{|D_k[n]|^2}{P_k[n]}\right\} = \frac{1}{(1-\gamma)} \mathbb{E}\left\{\frac{X}{X+Y}\right\} \tag{3.4}$$

$$\mathbb{E}\{|D_k[n]|^2 Z_k[n]\} = \mathbb{E}\left\{\frac{X}{X+Y}\right\} \tag{3.5}$$

ile bulunabilmektedir. Tanımlanan X ve Y rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonları,

$$f_X(x) = e^{-x}, f_Y(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\alpha_i}{\gamma^{k-i}} e^{-x/\gamma^{k-i}}, \alpha_l = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq l}}^{k-1} \frac{1}{(1-\gamma^{l-i})} \tag{3.6}$$

olmaktadır. X ve Y rasgele değişkenleri birbirinden bağımsız olduğundan, ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu her bir olasılık yoğunluk fonksiyonunun çarpımı olarak aşağıdaki şekilde

$$f_{X,Y}(x,y) = e^{-x} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\alpha_i}{\gamma^{k-i}} e^{-\frac{y}{\gamma^{k-i}}} \tag{3.7}$$

yazılabilmektedir. $\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\left\{\frac{X}{X+Y}\right\}$ değeri

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\left\{\frac{X}{X+Y}\right\} = \iint_0^\infty \frac{x}{x+y} f_{X,Y}(x,y)\,dxdy = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\alpha_i}{\gamma^{k-i}} \int_0^\infty x e^{-x} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{y}{\gamma^{k-i}}}}{x+y}\,dydx \tag{3.8}$$

şeklinde verilen iki katlı integralin çözümü olmaktadır. İkinci integral ifadesi için değişken değişimi yöntemi kullanıldığında, EK-3. (devam) $\left\{\frac{|\boldsymbol{D_k[n]}|^2}{\boldsymbol{P_k[n]}}\right\}$, $\mathbb{E}\left\{\frac{|\boldsymbol{D_k[n]}|^2}{\boldsymbol{P_k^2[n]}}\right\}$, $\mathbb{E}\left\{\frac{|\boldsymbol{D_k[n]}|^4}{\boldsymbol{P_k^2[n]}}\right\}$ ifadelerinin hesaplanması

$$\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\alpha_i}{\gamma^{k-i}}\int_0^{\infty} xe^{-x}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\frac{y}{\gamma^{k-i}}}}{x+y}dydx=\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\alpha_i}{\gamma^{k-i}}\int_0^{\infty} xe^{\left(\frac{1}{\gamma^{k-i}}-1\right)x}\int_y^{\infty}\frac{e^{-\frac{u}{\gamma^{k-i}}}}{u}dudx \tag{3.10}$$

elde edilir. Yukarıdaki integralde integral alma sırası değiştirildiğinde ve gerekli matematiksel işlemler yapıldığında,

$$\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\alpha_i}{\gamma^{k-i}}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\frac{u}{\gamma^{k-i}}}}{u}\int_0^{u} xe^{\left(\frac{1}{\gamma^{k-i}}-1\right)x}dxdu=\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i\left\{\frac{(k-i)\gamma^{k-i}\ln\gamma+1-\gamma^{k-i}}{(1-\gamma^{k-i})^2}\right\} \tag{3.11}$$

olarak bulunur.

Bu durumda, $\lim_{k\to\infty}\mathbb{E}\left\{\frac{|D_k[n]|^2}{P_k[n]}\right\}$ ve $\mathbb{E}\{|D_k[n]|^2Z_k[n]\}$ değeleri sırasıyla,

$$\lim_{k\to\infty}\mathbb{E}\left\{\frac{|D_k[n]|^2}{P_k[n]}\right\}=\frac{1}{(1-\gamma)}\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i\left\{\frac{(k-i)\gamma^{k-i}\ln\gamma+1-\gamma^{k-i}}{(1-\gamma^{k-i})^2}\right\} \tag{3.21}$$

$$\mathbb{E}\{|D_k[n]|^2Z_k[n]\}=\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i\left\{\frac{(k-i)\gamma^{k-i}\ln\gamma+1-\gamma^{k-i}}{(1-\gamma^{k-i})^2}\right\} \tag{3.22}$$

şeklinde hesaplanabilmektedir.

$\mathbb{E}\left\{\frac{|\boldsymbol{D_k[n]}|^2}{\boldsymbol{P_k^2[n]}}\right\}$ değerinin bulunması için,

$$\lim_{k\to\infty}\mathbb{E}\left\{\frac{X}{(X+Y)^2}\right\}=\iint_0^{\infty}\frac{x}{(x+y)^2}f_{X,Y}(x,y)dxdy \tag{3.22}$$

ifadesinin hesaplanması gerekmektedir. Bu ifadenin çözülmesi için,

$$\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\alpha_i}{\gamma^{k-i}}\int_0^{\infty} xe^{-x}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\frac{y}{\gamma^{k-i}}}}{(x+y)^2}dydx \tag{3.22}$$

