

**DÜZGÜN OLMAYAN GEOMETRİLERDE  
ELEKTRİKSEL GAZ BOŞALIM ANALİZLERİ**

**Hıdır DÜZKAYA**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
ELEKTRİK-ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HAZİRAN 2008  
ANKARA**

Hıdır Düzkaya tarafından hazırlanan “DÜZGÜN OLMAYAN GEOMETRİLERDE ELEKTRİKSEL GAZ BOŞALIM ANALİZLERİ” adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. M. Sezai DİNÇER .....

Tez Danışmanı,

Elektrik Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Elektrik Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. İres İSKENDER .....

Elektrik Elektronik Mühendisliği, Gazi Üniversitesi

Prof. Dr. M. Sezai DİNÇER .....

Elektrik Elektronik Mühendisliği, Gazi Üniversitesi

Doç. Dr. Osman GÜRDAL .....

Elektrik Eğitimi, Gazi Üniversitesi

Tarih: 05 / 06 / 2008

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Nermin ERTAN .....

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

## **TEZ BİLDİRİMİ**

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Hıdır Düzkaya

**DÜZGÜN OLMAYAN GEOMETRİLERDE  
ELEKTRİKSEL GAZ BOŞALIM ANALİZLERİ  
(Yüksek Lisans Tezi)**

**Hıdır DÜZKAYA**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
Haziran 2008**

**ÖZET**

Sülfür-hekzaflorür ( $\text{SF}_6$ ), üstün izolasyon ve ark söndürme özelliklerinden ötürü elektrik güç endüstrisinde geniş uygulama alanlarında kullanılmaktadır.  $\text{SF}_6$ 'da korona deşarjı mühendislik alanında önemlidir ve bu tezde pozitif korona başlangıç gerilimi, çeşitli eğriliklerdeki ve elektrot aralıklarındaki çubuk-düzlem elektrot sisteminde hesaplanmıştır. Pozitif korona başlangıç gerilimini hesaplamak için kullanılan simülasyon modeli, birincil ve ardışık çığların büyüklüğüne bağlı olarak değişmektedir. Ardışık çığların büyüklüğü, ilkine eriştiğinde deşarj kendi kendini besler. Bu çalışmada elde edilen sonuçlar, literatürde yayınlanan ölçüm sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Tahmin edilen pozitif korona başlangıç gerilimleri, ölçülenlerle oldukça iyi tutarlılık gösterdiği gözlenmiştir.

**Bilim Kodu : 905.1.150**

**Anahtar Kelimeler : Sonlu Elemanlar Metodu (SEM), Kükürt Hekzaflorür ( $\text{SF}_6$ ), Pozitif Korona Başlangıç Voltajı**

**Sayfa Adedi : 104**

**Tez Yöneticisi : Prof. Dr. M. Sezai DİNÇER**

**ELECTRICAL GAS BREAKDOWN ANALYSIS  
AT NON-UNIFORM GEOMETRIES**

**(M. Sc. Thesis)**

**Hıdır DÜZKAYA**

**GAZI UNIVERSITY  
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

**July 2008**

**ABSTRACT**

Sulphur-hexafluoride ( $\text{SF}_6$ ) has found a wide range of applications in the electric power industry due to its superior insulating and arc quenching properties. Corona discharges in  $\text{SF}_6$  are of engineering importance and in this thesis a rod-plane electrode system with various radius of curvatures and gap distances is considered in order to calculate for the positive corona onset voltages. The simulation model for the calculation of the positive corona onset voltages depends on the sizes of the primary and the successor avalanches produced. The discharge becomes self-sustained when the size of the successor avalanches reaches to that of the primary one. The calculated results obtained in this study are compared with those of the available experimental ones in the literature. It is observed that the predicted positive corona onset values agree very well with the respective experimental results.

**Science Code : 905.1.150**

**Key Words : Finite Element Method (FEM), Sulphur-hexafluoride ( $\text{SF}_6$ ), Positive Corona Onset Voltage**

**Page Number : 104**

**Adviser : Prof. Dr. M. Sezai DİNÇER**

## TEŞEKKÜR

Çalışmalarım süresince değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren tez hocam Prof. Dr. M. Sezai DİNÇER'e ve kıymetli tecrübelerinden faydalandığım Arş. Gör. Süleyman Sungur TEZCAN'a göstermiş oldukları ilgi ve yardımlarından dolayı teşekkürü bir borç bilirim.

Yine çalışmalarım boyunca manevi destekleri ve yardımlarıyla beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan Betül GÜNGÖR'e ve aileme teşekkürü bir borç bilirim.

## İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET .....	iv
ABSTRACT .....	v
TEŞEKKÜR .....	vi
İÇİNDEKİLER .....	vii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ .....	x
ŞEKİLLERİN LİSTESİ .....	xi
SİMGELER ve KISALTMALAR .....	xvi
1. GİRİŞ .....	1
2. SONLU ELEMENLAR METODU .....	4
2.1. Giriş .....	4
2.2. Sınır Değer Problemlerinin Çözümü .....	4
2.3. Sonlu Elemanlar Metodunun Çözüm Yöntemi .....	5
2.4. Sonlu Elemanlar Metodunda İzlenecek Adımlar .....	6
2.4.1. Çözüm bölgesinin ayrıklaştırılması .....	7
2.4.2. Enterpolasyon fonksiyonunun seçimi .....	8
2.4.3. Eleman özelliklerinin belirlenmesi .....	9
2.4.4. Çözüm bölgesindeki elemanların birleştirilmesi .....	10
2.4.5. Sınır koşullarının probleme dâhil edilmesi .....	11
2.4.6. Sistem denklemlerinin çözülmesi .....	11
2.5. Sonlu Eleman Denklemlerinin Türetilmesi .....	11
2.6. Tek Boyutlu Sonlu Elemanlar Metoduyla Analiz .....	17
2.6.1 Sınır değer probleminin tanımlanması .....	17
2.6.2. Sonlu elemanlar metodu analizi .....	17

	<b>Sayfa</b>
2.7. İki Boyutlu Sonlu Elemanlar Metoduyla Analiz.....	22
2.7.1. Sınır değer probleminin tanımlanması.....	22
2.7.2. Sonlu elemanlar metodu analizi .....	23
2.8. İki Boyutlu Alan Problemi İçin Bir Örnek .....	32
2.9. Silindirik Koordinatlarda Sonlu Elemanlar Analizi .....	38
2.9.1. Sınır değer probleminin tanımlanması .....	38
2.9.2. Problemin sonlu elemanlar metoduyla modellenmesi.....	39
2.10. Elektrik Alan Hesabı.....	45
2.10.1. Kartezyen koordinatlarda elektrik alan hesabı .....	45
2.10.2. Silindirik koordinatlarda elektrik alan hesabı .....	46
2.10.3. Düğüm noktalarındaki elektrik alan hesabı .....	49
3. MODELLEME ve PROGRAMLAMA .....	50
3.1. Giriş .....	50
3.2. Matlab Programlama Dili .....	51
3.2.1. Matlab’a giriş .....	51
3.2.2. Matlab’la neler yapılabilir.....	52
3.2.3. Matlab’ın avantajları ve dezavantajları.....	53
3.2.4. PDE Toolbox.....	53
3.3. İç İç Geçmiş Dairelerin Modellenmesi .....	54
3.3.1. Giriş .....	54
3.3.2. Birinci dereceden ağ ile iç içe geçmiş dairelerin modellenmesi .....	55
3.3.3. İkinci dereceden ağ ile iç içe geçmiş dairelerin modellenmesi.....	60
3.3.4. Üçüncü dereceden ağ ile iç içe geçmiş dairelerin modellenmesi.....	65
3.4. Çubuk-Düzlem Elektrot Sistemde SF <sub>6</sub> Gazının Pozitif Korona Başlangıç Geriliminin Hesaplanması .....	67



**Sayfa**

3.4.1. Pozitif korona başlangıç gerilimi'nin hesaplanması.....	68
3.4.2. Kükürt hekzaflorür (SF <sub>6</sub> ) .....	71
3.4.3. Kükürt hekzaflorür (SF <sub>6</sub> ) gazının parametreleri.....	73
3.4.4. r=2 mm ve d=15 mm boyutlarında çubuk-düzlem elektrot sisteminin modellenmesi.....	76
3.4.5. r=2 mm ve d=20 mm boyutlarında çubuk-düzlem elektrot sisteminin modellenmesi.....	80
3.4.6. r=2 mm ve d=5 mm boyutlarında çubuk-düzlem elektrot sisteminin modellenmesi.....	84
3.4.7. r=2 mm ve d=30 mm boyutlarında çubuk-düzlem elektrot sisteminin modellenmesi.....	88
3.4.8. r=1 mm ve d=15 mm boyutlarında çubuk-düzlem elektrot sisteminin modellenmesi.....	92
3.4.9. r=1 mm ve d=20 mm boyutlarında çubuk-düzlem elektrot sisteminin modellenmesi.....	96
4. SONUÇ .....	100
KAYNAKLAR.....	102
ÖZGEÇMİŞ.....	104

## ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 2.1. Elamanlar için lokal ve global numaralandırma .....	29
Çizelge 3.1. İç içe geçmiş daire modelinin birinci dereceden ağ ile çözümlenmesi sonucu oluşan noktaların koordinat, potansiyel ve elektriksel alan değerleri .....	58
Çizelge 3.2. İç içe geçmiş daire modelinin ikinci dereceden ağ ile çözümlenmesi sonucu oluşan noktaların koordinat, potansiyel ve elektriksel alan değerleri .....	62
Çizelge 3.3. SF <sub>6</sub> gazının özellikleri .....	72
Çizelge 3.4. SF <sub>6</sub> için difüzyon katsayısı .....	73
Çizelge 3.5. SF <sub>6</sub> için elektron sürüklenme hızı .....	74
Çizelge 3.6. SF <sub>6</sub> için efektif iyonlaşma katsayısı .....	75
Çizelge 3.7. r=2 mm ve d=15 mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde hesaplanan ve ölçülen pozitif korona başlangıç gerilimi değerleri .....	77
Çizelge 3.8. r=2 mm ve d=20 mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde hesaplanan ve ölçülen pozitif korona başlangıç gerilimi değerleri .....	81
Çizelge 3.9. r=2 mm ve d=5 mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde hesaplanan pozitif korona başlangıç gerilimi değerleri .....	85
Çizelge 3.10. r=2 mm ve d=30 mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde hesaplanan pozitif korona başlangıç gerilimi değerleri .....	89
Çizelge 3.11. r=1 mm ve d=15 mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde hesaplanan pozitif korona başlangıç gerilimi değerleri .....	93
Çizelge 3.12. r=1 mm ve d=20 mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde hesaplanan pozitif korona başlangıç gerilimi değerleri .....	97

## ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. Tek boyutlu bölgenin elemanlara ayrılması (a) Global numaralandırma (tüm sistem için düğüm notasyonu) (b) Lokal numaralandırma (e elemanı için düğüm notasyonu) .....	18
Şekil 2.2. İncelenen S alanının üçgensel elemanlara ayrıştırılması.....	23
Şekil 2.3. Lokal ve global numaralandırma .....	28
Şekil 2.4. Üçgensel kesitli ring elemanı.....	39
Şekil 2.5. Üçgensel kesitli ring eleman için düğüm notasyonu.....	40
Şekil 3.1. İç içe geçmiş dairelere ait model .....	55
Şekil 3.2. İç içe geçmiş daire modelinin birinci dereceden ağ ile çözümlenmesi sonucu oluşan ağlar .....	56
Şekil 3.3. İç içe geçmiş daire modeline ait düğüm noktalarının birinci dereceden ağ ile çözümlenmesi sonucu numaralandırılması .....	56
Şekil 3.4. İç içe geçmiş daire modelinin birinci dereceden ağ ile çözümlenmesi sonucu oluşan potansiyel dağılım .....	57
Şekil 3.5. İç içe geçmiş daire modelinin birinci dereceden ağ ile çözümlenmesi sonucu oluşan elektrik alan oklarının dağılımı .....	57
Şekil 3.6. İç içe geçmiş daire modelinin ikinci dereceden ağ ile çözümlenmesi sonucu oluşan ağlar .....	60
Şekil 3.7. İç içe geçmiş daire modeline ait düğüm noktalarının ikinci dereceden ağ ile çözümlenmesi sonucu numaralandırılması.....	60
Şekil 3.8. İç içe geçmiş daire modelinin ikinci dereceden ağ ile çözümlenmesi sonucu oluşan potansiyel dağılım .....	61
Şekil 3.9. İç içe geçmiş daire modelinin birinci dereceden ağ ile çözümlenmesi sonucu oluşan elektrik alan oklarının dağılımı .....	61
Şekil 3.10. İç içe geçmiş daire modelinin üçüncü dereceden ağ ile çözümlenmesi sonucu oluşan ağlar .....	65
Şekil 3.11. İç içe geçmiş daire modeline ait düğüm noktalarının üçüncü dereceden ağ ile çözümlenmesi sonucu numaralandırılması .....	65

<b>Şekil</b>	<b>Sayfa</b>
Şekil 3.12. İç içe geçmiş daire modelinin ikinci dereceden ağ ile çözümlenmesi sonucu oluşan potansiyel dağılım.....	66
Şekil 3.13. İç içe geçmiş daire modelinin birinci dereceden ağ ile çözümlenmesi sonucu oluşan elektrik alan oklarının dağılımı .....	66
Şekil 3.14. Çubuk-düzlem elektrot sisteminde çığların oluşması .....	68
Şekil 3.15. $r=2$ mm ve $d=15$ mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminin ikinci dereceden ağ ile oluşturulan modeli .....	76
Şekil 3.16. $r=2$ mm ve $d=15$ mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde potansiyel alan çizgileri .....	76
Şekil 3.17. $r=2$ mm ve $d=15$ mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde birincil çığdan dolayı oluşan pozitif yükün yarıçapı ( $r_1$ ) değerinin basınç'a bağlı olarak değişimi .....	78
Şekil 3.18. $r=2$ mm ve $d=15$ mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde hesaplanan ve ölçülen pozitif korona başlangıç gerilimi değerlerinin basınç'a bağlı olarak değişimi (Kesik çizgi: ölçülen, düz çizgi: hesaplanan).....	78
Şekil 3.19. $r=2$ mm ve $d=15$ mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde hesapladığımız birincil çığın boyutunun ( $N_{+1}$ ) basınç'a bağlı olarak değişimi.....	79
Şekil 3.20. $r=2$ mm ve $d=15$ mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde hesapladığımız ardışık çığların boyutunun ( $N_{+2}$ ) basınç'a bağlı olarak değişimi.....	79
Şekil 3.21. $r=2$ mm ve $d=20$ mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminin ikinci dereceden ağ ile oluşturulan modeli .....	80
Şekil 3.22. $r=2$ mm ve $d=20$ mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde potansiyel alan çizgileri .....	80
Şekil 3.23. $r=2$ mm ve $d=20$ mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde birincil çığdan dolayı oluşan pozitif yükün yarıçapı ( $r_1$ ) değerinin basınç'a bağlı olarak değişimi .....	82
Şekil 3.24. $r=2$ mm ve $d=20$ mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde hesaplanan ve ölçülen pozitif korona başlangıç gerilimi değerlerinin basınç'a bağlı olarak değişimi (Kesik çizgi: ölçülen, düz çizgi: hesaplanan).....	82

<b>Şekil</b>	<b>Sayfa</b>
Şekil 3.25. $r=2$ mm ve $d=20$ mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde hesapladığımız birincil çığın boyutunun ( $N_{+1}$ ) basınç'a bağlı olarak değişimi.....	83
Şekil 3.26. $r=2$ mm ve $d=20$ mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde hesapladığımız ardışık çığların boyutunun ( $N_{+2}$ ) basınç'a bağlı olarak değişimi.....	83
Şekil 3.27. $r=2$ mm ve $d=5$ mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminin ikinci dereceden ağ ile oluşturulan modeli .....	84
Şekil 3.28. $r=2$ mm ve $d=5$ mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde potansiyel alan çizgileri .....	84
Şekil 3.29. $r=2$ mm ve $d=5$ mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde birincil çığdan oluşan pozitif yükün yarıçapı ( $r_1$ ) değerinin basınç'a bağlı olarak değişimi.....	86
Şekil 3.30. $r=2$ mm ve $d=5$ mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde hesaplanan pozitif korona başlangıç gerilimi değerlerinin basınç'a bağlı olarak değişimi .....	86
Şekil 3.31. $r=2$ mm ve $d=5$ mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde hesapladığımız birincil çığın boyutunun ( $N_{+1}$ ) basınç'a bağlı olarak değişimi.....	87
Şekil 3.32. $r=2$ mm ve $d=5$ mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde hesapladığımız ardışık çığların boyutunun ( $N_{+2}$ ) basınç'a bağlı olarak değişimi.....	87
Şekil 3.33. $r=2$ mm ve $d=30$ mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminin ikinci dereceden ağ ile oluşturulan modeli .....	88
Şekil 3.34. $r=2$ mm ve $d=30$ mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde potansiyel alan çizgileri .....	88
Şekil 3.35. $r=2$ mm ve $d=30$ mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde birincil çığdan oluşan pozitif yükün yarıçapı ( $r_1$ ) değerinin basınç'a bağlı olarak değişimi.....	90
Şekil 3.36. $r=2$ mm ve $d=30$ mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde hesaplanan pozitif korona başlangıç gerilimi değerlerinin basınç'a bağlı olarak değişimi .....	90

Sekil	Sayfa
Şekil 3.37. $r=2$ mm ve $d=30$ mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde hesapladığımız birincil çığın boyutunun ( $N_{+1}$ ) basınç'a bağlı olarak değişimi.....	91
Şekil 3.38. $r=2$ mm ve $d=30$ mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde hesapladığımız ardışık çığların boyutunun ( $N_{+2}$ ) basınç'a bağlı olarak değişimi.....	91
Şekil 3.39. $r=1$ mm ve $d=15$ mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminin ikinci dereceden ağ ile oluşturulan modeli .....	92
Şekil 3.40. $r=2$ mm ve $d=15$ mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde potansiyel alan çizgileri .....	92
Şekil 3.41. $r=1$ mm ve $d=15$ mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde birincil çığdan oluşan pozitif yükün yarıçapı ( $r_1$ ) değerinin basınç'a bağlı olarak değişimi .....	94
Şekil 3.42. $r=1$ mm ve $d=15$ mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde hesaplanan pozitif korona başlangıç gerilimi değerlerinin basınç'a bağlı olarak değişimi .....	94
Şekil 3.43. $r=1$ mm ve $d=15$ mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde hesapladığımız birincil çığın boyutunun ( $N_{+1}$ ) basınç'a bağlı olarak değişimi.....	95
Şekil 3.44. $r=1$ mm ve $d=15$ mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde hesapladığımız ardışık çığların boyutunun ( $N_{+2}$ ) basınç'a bağlı olarak değişimi.....	95
Şekil 3.45. $r=1$ mm ve $d=20$ mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminin ikinci dereceden ağ ile oluşturulan modeli .....	96
Şekil 3.46. $r=2$ mm ve $d=20$ mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde potansiyel alan çizgileri .....	96
Şekil 3.47. $r=1$ mm ve $d=20$ mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde birincil çığdan oluşan pozitif yükün yarıçapı ( $r_1$ ) değerinin basınç'a bağlı olarak değişimi .....	98
Şekil 3.48. $r=1$ mm ve $d=20$ mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde hesaplanan pozitif korona başlangıç gerilimi değerlerinin basınç'a bağlı olarak değişimi .....	98

Şekil	Sayfa
Şekil 3.49. $r=1$ mm ve $d=20$ mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde hesapladığımız birincil çığın boyutunun ( $N_{+1}$ ) basınç'a bağlı olarak değişimi.....	99
Şekil 3.50. $r=1$ mm ve $d=20$ mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde hesapladığımız ardışık çığların boyutunun ( $N_{+2}$ ) basınç'a bağlı olarak değişimi.....	99

## SİMGELER ve KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$\alpha$	İyonlaşma katsayısı, $cm^{-1}$
$D_e$	Difüzyon katsayısı, $m^{-1}s^{-1}$
$E$	Elektrik alan şiddeti, $V / m$
$g$	Geometrik faktör
$J$	Enerji fonksiyoneli, Joule/m
$[K^e]$	Eleman matrisi,
$[K^{genel}]$	Sistem matrisi,
$L_1, L_2, L_3$	Doğal koordinatlar,
$N_i, N_j, N_k$	Şekil fonksiyonları,
$N_{+1}$	Birincil çığın boyutu
$N_{+2}$	Ardışık çığların boyutu
$\eta$	Yapışma katsayısı, $cm^{-1}$
$\mu$	Soğulma katsayısı, $m^{-1}$
$r_1$	Birincil çığdan oluşan pozitif yükün yarıçapı, $mm$
$V_e$	Elektron sürüklenme hızı, $ms^{-1}$
$\Delta$	Laplacien operatörü
$\Phi$	Elektrostatik potansiyel, $V$



**Kısaltmalar**

<b>SEM</b>	Sonlu Elemanlar Metodu
<b>PCOV</b>	Positive Corona Onset Voltage
<b>MATLAB</b>	Matrix Laboratory
<b>PDE</b>	Partial Differential Equation
<b>SF<sub>6</sub></b>	Kükürt hekzaflorür
<b>Y. H.</b>	Yüzde Hata

## 1. GİRİŞ

Günümüz dünyasının büyük enerji talebine karşı, elektrik üretimi ve iletimi üzerine çalışmalar her geçen gün artmaktadır. Özellikle büyük enerji talebinin iletimi için yüksek gerilim tekniği kullanılmaktadır. Yüksek gerilim tekniğinin kullanıldığı elektrik iletim sistemlerinde, bu sistemleri oluşturan yüksek gerilim teçhizatlarının elektrik alan analizleri çok önemli yer tutmaktadır. Yapılan çalışmalar sonucu kullanılan teçhizat veya malzemelerin karakteristikleri çıkarılarak, avantajları ve dezavantajları incelenmektedir. Yüksek gerilim sisteminde kullanılan teçhizatların üzerlerinde oluşan potansiyel ve elektrik alan analizi hesaplamaları için bazı metotlar kullanılmaktadır. Bu metotlar arasında analitik yöntemler, deneysel metotlar ve sayısal yöntemler yer almaktadır. Analitik metotlar, çözümün kolayca yapılabildiği her sistem için en uygun seçenektir. Fakat sistemlerin farklı parçalardan oluşması ve karmaşık yapılarının bulunması sebebiyle kullanışlı bir metot olma özelliğini kaybetmiştir. Fakat yine de birden çok dielektrik malzemenin yer almadığı sistemlerde kullanılabilir özelliği bulunmaktadır. Analog diğer bir deyişle deneysel yöntemlerin kullanılmasında ise bazı zorluklar ortaya çıkmaktadır. Özellikle yetersiz deney ortamları ve kullanılan malzemelerin pahalılığı bu yöntemin kullanılmasında sıkıntılara sebebiyet vermektedir. Ayrıca elde edilen deneysel sonuçların literatürdeki sonuçlarla uyum göstermemesi ve hassas sonuçlar elde edilmesindeki güçlük analog (deneysel) yöntemin dezavantajları arasındadır. Bu sebeplerden dolayı elektrik alan hesaplamalarında son dönemde analitik veya analog yöntemlerin yerini nümerik (sayısal) yöntemler almaktadır. Özellikle bilgisayar teknolojilerin gelişerek tüm kullanıcılara yayılmaya başladığı son yıllarda nümerik yöntemin kullanımını gittikçe arttırmıştır. Nümerik yöntemler içerisinde önemli bir yeri olan sonlu elemanlar metodu (SEM), belirtilen avantajlarından ötürü çalışmamızda kullanılmıştır. Sonlu elemanlar metodunun, farklı geometrileri ve farklı dielektrik malzemeleri kullanılmaya izin veren yapısı çalışmamız içerisinde önemli kolaylıklar sağlamıştır.

Kullanılan sonlu elemanlar metodu ile istenilen geometri rahatlıkla incelenebilmektedir. Bu metot geometriden bağımsız olarak çalışmaktadır.

Kullanılan modüller sonlu elemanlar metodu vasıtası ile parçalara ayrılmakta ve sınır koşulları girilerek çözümler rahatlıkla yapılabilmektedir.

Çalışmada Matlab programı sonlu elemanlar metodunu geliştirmek için kullanılmıştır. Bu program vasıtası ile incelemek istediğimiz geometri ve sınır koşulları girilmiştir. Bu sınır koşullarının ve geometrinin girilmesinin ardından sonlu elemanlar metodunda kullanılacak ağ'ın seviyesi belirlenmiştir. Bu ağ seviyesi belirlendikten sonra, çözümleme yapılmış ve çözümlemeyi oluşturan düğüm noktalarının koordinatları ile her noktaya ait potansiyel değerler elde edilmiştir. Bu değerler yeni dosyalara aktararak yazılan yeni bir program vasıtası ile düğüm noktalarının her birinin üzerindeki elektrik alan hesaplanmıştır. Hesaplanan elektrik alan değerleri vasıtası kritik alan çizgisi üzerindeki noktaların elektrik alan değerleri hesaplanmıştır.

Pozitif korona başlangıç gerilimini hesaplamak için kullanılan simülasyon modeli, ilk ve ardışık çığların büyüklüğüne bağlı olarak değişmektedir. Ardışık çığların büyüklüğü, ilkine eriştiğinde deşarj kendi kendini beslemektedir. Farklı geometrilerde kritik alan çizgisindeki elektrik alan değerleri kullanılarak bu çığlar hesaplanmış ve hesaplanan bu çığlar vasıtası ile farklı geometrilerdeki pozitif korona başlangıç gerilim elde edilmiştir.

Kullanılan geometri ve hesaplanan pozitif korona başlangıç gerilim değeri, yüksek gerilim tekniğinde kesiciler başta olmak üzere birçok endüstriyel alanda kullanılan kükürt hekzaflorür ( $\text{SF}_6$ ) gazı için düzgün olmayan (non-uniform) geometrilerde incelenmiştir. Kullanılan geometri çubuk-düzlem olarak adlandırılmaktadır. Farklı çubuk yarıçaplarında ve farklı çubuk-düzlem aralıklarında bu değerler hesaplanmış ve bu değerlerin literatürdeki değerlerle örtüşü gözlenmiştir.

Birinci bölümde yapılan bu giriş takiben ikinci bölümde sonlu elemanlar metodu hakkında geniş bir teorik giriş yapılmıştır. Bu bölümde sonlu elemanlar metodunun nasıl çalıştığı anlatılarak bir örnekle konu pekiştirilmiştir. Üçüncü bölümde kükürt hekzaflorür ( $\text{SF}_6$ ) hakkında bilgi verilmiştir. Bu bilgiyi takiben pozitif korona

başlangıç geriliminin hesaplama yöntemi üzerinde durulmuştur. Yapılan bir örnek ile sonlu elemanlar metodunun kullanılış biçimi açıklanmıştır. En son kısmında ise düzgün olmayan geometriye sahip çubuk-düzlem elektrot siteminde pozitif korona başlangıç geriliminin hesaplanması gerçekleştirilmiştir. Bu hesaplamalar literatürdeki diğer çalışmalar ile karşılaştırılarak doğruluğu denenmiştir. Hesaplanan yüzde hataların %5'in altında olduğu için çalışmamızın doğruluğu kanıtlanmıştır. Bunu takiben deneysel sonuçların elimizde olmadığı farklı geometrilerde de pozitif korona başlangıç gerilimi hesaplanarak çalışmamız sonlandırılmıştır. Dördüncü bölümde ise yapılan çalışma değerlendirilerek sonuç yazılmıştır.

## **2. SONLU ELEMANLAR METODU**

### **2.1. Giriş**

Sonlu Elamanlar Metodu, birçok mühendislik probleminin çözümünde kullanılabilecek bir yapıya sahiptir. Metodun amacı incelenen bölgedeki belirli noktalara ait alan değerlerinin bulunmasıdır. Bu işlemin hassas bir şekilde yapılabilmesi için nokta sayısının olabildiğince fazla olması gerekir. Bu ise çözümü ancak güçlü bilgisayarlarla mümkün olan yüzlerce hatta binlerce cebirsel denklemin çözümü demektir. Bu nedenle Sonlu Elemanlar Metodu (SEM) ancak yeterli bilgisayar donanımı varsa kullanışlı bir metottur [1].

Sonlu Elemanlar Metodunun asıl çıkış noktasının ne olduğu kesin olarak söylenemez çünkü yaklaşık 150 yıllık bir gelişim süreci vardır. Ancak 1950'lerden sonra bu metot bazı yayınlarda yer almıştır. 1960'larda uzay çalışmalarının başlamasıyla modelleme ve simülasyon çalışmalarına hız verilmiş, böylece matematiksel uygulamaların da gelişmesiyle metot gerçek kimliğine kavuşmuş, uçak, uzay kapsülü ve benzeri tasarımlar sayesinde oldukça geniş bir kullanım alanı bulmuştur.

Bu metodun en büyük avantajı düzensiz şekillerin ve eğrisel sınır koşullarının incelenmesine olanak tanımasıdır. Sonlu elemanlar metodu; karmaşık olan problemlerin daha basit alt problemlere ayrılarak her birinin kendi içinde çözülmesiyle tam çözümün bulunduğu yöntemdir [2, 3].

### **2.2. Sınır Değer Problemlerinin Çözümü**

Diferansiyel denklemlerle tanımlanabilen herhangi bir fizik probleminin en güvenilir çözümü analitik çözümdür. Ancak analitik çözümün çok zor hatta imkânsız olduğu pek çok durum söz konusudur. Örneğin incelenen şeklin geometrisi matematiksel olarak ifade edilemeyecek kadar karmaşık ve düzensiz olursa analitik çözüm bulunamayacağı için geçerli değildir. Analitik çözümün bulunmadığı bu gibi durumlarda nümerik yöntemler kullanılarak yaklaşık bir çözüm elde edilebilir. Bütün

nümerik çözümler bağımsız parametre takımları için süreksiz noktalarda sonuç bulma prensibine dayanır.

Sonlu elemanlar metodu herhangi bir fizik problemine uygulandığında incelenen bölge sonlu sayıda elemana bölünür ve her bir elemanın köşe noktalarındaki (düğüm noktalarındaki) alan değerleri hesaplanır.

Sınır değer problemlerinin çözümünde kullanılan iki klasik metot vardır. Bunlardan biri Ritz-Varyasyonel Metodu ve diğeri Galerkin Metodu'dur. Sonlu elemanlar metodu yardımıyla çözüm yapılırken bu metotlardan Ritz-Varyasyonel metodu kullanılacaktır.

### **2.3. Sonlu Elemanlar Metodunun Çözüm Yöntemi**

Fizik problemlerinde incelenen bölgeler sürekli olmalarına rağmen çözüme ulaşmak için bu bölgeler ayrıklaştırılmalıdır. Sürekli ortamların serbestlik derecesi sonsuzdur. Bu ortamlarda sonsuz adet nokta olup bu noktaların her biri bir düğüm noktasıdır ve tek tek incelenmeleri mümkün değildir. Ayrıklaştırılmış ortamlarda ise serbestlik derecesi sonludur ve düğüm sayısına eşittir. Böylece incelenecek nokta sayısı sonsuzdan sonluya indirgenmiş olur [4].

Sonlu elemanlar yaklaşımına ulaşmak için farklı matematiksel metotlar vardır. İlgilendiğimiz şey bir bölgedeki alan veya potansiyel Laplace veya Poisson tipindeki, bir alan olduğunda sonlu elemanlar metodu tüm alandaki enerjinin minimizasyonu ile ilgilenir.

Laplace Denklemi:

$$\nabla^2 V = 0$$

Basit elektrostatik problemlerin çözümünde kullanılır. Kaynakların bulunmadığı bir ortamda Poisson denkleminin özel halidir. Sınır koşulları genellikle Dirichlet türündendir. Laplace denkleminin karşılık gelen fonksiyonel aşağıdaki gibidir.

$$J = \frac{1}{2} \epsilon \iiint_V \nabla^2 V dv \quad (2.1)$$

Bu aynı zamanda s yüzeyinde depolanan elektrostatik enerjidir.

Poisson Denklemi:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon} = -f \quad (2.2)$$

Daha karmaşık potansiyel problemlerin modellenmesinde kullanılmaktadır. Burada permitivite ( $\epsilon$ ) bazı durumlarda konum ile değişebilir yani permitivite çalıştığımız geometri içerisinde sabit değildir. Burada da sınır koşulları genellikle Dirichlet türündendir. Poisson denkleminin karşılık gelen fonksiyonel aşağıdaki gibidir.

$$J = \frac{1}{2} \epsilon \iiint_V (\nabla^2 V - 2fV).dv \quad (2.3)$$

#### 2.4. Sonlu Elemanlar Metodunda İzlenecek Adımlar

Elektrik mühendisliğindeki bir çok problem iki boyutlu Laplace denkleminin çözümünü gerektirir. Herhangi bir K ortamında Laplace denklemi ile tanımlı bir  $\phi$  alanını ele alalım.

$$\nabla^2 \phi(x, y) = 0 \quad (2.4)$$

Bu  $\phi$  alanının yani bu sınır değeri probleminin çözümü aşağıdaki adımlardan oluşur [5].

#### 2.4.1. Çözüm bölgesinin ayrıklaştırılması

İlk adım eleman tipinin belirlenmesi çözüm bölgesinin elemanlara ayrılması yani ayrıklaştırılmasıdır ve bu adım sonlu elemanlar metodunun en önemli adımıdır. Bu işlem otomatik ağ üreten bir bilgisayar programı yardımıyla yapılır.

Öncelikle çözüm bölgenin geometrik yapısı belirlenerek bu geometrik yapıya en uygun elemanlar seçilmelidir. Seçilen elemanların çözüm bölgesini temsil etme oranında, elde edilecek neticeler gerçek çözüme yaklaşmış olacaktır. Sonlu elemanlar metodunda kullanılan elemanlar boyutlarına göre dört kısma ayrılabilir.

*Tek boyutlu elemanlar:* Bu elemanlar tek boyutlu olarak ifade edilebilen problemlerin çözümünde kullanılır. Bu grubun temel elemanı kısa çizgiler olup her iki ucunda birer tane olmak üzere iki düğüm noktasına sahiptir.

*İki boyutlu elemanlar:* İki boyutlu (düzlem) problemlerin çözümünde kullanılır. Bu grubun temel elemanı üç düğümlü üçgen elemandır. Üçgen elemanın altı, dokuz ve daha fazla düğüm ihtiva eden çeşitleri de vardır. Düğüm sayısı seçilecek enterpolasyon fonksiyonun derecesine göre belirlenir. İki üçgen elemanın birleşmesiyle meydana gelen dörtgen eleman, problemin geometrisine uyum sağladığı ölçüde kullanışlılığı olan bir elemandır. Dört veya daha fazla düğümlü olabilir.

*Dönel Elemanlar:* Eksenel simetrik özellik gösteren problemlerin çözümünde bu elemanlar kullanılır. Bu elemanlar bir veya iki boyutlu elemanların simetri eksenini etrafında bir tam dönme yapmasıyla oluşurlar. Gerçekte üç boyutlu olan bu elemanlar, eksenel simetrik problemleri iki boyutlu problem gibi çözme olanağı sağladığı için çok kullanışlıdır.



*Üç boyutlu elemanlar:* Bu grupta temel eleman üçgen piramittir. Bunun dışında dikdörtgenler prizması veya daha genel olarak altı yüzeyle elemanlar, üç boyutlu problemlerin çözümünde kullanılan eleman tipleridir.

*İzoparametrik elemanlar:* Çözüm bölgesinin sınırları eğri denklemleri ile tanımlananmışsa, kenarları doğru olan elemanların bu bölgeyi tam olarak tanımlaması mümkün değildir. Bu durumlarda bölgeyi gereken hassasiyette tanımlamak için elemanların boyutlarını küçültmek, dolayısıyla adetlerini arttırmak gerekmektedir. Bu durum çözülmesi gereken eleman sayısını artırır dolayısıyla gereken bilgisayar kapasitesinin ve çözüm zamanının artmasına neden olur. Bu olumsuzluklardan kurtulmak için, çözüm bölgesinin eğri denklemleri ile tanımlanan sınırlarına uyum sağlayacak eğri kenarlı izoparametrik elemanlar kullanılır.

Bu adımda çözüm bölgesini  $M$  adet elemana ayırdığımızı kabul edelim ( $e=1,2,3,\dots,M$ ). Çözüm bölgesinin tamamı  $V$  ile gösterilirse  $V^e$  çözüm bölgesindeki tek bir elemanı ifade eder.

Çözüm bölgesi elemanlara ayrıldıktan sonra her bir elemanın tanımlanması gerekir. Bu da düğüm noktalarının tanımlanması yani düğüm noktalarının koordinatlarının belirlenmesi demektir.

#### **2.4.2. Enterpolasyon fonksiyonunun seçimi**

Sonlu elemanlar metoduyla problem analizinin ikinci adımı elemandaki alan değişkeninin değişimini gösteren ve eleman için bilinmeyen çözümlerin bir yaklaşımını sağlayan enterpolasyon fonksiyonu seçmektir. Enterpolasyon fonksiyonu olarak genellikle polinomlar seçilir çünkü integrasyonu ve türevleri kolaydır. Polinomlar birinci (doğrusal), ikinci (kuadratik) yada daha yüksek dereceli seçilebilir. Yüksek dereceli polinomlar daha doğru sonuç vermesine karşın daha karmaşık formüller içerir ve çözümleri zordur. Bu nedenle lineer enterpolasyon daha

yaygın olarak kullanılır. Polinom seçildikten sonra bir elemanda bilinmeyen çözüm için ifade türetilir.

Bir eleman için polinom açılım denklemi

$$\phi(x, y) = a + b.x + c.y + d.x.y + e.x^2 + f.y^2 + \dots \quad (2.5)$$

Burada alınacak terim sayısı elemanın geometrisine bağlıdır ve elemandaki düğüm noktası sayısına eşittir. Bazı elemanlar için polinomlar aşağıda verilmiştir.

<u>Eleman</u>	<u>Polinom</u>	
Doğru	$\phi(x, y) = a + b.x$	(2.6)
Üçgen	$\phi(x, y) = a + b.x + c.y$	(2.7)
Dörtgen	$\phi(x, y) = a + b.x + c.y + d.x.y$	(2.8)

#### 2.4.3. Eleman özelliklerinin belirlenmesi

Üçüncü adım olan eleman özelliklerinin bulunması elemana ait denklemlerin oluşturulması ve eleman matrisinin elde edilmesidir. Elemanlar ve enterpolasyon fonksiyonları bir kere bulunduktan sonra elemanların kendilerine özgü özelliklerini ifade eden matris denklemleri bulunabilir. Bunun için kullanılabilecek dört yaklaşım vardır. Bunlar; direkt yaklaşım, varyasyonel yaklaşım, ağırlıklı kalan yaklaşım ve enerji dengesi yaklaşımıdır.

*Direkt yaklaşım:* Bu yaklaşım daha çok tek boyutlu ve basit problemler için uygundur.

*Varyasyonel yaklaşım:* Bir fonksiyonelin ekstremize yani maksimum ve minimum edilmesi demektir. Elektrik mühendisliğinde en çok kullanılan fonksiyonel elektrostatik enerji prensibidir. Fonksiyonelin birinci türevinin sıfır olduğu noktada fonksiyonu ekstremize eden değerler bulunur. İkinci türevin sıfırdan büyük veya minimum olduğu anlaşılır.

*Ağırlıklı kalanlar yaklaşımı:* Bir fonksiyonun çeşitli değerler karşılığında elde edilen yaklaşık çözümü ile gerçek çözüm arasındaki farkların bir ağırlık fonksiyonu ile çarpılarak toplamlarını minimize etme işlemidir. Bu yaklaşım kullanılarak eleman özelliklerinin elde edilmesinin avantajı, fonksiyonellerin elde edilmediği problemlerde uygulanabilir olmasıdır.

*Enerji dengesi yaklaşımı:* Bir sisteme giren ve çıkan elektrik veya mekanik enerjilerin eşitliği ilkesine dayanır. Bu yaklaşım bir fonksiyonele ihtiyaç duymaz.

Sonlu elemanlar metodu ile problem çözümünde kullanılacak olan yaklaşım çözüm işleminde izlenecek yolu değiştirmez. Bunlardan en sık kullanılan varyasyonel yaklaşımdır.

#### **2.4.4. Çözüm bölgesindeki elemanların birleştirilmesi**

Sonlu elemanlar analizinin dördüncü adımında eleman ağlarıyla modellenen tüm sisteme ait denklemlerin elde edilmesi için tüm elemanların özelliklerinin birleştirilmesi gerekir. Yani elemanların davranışlarını ifade eden matrisleri birleştirmeliyiz. Tüm sisteme ait matrisin eleman matrislerinden tek farkı daha fazla terim içermesi olacaktır, çünkü daha fazla düğüme sahiptir.

Eleman birleştirme prosedürü elemanların iç bağlı oldukları bir düğümde alan değişkeninin değeri bu düğümü paylaşan tüm elemanlarda aynıdır prensibinden yola çıkar. Elemanların birleştirilmesi işlemi rutin bir iştir ve bilgisayarlar yardımıyla yapılır.

#### 2.4.5. Sınır koşullarının probleme dâhil edilmesi

Metodun beşinci adımında verilen sınır koşulları probleme dâhil edilir.

Sınır Koşullarının Sınıflandırılması

Homojen Sınır Koşulları

$$\text{Dirichlet Sınır Koşulu} \quad : \quad \phi(\bar{r}) = 0 \quad (2.9)$$

$$\text{Neumann Sınır Koşulu} \quad : \quad \frac{\partial \phi(\bar{r})}{\partial n} = 0 \quad (2.10)$$

$$\text{Karışık Sınır Koşulu} \quad : \quad \frac{\partial \phi(\bar{r})}{\partial n} + h(\bar{r})\phi(\bar{r}) = 0 \quad (2.11)$$

#### 2.4.6. Sistem denklemlerinin çözülmesi

Sonlu elemanlar metodunda sistem denklemlerinin çözümü son adımdır. Eleman birleştirme işlemi ve daha sonra buna sınır koşullarının eklenmesi alan değişkenlerinin bilinmeyen düğümsel denklemlerini bulmak için çözebileceğimiz eşzamanlı denklemler kümesi verir. Bu denklemler nümerik çözümleme tekniklerinden biri kullanılarak çözülür ve sonuca ulaşılır.

Bu aşamadan eğer isteniyorsa ek hesaplamalar yapılır. Örneğin biz ek hesaplamalar yardımıyla bölgede hesapladığımız potansiyelleri kullanarak elektriksel alan değerleri hesaplanacaktır.

#### 2.5. Sonlu Eleman Denklemlerinin Türetilmesi

Burada sonlu eleman denklemleri varyasyonel yaklaşım kullanılarak türetilmiştir.

$$\nabla^2 \phi(x, y, z) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.12)$$

Laplace denkleminin karşılık gelen fonksiyonel;

$$J = \frac{1}{2} \iiint_V \left[ k \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + k \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + k \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] dV \quad (2.13)$$

Bu aynı zamanda Laplace denklemi için incelediğimiz bölgenin tüm V hacmi içinde depolanan elektrostatik enerjisidir. Şöyle ki;

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_V \epsilon (E)^2 dV \quad (2.14)$$

$$E = -\nabla \phi \quad (2.15)$$

E : elektrostatik alan

$\phi$  : elektrostatik potansiyel

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_V \epsilon (-\nabla \phi)^2 dV \quad (2.16)$$

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_V \epsilon (\nabla \phi)^2 dV \quad (2.17)$$

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_V \left[ \epsilon \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \epsilon \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \epsilon \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] dV \quad (2.18)$$

$\epsilon$  : dielektrik katsayısı

$$\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \quad (2.19)$$

$\varepsilon = k$  olmak üzere Eş. 2.13’de yazdığımız fonksiyoneli enerji denklemidir.

Bu fonksiyoneli herhangi bir S yüzeyi boyunca tanımlı

$$\phi = \phi_0(x, y, z) \quad (2.20)$$

Sınır koşullarını da sağlayacak biçimde minimize eden  $\phi_0(x, y, z)$  potansiyeli  $\nabla^2 \phi = 0$  şeklinde tanımlanan Laplace denkleminin de çözümüdür. Bunu şöyle ifade edebiliriz.

Minimum enerji koşulu sağlayan potansiyel	$\longleftrightarrow$	Laplace denklemini sağlayan potansiyel
--	-----------------------	---

Varyasyonel yaklaşım Eş. 2.13 ile tanımlı  $J$  fonksiyoneli minimum yaparak Laplace denkleminin çözümüne ulaşmayı amaçlar (enerjinin minimizasyonu ilkesi). Bu minimizasyon probleminin çözümünü adım-adım inceleyelim.

#### 1. Adım

Potansiyelin tanımlı olduğu V hacmi her biri p adet düğüm içeren M adet elemana ayrıştırılır.

#### 2. Adım

Her bir e elemanı içindeki potansiyel alanın değişimi için bir enterpolasyon fonksiyonu tanımlanır.

$$\phi^e(x, y, z) = [N(x, y, z)] \bar{\phi}^e \quad (2.21)$$

Bu N fonksiyonları Şekil fonksiyonları (Shape Functions) olarak tanımlanır.

$$[N(x, y, z)] = [N_1(x, y, z) N_2(x, y, z) N_3(x, y, z) \dots N_p(x, y, z)] \quad (2.22)$$

$[N(x, y, z)]$  satır matrisi e elemanının 1,2,3,...,p düğüm noktaları için yazılmış şekil fonksiyonlarından oluşur.

$$\vec{\phi}^e = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$\vec{\phi}^e$  sütun vektörü ise e elemanının 1,2,3,...,p düğüm noktalarındaki potansiyel değerlerinden oluşur.

$N_i(x, y, z)$  : e elemanının i. düğüm noktasındaki enterpolasyon fonksiyonu

$\phi_i$  : e elemanının i. düğüm noktasındaki potansiyel değeri.

### 3. Adım

Eş 2.13 ile tanımlı  $J$  fonksiyoneli her bir eleman için geçerli  $J^e$  değerlerinin toplamı olacak şekilde ifade edebiliriz.

$$J = \sum_{e=1}^M J^e \quad (2.24)$$

$J^e$  aşağıdaki biçimde ifade edilebilir.

$$J_e = \frac{1}{2} \iiint_{V^e} \left[ k \left( \frac{\partial \phi^e}{\partial x} \right)^2 + k \left( \frac{\partial \phi^e}{\partial y} \right)^2 + k \left( \frac{\partial \phi^e}{\partial z} \right)^2 \right] dV^e \quad (2.25)$$

V hacminde depolanan enerjinin minimizasyonu için J fonksiyoneli minimize etmemiz gerekir. Bunun için gerekli koşullar şöyle sağlanır.

$$\frac{\partial J}{\partial \phi} = 0 \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \phi_i} = \sum_{e=1}^M \frac{\partial J^e}{\partial \phi_i} = 0 \quad , \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.27)$$

Burada n; potansiyel değeri bilinmeyen toplam düğüm sayısıdır.

$$\frac{\partial J^e}{\partial \phi_i} = \iiint_{V^e} \left[ k \frac{\partial \phi^e}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left( \frac{\partial \phi^e}{\partial x} \right) + k \frac{\partial \phi^e}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left( \frac{\partial \phi^e}{\partial y} \right) + k \frac{\partial \phi^e}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left( \frac{\partial \phi^e}{\partial z} \right) \right] dV \quad (2.28)$$

$\phi^e(x, y, z) = [N(x, y, z)] \vec{\phi}^e$  denkleminde

$$\frac{\partial \phi^e}{\partial x} = \left[ \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_3}{\partial x} \dots \frac{\partial N_p}{\partial x} \right] \vec{\phi}^e \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi_i} \left( \frac{\partial \phi^e}{\partial x} \right) = \frac{\partial N_i}{\partial x} \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial J^e}{\partial \phi^e} = [K^e] \vec{\phi}^e \quad (2.31)$$

denklemini elde edilir.



## 4. Adım

Eş 2.25 aşağıdaki biçiminde ifade edilebilir.

$$\frac{\partial J}{\partial \phi} = \sum_{e=1}^M \frac{\partial J_e}{\partial \phi^e} = \sum_{e=1}^M [K^e] \bar{\phi}^e = \bar{0} \quad (2.32)$$

Eleman birleştirme yöntemi kullanılarak tüm elemanlar için bulunan  $[K^e]$  matrisleri birleştirilir ve genel  $[K]$  matrisi elde edilir. Bu durumda Eş 2.32 genel olarak şöyle ifade edilebilir.

$$[K] \bar{\phi} = 0 \quad (2.33)$$

## 5. Adım

Eş 2.32'ye sınır koşullarının ilave edilmesi ile  $[K^e]$  matrisi aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$[K^e] = \iiint_{V^e} [B]^T [D] [B] dV \quad (2.34)$$

Burada  $[B]$  ve  $[D]$  matrisleri şu şekildedir.

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial N_p}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial N_p}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial N_p}{\partial z} \end{bmatrix} \quad [D] = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

## 2.6. Tek Boyutlu Sonlu Elemanlar Metoduyla Analiz

### 2.6.1 Sınır değer probleminin tanımlanması

Kartezyen koordinatlarda bir boyutlu düzlemde kararlı durum problemi için geçerli denklem şu şekildedir [5].

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \quad (2.36)$$

Sınır koşulları herhangi bir L uzunluğunda

$$\phi = \phi_0(x) \quad (2.37)$$

İle tanımlanır. Eş. 2.36 ile tanımlanan diferansiyel denklemin çözümü ilgilendiğimiz bölgede geçerli enerji fonksiyoneli minimum yapan  $\phi(x, y)$  ifadesinin elde edilmesi demektir. Yani enerji fonksiyoneli minimum yapan  $\phi(x, y)$  aynı zamanda bir boyutlu Laplace denkleminin de çözümüdür. Bu durumda minimize edilmesi gereken fonksiyonel;

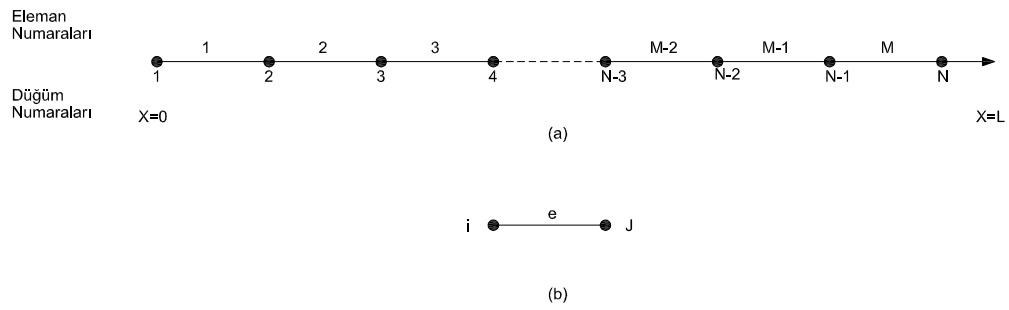
$$J = \frac{1}{2} \int k \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 dx \quad (2.38)$$

### 2.6.2. Sonlu elemanlar metodu analizi

Sınır değer problemlerinin sonlu elemanlar analizinde takip edilecek aşamalar ve sonlu eleman denklemlerinin türetilmesi daha önce açıklanmıştı. Şimdi bu adımları sırası ile tek boyutlu probleme uygulayalım.

### 1.Adım: Tanım kümesinin elemanlara ayrılması

İlk olarak (0,L) tanım kümesinin alt elemanlara ayrılması ve ayrılan elemanların tanımlanması gerekir. Yani elemanların düğüm noktalarını sayılar ile tanımlamak gerekir.



Şekil 2.1. Tek boyutlu bölgenin elemanlara ayrılması (a) Global numaralandırma (tüm sistem için düğüm notasyonu) (b) Lokal numaralandırma (e elemanı için düğüm notasyonu)

### 2. Adım: Enterpolasyon fonksiyon (polinom) seçimi

Elemanlar içerisindeki potansiyelin doğrusal değiştiği kabul edilir. Elemanlar için düğüm noktaları seçilir ve eleman içindeki herhangi bir noktada geçerli olan polinom yaklaşımı yazılır.

$$\phi^e(x) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x \quad (2.39)$$

Düğüm noktalarındaki potansiyeller aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$i \text{ noktasında } \phi^e(x_i) = \phi_i$$

$$j \text{ noktasında } \phi^e(x_j) = \phi_j$$

Bu tanımlardan  $\phi_i$  ve  $\phi_j$  şu şekilde yazılabilir.

$$\phi_i = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x_i \quad (2.40)$$

$$\phi_j = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x_j \quad (2.41)$$

Burada  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  katsayıları çekilerek;

$$\alpha_1 = \frac{1}{l^e} (a_i \cdot \phi_i + a_j \cdot \phi_j) \quad (2.42)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{l^e} (b_i \cdot \phi_i + b_j \cdot \phi_j) \quad (2.43)$$

$$a_i = x_j \quad (2.44)$$

$$a_j = -x_i \quad (2.45)$$

$$b_i = -1 \quad (2.46)$$

$$b_j = 1 \quad (2.47)$$

Ve  $l^e$  : eleman uzunluğu;

$$l^e = x_j - x_i = a_i + a_j \quad (2.48)$$

Bu durumda Eş. 2.39 aşağıdaki hali alır.

$$\phi^e(x) = \frac{1}{l^e} [(a_i + b_i \cdot x)\phi_i + (a_j + b_j \cdot x)\phi_j] \quad (2.49)$$

Eş. 2.21 gereğince;

$$\phi^e(x) = [N(x)]\vec{\phi}^e \quad (2.50)$$

Eşitliğini elde etmiştik. Son yazdığımız iki denklemin eşitliğinden  $[N(x)]$  ve  $\vec{\phi}^e$  aşağıdaki gibi olur.

$$[N(x)] = [N_i(x) \quad N_j(x)] = \frac{1}{l^e} [(a_i + b_i \cdot x) \quad (a_j + b_j \cdot x)] \quad (2.51)$$

ve

$$\vec{\phi}^e = \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

$N_i(x)$ : e elemanının i. düğüm noktası için yazılmış enterpolasyon fonksiyonudur.

3. Adım: Eleman matrislerinin bulunması

Bu kısımda elemana ait denklem takımı türetilerek eleman matrisi elde edilir.  $[N(x)]$  matrisi Eş. 2.52 denkleminde olduğu gibi tanımlandıktan sonra Eş. 2.35 ile tanımlı  $[B]$  ve  $[D]$  matrisleri aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{1}{l^e} [b_i \quad b_j] \quad (2.53)$$

$$[D] = [k] \quad (2.54)$$

$$k = \varepsilon = \varepsilon_0 . \varepsilon_r \quad (2.55)$$

Eş. 2.34 ile tanımlı  $[K^e]$  matrisi şu şekilde elde edilir.

$$[K^e] = \int_{l^e} [B]^T [D][B] dl \quad (2.56)$$

$$[K^e] = \frac{1}{(l^e)^2} \int_{l^e} \begin{bmatrix} b_i \\ b_j \end{bmatrix} [k] \begin{bmatrix} b_i & b_j \end{bmatrix} dl \quad (2.57)$$

$$[K^e] = \frac{k}{l^e} \begin{bmatrix} b_i^2 & b_i . b_j \\ b_i . b_j & b_j^2 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

Tek bir eleman için bulunan eleman matrisi tüm elemanlar için tek tek bulunur ve bu elemanlar, elemanların birleştirilmesi yöntemiyle birleştirilerek sistem matrisi elde edilir. Bu matrise sınır koşulları da ilave edilerek çözülmesi gereken denklem takımına ulaşılır.

Bundan sonraki adımlar olan elemanların birleştirilmesi, sınır koşullarının probleme dahil edilmesi ve elde edilen denklemlerin çözülmesi, iki boyutlu sonlu elemanlar metoduyla analiz kısmında ayrıntılı olarak anlatılacaktır. İki boyutlu analizin tek boyutludan farkı sadece matrislerdeki terim sayısı olacaktır.

## 2.7. İki Boyutlu Sonlu Elemanlar Metoduyla Analiz

### 2.7.1. Sınır değer probleminin tanımlanması

Kartezyen koordinatlarda iki boyutlu düzlemde kararlı durum problemi için geçerli diferansiyel denklem aşağıdaki gibidir [5]. Bu denklem iki boyutlu Laplace denklemdir.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.59)$$

Sınır koşulları herhangi bir S yüzeyi boyunca aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\phi = \phi_0(x, y)$$

Yukarıdaki diferansiyel denklemin çözümü ilgilendiğimiz alan boyunca tanımlı olan enerji fonksiyonunu minimum yapan  $\phi(x, y)$  ifadesinin elde edilmesi demektir. Yani; alanda depolanan enerjiyi minimum yapan alan fonksiyonu  $\phi(x, y)$  aynı zamanda iki boyutlu Laplace denkleminin de çözümüdür.

İlgilendiğimiz bölgenin S yüzeyi boyunca depolanan elektrik enerjisi problem çözümünde kullanılacak olan fonksiyoneldir ve aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$J = \frac{1}{2} \iint_S \left[ k \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + k \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] dS \quad (2.60)$$

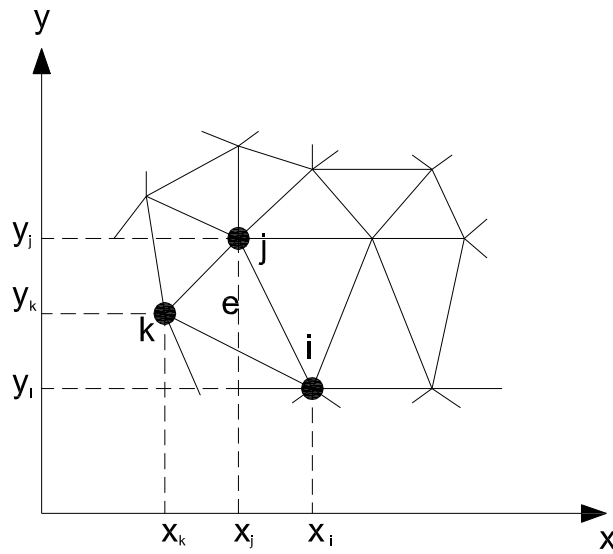
Bu fonksiyonelin sınır koşullarını da sağlayacak şekilde minimize edilmesi Laplace denkleminin çözümünü verir.

### 2.7.2. Sonlu elemanlar metodu analizi

Bu iki boyutlu alan probleminin sonlu elemanlar çözümü aşağıda adım-adım anlatılmıştır.

#### 1. Adım: Tanım kümesinin elemanlara ayrılması

İki boyutlu alan problemlerinin sonlu elemanlar çözümünde çözüm bölgesi üçgensel veya dörtgensel elemanlara ayrıştırılabilir. Burada üç düğümlü üçgensel elemanlar kullanılacaktır.



Şekil 2.2. İncelenen S alanının üçgensel elemanlara ayrıştırılması

#### 2. Adım: Enterpolasyon fonksiyon seçimi

Her eleman için düğüm noktaları seçilir ve eleman içinde herhangi bir noktada geçerli polinom yaklaşımı yazılır. Elemanlar içerisinde potansiyelin doğrusal değiştiği kabul edilir. Bu elemanlardan biri olan e üçgen elemanını düşünelim.



Düğüm noktaları i, j, k olan eleman içindeki potansiyel dağılım fonksiyonu  $\phi(x, y)$  şöyledir;

$$\phi(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot y \quad (2.61)$$

Bu denklemden her bir eleman içindeki potansiyel dağılımının doğrusal olduğu görülür. Bu türdeki bir yaklaşım için e elemanına ait katsayıları  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ; i, j, k düğümlerindeki potansiyeller yardımıyla kolayca hesaplanabilir.

$$\text{i noktasında} \quad \phi^e(x_i, y_i) = \phi_i$$

$$\text{j noktasında} \quad \phi^e(x_j, y_j) = \phi_j$$

$$\text{k noktasında} \quad \phi^e(x_k, y_k) = \phi_k$$

Diyecek olursak  $\phi_i, \phi_j, \phi_k$  şu şekilde yazılabilir.

$$\phi_i = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x_i + \alpha_3 \cdot y_i \quad (2.62)$$

$$\phi_j = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x_j + \alpha_3 \cdot y_j \quad (2.63)$$

$$\phi_k = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x_k + \alpha_3 \cdot y_k \quad (2.64)$$

Burada  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  katsayıları Kramer Kuralı kullanılarak bulunabilir.

$$\alpha_1 = \frac{1}{2\Delta^e} (a_i \cdot \phi_i + a_j \cdot \phi_j + a_k \cdot \phi_k) \quad (2.65)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2\Delta^e} (b_i \cdot \phi_i + b_j \cdot \phi_j + b_k \cdot \phi_k) \quad (2.66)$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2\Delta^e} (c_i \cdot \phi_i + c_j \cdot \phi_j + c_k \cdot \phi_k) \quad (2.67)$$

Buradaki a, b, c katsayıları şöyledir.

$$a_i = x_j \cdot y_k - x_k \cdot y_j \quad (2.68)$$

$$a_j = x_k \cdot y_i - x_i \cdot y_k \quad (2.69)$$

$$a_k = x_i \cdot y_j - x_j \cdot y_i \quad (2.70)$$

$$b_i = y_j - y_k \quad (2.71)$$

$$b_j = y_k - y_i \quad (2.72)$$

$$b_k = y_i - y_j \quad (2.73)$$

$$c_i = x_k - x_j \quad (2.74)$$

$$c_j = x_i - x_k \quad (2.75)$$

$$c_k = x_j - x_i \quad (2.76)$$

Ve

$\Delta^e$ : üçgensel elemanın alanı;

$$\Delta^e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} = \frac{x_i \cdot y_j + x_k \cdot y_i - x_j \cdot y_i - x_i \cdot y_k}{2} = \frac{b_i \cdot c_j - b_j \cdot c_i}{2} \quad (2.77)$$

Bu urumda Eş. 2.61 aşağıdaki hali alır.

$$\phi^e(x, y) = \frac{1}{2\Delta^e} \left( (a_i + b_i \cdot x + c_i \cdot y) \cdot \phi_i + (a_j + b_j \cdot x + c_j \cdot y) \cdot \phi_j + (a_k + b_k \cdot x + c_k \cdot y) \cdot \phi_k \right) \quad (2.78)$$

Eş. 2.21'ü hatırlayacak olursak

$$\phi^e(x, y) = [N(x, y)] \vec{\phi} \quad (2.79)$$

denkleminde eşdeğerdir. İki denklemin eşitliğinden  $[N(x, y)]$  ve  $\vec{\phi}$  aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$[N(x, y)] = [N_i(x, y) \quad N_j(x, y) \quad N_k(x, y)] \quad (2.80)$$

$$[N(x, y)] = \frac{1}{2\Delta^e} [(a_i + b_i \cdot x + c_i \cdot y) \quad (a_j + b_j \cdot x + c_j \cdot y) \quad (a_k + b_k \cdot x + c_k \cdot y)] \quad (2.81)$$

$$\vec{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

$N_i(x, y)$ : e elemanın i. düğüm noktası için yazılmış enterpolasyon fonksiyonudur.