İki katlı integralin çözümü olmaktadır. Benzer şekilde, ikinci integral ifadesi için değişken değişimi yöntemi kullanıldığında,

$$\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\alpha_i}{\gamma^{k-i}}\int_0^{\infty} xe^{-x}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\frac{y}{\gamma^{k-i}}}}{x+y}dydx=\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\alpha_i}{\gamma^{k-i}}\int_0^{\infty} xe^{e^{\left(\frac{1}{\gamma^{k-i}}-1\right)x}}\int_y^{\infty}\frac{e^{-\frac{u}{\gamma^{k-i}}}}{u^2}dudx \tag{3.22}$$

elde edilir. Yukarıdaki integralde integral alma sırası değiştirildiğinde,

$$\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\alpha_i}{\gamma^{k-i}}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\frac{u}{\gamma^{k-i}}}}{u^2}\int_0^{u} xe^{\left(\frac{1}{\gamma^{k-i}}-1\right)x}dxdu=\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i\left\{\frac{-(k-i)\ln\gamma-1+\gamma^{k-i}}{(1-\gamma^{k-i})^2}\right\} \tag{3.22}$$

elde edilir. Bu durumda,

$$\lim_{k\to\infty}\mathbb{E}\left\{\frac{|D_k[n]|^2}{P_k^2[n]}\right\}=\frac{1}{(1-\gamma)^2}\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i\left\{\frac{-(k-i)\ln\gamma-1+\gamma^{k-i}}{(1-\gamma^{k-i})^2}\right\} \tag{3.22}$$

EK-3. (devam) $\left\{\frac{|\boldsymbol{D_k[n]}|^2}{\boldsymbol{P_k[n]}}\right\}$, $\mathbb{E}\left\{\frac{|\boldsymbol{D_k[n]}|^2}{\boldsymbol{P_k^2[n]}}\right\}$, $\mathbb{E}\left\{\frac{|\boldsymbol{D_k[n]}|^4}{\boldsymbol{P_k^2[n]}}\right\}$ ifadelerinin hesaplanması

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\{|D_k[n]|^2|Z_k[n]|^2\} = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \left\{\frac{-(k-i)\ln\gamma - 1 + \gamma^{k-i}}{(1-\gamma^{k-i})^2}\right\} \tag{3.22}$$

olmaktadır.

$\mathbb{E}\left\{\frac{|\boldsymbol{D_k[n]}|^4}{\boldsymbol{P_k^2[n]}}\right\}$ değerinin bulunması için

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\left\{\left(\frac{X}{X+Y}\right)^2\right\} = \iint_0^\infty \left(\frac{x}{x+y}\right)^2 f_{X,Y}(x,y)dxdy \tag{3.22}$$

İfadesinin hesaplanması gerekmektedir.

$$\sum_{i=0}^{k-1} \frac{\alpha_i}{\gamma^{k-i}} \int_0^\infty x^2 e^{-x} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{y}{\gamma^{k-i}}}}{(x+y)^2} dydx = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \left\{\frac{-2\gamma^{k-i}\ln\gamma^{-(k-i)} + \gamma^{2(k-i)} - 1}{(1-\gamma^{k-i})^3}\right\} \tag{3.22}$$

Olmaktadır.

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\left\{\frac{|D_k[n]|^4}{P_k^2[n]}\right\} = \frac{1}{(1-\gamma)^2} \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \left\{\frac{-2(k-i)\gamma^{k-i}\ln\gamma - 1 + \gamma^{2(k-i)}}{(1-\gamma^{k-i})^3}\right\} \tag{3.22}$$

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\{|D_k[n]|^4|Z_k[n]|^2\} = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \left\{\frac{-2(k-i)\gamma^{k-i}\ln\gamma - 1 + \gamma^{2(k-i)}}{(1-\gamma^{k-i})^3}\right\} \tag{3.22}$$

Olmaktadır.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: Ekmekci, Nuri Hakan
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 27.10.1978, Ankara
Medeni hali	: Evli
Telefon	: 0 (541) 6793016
e-mail	: nhekmekci@yahoo.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Doktora	Gazi Üniversitesi / Elektrik-Elektronik Müh.	Devam ediyor
Yüksek lisans	Zonguldak Karaelmas Üniversitesi / Elektrik-Elektronik Müh	2005
Lisans	Dokuz Eylül Üniversitesi / Elektrik-Elektronik Müh.	2000
Lise	Ankara Gazi Lisesi	1995

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2007-Halen	TCDD İşletmesi Genel Müd.	Yüksek Mühendis
2001-2007	Zonguldak Karaelmas Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2000-2001	Meralp İletişim Ltd. Şti.	Kontrol Mühendisi

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

Ekmekci, N. H. (2018, May). Adaptive frequency-domain equalizer structure for SC-FDE systems in fast-fading channels. In *2018 26th Signal Processing and Communications Applications Conference (SIU)* (pp. 1-4). IEEE.

Hobiler

Bilim kurgu kitapları, sinema

GAZİ GELECEKTİR...