### 3. Adım: Eleman matrislerinin bulunması

Bu kısımda eleman özellikleri belirlenir. Yani elemana ait denklem takımları ve matrisleri türetilir.  $[N(x, y)]$  matrisi Eş. 2.80-82’de olduğu gibi tanımlandıktan sonra Eş. 2.35 ile tanımlı  $[B]$  matrisi elde edilecektir.

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta^e} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

$[D]$  matrisi ise ortamın dielektrik katsayıları olan  $\varepsilon$  sayılarından oluşur.  $\varepsilon_0$  boşluğun dielektrik katsayısı ve  $\varepsilon_r$  ortamın bağıl dielektrik katsayısı olduğuna göre  $[D]$  matrisi şu şekilde hesaplanır.

$$[D] = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

$$k = \varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$$

$$[K^e] = \iint_S [B]^T [D] [B] dS \quad (2.85)$$

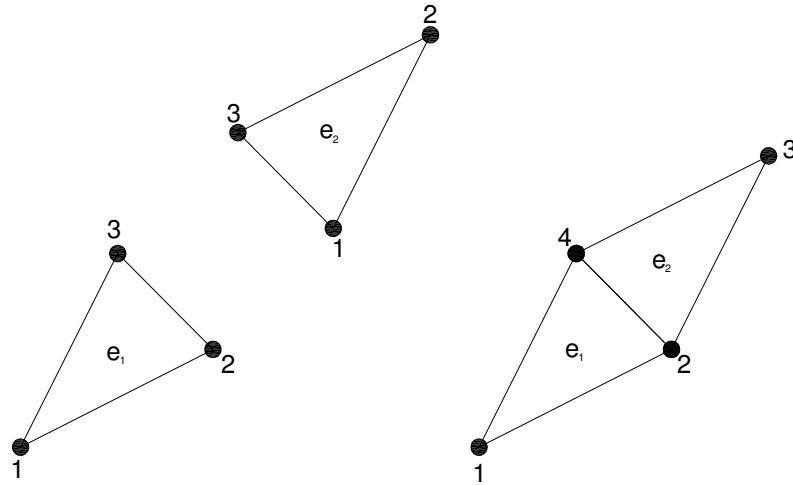
$$[K^e] = \frac{1}{4(\Delta^e)^2} \iint_S \begin{bmatrix} b_i & c_i \\ b_j & c_j \\ b_k & c_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} dS \quad (2.86)$$

$$[K^e] = \frac{1}{4(\Delta^e)^2} \begin{bmatrix} (b_i^2 + c_i^2) & (b_i b_j + c_i c_j) & (b_i b_k + c_i c_k) \\ (b_i b_j + c_i c_j) & (b_j^2 + c_j^2) & (b_j b_k + c_j c_k) \\ (b_i b_k + c_i c_k) & (b_j b_k + c_j c_k) & (b_k^2 + c_k^2) \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

Böylece elde ettiğimiz i, j, k düğüm noktalarına sahip üçgensel eleman matrisi elde edilmiş olur. Her bir eleman için matrisler aynı şekilde bulunur ve eleman matrislerinin birleştirilmesi yöntemi ile birleştirilerek genel denklem takımı elde edilir.

#### 4. Adım: Elemanların birleştirilmesi

Genelleştirilmiş  $[K]$  matrisinin elde edilmesi işlemi lokal düğüm numaralarının global numaralarına dönüştürülmesi işlemidir.



Şekil 2.3. Lokal ve global numaralandırma

Yukarıdaki şekilde (a) da birbirinden bağımsız iki üçgensel eleman ve lokal düğüm noktaları (b) de ise bu elemanların birleştirilmiş hali ve global düğüm numaraları görülmektedir. Birinci eleman  $e_1$  ve ikinci eleman  $e_2$  için eleman matrisleri aşağıdaki gibidir.

$$[K_1] = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

$$[K_2] = \begin{bmatrix} K_{11}^2 & K_{12}^2 & K_{13}^2 \\ K_{21}^2 & K_{22}^2 & K_{23}^2 \\ K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

Bu iki matrisin birleştirilmesi sonucu elde edilecek matris sistemde dört global düğüm noktası olduğu için 4x4 boyutunda olacaktır. Ve buradaki amaç bu dört düğüm noktasından alan değeri bilinmeyen düğüm noktalarının alan değerini bulmaktır.

Çizelge 2.1. Elamanlar için lokal ve global numaralandırma

Eleman Numarası	Lokal Düğüm Numarası	Global Düğüm Numarası
1	1	1
	2	2
	3	4
2	1	2
	2	3
	3	4

Bu iki eleman birleştirilirken dikkat edilecek nokta birinci elemanın 2 numaralı lokal düğümü ile ikinci elemanın 1 numaralı düğümü aslında aynı nokta olup, global düğüm numaraları 2'dir. Ancak bu şekilde alanın sürekliliği sağlanabilir ve elemanlar birleştirilebilir. Çizelge 1.1'de 1. ve 2. elemanlar için lokal düğüm numaralarına karşılık gelen global düğüm numaraları gösterilmiştir.

Bu dönüşüm tablosu dikkate alınarak  $[K_1]$  ve  $[K_2]$  matrislerinin  $[K^{genel}]$  matrisindeki yerleşimleri aşağıdaki gibi olur.

$$[K_1^{genel}] = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 & K_{13}^1 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & 0 & K_{23}^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & 0 & K_{33}^1 \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

$$[K_2^{genel}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{11}^2 & K_{12}^2 & K_{13}^2 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 & K_{23}^2 \\ 0 & K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

Genelleştirilmiş K matrisi bu iki matris yardımı ile aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$[K^{genel}] = \sum_e^M [K_e^{genel}] = [K_1^{genel}] + [K_2^{genel}] + \dots + [K_M^{genel}] \quad (2.92)$$

Bu durumda genelleştirilmiş matris;

$$[K^{genel}] = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 & K_{13}^1 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 & K_{23}^1 + K_{13}^2 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 & K_{23}^2 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 + K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^1 + K_{33}^2 \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

Burada iki eleman için yaptığımız birleştirme işlemi sistemde bulunan bütün elemanlar için yenilenir ve sonuçta boyutları sistemdeki düğüm sayısına eşit bir kare matris elde edilir. Bu incelenen sistemin genelleştirilmiş K matrisidir. Genelleştirilmiş K matrisinin elde edilmesiyle aşağıdaki genel denklem takımı elde edilir.

$$[K_{n*n}^{genel}] * [\phi_{n*1}] = \bar{0}_{n*1} \quad (2.94)$$

### 5. Adım: Sınır koşullarının probleme dâhil edilmesi

Eleman birleştirme işlemi sonucu tüm sistemin matematiksel modeli aşağıdaki gibidir.

$$[K_{n \times n}^{genel}] * [\phi_{n \times 1}] = \vec{P}_{n \times 1} \quad (2.95)$$

Bu denklemin çözülebilmesi için sınır koşullarının sisteme dâhil edilmesi gerekir.  $\phi_{n \times 1}$ 'in çözümü ancak bu şekilde gerçekleştirilebilir. Alan problemlerinde en az bir çoğunlukla da birden fazla sınır koşulu olmalıdır.

Sınır koşulları belli olan düğümlerdeki değerler probleme dahil edildikten sonra diğer düğümlerdeki değerler tespit edilebilir.

Sınır koşullarımızdan biri  $\phi_j = A$  olsun. Bu j noktasındaki alan değerinin A olduğunu gösterir ve bu sınır koşulunun probleme dahil edilmesi aşağıdaki prosedür dahilinde gerçekleştirilebilir.

Eğer  $\phi_j$  değeri A olarak değiştirmek isteniyorsa  $\vec{P}$  karakteristik vektörü yeniden düzenlenir.

$$P_i = P_i - K_{ij} \cdot A \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.96)$$

Bu düzenlemeden sonra  $\phi_j$  terimine tekabül eden  $[K^{genel}]$  matrisindeki satır ve sütunlar sıfıra eşitlenir. Yalnız köşegen üzerindeki terimler bire eşitlenir.

$$K_{ij} = K_{ji} = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.97)$$

$$K_{jj} = 1 \quad (2.98)$$



Son olarak sınır değeri A, P karakteristik vektörüne dâhil edilir.

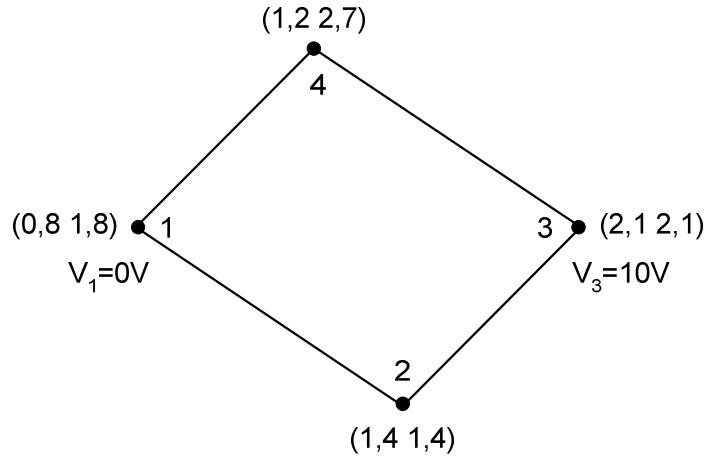
$$P_j = A \quad (2.99)$$

Bu üç adımlık prosedür değeri belli olan tüm sınırlara program tarafından uygulanır.

6. Adım: Denklem sisteminin çözümü

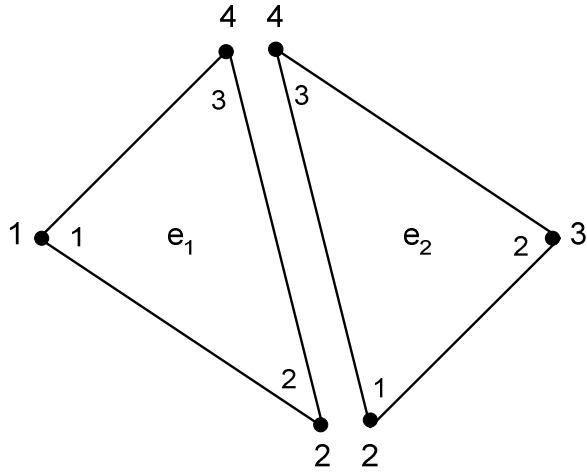
Sınır koşullarının da ilave edilmesiyle elde edilen yeni denklem takımı herhangi bir nümerik metot yardımıyla çözümlenebilir.

## 2.8. İki Boyutlu Alan Problemi İçin Bir Örnek



Yukarıdaki şekilde 1 ve 3 numaralı düğümlerin potansiyel değerleri bilinmektedir. Sonlu elemanlar metodu kullanarak 2 ve 4 numaralı düğümlerin potansiyel değerlerini hesaplayalım.

Çözüm bölgesi üçgensel elemanlara ayrılır ve elemanlar tanımlanır.



Elemanların lokal düğüm numaraları ve bu lokal düğüm numaralarına karşılık gelen global düğüm numaraları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Eleman Numarası	Lokal Düğüm Numarası	Global Düğüm Numarası
1	1	1
	2	2
	3	4
2	1	2
	2	3
	3	4

Enterpolasyon polinomu tanımlanır.

$$\Phi^e(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$$

Üçgensel eleman için lokal düğüm koordinatları aşağıdaki gibi tanımlanır.

Lokal Düğüm No	$(x, y)$
1	$(x_1, y_1)$
2	$(x_2, y_2)$
3	$(x_3, y_3)$

Hesaplamalarda kolaylık sağlması için aşağıdaki değerler hesaplanır.

$$a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2$$

$$a_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3$$

$$a_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

$$b_1 = y_2 - y_3$$

$$b_2 = y_3 - y_1$$

$$b_3 = y_1 - y_2$$

$$c_1 = x_3 - x_2$$

$$c_2 = x_1 - x_3$$

$$c_3 = x_2 - x_1$$

Elemanın alanı hesaplanır

$$\Delta^e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = x_2 y_3 + x_1 y_2 + x_3 y_1 - x_2 y_1 - x_3 y_2 - x_1 y_3$$

$$\Delta^e = \frac{1}{2} (b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

Bu hesaplamalar yapıldıktan sonra eleman matrisinin oluşturulmasına geçilir.

$$K_{ij} = \frac{1}{4\Delta^e} (b_i b_j + c_i c_j) \quad ; \quad i = 1,2,3 \quad j = 1,2,3$$

Bu şekilde tüm eleman matrisleri oluşturulur ve bu matrisler birleştirilerek genelleştirilmiş  $K$  matrisi bulunur.

(1) nolu eleman için;

Lokal Düğüm No	(x, y)
1	(0,8 1,8)
2	(1,4 1,4)
3	(1,2 2,7)

$$b_1 = y_2 - y_3 = 1,4 - 2,7 = -1,3$$

$$c_1 = x_3 - x_2 = 1,2 - 1,4 = -0,2$$

$$b_2 = y_3 - y_1 = 2,7 - 1,8 = 0,9$$

$$c_2 = x_1 - x_3 = 0,8 - 1,2 = -0,4$$

$$b_3 = y_1 - y_2 = 1,8 - 1,4 = 0,4$$

$$c_3 = x_2 - x_1 = 1,4 - 0,8 = 0,6$$

(1) numaralı elemanın alanı;

$$\Delta_1 = \frac{1}{2}(b_1c_2 - b_2c_1) = \frac{1}{2}[(-1,3)(-0,4) - (0,9)(-0,2)] = 0,35$$

(1) numaralı eleman matrisinde bulunan terimler;

$$K_{11} = \frac{1}{4\Delta_1}(b_1b_1 + c_1c_1) = \frac{1}{4 * 0,35}[(-1,3)(-1,3) + (-0,2)(-0,2)] = 1,2357$$

$$K_{12} = K_{21} = \frac{1}{4\Delta_1}(b_1b_2 + c_1c_2) = \frac{1}{4 * 0,35}[(-1,3)(0,9) + (-0,2)(-0,4)] = -0,7786$$

$$K_{13} = K_{31} = \frac{1}{4\Delta_1}(b_1b_3 + c_1c_3) = \frac{1}{4 * 0,35}[(-1,3)(0,4) + (-0,2)(0,6)] = -0,4571$$

$$K_{22} = \frac{1}{4\Delta_1}(b_2b_2 + c_2c_2) = \frac{1}{4 * 0,35}[(0,9)(0,9) + (-0,4)(-0,4)] = 0,6929$$

$$K_{23} = K_{32} = \frac{1}{4\Delta_1}(b_2b_3 + c_2c_3) = \frac{1}{4 * 0,35}[(0,9)(0,4) + (-0,4)(-0,6)] = 0,0857$$

$$K_{33} = \frac{1}{4\Delta_1}(b_3b_3 + c_3c_3) = \frac{1}{4 * 0,35}[(0,4)(0,4) + (0,6)(0,6)] = 0,3714$$

$$[K_1] = \begin{bmatrix} 1,2357 & -0,7786 & -0,4571 \\ -0,7786 & 0,6929 & 0,0857 \\ -0,571 & 0,0857 & 0,3714 \end{bmatrix}$$

$[K_1]$  birinci eleman matrisi bulundu aynı hesaplamalar ikinci eleman için de yapılarak  $[K_2]$  matrisi elde edilir.

$$[K_2] = \begin{bmatrix} 0,5571 & -0,4571 & -0,1 \\ -0,4571 & 0,8238 & -0,3667 \\ -0,1 & -0,3667 & 0,4667 \end{bmatrix}$$

$[K_1]$  ve  $[K_2]$  matrisleri birleştirilerek genelleştirilmiş  $K$  matrisi bulunur.

$$[K^{genel}] = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 & K_{13}^1 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 & K_{23}^1 + K_{13}^2 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 & K_{23}^2 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 + K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^1 + K_{33}^2 \end{bmatrix}$$

Gerekli değerler yerine konularak genelleştirilmiş  $K$  matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$[K^{genel}] = \begin{bmatrix} 1,2357 & -0,7786 & 0 & -0,4571 \\ -0,7786 & 1,25 & -0,4571 & -0,0143 \\ 0 & -0,4571 & 0,8238 & -0,3667 \\ -0,4571 & -0,0143 & -0,3667 & 0,8381 \end{bmatrix}$$

$$[K^{genel}]\Phi = 0 \quad \text{yani} \quad [K^{genel}]V = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1,2357 & -0,7786 & 0 & -0,4571 \\ -0,7786 & 1,25 & -0,4571 & -0,0143 \\ 0 & -0,4571 & 0,8238 & -0,3667 \\ -0,4571 & -0,0143 & -0,3667 & 0,8381 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$V_1=0$  ve  $V_3=10$  bilinen değerleri yerine yazılarak elde edilen aşağıdaki sistem herhangi bir nümerik metot yardımı ile çözülebilir.

$$\begin{bmatrix} 1,2357 & -0,7786 & 0 & -0,4571 \\ -0,7786 & 1,25 & -0,4571 & -0,0143 \\ 0 & -0,4571 & 0,8238 & -0,3667 \\ -0,4571 & -0,0143 & -0,3667 & 0,8381 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ V_2 \\ 10 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$1,25V_2 - 0,0143V_4 = 0,4571 \times 10$$

$$-0,0143V_2 + 0,8381V_4 = 0,3667 \times 10$$

Denklemleri çözülerek  $V_2 = 3,708$  ve  $V_4 = 4,438$  olarak bulunur.

## 2.9. Silindirik Koordinatlarda Sonlu Elemanlar Analizi

### 2.9.1. Sınır değer probleminin tanımlanması

Dönel silindirik elektrik potansiyel problemlerinde Laplace denklemi aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad \text{şeklinde açılır.}$$

Eğer incelediğimiz bölgenin  $\theta$  ya göre silindirik simetriye sahip olduğunu düşünürsel Laplace denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.100)$$

Problemin sınır koşulları şöyledir.

$$\phi = \phi_0(r, z) \quad \text{ve} \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (2.101)$$

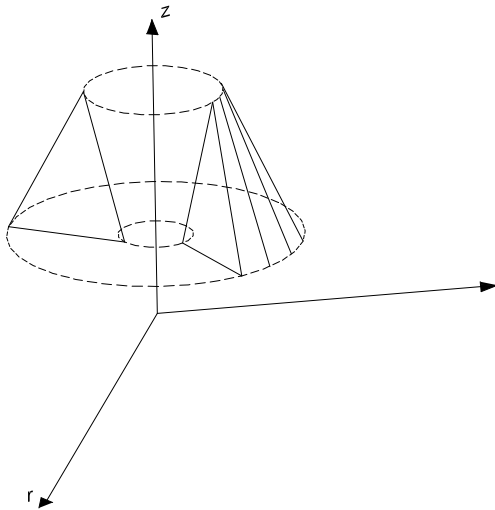
İkinci sınır koşulu yüzey boyunca alanın normali doğrultusunda sabit olduğunu ifade eder.

### 2.9.2. Problemin sonlu elemanlar metoduyla modellenmesi

Kartezyen koordinatlarda olduğu gibi dönel silindirik problemlerde de Laplace denkleminin çözümü varyasyonel yaklaşım metodu ile minimizasyon problemine dönüşür. Aşağıda verilen fonksiyoneli minimum yapan  $\phi(r, z)$  potansiyeli hesaplanabilirse Laplace denklemi çözülmüş olacaktır.

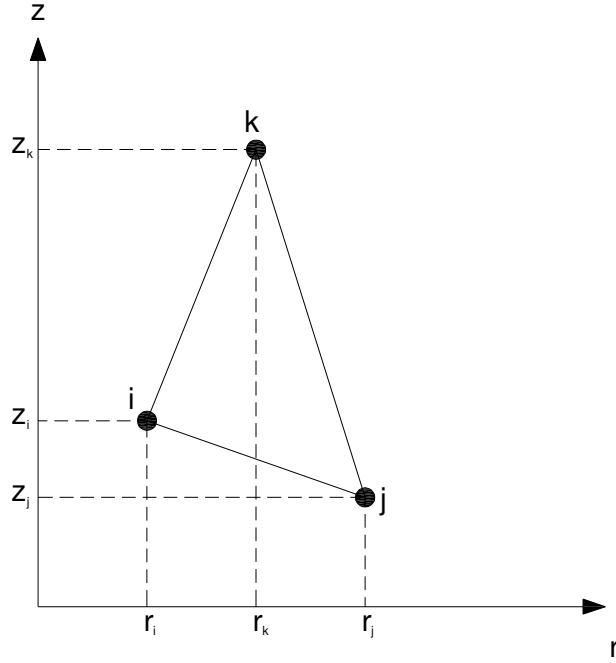
$$J = \frac{1}{2} \iiint_V \left[ kr \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 + kr \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] dV \quad (2.102)$$

1. Adım: Silindirik bölgenin üçgensel kesitli ring elemanlara ayrıştırılması.



Şekil 2.4. Üçgensel kesitli ring elemanı





Şekil 2.5. Üçgensel kesitli ring eleman için düğüm notasyonu

## 2. Adım: Enterpolasyon fonksiyonunun seçimi

e elemanı içinde potansiyelin doğrusal değiştiği kabul edilerek doğal koordinat sistemi kullanılırsa, eleman içerisindeki potansiyel değeri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\phi^e = [N] \bar{\phi} \quad (2.103)$$

Yani

$$\phi^e = N_i \phi_i + N_j \phi_j + N_k \phi_k \quad (2.104)$$

$$N_i = L_1 \quad (2.105)$$

$$N_j = L_2 \quad (2.106)$$

$$N_k = L_3 \quad (2.107)$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_k \end{bmatrix} \quad (2.108)$$

$$\vec{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \end{bmatrix} \quad (2.109)$$

Düğüm noktalarındaki silindirik koordinatlar aşağıdaki gibi doğal koordinatlara dönüştürülür.

$$r = L_1 r_i + L_2 r_j + L_3 r_k \quad (2.110)$$

$$z = L_1 z_i + L_2 z_j + L_3 z_k \quad (2.111)$$

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1 \quad (2.112)$$

$L_1, L_2, L_3$  Eş 2.21'deki denklemlerden yararlanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$L_1(r, z) = \frac{1}{2\Delta^e} (a_1 + b_1 r + c_1 z) \quad (2.113)$$

$$L_2(r, z) = \frac{1}{2\Delta^e} (a_2 + b_2 r + c_2 z) \quad (2.114)$$

$$L_3(r, z) = \frac{1}{2\Delta^e} (a_3 + b_3 r + c_3 z) \quad (2.115)$$

$\Delta^e$  düğüm noktalarını i, j, k olan üçgenin alanıdır.

$$\Delta^e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & r_i & z_i \\ 1 & r_j & z_j \\ 1 & r_k & z_k \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (r_i(z_j - z_k) + r_j(z_k - z_i) + r_k(z_i - z_j)) \quad (2.116)$$

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta^e} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ r \\ z \end{bmatrix} \quad (2.117)$$

$$\begin{aligned} a_1 &= r_j z_k - r_k z_j \\ b_1 &= z_j - z_k \\ c_1 &= r_k - r_j \end{aligned} \quad (2.118)$$

$$\begin{aligned} a_2 &= r_k z_i - r_i z_k \\ b_2 &= z_k - z_i \\ c_2 &= r_i - r_k \end{aligned} \quad (2.119)$$

$$\begin{aligned} a_3 &= r_i z_j - r_j z_i \\ b_3 &= z_i - z_j \\ c_3 &= r_j - r_i \end{aligned} \quad (2.120)$$

3. Adım: Eleman matris ve denklemlerinin türetilmesi

$$[K^e] = \iiint_V [B]^T [D][B] dV = [B]^T [D][B] V \quad (2.121)$$

Burada  $V = 2\pi \times rA$  'dır. Ve bu durumda  $[K^e]$  aşağıdaki hale gelir.

$$[K^e] = 2\pi \iiint_{\Delta^e} r [B]^T [D][B] dA \quad (2.122)$$

$[D]$  ve  $[B]$  matrisleri kartezyen koordinatlardaki Eş. 2.83 ve 2.84'e benzer biçimde şöyle ifade edilir.

$$[D] = \begin{bmatrix} rk & 0 \\ 0 & rk \end{bmatrix} \quad (2.123)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} & \frac{\partial N_j}{\partial r} & \frac{\partial N_k}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_j}{\partial z} & \frac{\partial N_k}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L_i}{\partial r} & \frac{\partial L_j}{\partial r} & \frac{\partial L_k}{\partial r} \\ \frac{\partial L_i}{\partial z} & \frac{\partial L_j}{\partial z} & \frac{\partial L_k}{\partial z} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta^e} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \quad (2.124)$$

$$[K^e] = \frac{2k\pi}{4(\Delta^e)^2} \begin{bmatrix} b_1^2 + c_1^2 & b_1b_2 + c_1c_2 & b_1b_3 + c_1c_3 \\ b_1b_2 + c_1c_2 & b_2^2 + c_2^2 & b_2b_3 + c_2c_3 \\ b_1b_3 + c_1c_3 & b_2b_3 + c_2c_3 & b_3^2 + c_3^2 \end{bmatrix} \iint_{\Delta^e} r^2 dA \quad (2.125)$$

Radyal mesafe  $r$  doğal koordinatlar türünden şöyle tanımlanır;

$$r = L_1 r_i + L_2 r_j + L_3 r_k \quad (2.126)$$

$$\bar{r}^2 = \iint_{\Delta^e} r^2 dA = \iint_{\Delta^e} \begin{bmatrix} r_i & r_j & r_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1^2 & L_1L_2 & L_1L_3 \\ L_1L_2 & L_2^2 & L_2L_3 \\ L_1L_3 & L_2L_3 & L_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_i \\ r_j \\ r_k \end{bmatrix} dA \quad (2.127)$$

Burada  $\bar{r}$  üçgensel elemanın merkezine olan radyal uzaklıktır ve aşağıdaki gibi yazılır.

$$\bar{r} = \frac{r_i + r_j + r_k}{3} \quad (2.128)$$

Doğal koordinatlar için İntegral formülü şöyledir.

$$\iint_A (L_1^\alpha + L_2^\beta + L_3^\gamma) dA = \frac{\alpha! \beta! \gamma!}{(\alpha + \beta + \gamma + 2)!} 2\Delta^e \quad (2.129)$$

Bu kural kullanılarak Eş. 2.127'deki İntegral alınabilir.

$$\iint_{\Delta^e} \begin{bmatrix} L_1^2 & L_1 L_2 & L_1 L_3 \\ L_1 L_2 & L_2^2 & L_2 L_3 \\ L_1 L_3 & L_2 L_3 & L_3^2 \end{bmatrix} dA = \begin{bmatrix} \frac{2!}{4!} & \frac{1!1!}{4!} & \frac{1!1!}{4!} \\ \frac{1!1!}{4!} & \frac{2!}{4!} & \frac{1!1!}{4!} \\ \frac{1!1!}{4!} & \frac{1!1!}{4!} & \frac{2!}{4!} \end{bmatrix} 2\Delta^e = \frac{2\Delta^e}{24} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.130)$$

$$\bar{r}^2 = \iint_{\Delta^e} r^2 dA = \frac{\Delta^e}{12} \begin{bmatrix} r_i & r_j & r_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_i \\ r_j \\ r_k \end{bmatrix} \quad (2.131)$$

Bu ifadeyi Eş. 2.126'da yerine yazarak  $[K^e]$  eleman matrisini elde edebiliriz.

$$[K^e] = \frac{\bar{r}^2 k \pi}{2(\Delta^e)} \begin{bmatrix} b_1^2 + c_1^2 & b_1 b_2 + c_1 c_2 & b_1 b_3 + c_1 c_3 \\ b_1 b_2 + c_1 c_2 & b_2^2 + c_2^2 & b_2 b_3 + c_2 c_3 \\ b_1 b_3 + c_1 c_3 & b_2 b_3 + c_2 c_3 & b_3^2 + c_3^2 \end{bmatrix} \quad (2.132)$$

Bu eleman için elde ettiğimiz  $[K^e]$  eleman matrisi bölgeyi oluşturan tüm elemanlar için bulunur ve eleman birleştirmesi metodu ile birleştirilerek genelleştirilmiş  $[K^{genel}]$  matrisi elde edilir.

Bu denkleme sınır koşulları da ilave edilerek çözülmesi gereken denklem takımı elde edilir. Bu aşamadan sonra yapılacak işlemse uygun bir nümerik metot ile bu denklemlerin çözülmesidir. Bu işlemler kartezyen koordinatlarda olduğu gibi yapılır.

## 2.10. Elektrik Alan Hesabı

### 2.10.1. Kartezyen koordinatlarda elektrik alan hesabı

Sonlu elemanlar metoduyla incelenen bölgeyi oluşturan üçgensel elemanların düğüm noktalarındaki potansiyel değerleri hesapladıktan sonra eleman içerisinde sürekli olan enterpolasyon polinomları elde edilebilir ve incelenen bölgenin herhangi bir yerindeki potansiyel bulunabilir. Bir noktadaki potansiyel biliniyorsa aynı noktadaki elektrik alan kolayca hesaplanabilir.

Alan şiddeti vektörü ile potansiyel arasında kısmi türevsel bir ilişki vardır ve bu ilişki aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\vec{E} = -\nabla \phi \quad (2.133)$$

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{k}\right) \quad (2.134)$$

Bu bağlantı kullanılarak elektrik alan bileşenleri elde edilebilir.

$$E_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (2.135)$$

$$E_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (2.136)$$

$$E_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (2.137)$$

İki boyutlu alan problemlerinde sadece x ve y bileşenleri olacağından alan ifadesi,

$$\vec{E} = -(E_x \vec{i} + E_y \vec{j}) \quad (2.138)$$

Şeklinde olur. Yani,

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j}\right) \quad (2.139)$$

Elektrik alanın bileşenleri elde edildikten sonra genliği aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$|\vec{E}| = \sqrt{|E_r|^2 + |E_z|^2} \quad (2.140)$$

### 2.10.2. Silindirik koordinatlarda elektrik alan hesabı

Silindirik koordinatlarda kullanılan gradyent ifadesinin açılımı kartezyen koordinatlardan farklıdır.

$$\vec{E} = -\nabla \phi \quad (2.141)$$

$$\vec{E} = -\left(a_r \frac{\partial \phi}{\partial r} + a_\theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + a_z \frac{\partial \phi}{\partial z}\right) \quad (2.142)$$

İncelediğimiz bölge silindirik simetriye sahip olduğu için  $\theta$  ya göre değişim yoktur bu nedenle  $\theta$  ya bağlı terim sıfırdır.

$$\vec{E} = -\left(a_r \frac{\partial \phi}{\partial r} + a_z \frac{\partial \phi}{\partial z}\right) \quad (2.143)$$

$$\phi = N_i \phi_i + N_j \phi_j + N_k \phi_k$$

$N_1, N_2, N_3$  şekil fonksiyonlarının açık hali şöyledir.

$$N_i = \frac{1}{2\Delta^e} (a_i + b_i r + c_i z) \quad (2.144)$$

$$N_j = \frac{1}{2\Delta^e} (a_j + b_j r + c_j z) \quad (2.145)$$

$$N_k = \frac{1}{2\Delta^e} (a_k + b_k r + c_k z) \quad (2.146)$$

a, b, c katsayıları r, z koordinatları yardımıyla aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$\begin{aligned} a_i &= r_j z_k - r_k z_j \\ b_i &= z_j - z_k \\ c_i &= r_k - r_j \end{aligned} \quad (2.147)$$

$$\begin{aligned} a_j &= r_k z_i - r_i z_k \\ b_j &= z_k - z_i \\ c_j &= r_i - r_k \end{aligned} \quad (2.148)$$

$$\begin{aligned} a_k &= r_i z_j - r_j z_i \\ b_k &= z_i - z_j \\ c_k &= r_j - r_i \end{aligned} \quad (2.149)$$

Bu bağlantılar yardımıyla;

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\partial N_i}{\partial r} \phi_i + \frac{\partial N_j}{\partial r} \phi_j + \frac{\partial N_k}{\partial r} \phi_k \quad (2.150)$$



$$\frac{\partial N_i}{\partial r} = \frac{b_i}{2\Delta^e} \quad (2.151)$$

$$\frac{\partial N_j}{\partial r} = \frac{b_j}{2\Delta^e} \quad (2.152)$$

$$\frac{\partial N_k}{\partial r} = \frac{b_k}{2\Delta^e} \quad (2.153)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{2\Delta^e} (b_i \phi_i + b_j \phi_j + b_k \phi_k) \quad (2.154)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial N_i}{\partial z} \phi_i + \frac{\partial N_j}{\partial z} \phi_j + \frac{\partial N_k}{\partial z} \phi_k \quad (2.155)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial z} = \frac{c_i}{2\Delta^e} \quad (2.156)$$

$$\frac{\partial N_j}{\partial z} = \frac{c_j}{2\Delta^e} \quad (2.157)$$

$$\frac{\partial N_k}{\partial z} = \frac{c_k}{2\Delta^e} \quad (2.158)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{1}{2\Delta^e} (c_i \phi_i + c_j \phi_j + c_k \phi_k) \quad (2.159)$$

b ve c katsayıları sabittir  $\phi$  değeri ise r ve z koordinatlarından bağımsızdır. Yani türev, ilgili eleman boyunca sabit olup ancak başka bir elemana geçildiğinde değişir. Bu bilgiler doğrultusunda elektrik alan ifadesi şöyle olur.

$$\vec{E}_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} a_r = -\frac{1}{2\Delta^e} (b_i \phi_i + b_j \phi_j + b_k \phi_k) a_r \quad (2.160)$$

$$\vec{E}_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} a_z = -\frac{1}{2\Delta^e} (c_i \phi_i + c_j \phi_j + c_k \phi_k) a_z \quad (2.161)$$

Elektrik alan bileşenleri bilindiğine göre genliği de elde edilebilir.

$$|\vec{E}| = \sqrt{|\vec{E}_r|^2 + |\vec{E}_z|^2} \quad (2.162)$$

### 2.10.3. Düğüm noktalarındaki elektrik alan hesabı

Eleman içerisinde hesaplanan elektrik alan değerleri kullanılarak düğüm noktalarındaki elektrik alanlar hesaplanabilir. İncelenen düğümün hangi elemanların ortak düğümü olduğu belirlenip r ve z yönlerindeki alan bileşenlerinin aritmetik ortalaması alınır.

$$\vec{E}_r = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\vec{E}_r)_i \quad (2.163)$$

$$\vec{E}_z = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\vec{E}_z)_i \quad (2.164)$$

Alan bileşenleri bulunduktan sonra genlik hesaplanabilir.

$$|\vec{E}| = \sqrt{|\vec{E}_r|^2 + |\vec{E}_z|^2}$$

### 3. MODELLEME ve PROGRAMLAMA

#### 3.1. Giriş

Sonlu elemanlar metodunun dayandığı temel prensip, belirli koordinatlar vasıtası ile tanımlanmış sistemin kullanılan aralık değerine bağlı olarak parçalara ayrılması ve parçaları oluşturan farklı koordinatlara sahip her bir noktanın sisteme verilen bir başlangıç değeri vasıtası ile bulunmasıdır. Bu genel prensip bir önceki bölümde matematiksel temellerine girilerek ayrıntıları ile anlatılmıştır. Kullanılan sonlu elemanlar metodu genel olarak üç temel adımdan oluşmaktadır. Bunları sırası ile belirleyecek olursak; düğüm koordinatları ve diğer başlangıç değerlerinin hesaplandığı hazırlık işlemleri, başlangıç değerleri ve koordinatlara sadık kalarak hesaplamaların ve çözümlemelerin yapıldığı aşama ve çözümleme sonucunda ortaya çıkan farklı değişkenlerin grafik veya tablo yardımı ile değerlendirme safhasıdır [6]. Hazırlık işlemlerini sırasıyla yükler ve malzeme bilgilerinin belirlenmesi, sınır şartlarının oluşturulması, düğüm noktalarının birbiri arasındaki sürekliliğin sağlanması ve düğüm noktalarının belirlenerek istenilen ağın oluşturulması aşamaları oluşturur. Çözüm işlemini ise, çözümü istenilen problemin incelenerek buna uygun çözümlemenin yapılması aşamasından oluşmaktadır. Değerlendirme kısmını ise çözümleme sonucu elde ettiğimiz çözüm değerlerinin tablolar veya grafikler yardımı ile sunulması oluşturmaktadır.

Sonlu elemanlar metodunun en önemli kısmını hazırlık işlemleri oluşturmaktadır. Çünkü bu işlem sırasında belirlenen konfigürasyon üzerinde ağ oluşturulmaktadır. Bu kısımda belirlenen noktaların (düğümelerin) sürekliliğinin sağlanması ve doğru koordinat noktalarında tanımlanması çok önemlidir. Bundan dolayı oluşturulacak ağ otomatik bir yapılandırma sistemi veya bir program yardımı ile olmalıdır. Aksi takdirde, ele alınan alan çok küçük olsa bile bunu bölgeler ayırarak hatasız bir işlem yapmayı beklemek birçok hataya ve zaman kaybına mal olacaktır. Programlama vasıtası ile oluşturulan ağ, her konfigürasyonda farklı olacağı da ayrı bir gerçektir. Bu durumda belirlenen sistem için yapılan hazırlık aşamasında sınır koşulları

kullanıcı tarafından verilmeli geriye kalan işlemlerin ise belirlenen program vasıtası ile otomatik olarak yapılması en doğru tercih olacaktır.

Sonlu elemanlar metodunun sağlıklı ve verimli kullanılabilmesi için giriş değerlerini verildiği kısımları çevreleyen ağ yapılarının daha sık olması gerekmektedir. Aksi takdirde işlemler uzayacağı gibi gereksiz programlama yükü de meydana gelecektir. Bu yüzden sınır koşullarının verildiği noktaları çevreleyen parçalar, kullanılan program vasıtası ile, daha kısa aralıklarla bölünmelidir. Bunun yanı sıra sınır koşullarından uzaklaştıkça sonlu elemanlar metodu ile oluşturulan noktalar arasındaki mesafe arttırılmalıdır.

Bu bölümde sonlu elemanlar metodunu oluşturduğumuz MATLAB programının PDE (Partial Differential Equation) Toolbox programına kısaca değinilecektir ve farklı konfigürasyonlarda eş potansiyel çizgileri, elektriksel alan çizgileri çizilecektir. Bunların elde edilmesinden sonra SF<sub>6</sub> gazı için pozitif korona başlama gerilimi (Positive Corona Onset Voltage, PCOV) farklı elektrot sistemlerinde incelenecektir. Bu sebeple programlama kısmını geçmeden evvel MATLAB (Matrix Laboratory) hakkında kısaca bilgi verilecektir.

### **3.2. Matlab Programlama Dili**

#### **3.2.1. Matlab'a giriş**

Matlab, açılımı matrix laboratory (matris laboratuvarı) olan, Mathworks firmasının oluşturduğu teknik bir programlama dilidir. Word, Excel, Powerpoint, Photoshop gibi sınırları kesin olarak belirlenmiş, sabit bir amaç in kullanacağınız bir program değil, amacınıza ulaşmak için yönlendireceğiniz, ve bu sırada size yüksek performansa sahip çeşitli araçları ile inanılmaz düzeyde destek verecek olan bir programlama dilidir. Matlab, kontrol, görüntü işleme, istatistik, optimizasyon, finans, fuzzy (bulanık kontrol), neural network (sinir ağları), grafik, veritabanı, Web sunucusu gibi başlı başına her bir konu için farklı bir araç kutusuna (toolbox) sahiptir. Bunların birçoğu kullanıcı ile ilgili olmadığı için isteyen, Matlab programını alırken

kendine yarayan araç kutularından oluşan bir konfigürasyonu seçebilir. Bu arada, araç kutusu derken Visual Basic, Photoshop bazı programlarda yer alan ve çeşitli işlemleri gerçekleştirmek için tıklayarak aktif hale getirdiğiniz komut düğmelerinin yer aldığı araç kutularından bahsetmiyoruz. Matlab'daki, araç kutuları fonksiyonlardan oluşur ve görsel değildir. Örneğin görüntü işleme araç kutusu yaklaşık 200 fonksiyondan oluşur ve bu fonksiyonları komut satırından veya makro ve fonksiyonların içerisinden çağırabiliriz [7].

### 3.2.2. Matlab'la neler yapılabilir

Matlab dışında kullanılan birçok programlama dili genel amaçlı tasarlanmıştır. Dolayısı ile daha özel işlerin gerçekleştirilmesi gereken durumlarda bu programlama dilleri yeterli araçlara sahip değildir. Bu ise işin inanılmaz düzeyde zorlaşmasına sebebiyet vermektedir. Fakat bu yargı, özel durumların ortaya çıkardığı problemlerin bu programlar tarafından çözülemeyeceği anlamını taşımamaktadır. Ancak, amaca ulaşmak için harcanan zaman işin zorluğu ile orantılı olarak çok ciddi boyutlara ulaşır. Hatta tek bir kişi ile mümkün olmayan, bir proje takımının oluşturulması gereken durumlar ortaya çıkar. Burada Matlab'ın sadece bu gibi özel durumlar için kullanışlı olduğu anlamı da çıkarılamamalıdır. Bu gibi özel işlemlerin yapılmasını inanılmaz derecede kolaylaştıran ve hızlandıran bir programın genel uygulamalar için neler yapabileceğini açıklamaya gerek yoktur [8].

Bu durumda Matlab'ın tipik kullanım alanlarını şu şekilde tanımlayabiliriz;

- Matematik ve hesaplama.
- Algoritma geliştirme.
- Veri toplama (data acquisition) ve gerçek zamanlı kontrol.
- Modelleme, simülasyon ve prototip geliştirme.
- Veri analizi ve grafiksel görüntüleme.
- Grafiksel arabirimi ile birlikte uygulama geliştirme.

### 3.2.3. Matlab'ın avantajları ve dezavantajları

Matlab programının avantajları arasında kullanımının kolay olması, farklı işletim sistemlerine uygunluğu, hazır fonksiyonlar yardımı ile yapılması istenen işlemlerin hızlandırılması, donanım kısıtlamasız görüntüleme, grafiksel kullanıcı arayüzü geliştirme, Matlab düzenleyicisi yardımı ile programın kurulu olmadığı bilgisayarlarda dahi çalışabilmesi gibi başlıklar sayılabilmektedir.

Matlab programının dezavantajları ise kullanılan uygulamaların başlatılma süresinin diğer programlama dillerine göre daha uzun olması ve paket fiyatının temel programlama dillerine nazaran oldukça pahalı olmasıdır [9].

### 3.2.4. PDE Toolbox

Kısmi diferansiyel eşitlik olarak adlandırabileceğimiz PDE Toolbox fonksiyonu, Matlab programının içerisinde yer almaktadır. Farklı sınır koşulları ve çözümleme metotları girilebilen bu fonksiyon yardımı ile iki boyutlu sistemlerin modellenmesi yapılabilmektedir. Isı transferi, manyetik, elektrostatik, elektromanyetik gibi birçok farklı alanda çözümler üretebilmektedir.

Başlangıç olarak, bu program vasıtası ile istediğimiz konfigürasyonu oluşturulmaktadır. Oluşturulan bu sisteme, sınır koşullarını ve diğer başlangıç verileri ikinci aşama olarak girilmektedir. Bunu takiben sonlu elemanlar metodunda istenilen ağ yoğunluğuna bağlı olarak sistemde ağ yapısı oluşturulmaktadır. Bu çalışmada ikinci dereceden ağ yapısının kullanılması uygun görülmüştür. Bunun sebebi ise; daha yüksek dereceli ağ yapılarında, incelenen nokta sayısının aşırı artışı ile buna bağlı olarak yapılan işlemlerin ve harcanan zamanın artmasıdır. Ağ yapısı oluşturulduktan sonra, sistemi oluşturan koordinatlar ve bu koordinatlara sahip her düğüm noktası için elektriksel potansiyel değeri pde toolbox vasıtası ile elde edilmektedir.

### 3.3. İç İçe Geçmiş Dairelerin Modellenmesi

#### 3.3.1. Giriş

İkinci bölümde matematiksel eşitlikler yardımıyla ifade ettiğimiz solu elemanlar metodunun, bu aşamada Matlab programı vasıtası ile farklı geometrilere ortaya çıkan çözümleri açıklanacaktır.

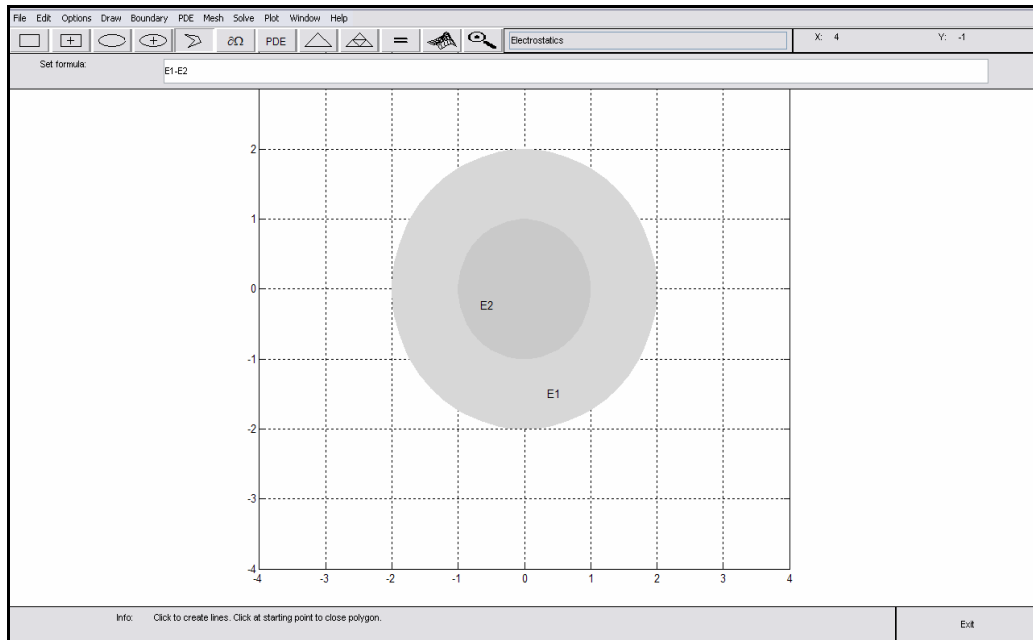
İlk aşamada programın nasıl çalıştığını açıklayabilmek için, iç içe geçmiş farklı yarıçaplı dairelerin modellenmesi yapılacaktır. Bu modelleme sırasında yarıçapı küçük olan iç dairenin üzerindeki potansiyel değer 1 p.u. (per unit) olarak kabul edilecektir. Yarıçapı büyük olan dış dairenin üzerindeki potansiyel ise 0 p.u. olarak kabul edilecektir. Bu değerlerin per unit olarak kabul edilmesinin sebebi ise sistemin çalışma prensibinin genel olarak belirlenebilmesidir.

Sınır koşullarını bir önceki paragrafta belirlediğimiz gibi girdikten sonra yukarıda, sırası ile birinci dereceden başlamak üzere üçüncü dereceye kadar ağ yoğunluğu değiştirilerek sistemin modellenmesi yapılacaktır. Kullandığımız ağ'ın seviyesi yükseldikçe ortaya çıkan çözümleme daha sağlıklı olacak ve eşpotansiyel eğrileri gittikçe düzelecektir. Bu çözümleme sırasında ortaya çıkan dezavantaj ise meydana çıkan noktaların sayısının artması ve bundan dolayı sistemin çözülmesinin daha uzun zaman almasıdır.

Pde toolbox vasıtası ile yapılan çözümleme sonucunda, sistemi oluşturan düğüm noktaları ve bu noktalara ait potansiyel değerler programda çıkış olarak verilmektedir. Düğüm noktaları ve bu düğüm noktalarına ait potansiyel eğrileri kullanılarak sistemde bulunan her noktaya ait elektriksel alan değerleri yazılan bir alt program ile hesaplanmaktadır. Bir sonraki bölümde hesaplanan bu değerler farklı çizelgeler yardımı ile verilmekte ve grafikler yardımıyla açıklanmaktadır.

### 3.3.2. Birinci dereceden ağ ile iç içe geçmiş dairelerin modellenmesi

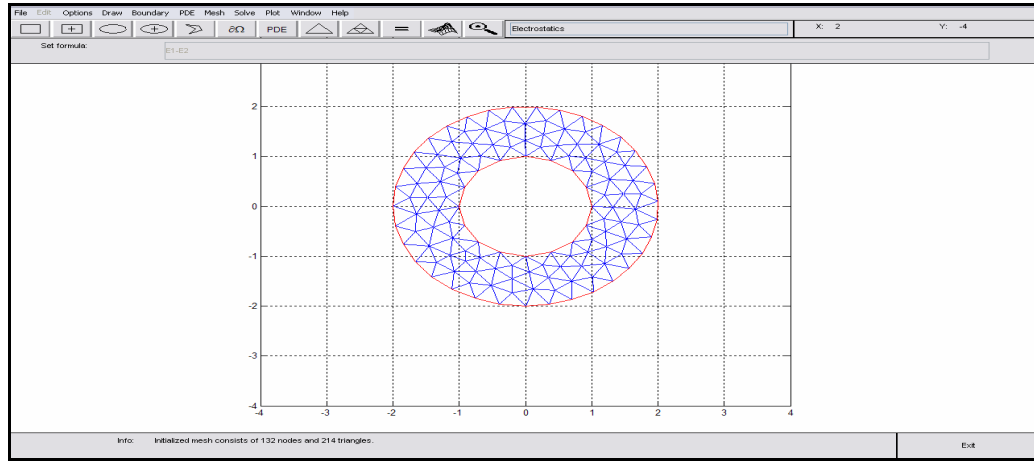
Sonlu elemanlar metodu yardımı ile çözümlmek istediğimiz konfigürasyonu program yardımı ile oluşturarak inceleme aşamasına başlanmaktadır. Şekil 3.1’de incelemek istediğimiz grafiksel olarak gösterilmiştir. Burada E1 olarak adlandırdığımız dış dairenin yarıçapı 20 mm’dir. E2 olarak adlandırdığımız ve içteki dairenin yarıçapı ise 10 mm’dir. Sistemimizi bu şekilde oluşturduktan sonra, bir sonraki aşamada sınır koşulları girilmelidir. Bu sınır koşullarını çözümlememizin daha rahat anlaşılabilmesi için iç dairenin sahip olduğu potansiyel değerini 1 p.u. (per unit) ve dış dairenin sahip olduğu potansiyel değerini 0 p.u. (per unit) olarak almaktadır. Bu potansiyel değerler ve modeli oluşturan dairelerin yarıçapları istenirse farklı değerler olarak seçilebilmektedir. Bu modelleme yapılması istenen şeklin özelliklerine bağlı olarak değişebilmektedir. Modeller oluştururken programda bulunan daire ve dikdörtgen yapıları kullanılmaktadır. Biz bu çözümlemede sadece iki daire kullanmamıza rağmen bu sayı istenildiği kadar arttırılabilmektedir.



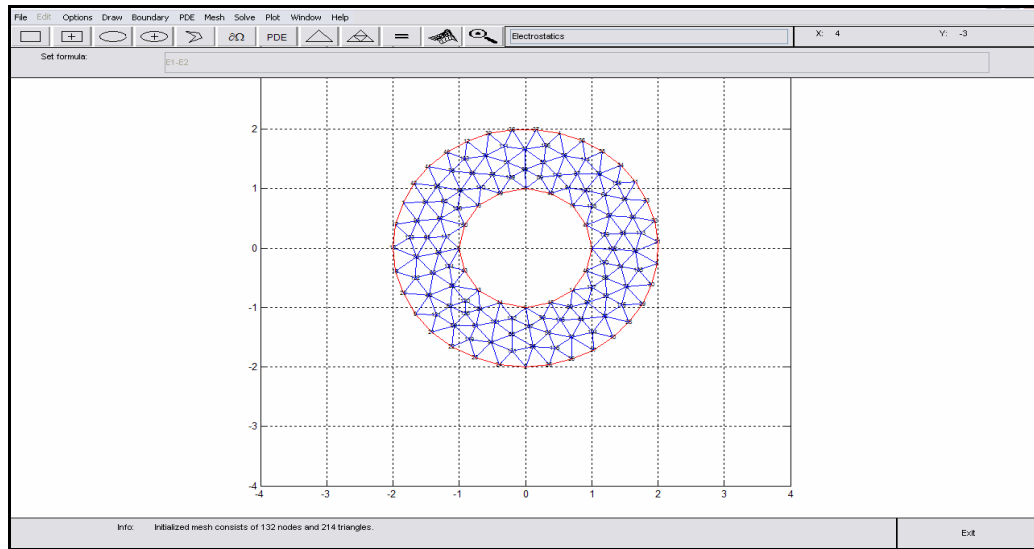
Şekil 3.1. İç içe geçmiş dairelere ait model



Hazırlık aşamasında bu model ve sınır koşulları belirlendikten sonra, sistemin çözümleme aşamasına geçilmektedir. Birinci dereceden ağ'ın kullandığı bu kısımda model ilk aşamada noktalara ve bu noktalar vasıtası ile üçgenlere ayrılmaktadır. Çözümleme sonucunda meydana gelen ağ ve bu ağ'ı oluşturan noktaların değerleri sırasıyla Şekil 3.2'de ve Şekil 3.3'de görülmektedir.

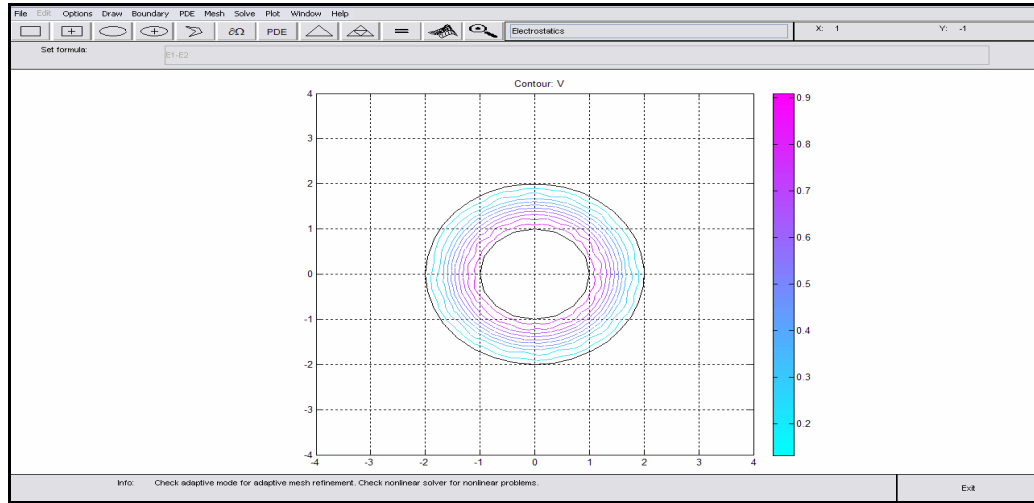


Şekil 3.2. İç içe geçmiş daire modelinin birinci dereceden ağ ile çözümlemesi sonucu oluşan ağlar

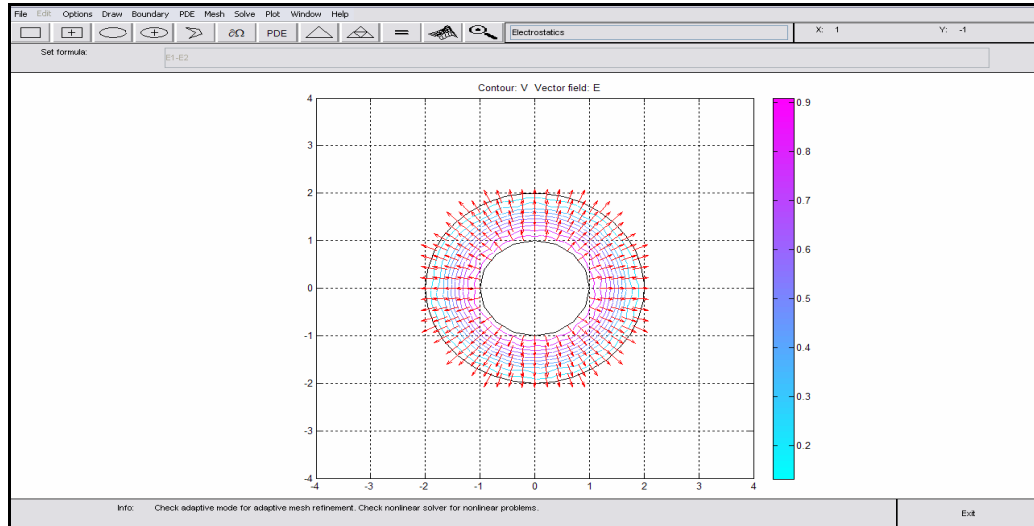


Şekil 3.3. İç içe geçmiş daire modeline ait düğüm noktalarının birinci dereceden ağ ile çözümlemesi sonucu numaralandırılması

Çözümleme aşamasında oluşturulan bu ağlar sonucunda sistemimizde meydana gelen noktaların sayısı 132'dir. Bu 132 noktanın birbiri ile birleştirilmesi sonucunda sistemi oluşturan üçgensel ağların toplam sayısı ise 214'dür. Bu çözümleme sonucu iki daire arasında ortaya çıkan potansiyel dağılımı Şekil 3.4'de, elektriksel alanın yönü ise Şekil 3.5'de çizilmiştir.



Şekil 3.4. İç içe geçmiş daire modelinin birinci dereceden ağ ile çözülmesi sonucu oluşan potansiyel dağılım



Şekil 3.5. İç içe geçmiş daire modelinin birinci dereceden ağ ile çözülmesi sonucu oluşan elektrik alan oklarının dağılımı

Çözümleme sonucunda ortaya çıkan 132 düğüm noktasına ait koordinat değerleri, bu noktaların sahip olduğu potansiyel değerleri ile yazdığımız alt program vasıtasıyla hesapladığımız elektriksel alan değerleri Çizelge 3.1’de görülmektedir.

Çizelge 3.1. İç içe geçmiş daire modelinin birinci dereceden ağ ile çözümlenmesi sonucu oluşan noktaların koordinat, potansiyel ve elektriksel alan değerleri

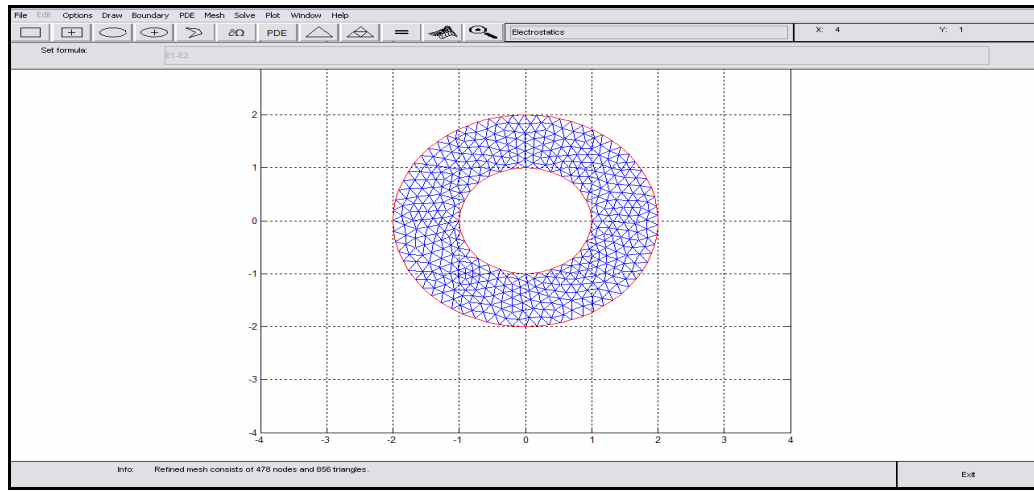
DÜĞÜM NO	X	Y	POTANSİYEL	ELEKTRİK ALAN	DÜĞÜM NO	X	Y	POTANSİYEL	ELEKTRİK ALAN
1	-1,85	0,77	0,00	0,19	31	2,00	0,10	0,00	0,20
2	0,00	-2,00	0,00	0,11	32	1,95	0,45	0,00	0,20
3	1,98	-0,26	0,00	0,20	33	1,83	0,80	0,00	0,19
4	0,52	1,93	0,00	0,12	34	1,44	1,39	0,00	0,18
5	-1,00	0,00	1,00	0,19	35	1,16	1,63	0,00	0,16
6	0,00	-1,00	1,00	0,21	36	0,86	1,81	0,00	0,12
7	1,00	0,00	1,00	0,20	37	0,16	1,99	0,00	0,11
8	0,00	1,00	1,00	0,21	38	-0,20	1,99	0,00	0,11
9	-1,66	-1,11	0,00	0,19	39	-0,55	1,92	0,00	0,12
10	1,32	-1,50	0,00	0,18	40	-1,19	1,61	0,00	0,16
11	1,66	1,11	0,00	0,20	41	-1,46	1,37	0,00	0,18
12	-0,88	1,79	0,00	0,12	42	-1,68	1,08	0,00	0,19
13	-0,71	-0,71	1,00	0,20	43	-0,92	-0,38	1,00	0,19
14	0,71	-0,71	1,00	0,21	44	-0,38	-0,92	1,00	0,21
15	0,71	0,71	1,00	0,20	45	0,38	-0,92	1,00	0,21
16	-0,71	0,71	1,00	0,20	46	0,92	-0,38	1,00	0,20
17	-1,96	0,39	0,00	0,20	47	0,92	0,38	1,00	0,19
18	-2,00	0,00	0,00	0,19	48	0,38	0,92	1,00	0,21
19	-1,96	-0,39	0,00	0,19	49	-0,38	0,92	1,00	0,21
20	-1,85	-0,77	0,00	0,19	50	-0,92	0,38	1,00	0,19
21	-1,41	-1,41	0,00	0,19	51	-0,28	1,44	0,57	0,04
22	-1,11	-1,66	0,00	0,17	52	1,22	-0,81	0,57	0,07
23	-0,77	-1,85	0,00	0,12	53	0,27	1,44	0,57	0,04
24	-0,39	-1,96	0,00	0,12	54	1,44	-0,31	0,57	0,02
25	0,36	-1,97	0,00	0,11	55	0,84	-1,20	0,57	0,04
26	0,70	-1,87	0,00	0,13	56	-0,80	1,26	0,55	0,04
27	1,03	-1,72	0,00	0,16	57	0,78	1,25	0,57	0,04
28	1,57	-1,24	0,00	0,19	58	1,47	0,25	0,55	0,02
29	1,76	-0,94	0,00	0,20	59	0,34	-1,42	0,57	0,04
30	1,90	-0,61	0,00	0,20	60	-1,22	0,79	0,58	0,05

Çizelge 3.1. (Devam) İç içe geçmiş daire modelinin birinci dereceden ağ ile çözümlenmesi sonucu oluşan noktaların koordinat, potansiyel ve elektriksel alan değerleri

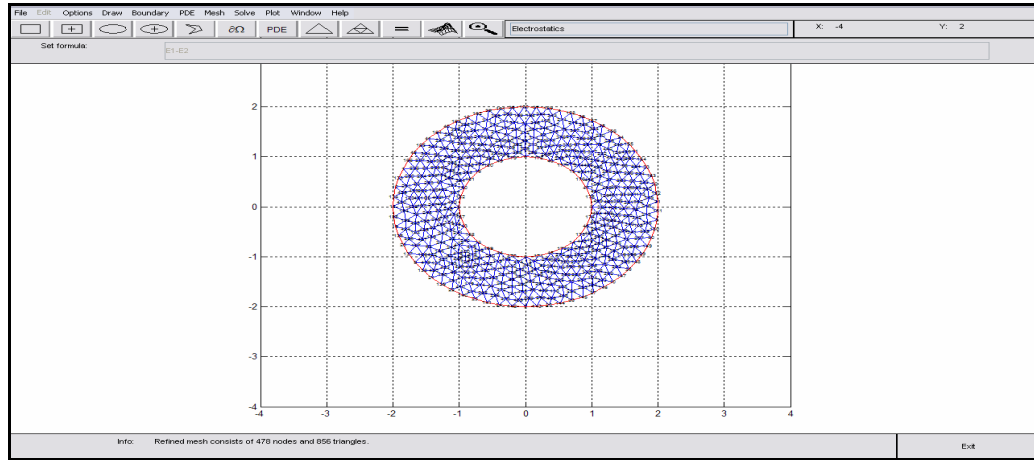
DÜĞÜM NO	X	Y	POTANSİYEL	ELEKTRİK ALAN	DÜĞÜM NO	X	Y	POTANSİYEL	ELEKTRİK ALAN
61	-0,75	-1,30	0,54	0,03	97	0,94	-0,92	0,71	0,08
62	-1,13	-0,97	0,54	0,06	98	-1,33	1,04	0,35	0,09
63	-1,39	-0,41	0,59	0,03	99	0,00	1,32	0,71	0,09
64	1,20	0,89	0,55	0,05	100	0,91	0,96	0,70	0,09
65	-1,47	0,18	0,56	0,01	101	-0,46	-1,25	0,70	0,09
66	-0,20	-1,46	0,57	0,07	102	1,32	-0,02	0,71	0,07
67	-1,28	0,49	0,66	0,06	103	-0,92	1,50	0,27	0,09
68	-1,45	-0,79	0,39	0,08	104	1,01	-1,42	0,29	0,09
69	-1,07	-1,30	0,35	0,07	105	1,70	-0,37	0,29	0,10
70	-1,65	-0,15	0,38	0,07	106	0,31	1,72	0,29	0,05
71	-0,01	1,66	0,38	0,03	107	0,05	-1,32	0,71	0,09
72	1,19	-1,15	0,38	0,06	108	-1,02	0,67	0,80	0,13
73	1,53	-0,65	0,38	0,08	109	-0,23	1,18	0,81	0,13
74	-0,61	1,55	0,37	0,04	110	-0,67	1,02	0,80	0,13
75	0,59	1,55	0,38	0,04	111	-0,33	1,71	0,28	0,05
76	1,67	-0,05	0,37	0,07	112	0,49	1,23	0,71	0,09
77	0,70	-1,50	0,38	0,02	113	1,74	0,25	0,27	0,11
78	-1,11	1,29	0,33	0,07	114	0,90	1,49	0,28	0,08
79	1,11	1,24	0,37	0,06	115	0,53	-1,20	0,71	0,09
80	1,63	0,52	0,33	0,08	116	1,45	-0,96	0,29	0,10
81	-1,50	0,77	0,35	0,09	117	-1,20	0,19	0,81	0,11
82	-1,09	-0,64	0,76	0,09	118	0,44	-1,69	0,29	0,07
83	-1,31	-0,08	0,72	0,06	119	-0,84	-1,54	0,27	0,08
84	-0,69	-1,03	0,79	0,14	120	-0,91	-0,89	0,75	0,10
85	-0,49	1,23	0,71	0,09	121	-1,35	-1,12	0,28	0,11
86	-0,98	0,97	0,66	0,07	122	-1,66	-0,50	0,29	0,10
87	1,27	0,54	0,65	0,07	123	-1,74	0,17	0,28	0,10
88	1,22	-0,51	0,71	0,08	124	-1,15	-0,31	0,83	0,12
89	0,23	1,18	0,81	0,13	125	1,38	1,09	0,27	0,10
90	0,68	-0,99	0,82	0,14	126	-0,91	-1,10	0,61	0,07
91	0,65	1,01	0,81	0,14	127	1,00	-0,67	0,82	0,13
92	0,26	-1,18	0,82	0,14	128	1,00	0,70	0,80	0,13
93	-1,64	0,46	0,34	0,08	129	1,20	0,23	0,80	0,12
94	-0,52	-1,58	0,37	0,05	130	1,18	-0,24	0,81	0,12
95	0,11	-1,66	0,38	0,03	131	-0,20	-1,73	0,29	0,03
96	1,50	0,82	0,32	0,09	132	-0,20	-1,19	0,81	0,13

### 3.3.3. İkinci dereceden ağ ile iç içe geçmiş dairelerin modellenmesi

Birinci dereceden ağ kullanılarak iç içe geçmiş daire modelinin çözümü bir önceki başlık altında incelenmiştir. Bu kısımda ise daha hassas sonuçların bulunabilmesi için ikinci dereceden ağ kullanılmaktadır. İkinci dereceden ağ kullanılarak yapılan çözümleme sonucunda meydana gelen ağ ve bu ağ'ı oluşturan noktaların değerleri sırasıyla Şekil 3.6'de ve Şekil 3.7'de görülmektedir.

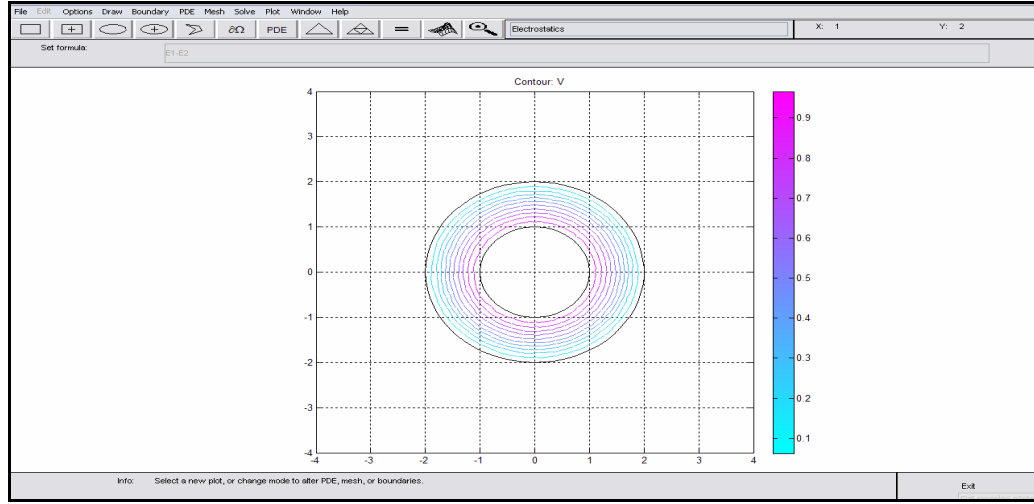


Şekil 3.6. İç içe geçmiş daire modelinin ikinci dereceden ağ ile çözümlemesi sonucu oluşan ağlar

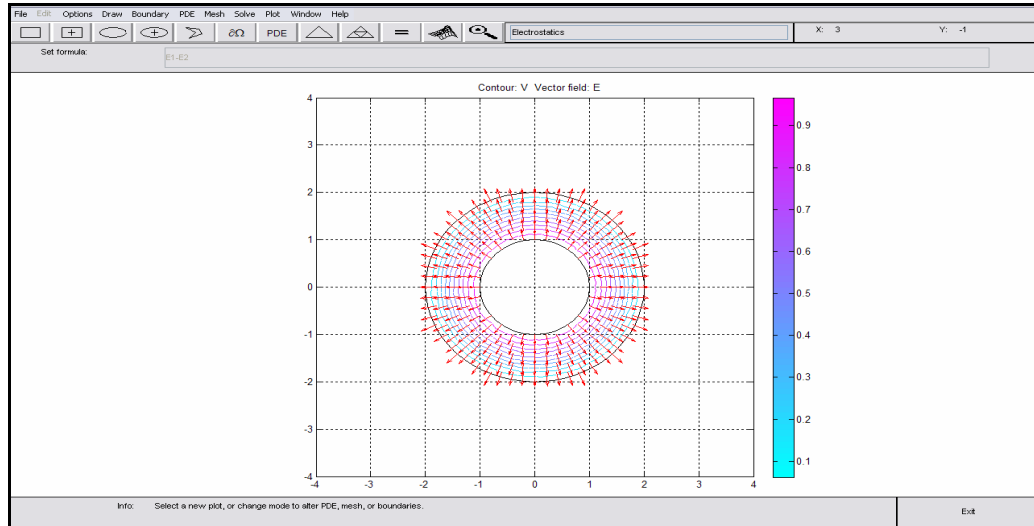


Şekil 3.7. İç içe geçmiş daire modeline ait düğüm noktalarının ikinci dereceden ağ ile çözümlemesi sonucu numaralandırılması

Çözümleme aşamasında oluşturulan bu ağlar sonucunda sistemimizde meydana gelen noktaların sayısı 478'dir. Bu 478 noktanın birbiri ile birleştirilmesi sonucunda sistemi oluşturan üçgensel ağların toplam sayısı ise 856'dır. Bu çözümleme sonucu iki daire arasında ortaya çıkan potansiyel dağılımı Şekil 3.8'de, elektriksel alanın yönü ise Şekil 3.9'da çizilmiştir.



Şekil 3.8. İç içe geçmiş daire modelinin ikinci dereceden ağ ile çözülmesi sonucu oluşan potansiyel dağılım



Şekil 3.9. İç içe geçmiş daire modelinin birinci dereceden ağ ile çözülmesi sonucu oluşan elektrik alan oklarının dağılımı

Çözümleme sonucunda ortaya çıkan 478 düğüm noktasına ait koordinat değerleri, bu noktaların sahip olduğu potansiyel değerleri ile yazdığımız alt program vasıtasıyla hesapladığımız elektrik alan değerleri Çizelge 3.2’de görülmektedir.

Çizelge 3.2. İç içe geçmiş daire modelinin ikinci dereceden ağ ile çözümlenmesi sonucu oluşan noktaların koordinat, potansiyel ve elektriksel alan değerleri

DÜĞÜM NO	X	Y	POTANSİYEL	ELEKTRİK ALAN	DÜĞÜM NO	X	Y	POTANSİYEL	ELEKTRİK ALAN
1	-1,85	0,77	0,00	0,21	31	2,00	0,10	0,00	0,23
2	0,00	-2,00	0,00	0,13	32	1,95	0,45	0,00	0,23
3	1,98	-0,26	0,00	0,23	33	1,83	0,80	0,00	0,22
4	0,52	1,93	0,00	0,13	34	1,44	1,39	0,00	0,20
5	-1,00	0,00	1,00	0,21	35	1,16	1,63	0,00	0,19
6	0,00	-1,00	1,00	0,22	36	0,86	1,81	0,00	0,14
7	1,00	0,00	1,00	0,22	37	0,16	1,99	0,00	0,13
8	0,00	1,00	1,00	0,22	38	-0,20	1,99	0,00	0,13
9	-1,66	-1,11	0,00	0,21	39	-0,55	1,92	0,00	0,14
10	1,32	-1,50	0,00	0,19	40	-1,19	1,61	0,00	0,19
11	1,66	1,11	0,00	0,22	41	-1,46	1,37	0,00	0,20
12	-0,88	1,79	0,00	0,14	42	-1,68	1,08	0,00	0,21
13	-0,71	-0,71	1,00	0,21	43	-0,92	-0,38	1,00	0,21
14	0,71	-0,71	1,00	0,22	44	-0,38	-0,92	1,00	0,22
15	0,71	0,71	1,00	0,22	45	0,38	-0,92	1,00	0,22
16	-0,71	0,71	1,00	0,21	46	0,92	-0,38	1,00	0,22
17	-1,96	0,39	0,00	0,22	47	0,92	0,38	1,00	0,21
18	-2,00	0,00	0,00	0,22	48	0,38	0,92	1,00	0,22
19	-1,96	-0,39	0,00	0,21	49	-0,38	0,92	1,00	0,22
20	-1,85	-0,77	0,00	0,21	50	-0,92	0,38	1,00	0,20
21	-1,41	-1,41	0,00	0,21	51	-0,28	1,44	0,57	0,04
22	-1,11	-1,66	0,00	0,19	52	1,22	-0,81	0,57	0,07
23	-0,77	-1,85	0,00	0,14	53	0,27	1,44	0,57	0,04
24	-0,39	-1,96	0,00	0,14	54	1,44	-0,31	0,57	0,02
25	0,36	-1,97	0,00	0,13	55	0,84	-1,20	0,57	0,03
26	0,70	-1,87	0,00	0,15	56	-0,80	1,26	0,55	0,03
27	1,03	-1,72	0,00	0,17	57	0,78	1,25	0,57	0,04
28	1,57	-1,24	0,00	0,21	58	1,47	0,25	0,55	0,02
29	1,76	-0,94	0,00	0,22	59	0,34	-1,42	0,57	0,03
30	1,90	-0,61	0,00	0,23	60	-1,22	0,79	0,59	0,04

Çizelge 3.2. (Devam) İç içe geçmiş daire modelinin ikinci dereceden ağ ile çözümlenmesi sonucu oluşan noktaların koordinat, potansiyel ve elektriksel alan değerleri

DÜĞÜM NO	X	Y	POTANSİYEL	ELEKTRİK ALAN	DÜĞÜM NO	X	Y	POTANSİYEL	ELEKTRİK ALAN
61	-0,75	-1,30	0,54	0,02	96	1,50	0,82	0,33	0,10
62	-1,13	-0,97	0,55	0,06	97	0,94	-0,92	0,72	0,08
63	-1,39	-0,41	0,59	0,03	98	-1,33	1,04	0,35	0,10
64	1,20	0,89	0,55	0,04	99	0,00	1,32	0,71	0,09
65	-1,47	0,18	0,56	0,01	100	0,91	0,96	0,71	0,09
66	-0,20	-1,46	0,57	0,07	101	-0,46	-1,25	0,70	0,09
67	-1,28	0,49	0,66	0,06	102	1,32	-0,02	0,71	0,07
68	-1,45	-0,79	0,39	0,08	103	-0,92	1,50	0,27	0,09
69	-1,07	-1,30	0,35	0,09	104	1,01	-1,42	0,29	0,08
70	-1,65	-0,15	0,38	0,08	105	1,70	-0,37	0,29	0,12
71	-0,01	1,66	0,38	0,03	106	0,31	1,72	0,29	0,06
72	1,19	-1,15	0,38	0,08	107	0,05	-1,32	0,71	0,09
73	1,53	-0,65	0,38	0,09	108	-1,02	0,67	0,80	0,13
74	-0,61	1,55	0,37	0,05	109	-0,23	1,18	0,82	0,14
75	0,59	1,55	0,38	0,05	110	-0,67	1,02	0,81	0,13
76	1,67	-0,05	0,37	0,08	111	-0,33	1,71	0,29	0,06
77	0,70	-1,50	0,38	0,04	112	0,49	1,23	0,71	0,09
78	-1,11	1,29	0,33	0,08	113	1,74	0,25	0,27	0,12
79	1,11	1,24	0,37	0,07	114	0,90	1,49	0,29	0,09
80	1,63	0,52	0,33	0,10	115	0,53	-1,20	0,72	0,09
81	-1,50	0,77	0,35	0,10	116	1,45	-0,96	0,29	0,12
82	-1,09	-0,64	0,76	0,09	117	-1,20	0,19	0,81	0,12
83	-1,31	-0,08	0,72	0,06	118	0,44	-1,69	0,29	0,07
84	-0,69	-1,03	0,79	0,14	119	-0,84	-1,54	0,27	0,09
85	-0,49	1,23	0,71	0,09	120	-0,91	-0,89	0,76	0,11
86	-0,98	0,97	0,66	0,07	121	-1,35	-1,12	0,28	0,12
87	1,27	0,54	0,65	0,06	122	-1,66	-0,50	0,30	0,11
88	1,22	-0,51	0,72	0,08	123	-1,74	0,17	0,28	0,12
89	0,23	1,18	0,82	0,14	124	-1,15	-0,31	0,84	0,12
90	0,68	-0,99	0,82	0,14	125	1,38	1,09	0,27	0,11
91	0,65	1,01	0,82	0,14	126	-0,91	-1,10	0,61	0,05
92	0,26	-1,18	0,82	0,14	127	1,00	-0,67	0,82	0,14
93	-1,64	0,46	0,34	0,10	128	1,00	0,70	0,80	0,13
94	-0,52	-1,58	0,37	0,04	129	1,20	0,23	0,80	0,12
95	0,11	-1,66	0,38	0,03	130	1,18	-0,24	0,82	0,13



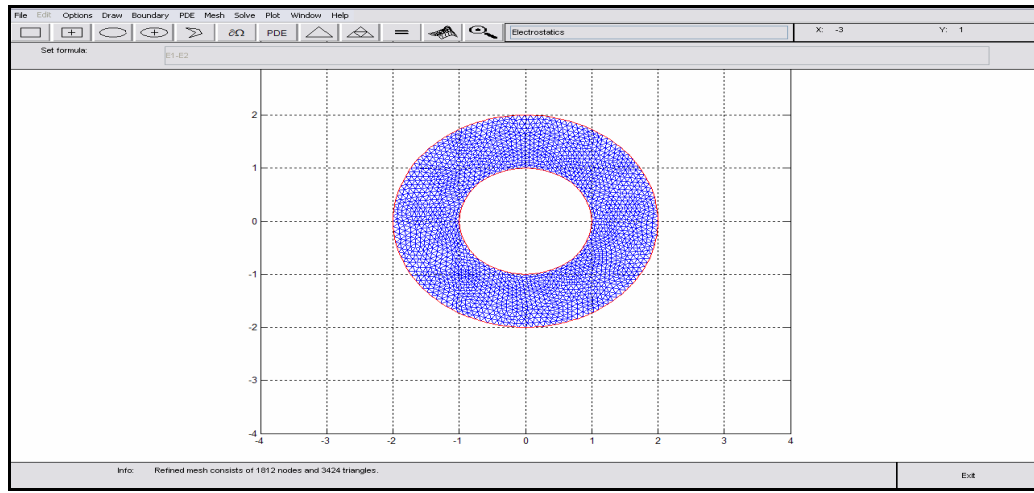
Çizelge 3.2. (Devam) İç içe geçmiş daire modelinin ikinci dereceden ağ ile çözümlenmesi sonucu oluşan noktaların koordinat, potansiyel ve elektriksel alan değerleri

DÜĞÜM NO	X	Y	POTANSİYEL	ELEKTRİK ALAN	DÜĞÜM NO	X	Y	POTANSİYEL	ELEKTRİK ALAN
131	-0,20	-1,73	0,29	0,05	162	-0,72	1,87	0,00	0,14
132	-0,20	-1,19	0,82	0,13	163	-1,04	1,71	0,00	0,16
133	-1,91	0,58	0,00	0,21	164	-1,33	1,49	0,00	0,19
134	-1,99	0,20	0,00	0,22	165	-1,58	1,23	0,00	0,20
135	-1,99	-0,20	0,00	0,21	166	-1,77	0,93	0,00	0,21
136	-1,91	-0,58	0,00	0,21	167	-0,98	-0,20	1,00	0,21
137	-1,76	-0,94	0,00	0,21	168	-0,83	-0,56	1,00	0,20
138	-1,55	-1,27	0,00	0,21	169	-0,56	-0,83	1,00	0,22
139	-1,27	-1,55	0,00	0,20	170	-0,20	-0,98	1,00	0,22
140	-0,94	-1,76	0,00	0,15	172	0,56	-0,83	1,00	0,22
141	-0,58	-1,91	0,00	0,13	173	0,83	-0,56	1,00	0,22
142	-0,20	-1,99	0,00	0,13	174	0,98	-0,20	1,00	0,22
143	0,18	-1,99	0,00	0,13	175	0,98	0,20	1,00	0,21
144	0,53	-1,93	0,00	0,13	176	0,83	0,56	1,00	0,21
145	0,87	-1,80	0,00	0,15	177	0,56	0,83	1,00	0,22
146	1,18	-1,62	0,00	0,18	178	0,20	0,98	1,00	0,22
147	1,45	-1,38	0,00	0,20	179	-0,20	0,98	1,00	0,22
148	1,67	-1,10	0,00	0,22	180	-0,56	0,83	1,00	0,21
149	1,84	-0,78	0,00	0,22	181	-0,83	0,56	1,00	0,21
150	1,95	-0,44	0,00	0,23	182	-0,98	0,20	1,00	0,20
151	2,00	-0,08	0,00	0,22	183	-1,10	0,44	0,84	0,13
152	1,98	0,28	0,00	0,23	184	-1,25	0,64	0,63	0,05
153	1,90	0,63	0,00	0,22	185	-1,38	0,33	0,62	0,04
154	1,76	0,96	0,00	0,22	186	-1,56	-0,95	0,20	0,15
155	1,56	1,26	0,00	0,21	187	-1,65	-0,78	0,20	0,14
156	1,31	1,51	0,00	0,19	188	-1,29	-0,88	0,48	0,06
157	1,01	1,72	0,00	0,16	189	-1,42	-0,60	0,50	0,05
158	0,69	1,88	0,00	0,14	190	-1,24	-1,36	0,18	0,15
159	0,34	1,97	0,00	0,13	191	-1,09	-1,48	0,18	0,14
160	-0,02	2,00	0,00	0,13	192	-0,91	-1,30	0,45	0,05
161	-0,37	1,96	0,00	0,13	193	-1,10	-1,14	0,46	0,07

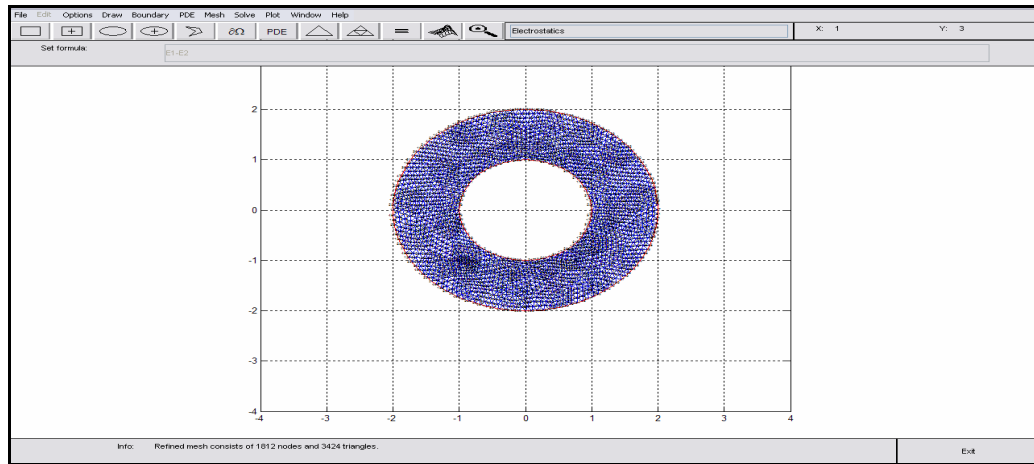
Bu değerleri daha fazla uzatmamak için 204 düğüm noktasına ait değerle çizelgemiz sınırlandırılmıştır. Diğer noktalara ait değerler, hesaplanan bu değerlere benzer değerler olacaktır.

### 3.3.4. Üçüncü dereceden ağ ile iç içe geçmiş dairelerin modellenmesi

Birinci ve ikinci dereceden ağ kullanılarak, iç içe geçmiş daire modelinin çözümü önceki başlıklar altında incelenmiştir. Bu kısımda ise daha hassas sonuçları elde edebilmek için üçüncü dereceden ağ kullanılmaktadır. Üçüncü dereceden ağ kullanılarak yapılan çözümleme sonucunda meydana gelen ağ ve bu ağ'ı oluşturan noktaların değerleri sırasıyla Şekil 3.10'da ve Şekil 3.11'de görülmektedir.

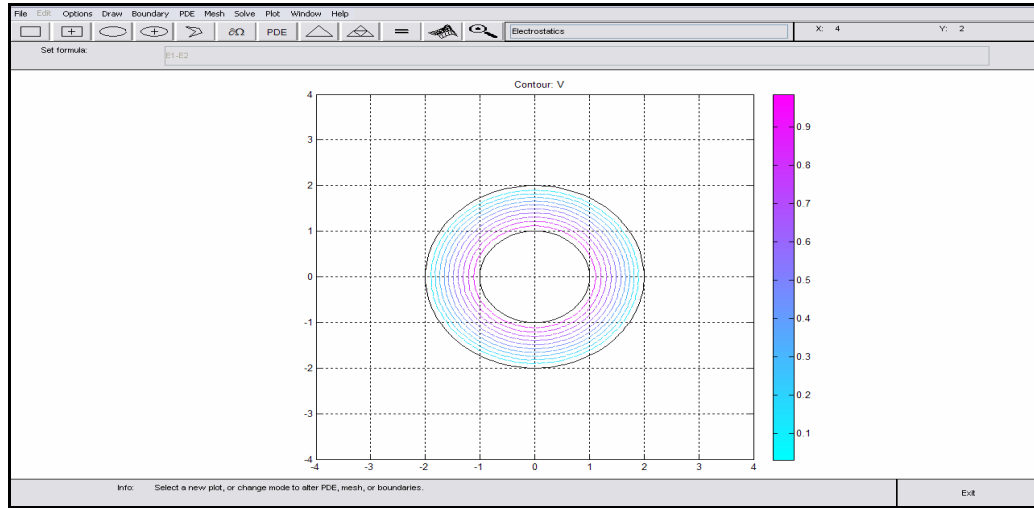


Şekil 3.10. İç içe geçmiş daire modelinin üçüncü dereceden ağ ile çözümlemesi sonucu oluşan ağlar

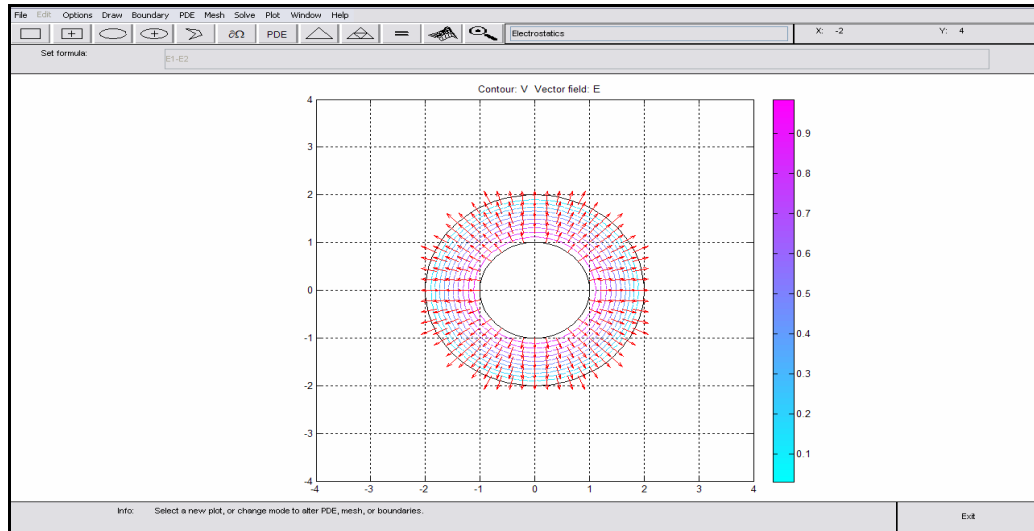


Şekil 3.11. İç içe geçmiş daire modeline ait düğüm noktalarının üçüncü dereceden ağ ile çözümlemesi sonucu numaralandırılması

Çözümleme aşamasında oluşturulan bu ağlar sonucunda sistemimizde meydana gelen noktaların sayısı 1812'dir. Bu 1812 noktanın birbiri ile birleştirilmesi sonucunda sistemi oluşturan üçgensel ağların toplam sayısı ise 3424'dür. Bu çözümleme sonucu iki daire arasında ortaya çıkan potansiyel dağılımı Şekil 3.12'de, elektriksel alanın yönü ise Şekil 3.13'de çizilmiştir.



Şekil 3.12. İç içe geçmiş daire modelinin ikinci dereceden ağ ile çözülmesi sonucu oluşan potansiyel dağılım



Şekil 3.13. İç içe geçmiş daire modelinin birinci dereceden ağ ile çözülmesi sonucu oluşan elektrik alan oklarının dağılımı

### 3.4. Çubuk-Düzlem Elektrot Sistemde $\text{SF}_6$ Gazının Pozitif Korona Başlangıç Geriliminin Hesaplanması

Sonlu elemanlar metodu ayrıntıları ile önceki bölümlerde teorik olarak anlatılmıştır. Bu bölümde ise düzgün olmayan (non-uniform) bir sitem olan çubuk-düzlem elektrot sistemi incelenecek ve bu modülün farklı konfigürasyonlarında pozitif korona başlangıç gerilimi hesaplanacaktır.

Kullandığımız çubuk-düzlem elektrot sisteminde elektrotlar arasında dielektrik malzeme olarak kullandığımız  $\text{SF}_6$  gazı kesici ve ayırıcılar başta olmak üzere yüksek gerilim hatları, yüksek gerilim trafoları, elektrik düğmeleri, maden kuyularında hava akışının saptanmasında izleme gazı olarak, yüksek frekanslı sinyalleri taşımak için üretilen kablolarda ve benzeri birçok endüstriyel alanda yapısal özellikleri ve kararlı yapısı sayesinde kullanılmaktadır.

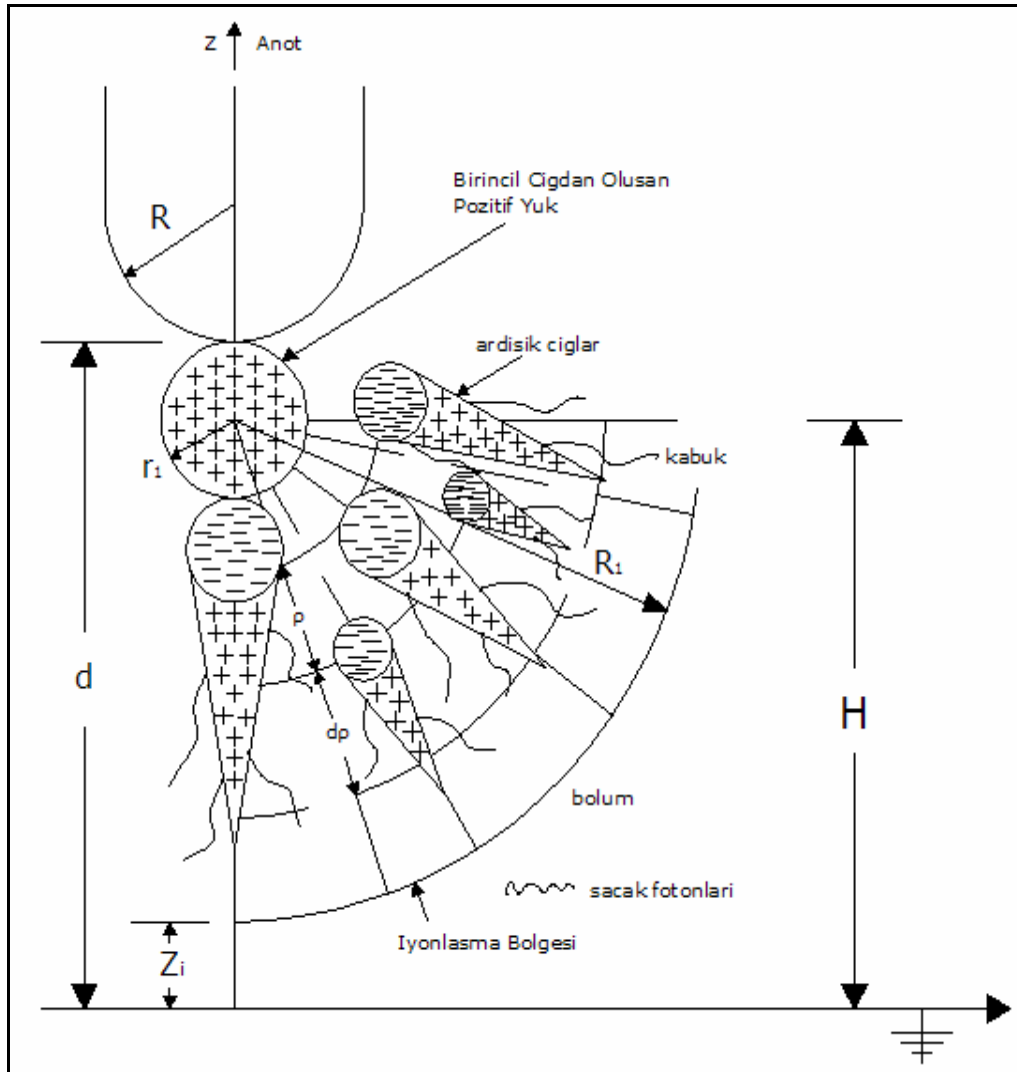
Çubuk-düzlem elektrot sitemi yüksek gerilim tekniğinde birçok farklı alanda kullanılmaktadır. Bu sistemler düzgün olmayan (non-uniform) bir yapıya sahip olduğu için, çözümlenmesi düzgün (uniform) sitemlere nazaran çok daha zordur. Bu bölümde; kullanılan program vasıtası ile parçalara ayrılan sistemin her bir düğüm noktası üzerindeki koordinat, potansiyel ve elektrik alan değeri hesaplanacaktır.

Düğüm noktalarının üzerindeki potansiyel ve elektrik alan değerlerini hesapladıktan sonra sistemimizde çubuk ile düzlem arasındaki en kısa yolu seçilecektir. Kritik alan çizgisi olarak adlandırılan bu bölgede elektrik alan değerleri vasıtası ile pozitif korona başlangıç gerilimi hesaplanacaktır.

Bir sonraki aşamada pozitif korona başlangıç gerilimini nasıl hesaplayacağı anlatılacak ve kükürt hekzaflorür ( $\text{SF}_6$ ) hakkında geniş bilgi verilecektir.

### 3.4.1. Pozitif korona başlangıç gerilimi'nin hesaplanması

Pozitif korona başlangıç gerilimi, kullanılan geometriye ve bu geometrinin içerisindeki dielektrik malzemeye bağlı olarak her sistem için farklı sonuçlar vermektedir. Hesaplanan pozitif korona başlangıç gerilimi sistemin delinme geriliminin hesaplanması için rehber görevi görmektedir. Bu sebeple pozitif korona başlangıç geriliminin hesaplanması ve yorumlanması için birçok farklı teknik ileri sürülmüştür [10-12]. Kullandığımız çubuk-düzlem elektrot sistemini Şekil 3.14'te ayrıntıları ile gösterilmiştir.



Şekil 3.14. Çubuk-düzlem elektrot sisteminde çığların oluşması

Kullandığımız çubuk-düzlem elektrot sisteminde çubuğun yarıçapı Şekil 3.14'te yer alan  $R$ 'dir ve bu değere eğrilik yarıçapı da denilmektedir. Sistemde pozitif korona başlangıç geriliminin değerini hesaplayabilmek için; birincil çığ vasıtası ile oluşan  $N_{+1}$  ve ardışık çığların toplamından oluşan  $N_{+2}$  değerini hesaplamamız gerekmektedir.  $N_{+1}$  ve  $N_{+2}$  değerini hesaplayabileceğimiz formüller aşağıdaki gibidir.

$$r_1 = \sqrt{6 \int_{Z_i}^H D_e \frac{dz}{V_e}} \quad (3.1)$$

$$N_{+1} = \exp \left[ \int_{Z_i}^H (\alpha(\bar{z}) - n(\bar{z})) d\bar{z} \right] \quad (3.2)$$

$$N_{+2} = \int_{r_1}^{R_1} g_1(f_1 f_2) N_{+1} \mu \cdot \exp \left( -\mu \rho + \int_{\rho}^{r^*} (\alpha(z, \bar{\rho}) - n(z, \bar{\rho})) d\bar{\rho} \right) d\bar{\rho} \quad (3.3)$$

Bu denklemler vasıtası ile hesaplanan  $N_{+1}$  ve  $N_{+2}$  değerlerinde,  $N_{+2} \geq N_{+1}$  koşulunun sağlandığı noktalarda pozitif korona başlamaktadır. Çubuk üzerindeki potansiyel değiştikçe  $N_{+1}$  ve  $N_{+2}$  değerleri de değişmektedir.

Eş. 3.1 yardımıyla birincil çığdan dolayı oluşan pozitif yük'ün yarıçapı hesaplanmaktadır.  $D_e$  değeri, çubuk-düzlem elektrot sistemi arasında bulunan dielektrik malzemenin difüzyon katsayısıdır (diffusion coefficient).  $V_e$  değeri, çubuk-düzlem elektrot sistemi arasında bulunan dielektrik malzemenin elektron sürüklenme hızıdır (electron drift velocity). Difüzyon katsayısının birimi  $m^{-1}s^{-1}$  ve elektron sürüklenme hızının birimi  $ms^{-1}$ 'dir.

Eş. 3.2 ile birincil çığın boyutu hesaplanmaktadır. Bu formülün sınır koşulları iyonlaşma bölgesinin başladığı  $Z_i$  noktasından  $r_1$  yarıçaplı dairenin merkezine kadardır. Entegralin içerisinde yer alan ifade ise çubuk-düzlem elektrot sistemi arasında bulunan dielektrik malzemenin efektif iyonlaşma katsayısıdır (effective ionization coefficient). Efektif iyonlaşma katsayısı, dielektrik malzemenin sahip olduğu iyonlaşma katsayısının yapışma katsayısından çıkarılması sonucu ortaya çıkan sonuçtur. Formülde kullandığımız efektif iyonlaşma katsayısının birimi  $cm^{-1}$ 'dir.

Eş. 3.3'de yer alan  $N_{+2}$ , ardışık çığların boyutunu ifade etmektedir. Bu formülün sınır koşulları içerideki entegral için iyonlaşma bölgesinden başlayarak çubuğun yarıçapı veya  $r_1$  yarıçaplı dairenin merkezine kadar devam etmektedir ve dışarıdaki entegralin sınır koşulları  $r_1$  yarıçaplı dairenin merkezinden iyonlaşma bölgesinin tanımlandığı  $R_1$  yarıçaplı dairenin sınırına kadar devam etmektedir. Eş. 3.3 içerisinde yer alan  $g_1$  ifadesi çubuk-düzlem elektrot sistemi arasında bulunan dielektrik malzemenin geometrik faktörüdür (geometric factor).  $(f_1 f_2)$  ifadesi çubuk-düzlem elektrot sistemi arasında bulunan dielektrik malzeme için foton çarpanı'dır. (photoefficient release).  $\mu$  ifadesi çubuk-düzlem elektrot sistemi arasında bulunan dielektrik malzemenin soğrulma katsayısıdır (absorption coefficient). Bunun yanı sıra Eş. 3.2'de kullanılan efektif iyonlaşma katsayısı bu eşitlik içerisinde de kullanılmaktadır. Formülde kullandığımız soğrulma katsayısının birimi  $m^{-1}$ 'dir.

### 3.4.2. Kükürt hekzaflorür (SF<sub>6</sub>)

Kükürt hekzaflorür (SF<sub>6</sub>) gazı, alev almaz, renksiz, kokusuz, zehirsiz, havadan beş kere daha ağır ve kimyasal bakımdan son derece kararlı bir gazdır. SF<sub>6</sub> gazı elektronegatif bir gazdır. Yapışma katsayısı yüksek olan SF<sub>6</sub> gazında elektron sayısındaki artış yavaştır. Bu yüzden dielektrik dayanımı havaya göre daha yüksektir. Normal atmosferik koşullarda, SF<sub>6</sub> gazı havadan iki buçuk kat daha fazla dielektrik dayanıma sahiptir. Şalt cihazlarında birkaç bar basınç altında kullanılan SF<sub>6</sub> gazının dielektrik dayanımı, bu orandan çok daha fazla olmaktadır [13, 14].

SF<sub>6</sub> gazlı kesicilerde kesme esnasında ortaya çıkan ark kesicinin iç ortamını ısıttığından SF<sub>6</sub> gazı ayrışır ve kükürt ve fluor atomları SF<sub>6</sub> gazının yerini alır. Kesme işlemini sonrasında, 2000 °C civarında fluor ve kükürt iyonları SF<sub>6</sub> gazına tekrar dönüşmek üzere kimyasal bir tepkimeye girerek tekrar birleşirler. Böylece, kesici içerisinde dielektrik ortam tekrar meydana gelir. SF<sub>6</sub> gazlı kesicilerin ömrü 30 yıldan daha fazladır.

Kükürt hekzaflorür gazı yüksek dielektrik dayanımından ötürü sadece sistemi kesme işlemi için değil sistemi ayırma işlemi için de kullanılmaktadır. Yani kesicilere ilave olarak ayırıcı, yük ayırıcısı ve topraklama anahtarlarında da SF<sub>6</sub> gazı kullanılmaktadır. GIS (Gaz İzoleli Sistem) ve RMU (Ring Main Unit) gibi ekipmanlarda ise izolasyon ortamı olarak SF<sub>6</sub> gazı kullanılmakta olup, kullanılan ekipmanın hava izoleli sistemlere göre çok daha ufak boyutlarda olmasını sağlamaktadır.

SF<sub>6</sub> gazının diğer kullanım yerleri; yüksek gerilim hatlarında, güç dağıtım sistemlerinde, şalterlerde, yüksek gerilim trafolarında, doğrudan hızlandırıcılarda, yüksek frekanslı sinyalleri taşımak için üretilen kablolarda, elektrik düğmelerinde, x-ray aparatlarında izolasyon amaçlı olarak, lazerlerde, plazmaların yakılması sırasında, yarı iletken özelliğinden dolayı besleyici gaz olarak, SF<sub>6</sub> gaz karışımları kaçak kontrollerinde, hoparlör yapımında, maden kuyularında hava akışının saptanmasında izleme gazı olarak, iyi ses yalıtımı sağlamak ve ısınma giderlerini



düşürmek amacı ile ısıcam panellerinde ara katman olarak, retina hastalıklarının tedavisinde cerrahi olarak, meteoroloji ve metalürji uygulamaları gibi birçok endüstriyel alandır.

Bazı gazlar ozon tabakasının seyrelmesine yol açar. Seyrelmeye yol açan tüm gazlar içerisinde klor bulundurur. SF<sub>6</sub> gazının ise klor içermediğinden dolayı ozon tabakasına herhangi bir zararı söz konusu değildir. Dünyanın ortalama küresel sıcaklık artışına neden olan etkiye sera etkisi adı verilmektedir. Sera etkisine yol açan gazlar ise dünyadan uzaya geri yansıyan ışınımı emen ve bu ışınımın atmosferde sıkışmasına sebep olan gazlardır. Bu sıkışma atmosferin ısınmasına yol açmaktadır. Sera etkisine sebebiyet veren gazların başında CO<sub>2</sub> ve su buharı gelir. SF<sub>6</sub> gazı 1995 yılından itibaren sera etkisine yol açan gazlar listesinde anılmaya başlandı. Ancak SF<sub>6</sub> gazının meydana getirdiği etki, toplam sera etkisinin % 0,1'i oranındadır. Bu oran dikkate alınırsa sera etkisine yaptığı katkı ihmal edilebilir sınırlardadır.

Çizelge 3.3. SF<sub>6</sub> gazının özellikleri

Moleküler Ağırlık	146,05
Yoğunluk, likit (0°C, 12,65 bar)	1,56 kg/l
Yoğunluk, gaz (0°C, 12,65 bar)	6,07 kg/m <sup>3</sup>
Özgül Ağırlık (Havanın Özgül Ağırlığı 1'e eşittir)	5,1

### 3.4.3. Kükürt hekzaflorür (SF<sub>6</sub>) gazının parametreleri

Eş. 3.1, 3.2 ve 3.3 vasıtası ile çubuk-düzlem elektrot sistemimizin pozitif korona başlangıç gerilimi hesaplanabilmektedir. Bu eşitlikler içerisinde yer alan difüzyon katsayısı, elektron sürüklenme hızı ve efektif iyonlaşma katsayısı değerlerine birçok makale veya kitap vasıtası ile ulaşılabilir. Burada ulaşabildiğimiz değerler deneysel sonuçlar olduğu için, bu ifadelerin elektrik alana bağlı olarak formüle edilmesi gerekmektedir. Bu kısımda deneysel sonuçlarla elde edilen difüzyon katsayısı, elektron sürüklenme hızı ve efektif iyonlaşma katsayısı değerlerine için hazırlanan formüller verilecektir.

Difüzyon katsayısı için ölçülen deneysel sonuçlar aşağıdaki Çizelge 3.4’de aktarılmış ve bunlar üzerinde yapılan çalışma sonucu uydurulan formül Eş 3.4’de verilmiştir [15].

Çizelge 3.4. SF<sub>6</sub> için difüzyon katsayısı

E/N (Td)	Diffusion Coefficient ( $D_L N$ ( $10^{24} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ ))	E/N (Td)	Diffusion Coefficient ( $D_L N$ ( $10^{24} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ ))
82	0,48	364	2,28
122	0,89	404	2,43
162	0,93	444	2,40
202	1,54	484	2,77
242	1,64	524	2,90
283	2,01	565	2,85
323	2,32		

$82 \leq E / N \leq 565$  Td aralığı için;

$$D_L N = \left( 0.0049207 \left( \frac{E}{N} \right) + 0.36677 \right) 10^{24} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1} \quad (3.4)$$

Elektron sürüklenme hızı için ölçülen deneysel sonuçlar aşağıdaki Çizelge 3.5’de aktarılmış ve bunlar üzerinde yapılan çalışma sonucu uydurulan formül Eş 3.5’de verilmiştir [16-18].

Çizelge 3.5. SF<sub>6</sub> için elektron sürüklenme hızı

E/N (Td)	W (10 <sup>7</sup> cm.s <sup>-1</sup> )	E/N (Td)	W (10 <sup>7</sup> cm.s <sup>-1</sup> )
182	0,97	424	2,88
244	1,48	485	3,40
303	1,92	545	3,90
364	2,38	606	4,35

$182 \leq E / N \leq 606$  Td aralığı için;

$$W = \left( 0.0080135 \left( \frac{E}{N} \right) - 0.49832 \right) 10^7 \text{ cm.s}^{-1} \quad (3.5)$$

Efektif iyonlaşma katsayısı için ölçülen deneysel sonuçlar aşağıdaki Çizelge 3.6’de aktarılmış ve bunlar üzerinde yapılan çalışma sonucu uydurulan formül Eş 3.6’de verilmiştir [16, 19].

Çizelge 3.6. SF<sub>6</sub> için efektif iyonlaşma katsayısı

E/N (Td)	$\bar{\alpha}$ (cm <sup>-1</sup> )	E/N (Td)	$\bar{\alpha}$ (cm <sup>-1</sup> )
182	-1,52	424	0,58
244	-0,98	485	1,09
303	-0,51	545	1,60
364	0,06	606	2,17

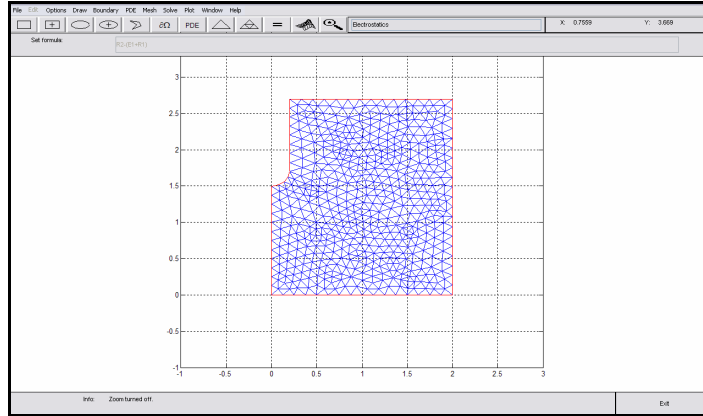
$182 \leq E/N \leq 606$  Td aralığı için;

$$\bar{\alpha} = \left( 0.0086731 \left( \frac{E}{N} \right) - 3.1071 \right) \text{ cm}^{-1} \quad (3.6)$$

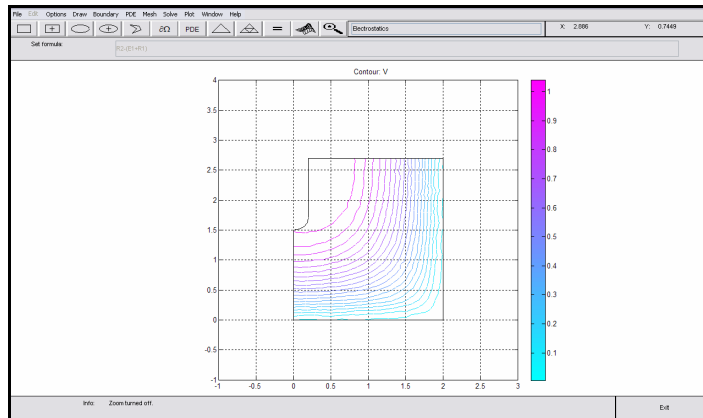
Belirtilen kaynaklar vasıtası ile alınan deneysel veriler difüzyon katsayısı, elektron sürüklenme hızı ve efektif iyonlaşma katsayısı verileri için elektrik alan değer aralıkları ile birlikte formüle edilmiştir. Bu ifadeler pozitif korona başlangıç geriliminin hesaplanmasında kullanılacaktır.

### 3.4.4. $r=2$ mm ve $d=15$ mm boyutlarında çubuk-düzlem elektrot sisteminin modellenmesi

$r=2$  mm ve  $d=15$  mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminin modellenmesinin yapılacağı bu bölümde, hesaplayacağımız pozitif korona başlangıç gerilimi değerleri deneysel sonuçlar ile karşılaştırılacaktır. Çubuk-düzlem elektrot sisteminin sonlu elemanlar metodu ile parçalara ayrılması ortaya çıkan sonuç Şekil 3.15'te gösterilmiştir. Bu metot ile parçalara ayrılan çubuk-düzlem elektrot sisteminin potansiyel dağılımı ise Şekil 3.16'da görülmektedir.



Şekil 3.15.  $r=2$  mm ve  $d=15$  mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminin ikinci dereceden ağ ile oluşturulan modeli



Şekil 3.16.  $r=2$  mm ve  $d=15$  mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde potansiyel alan çizgileri

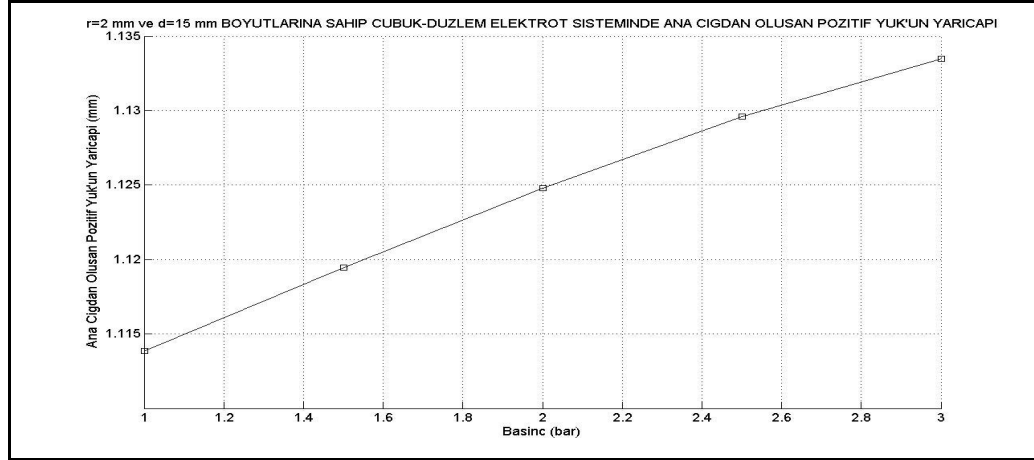
Sonlu elemanlar metodu yardımıyla yapılan çözümlemeler sonucunda her düğüm noktasına ait koordinat noktaları ve bu noktaların potansiyel değerleri hesaplanmıştır. Kritik alan çizgisinde meydana gelen toplam düğüm sayısı 13'tür. Bu noktalar ile hesaplanan pozitif korona başlangıç gerilimi ve deneysel sonuçlar [10] ile hesaplama sonucu meydana çıkan yüzde hata değerleri Çizelge 3.7'de verilmiştir.

Çizelge 3.7.  $r=2$  mm ve  $d=15$  mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde hesaplanan ve ölçülen pozitif korona başlangıç gerilimi değerleri

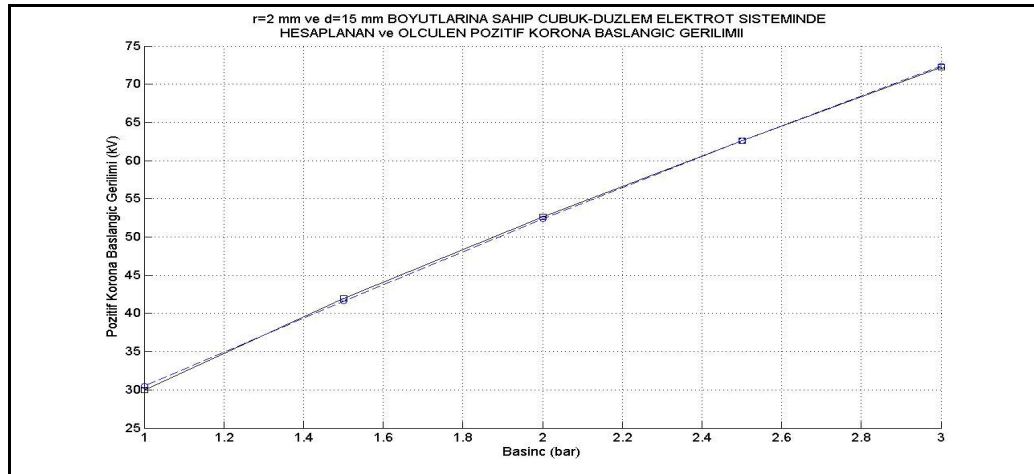
Basınç (bar)	$r_1$ (mm)	Ölçülen pozitif korona başlangıç gerilimi (kV)	Hesaplanan pozitif korona başlangıç gerilimi (kV)	Yüzde hata (%)
1,0	1,1139	30,49	29,95	1,77
1,5	1,1195	41,59	41,96	-0,89
2,0	1,1248	52,35	52,67	-0,61
2,5	1,1296	62,64	62,58	0,10
3,0	1,1335	72,39	72,2	0,26

Çizelge 3.7'de gördüğümüz gibi birincil ışıktan oluşan pozitif yükün yarıçapı ( $r_1$ ) uygulanan potansiyel değeri arttıkça büyümektedir. Meydana çıkan her değer %5 olan kabul edilebilir alt sınırın çok altındadır. Basınç değeri 1 bar'dan başlayarak 3 bar'a kadar devam etmektedir.

Hesapladığımız birincil çığdan oluşan pozitif yükün yarıçapı ( $r_1$ ) değerinin basınç'a bağlı olarak değişimi Şekil 3.17'de görülmektedir. Hesaplanan pozitif korona başlangıç gerilimi ve ölçülen pozitif korona başlangıç gerilimi değerlerinin basınç'a bağlı olarak değişimi Şekil 3.18'de görülmektedir.

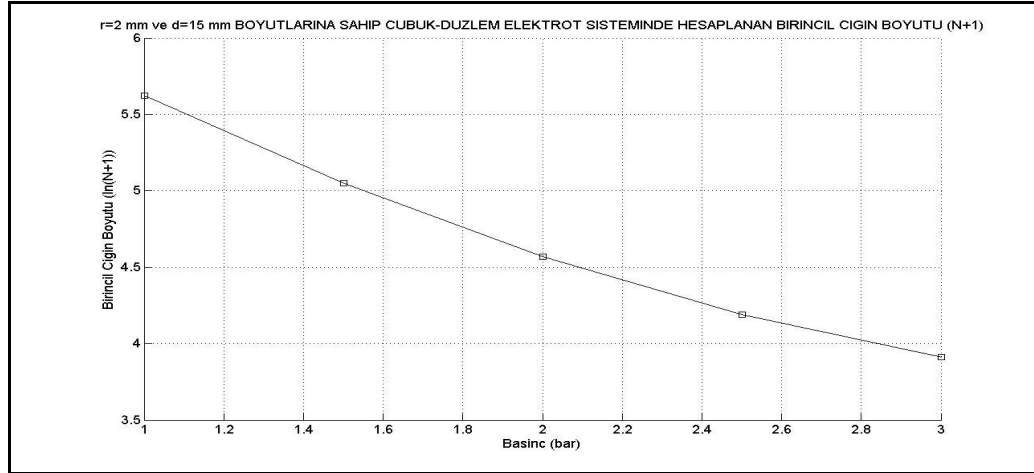


Şekil 3.17.  $r=2$  mm ve  $d=15$  mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde birincil çığdan dolayı oluşan pozitif yükün yarıçapı ( $r_1$ ) değerinin basınç'a bağlı olarak değişimi

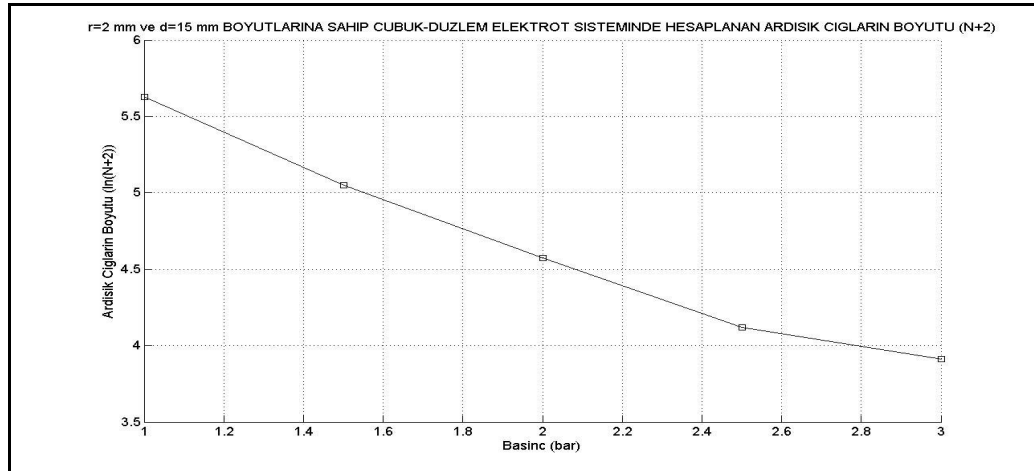


Şekil 3.18.  $r=2$  mm ve  $d=15$  mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde hesaplanan ve ölçülen pozitif korona başlangıç gerilimi değerlerinin basınç'a bağlı olarak değişimi (Kesik çizgi: ölçülen, düz çizgi: hesaplanan)

Hesapladığımız birincil çığın boyutu ( $N_{+1}$ ) değerinin basınç'a bağlı olarak değişimi Şekil 3.19'da görmektedir. Hesaplanan ardışık çığların boyutunun ( $N_{+2}$ ) basınç'a bağlı olarak değişimi Şekil 3.20'de görmektedir.



Şekil 3.19. r=2 mm ve d=15 mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde hesapladığımız birincil çığın boyutunun ( $N_{+1}$ ) basınç'a bağlı olarak değişimi

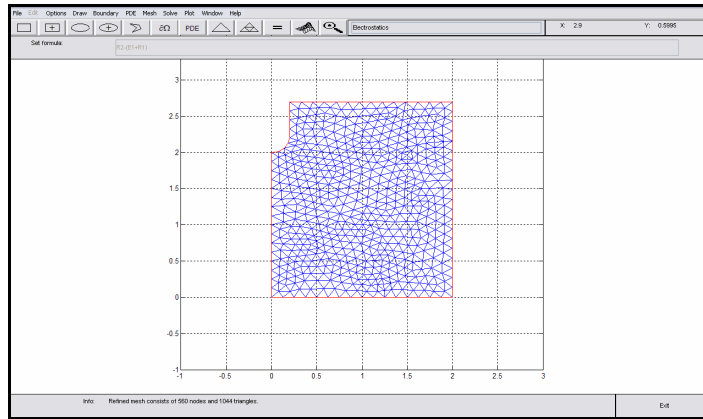


Şekil 3.20. r=2 mm ve d=15 mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde hesapladığımız ardışık çığların boyutunun ( $N_{+2}$ ) basınç'a bağlı olarak değişimi

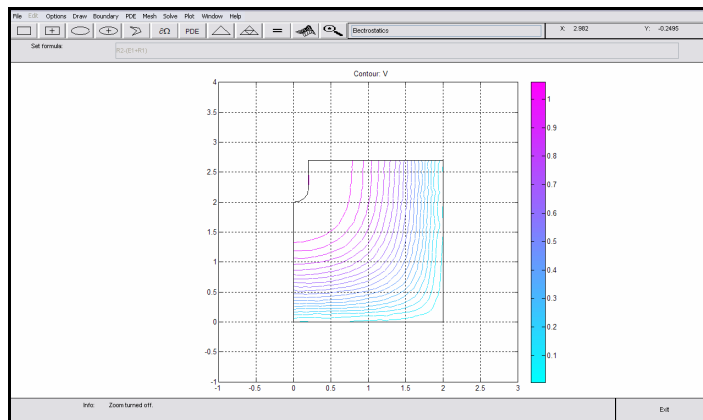


### 3.4.5. $r=2$ mm ve $d=20$ mm boyutlarında çubuk-düzlem elektrot sisteminin modellenmesi

$r=2$  mm ve  $d=20$  mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminin modellenmesinin yapılacağı bu bölümde, hesaplayacağımız pozitif korona başlangıç gerilimi değerleri deneysel sonuçlar ile karşılaştırılacaktır. Çubuk-düzlem elektrot sisteminin sonlu elemanlar metodu ile parçalara ayrılması ortaya çıkan sonuç Şekil 3.21’de gösterilmiştir. Bu metot ile parçalara ayrılan çubuk-düzlem elektrot sisteminin potansiyel dağılımı ise Şekil 3.22’de görülmektedir.



Şekil 3.21.  $r=2$  mm ve  $d=20$  mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminin ikinci dereceden ağ ile oluşturulan modeli



Şekil 3.22.  $r=2$  mm ve  $d=20$  mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde potansiyel alan çizgileri

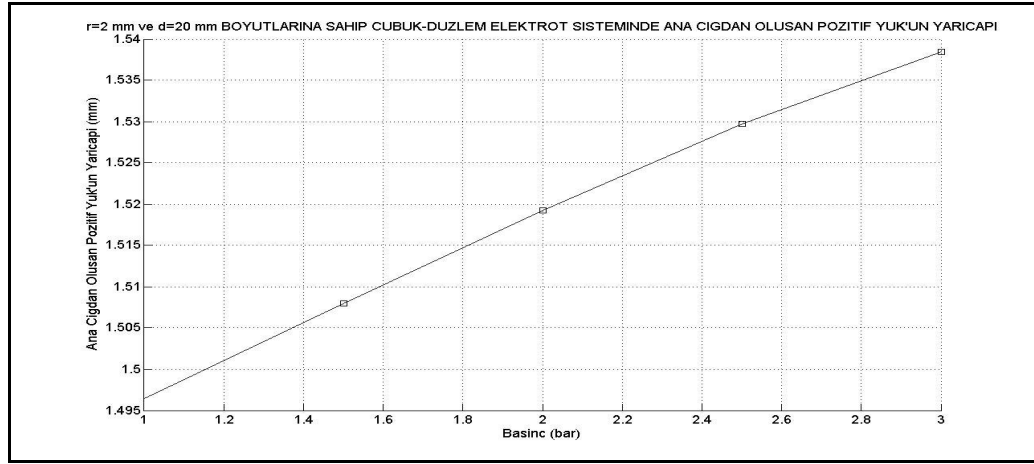
Sonlu elemanlar metodu yardımıyla yapılan çözümlemeler sonucunda her düğüm noktasına ait koordinat noktaları ve bu noktaların potansiyel değerleri hesaplanmıştır. Kritik alan çizgisinde meydana gelen toplam düğüm sayısı 17'dir. Bu noktalar ile hesaplanan pozitif korona başlangıç gerilimi ve deneysel sonuçlar [10] ile hesaplama sonucu meydana çıkan yüzde hata değerleri Çizelge 3.8'de verilmiştir.

Çizelge 3.8.  $r=2$  mm ve  $d=20$  mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde hesaplanan ve ölçülen pozitif korona başlangıç gerilimi değerleri

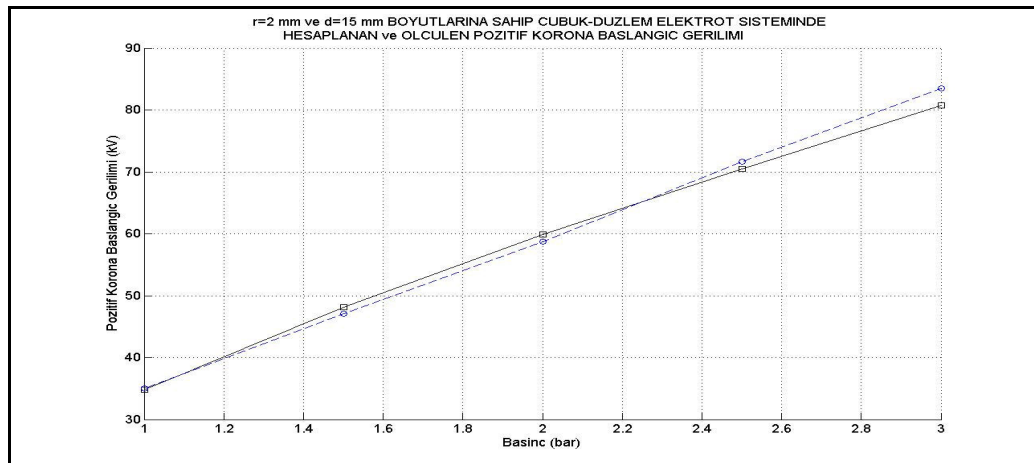
Basınç (bar)	$r_1$ (mm)	Ölçülen pozitif korona başlangıç gerilimi (kV)	Hesaplanan pozitif korona başlangıç gerilimi (kV)	Yüzde hata (%)
1,0	1,49647	35,00	34,79	0,59
1,5	1,50797	47,07	48,20	-2,41
2,0	1,51925	58,69	59,88	-2,02
2,5	1,52971	71,60	70,48	1,57
3,0	1,53846	83,50	80,71	3,34

Çizelge 3.8'da gördüğümüz gibi birincil çığdan oluşan pozitif yükün yarıçapı ( $r_1$ ) uygulanan potansiyel değeri arttıkça büyümektedir. Meydana çıkan her değer %5 olan kabul edilebilir alt sınırın çok altındadır. Basınç değeri 1 bar'dan başlayarak 3 bar'a kadar devam etmektedir.

Hesapladığımız birincil çığdan oluşan pozitif yükün yarıçapı ( $r_1$ ) değerinin basınç'a bağlı olarak değişimi Şekil 3.23'de görülmektedir. Hesaplanan pozitif korona başlangıç gerilimi ve ölçülen pozitif korona başlangıç gerilimi değerlerinin basınç'a bağlı olarak değişimi Şekil 3.24'de görülmektedir.

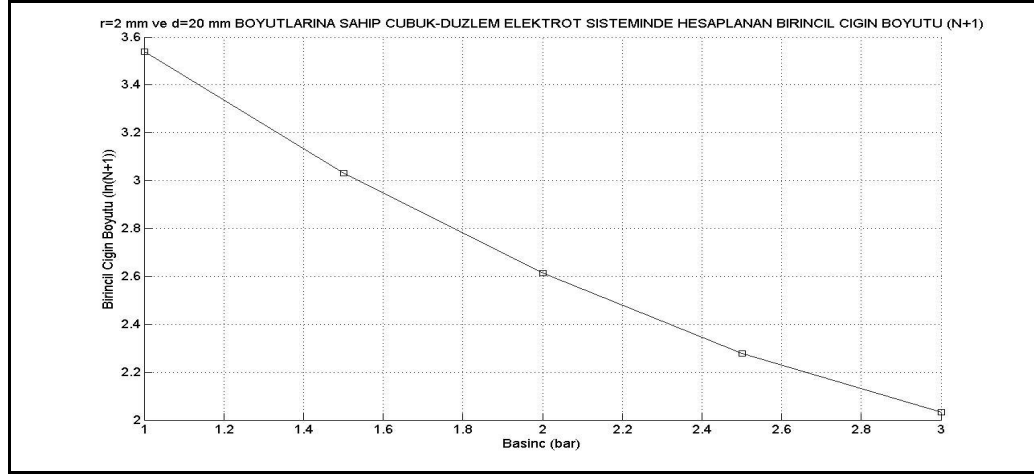


Şekil 3.23.  $r=2$  mm ve  $d=20$  mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde birincil çığdan dolayı oluşan pozitif yükün yarıçapı ( $r_1$ ) değerinin basınç'a bağlı olarak değişimi

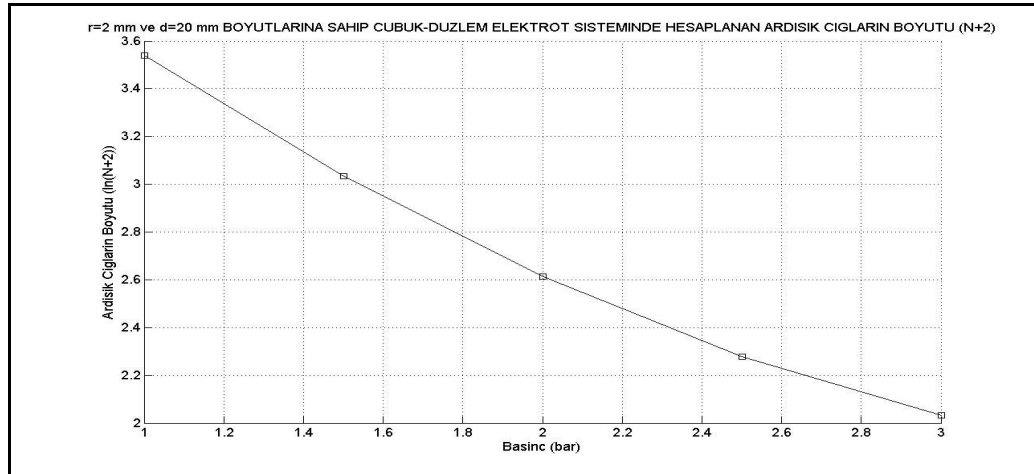


Şekil 3.24.  $r=2$  mm ve  $d=20$  mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde hesaplanan ve ölçülen pozitif korona başlangıç gerilimi değerlerinin basınç'a bağlı olarak değişimi (Kesik çizgi: ölçülen, düz çizgi: hesaplanan)

Hesapladığımız birincil çığın boyutu ( $N_{+1}$ ) değerinin basınç'a bağlı olarak değişimi Şekil 3.25'de görülmektedir. Hesaplanan ardışık çığların boyutunun ( $N_{+2}$ ) basınç'a bağlı olarak değişimi Şekil 3.26'de görülmektedir.



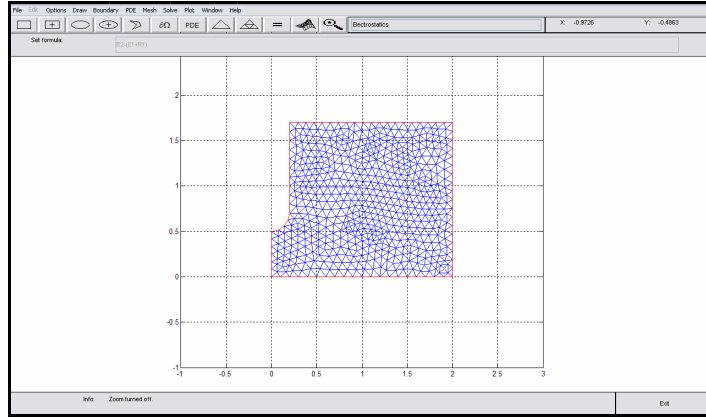
Şekil 3.25.  $r=2$  mm ve  $d=20$  mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde hesapladığımız birincil çığ boyutunun ( $N_{+1}$ ) basınç'a bağlı olarak değişimi



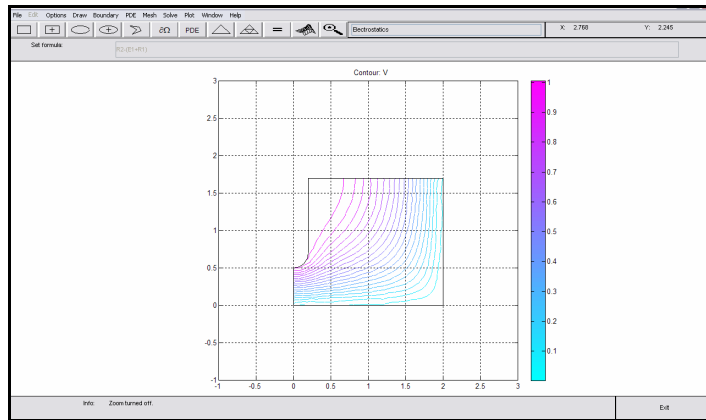
Şekil 3.26.  $r=2$  mm ve  $d=20$  mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde hesapladığımız ardışık çığların boyutunun ( $N_{+2}$ ) basınç'a bağlı olarak değişimi

### 3.4.6. $r=2$ mm ve $d=5$ mm boyutlarında çubuk-düzlem elektrot sisteminin modellenmesi

$r=2$  mm ve  $d=5$  mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminin modellenmesinin yapılacağı bu bölümde, hesaplayacağımız pozitif korona başlangıç gerilimi değerleri bir önceki bölümlerde hesapladığımız değerler ile karşılaştırılacaktır. Çubuk-düzlem elektrot sisteminin sonlu elemanlar metodu ile parçalara ayrılması ortaya çıkan sonuç Şekil 3.27’de gösterilmiştir. Bu metot ile parçalara ayrılan çubuk-düzlem elektrot sisteminin potansiyel dağılımı ise Şekil 3.28’de görülmektedir.



Şekil 3.27.  $r=2$  mm ve  $d=5$  mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminin ikinci dereceden ağ ile oluşturulan modeli



Şekil 3.28.  $r=2$  mm ve  $d=5$  mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde potansiyel alan çizgileri

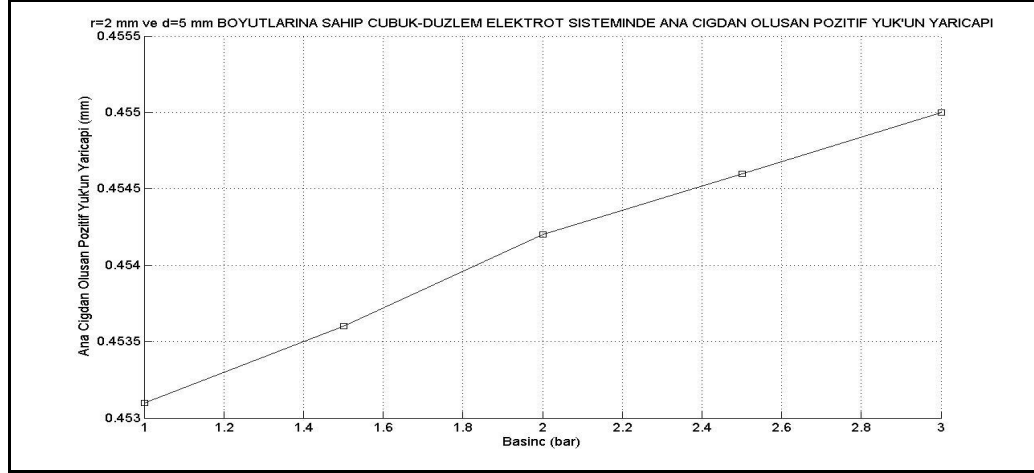
Sonlu elemanlar metodu yardımıyla yapılan çözümlemeler sonucunda her düğüm noktasına ait koordinat noktaları ve bu noktaların potansiyel değerleri hesaplanmıştır. Kritik alan çizgisinde meydana gelen toplam düğüm sayısı 7'dir. Bu noktalar ile hesaplanan pozitif korona başlangıç gerilimi değerleri Çizelge 3.9'da verilmiştir.

Çizelge 3.9.  $r=2$  mm ve  $d=5$  mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde hesaplanan pozitif korona başlangıç gerilimi değerleri

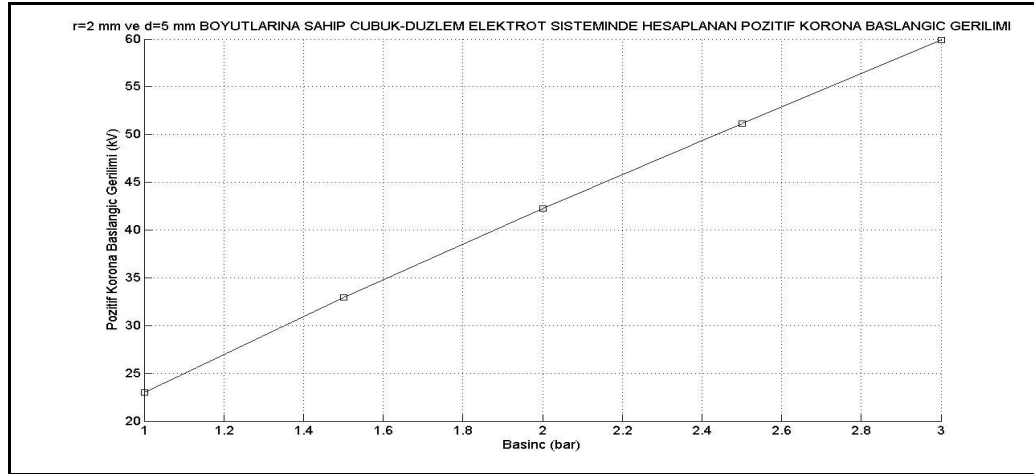
Basınç (bar)	$r_1$ (mm)	Hesaplanan pozitif korona başlangıç gerilimi (kV)
1,0	0,45305	23,00
1,5	0,45363	32,97
2,0	0,45416	42,27
2,5	0,45461	51,16
3,0	0,45496	59,92

Çizelge 3.9'da gördüğümüz gibi birincil çığdan oluşan pozitif yükün yarıçapı ( $r_1$ ) uygulanan potansiyel değeri arttıkça büyümektedir. Basınç değeri ise 1 bar'dan başlayarak 3 bar'a kadar devam etmektedir. Bu durumda hesaplanan pozitif korona başlangıç gerilimi değerleri,  $d$  açıklığının azaldıkça pozitif korona başlangıç geriliminin ve birincil çığdan oluşan pozitif yükün yarıçapının azaldığını göstermektedir.

Hesapladığımız birincil çığdan oluşan pozitif yükün yarıçapı ( $r_1$ ) değerinin basınç'a bağlı olarak değişimi Şekil 3.29'da görünmektedir. Hesaplanan pozitif korona başlangıç gerilimi değerlerinin basınç'a bağlı olarak değişimini Şekil 3.30'da görünmektedir.

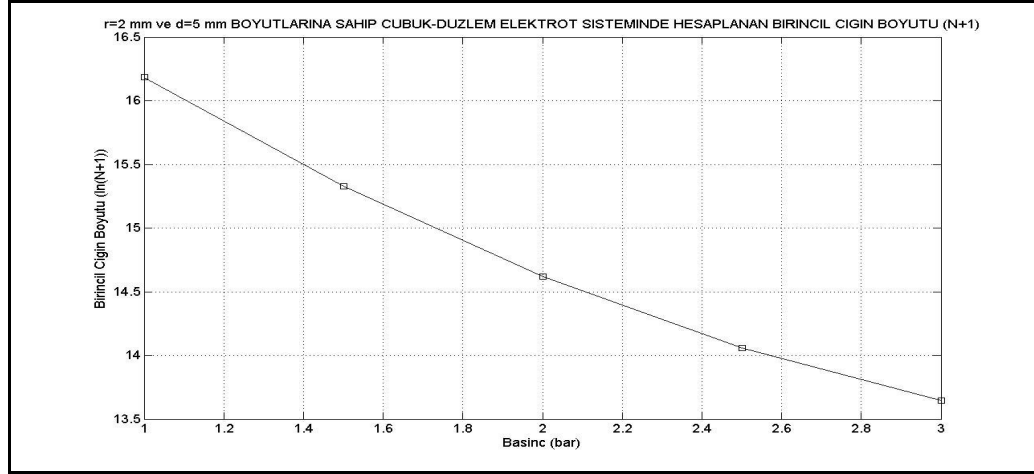


Şekil 3.29.  $r=2$  mm ve  $d=5$  mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde birincil çığdan oluşan pozitif yükün yarıçapı ( $r_1$ ) değerinin basınç'a bağlı olarak değişimi

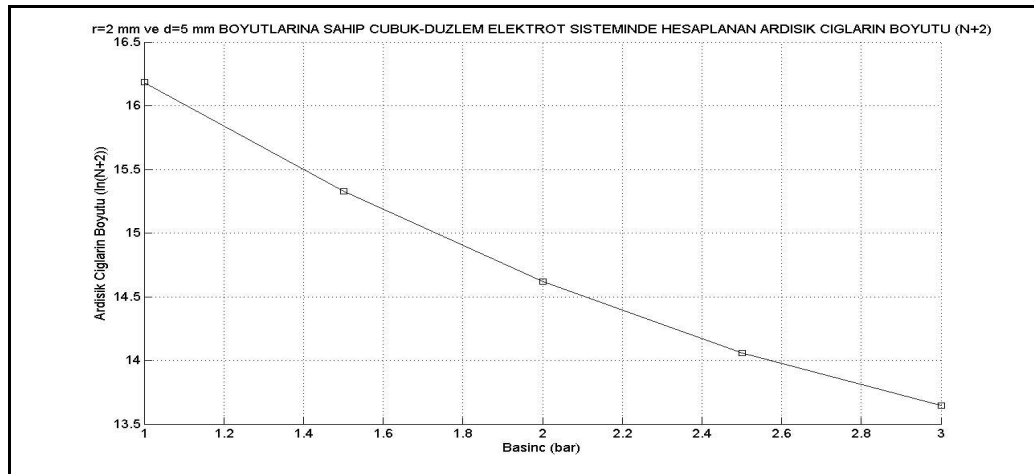


Şekil 3.30.  $r=2$  mm ve  $d=5$  mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde hesaplanan pozitif korona başlangıç gerilimi değerlerinin basınç'a bağlı olarak değişimi

Hesapladığımız birincil çıgın boyutu ( $N_{+1}$ ) değerinin basınç'a bağlı olarak değişimi Şekil 3.31'de görülmektedir. Hesaplanan ardışık çıgıların boyutunun ( $N_{+2}$ ) basınç'a bağlı olarak değişimi Şekil 3.32'de görülmektedir.



Şekil 3.31.  $r=2$  mm ve  $d=5$  mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde hesapladığımız birincil çıgın boyutunun ( $N_{+1}$ ) basınç'a bağlı olarak değişimi

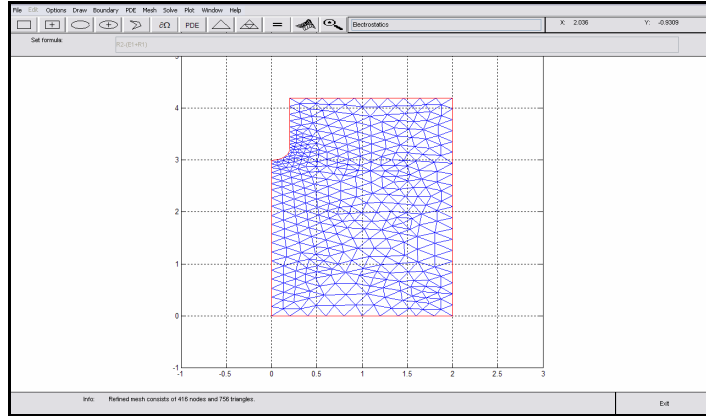


Şekil 3.32.  $r=2$  mm ve  $d=5$  mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde hesapladığımız ardışık çıgıların boyutunun ( $N_{+2}$ ) basınç'a bağlı olarak değişimi

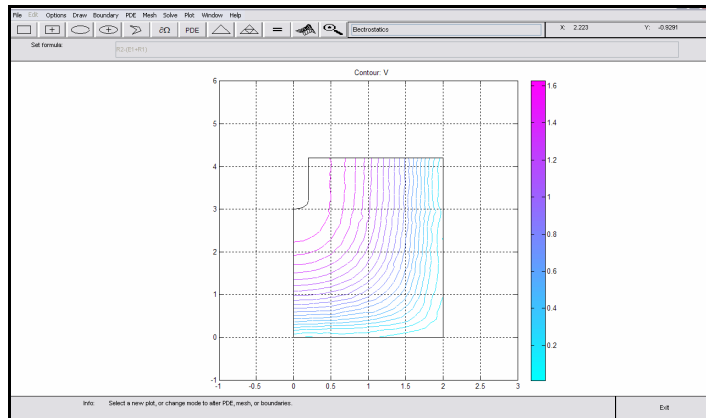


### 3.4.7. $r=2$ mm ve $d=30$ mm boyutlarında çubuk-düzlem elektrot sisteminin modellenmesi

$r=2$  mm ve  $d=30$  mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminin modellenmesinin yapılacağı bu bölümde, hesaplayacağımız pozitif korona başlangıç gerilimi değerleri bir önceki bölümlerde hesapladığımız değerler ile karşılaştırılacaktır. Çubuk-düzlem elektrot sisteminin sonlu elemanlar metodu ile parçalara ayrılması ortaya çıkan sonuç Şekil 3.33’de gösterilmiştir. Bu metot ile parçalara ayrılan çubuk-düzlem elektrot sisteminin potansiyel dağılımı ise Şekil 3.34’de görülmektedir.



Şekil 3.33.  $r=2$  mm ve  $d=30$  mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminin ikinci dereceden ağ ile oluşturulan modeli



Şekil 3.34.  $r=2$  mm ve  $d=30$  mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde potansiyel alan çizgileri

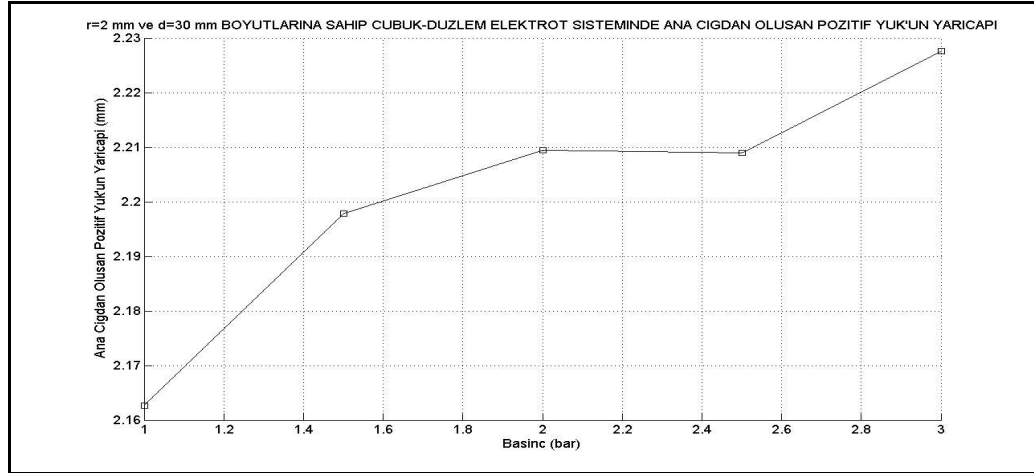
Sonlu elemanlar metodu yardımıyla yapılan çözümlemeler sonucunda her düğüm noktasına ait koordinat noktaları ve bu noktaların potansiyel değerleri hesaplanmıştır. Kritik alan çizgisinde meydana gelen toplam düğüm sayısı 21'dir. Bu noktalar ile hesaplanan pozitif korona başlangıç gerilimi değerleri Çizelge 3.10'da verilmiştir.

Çizelge 3.10.  $r=2$  mm ve  $d=30$  mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde hesaplanan pozitif korona başlangıç gerilimi değerleri

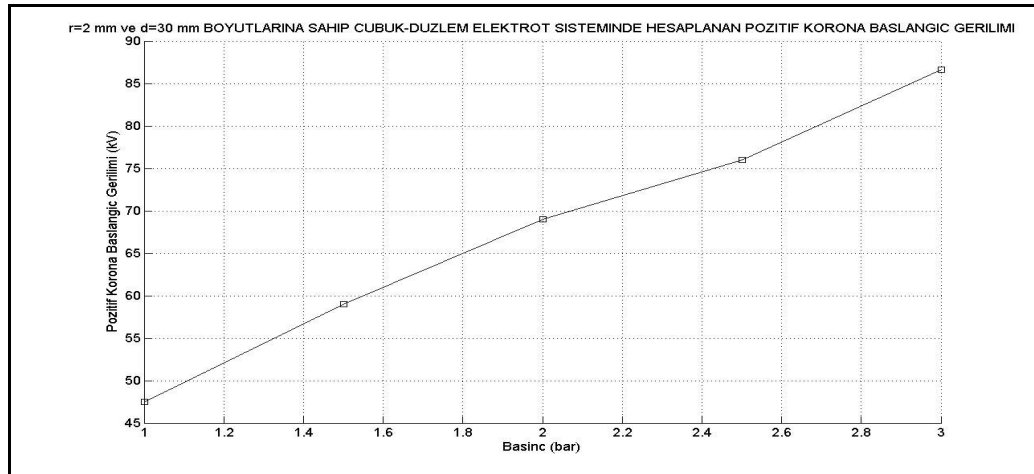
Basınç (bar)	$r_1$ (mm)	Hesaplanan pozitif korona başlangıç gerilimi (kV)
1,0	2,16267	47,51
1,5	2,19790	58,99
2,0	2,20947	68,98
2,5	2,20890	76,00
3,0	2,22762	86,65

Çizelge 3.10'da gördüğümüz gibi birincil çığdan oluşan pozitif yükün yarıçapı ( $r_1$ ) uygulanan potansiyel değeri arttıkça büyümektedir. Basınç değeri ise 1 bar'dan başlayarak 3 bar'a kadar devam etmektedir. Bu durumda hesaplanan pozitif korona başlangıç gerilimi değerleri,  $d$  açıklığının arttıkça pozitif korona başlangıç geriliminin ve birincil çığdan oluşan pozitif yükün yarıçapının arttığını göstermektedir.

Hesapladığımız birincil çığdan oluşan pozitif yükün yarıçapı ( $r_1$ ) değerinin basınç'a bağlı olarak değişimi Şekil 3.35'da görülmektedir. Hesaplanan pozitif korona başlangıç gerilimi değerlerinin basınç'a bağlı olarak değişimi Şekil 3.36'da görülmektedir.

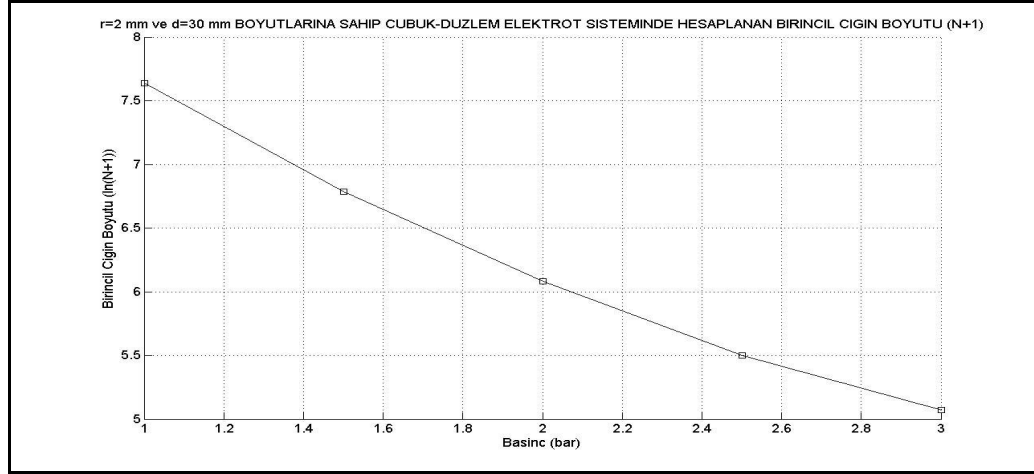


Şekil 3.35.  $r=2$  mm ve  $d=30$  mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde birincil çığdan oluşan pozitif yükün yarıçapı ( $r_1$ ) değerinin basınç'a bağlı olarak değişimi

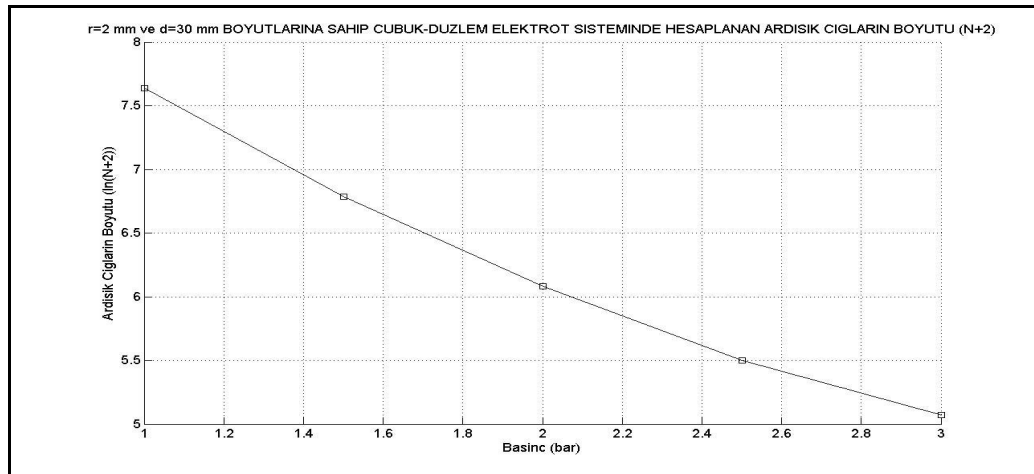


Şekil 3.36.  $r=2$  mm ve  $d=30$  mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde hesaplanan pozitif korona başlangıç gerilimi değerlerinin basınç'a bağlı olarak değişimi

Hesapladığımız birincil çığın boyutu ( $N_{+1}$ ) değerinin basınç'a bağlı olarak değişimi Şekil 3.37'de görülmektedir. Hesaplanan ardışık çığların boyutunun ( $N_{+2}$ ) basınç'a bağlı olarak değişimini Şekil 3.38'de görülmektedir.



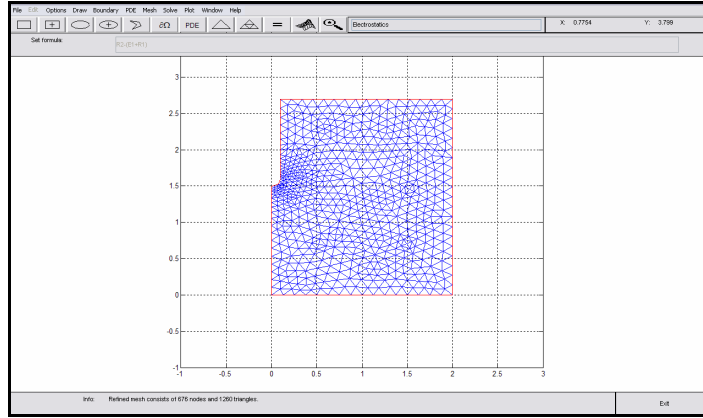
Şekil 3.37.  $r=2$  mm ve  $d=30$  mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde hesapladığımız birincil çığın boyutunun ( $N_{+1}$ ) basınç'a bağlı olarak değişimi



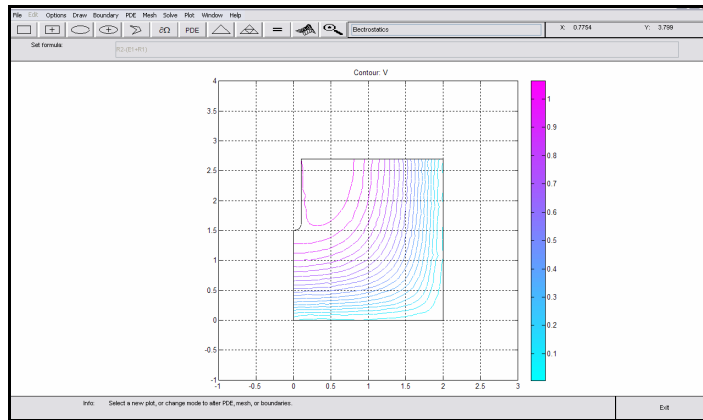
Şekil 3.38.  $r=2$  mm ve  $d=30$  mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde hesapladığımız ardışık çığların boyutunun ( $N_{+2}$ ) basınç'a bağlı olarak değişimi

### 3.4.8. $r=1$ mm ve $d=15$ mm boyutlarında çubuk-düzlem elektrot sisteminin modellenmesi

$r=1$  mm ve  $d=15$  mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminin modellenmesinin yapılacağı bu bölümde, hesaplayacağımız pozitif korona başlangıç gerilimi değerleri bir önceki bölümlerde bulduğumuz değerler ile karşılaştırılacaktır. Çubuk-düzlem elektrot sisteminin sonlu elemanlar metodu ile parçalara ayrılması ortaya çıkan sonuç Şekil 3.39’de gösterilmiştir. Bu metot ile parçalara ayrılan çubuk-düzlem elektrot sisteminin potansiyel dağılımı ise Şekil 3.40’de görülmektedir.



Şekil 3.39.  $r=1$  mm ve  $d=15$  mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminin ikinci dereceden ağ ile oluşturulan modeli



Şekil 3.40.  $r=2$  mm ve  $d=15$  mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde potansiyel alan çizgileri

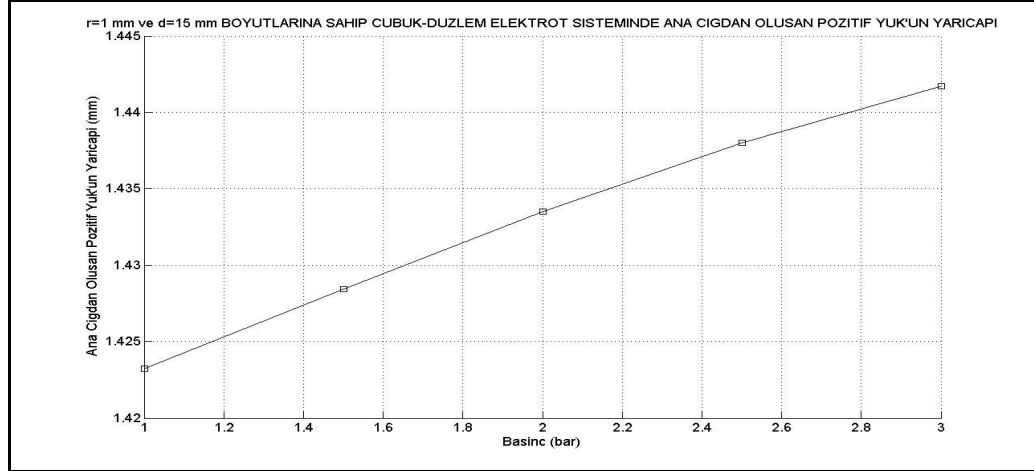
Sonlu elemanlar metodu yardımıyla yapılan çözümlemeler sonucunda her düğüm noktasına ait koordinat noktaları ve bu noktaların potansiyel değerleri hesaplanmıştır. Kritik alan çizgisinde meydana gelen toplam düğüm sayısı 19'dır. Bu noktalar ile hesaplanan pozitif korona başlangıç gerilimi değerleri Çizelge 3.11'de verilmiştir.

Çizelge 3.11.  $r=1$  mm ve  $d=15$  mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde hesaplanan pozitif korona başlangıç gerilimi değerleri

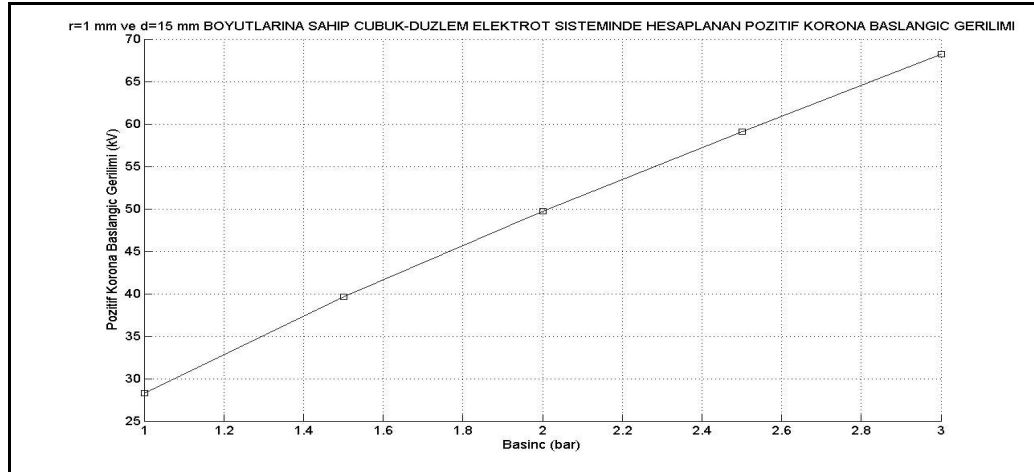
Basınç (bar)	$r_1$ (mm)	Hesaplanan pozitif korona başlangıç gerilimi (kV)
1,0	1,42322	28,28
1,5	1,42845	39,62
2,0	1,43353	49,7
2,5	1,43800	59,09
3,0	1,44170	68,19

Çizelge 3.11'de gördüğümüz gibi birincil çığdan oluşan pozitif yükün yarıçapı ( $r_1$ ) uygulanan potansiyel değeri arttıkça büyümektedir. Basınç değeri ise 1 bar'dan başlayarak 3 bar'a kadar devam etmektedir. Bu durumda hesaplanan pozitif korona başlangıç gerilimi değerleri bizlere,  $r$  çubuk yarıçapının boyutu azaldıkça pozitif korona başlangıç geriliminin azaldığını ve birincil çığdan oluşan pozitif yükün yarıçapının arttığını göstermektedir.

Hesapladığımız birincil çığdan oluşan pozitif yükün yarıçapı ( $r_1$ ) değerinin basınç'a bağlı olarak değişimi Şekil 3.41'da görülmektedir. Hesaplanan pozitif korona başlangıç gerilimi değerlerinin basınç'a bağlı olarak değişimi Şekil 3.42'da görülmektedir.

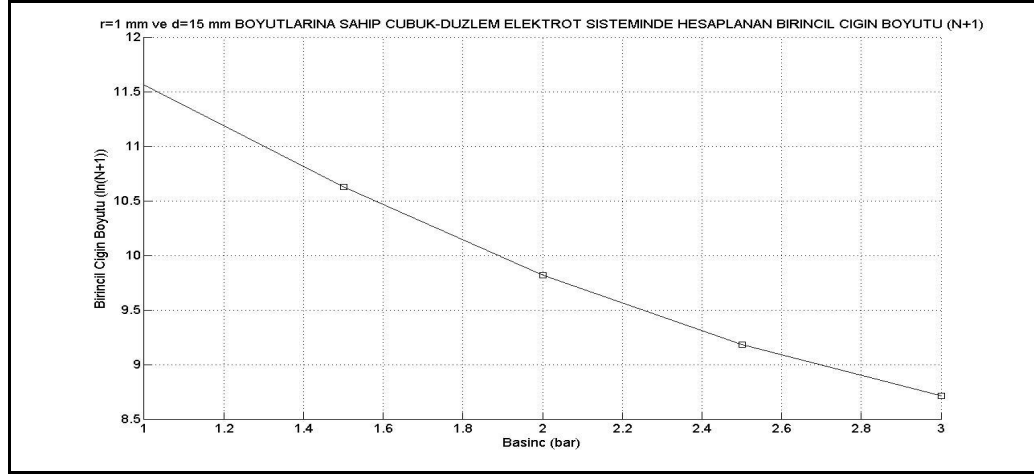


Şekil 3.41.  $r=1$  mm ve  $d=15$  mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde birincil çığdan oluşan pozitif yükün yarıçapı ( $r_1$ ) değerinin basınç'a bağlı olarak değişimi

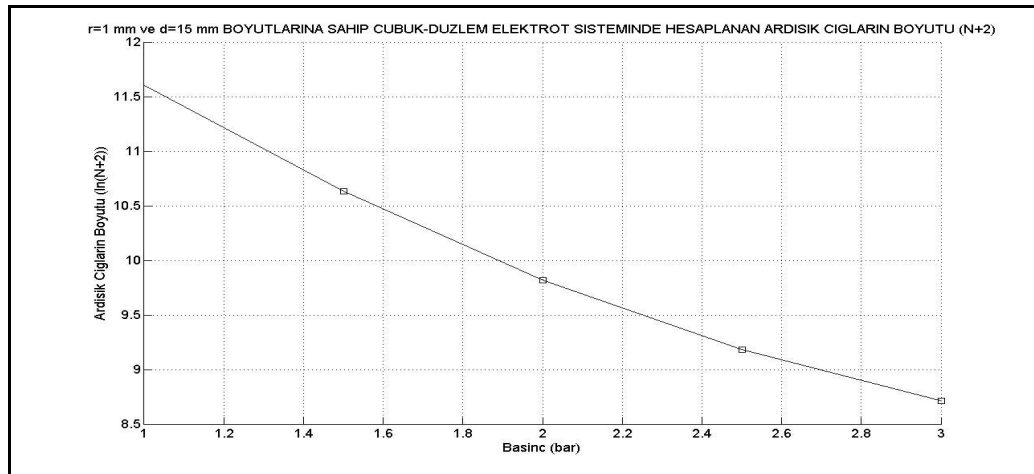


Şekil 3.42.  $r=1$  mm ve  $d=15$  mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde hesaplanan pozitif korona başlangıç gerilimi değerlerinin basınç'a bağlı olarak değişimi

Hesapladığımız birincil çığın boyutu ( $N_{+1}$ ) değerinin basınç'a bağlı olarak değişimi Şekil 3.43'de görülmektedir. Hesaplanan ardışık çığların boyutunun ( $N_{+2}$ ) basınç'a bağlı olarak değişimini Şekil 3.44'de görülmektedir.



Şekil 3.43. r=1 mm ve d=15 mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde hesapladığımız birincil çığın boyutunun ( $N_{+1}$ ) basınç'a bağlı olarak değişimi

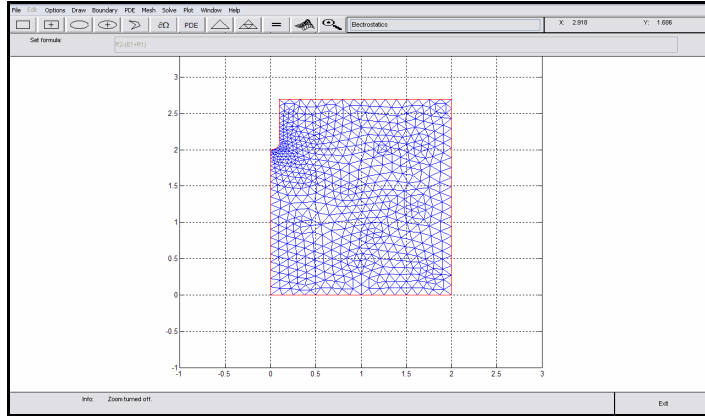


Şekil 3.44. r=1 mm ve d=15 mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde hesapladığımız ardışık çığların boyutunun ( $N_{+2}$ ) basınç'a bağlı olarak değişimi

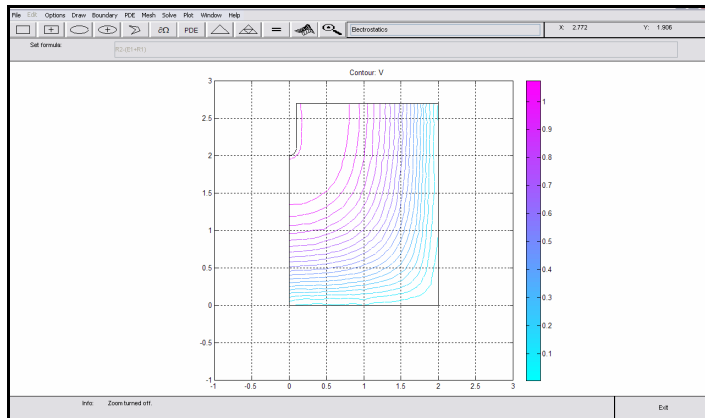


### 3.4.9. $r=1$ mm ve $d=20$ mm boyutlarında çubuk-düzlem elektrot sisteminin modellenmesi

$r=1$  mm ve  $d=20$  mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminin modellenmesinin yapılacağı bu bölümde, hesaplayacağımız pozitif korona başlangıç gerilimi değerleri bir önceki bölümlerde bulduğumuz değerler ile karşılaştırılacaktır. Çubuk-düzlem elektrot sisteminin sonlu elemanlar metodu ile parçalara ayrılması ortaya çıkan sonuç Şekil 3.45’de gösterilmiştir. Bu metot ile parçalara ayrılan çubuk-düzlem elektrot sisteminin potansiyel dağılımı ise Şekil 3.46’de görülmektedir.



Şekil 3.45.  $r=1$  mm ve  $d=20$  mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminin ikinci dereceden ağ ile oluşturulan modeli



Şekil 3.46.  $r=2$  mm ve  $d=20$  mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde potansiyel alan çizgileri

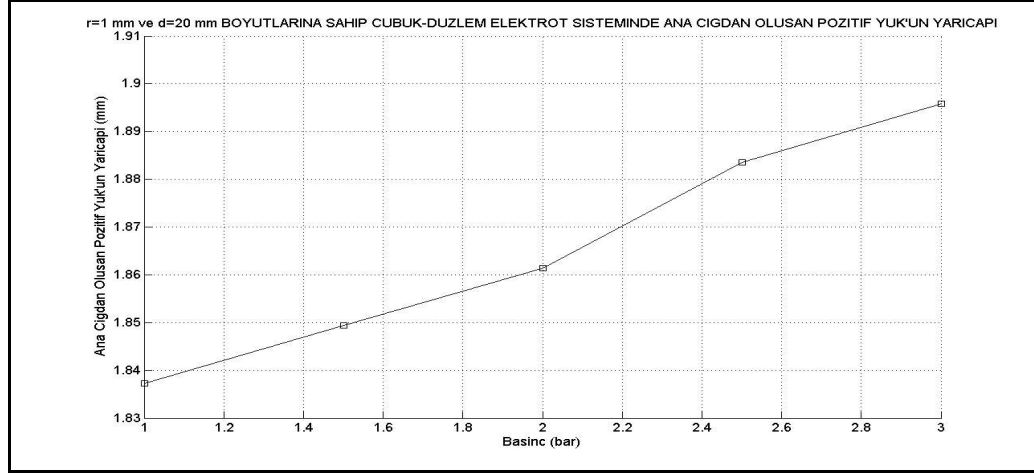
Sonlu elemanlar metodu yardımıyla yapılan çözümlemeler sonucunda her düğüm noktasına ait koordinat noktaları ve bu noktaların potansiyel değerleri hesaplanmıştır. Kritik alan çizgisinde meydana gelen toplam düğüm sayısı 23'dür. Bu noktalar ile hesaplanan pozitif korona başlangıç gerilimi değerleri Çizelge 3.12'de verilmiştir.

Çizelge 3.12.  $r=1$  mm ve  $d=20$  mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde hesaplanan pozitif korona başlangıç gerilimi değerleri

Basınç (bar)	$r_1$ (mm)	Hesaplanan pozitif korona başlangıç gerilimi (kV)
1,0	1,83729	33,48
1,5	1,84933	46,39
2,0	1,86139	57,61
2,5	1,88361	64,30
3,0	1,89580	69,60

Çizelge 3.12'de gördüğümüz gibi birincil çığdan oluşan pozitif yükün yarıçapı ( $r_1$ ) uygulanan potansiyel değeri arttıkça büyümektedir. Basınç değeri ise 1 bar'dan başlayarak 3 bar'a kadar devam etmektedir. Bu durumda hesaplanan pozitif korona başlangıç gerilimi değerleri bizlere,  $r$  çubuk yarıçapının boyutu azaldıkça pozitif korona başlangıç geriliminin azaldığını ve birincil çığdan oluşan pozitif yükün yarıçapının arttığını göstermektedir.

Hesapladığımız birincil çığdan oluşan pozitif yükün yarıçapı ( $r_1$ ) değerinin basınç'a bağlı olarak değişimi Şekil 3.47'da görülmektedir. Hesaplanan pozitif korona başlangıç gerilimi değerlerinin basınç'a bağlı olarak değişimi Şekil 3.48'da görülmektedir.

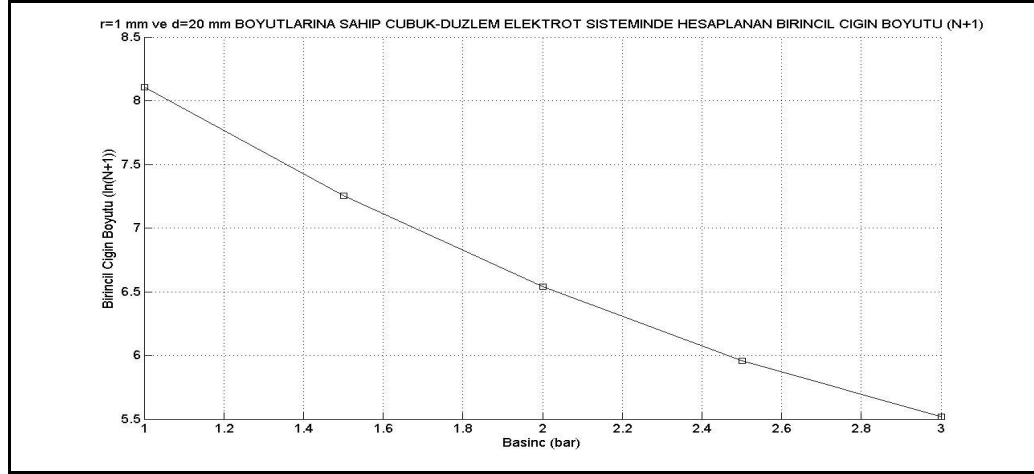


Şekil 3.47.  $r=1$  mm ve  $d=20$  mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde birincil çığdan oluşan pozitif yükün yarıçapı ( $r_1$ ) değerinin basınç'a bağlı olarak değişimi

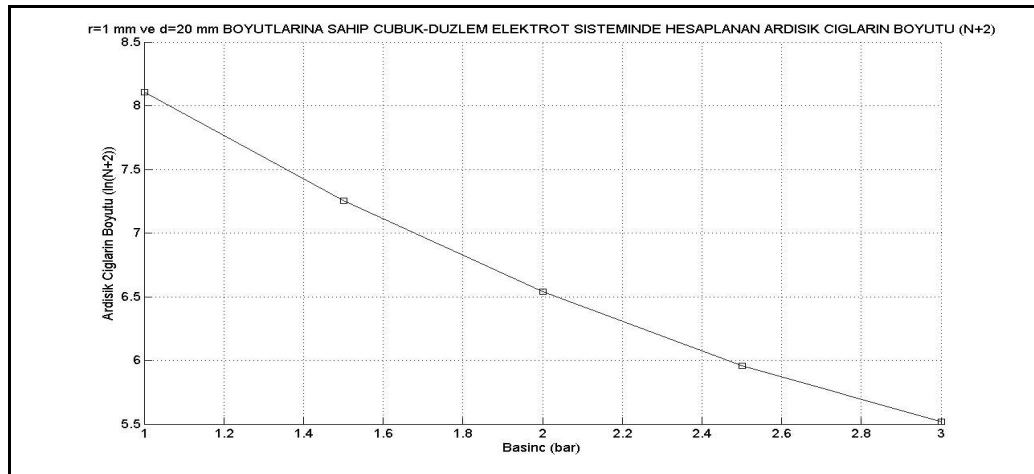


Şekil 3.48.  $r=1$  mm ve  $d=20$  mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde hesaplanan pozitif korona başlangıç gerilimi değerlerinin basınç'a bağlı olarak değişimi

Hesapladığımız birincil çığın boyutu ( $N_{+1}$ ) değerinin basınç'a bağlı olarak değişimi Şekil 3.49'de görülmektedir. Hesaplanan ardışık çığların boyutunun ( $N_{+2}$ ) basınç'a bağlı olarak değişimi Şekil 3.50'de görülmektedir



Şekil 3.49.  $r=1$  mm ve  $d=20$  mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde hesapladığımız birincil çığın boyutunun ( $N_{+1}$ ) basınç'a bağlı olarak değişimi



Şekil 3.50.  $r=1$  mm ve  $d=20$  mm boyutlarına sahip çubuk-düzlem elektrot sisteminde hesapladığımız ardışık çığların boyutunun ( $N_{+2}$ ) basınç'a bağlı olarak değişimi

#### 4. SONUÇ

Kükürt hekzaflorür ( $\text{SF}_6$ ) gazı yüksek dielektrik dayanımı ve iyi derecede ısı iletkenliği sebebiyle yüksek gerilim tekniğinde kullanılmaktadır. Bu çalışmada  $\text{SF}_6$  gazının düzgün olmayan (non-uniform) sitemlerde pozitif korona başlangıç gerilimini hesaplanmıştır. Kritik alan çizgisinde yer alan düğüm noktalarının elektrik alan değerleri sayısal bir yöntem olan sonlu elemanlar metodu ile hesaplanmıştır. Kullanılan sonlu elemanlar metodu yöntemi üç temel aşamadan oluşmaktadır. Bunları; hazırlık işlemleri (pre-prosesing), çözüm işlemleri (prosesing) ve değerlendirme işlemleri (post-prosesing) olarak sıralayabiliriz. Kullandığımız bu metot ile farklı geometriler rahatlıkla incelenebilmektedir. Çalışma yapmak istediğimiz geometriler düğüm noktaları vasıtası ile küçük parçalara bölünerek çözümlenmektedir. Bu parçalar için başlangıçta sınır koşulları girilmekte ve bu sınır koşulları vasıtası ile sitemin tümü çözümlenebilmektedir.

Bu tezde pozitif korona başlangıç gerilimi, çeşitli eğriliklerdeki ve elektrod aralıklarındaki çubuk-düzlem elektrod sisteminde hesaplanmıştır. Pozitif korona başlangıç gerilimini hesaplamak için kullanılan simulasyon modeli, ilk ve ardışık çığların büyüklüğüne bağlı olarak değişmektedir. Ardışık çığların büyüklüğü, ilkinde eriştiğinde deşarj kendi kendini beslemektedir.

Bu tezde farklı eğrilik yarıçapların ( $r=1$  mm ve  $r=2$  mm) ve farklı elektrot açıklıklarına ( $d=5$  mm,  $d=15$  mm,  $d=20$  mm,  $d=30$  mm) sahip çubuk düzlem elektrot sisteminin pozitif korona başlangıç değerleri hesaplanmıştır. Hesaplanan bu değerler literatürdeki değerlerle karşılaştırıldığında meydana gelen yüzde hata her bir durum için %5'in altındadır [10,11] Yaptığımız bu hesaplamalar, deneysel sonuçlar dikkate alındığında kabul edilebilir olduğundan geliştirdiğimiz program ve kullanmış olduğumuz yöntemlerin sağlıklı olduğu kanaatine varılmıştır.

Bunu takiben farklı geometriler olarak adlandırabileceğimiz farklı çubuk yarıçapı ve elektrot açıklığı değerlerinde pozitif korona başlangıç gerilimi değerleri hesaplanmıştır. İlk aşamada elektrot açıklığının değiştirilmesi sonucunda meydana

gelen sonuçlar incelenmiştir. Bu sonuçlar dikkate alındığında elektrot açıklığı ile pozitif korona başlangıç gerilimi arasında doğru oran olduğu görülmektedir. Yani elektrot açıklığı arttıkça sistemimizde pozitif korona başlangıç gerilimi de artmakta, elektrot aralığı azaldıkça pozitif korona başlangıç gerilimi azalmaktadır. İkinci aşamada ise çubuk olarak adlandırdığımız, sistemin anot ucunun yarıçapı değiştirilmiştir. Değiştirilen bu yarı çap sonucunda, aynı elektrot aralığında düşük yarıçaplı geometrilerde diğer geometrilere nazaran pozitif korona başlangıç geriliminin daha düşük olduğu hesaplanmıştır.

Bu sonuçlar ile düzgün olmayan elektrot siteminde SF<sub>6</sub> gazı için farklı geometrilerde pozitif korona başlangıç gerilimi tahmin edilebilmektedir. Hesaplanan bu değerler SF<sub>6</sub>'nın delinme gerilimi hakkında fikir yürütmemizi sağladığı için yüksek gerilim sistemleri için oldukça önemlidir.

## KAYNAKLAR

1. Segerlind, L.J., “Applied Finite Element Analysis”, *John Wiley and Sons*, New York, 1-230 (1984).
2. Shorr, B.H., “The Wave Finite Element .Method”, *Springer*, New York, 1-38 (2004).
3. Bastos, J.P.A., Sadowski, N, “Electromaagnetic Modeling by Finite Element Methods”, *Mercel Dekker*, New York, 1-24 (2003).
4. Haubner, K.H., “The Finite Element Method for Engineers”, *John Wiley and Sons*, New York, 1-15 (1975).
5. Rao, S.S., “The Finite Element Method in Engineering 2<sup>nd</sup> ed.”, *Pergamon Press*, Oxford, 101-198 (1992)
6. Huebner, K.H., “The Finite Element Method for Engineers”, *John Wiley and Sons*, New York, 1-15 (1975).
7. Çetin, A.E., “Herkes İçin Matlab 6.5”, *Alfa Yayınları*, İstanbul, 17-30 (2003).
8. İbrahim, D., “A’dan Z’ye Matlab ile Çalışmak”, *Bileşim Yayınlar*, İstanbul, 1-23 (2004).
9. Uzunoğlu, M., Kızıl, A., Onar, Ö.Ç., “Kolay Anlatımı ile İleri Düzeyde Matlab 6.0-6.5”, *Tümken Kitabevi*, İstanbul, 2-4 (2002).
10. El-Bahy, M.M., “Calculation of Positive Static Breakdown Voltage in Rod Gaps in SF<sub>6</sub>”, *IEEE High Voltage Engineering Symposium*, 3.256-3.259 (1999).
11. El-Bahy, M.M., “Onset Voltage of Corona in SF<sub>6</sub>-N<sub>2</sub> Mixtures”, *2000 Conference on Electrical Insulation and Dielectric Phenomena*, 393-396 (2000).
12. El-Bahy, M.M., Abou El-Ata, M.A., “Onset Voltage of Positive Corona on Dielectric-Coated Electrodes”, *2005 Annual Report Conference on Electrical Insulation and Dielectric Phenomena*, 34-38 (2005).
13. Clavreul, R., “Analysis of SF<sub>6</sub>/N<sub>2</sub> Gas Mixture Decomposition by-Products in Electric Discharges”, *IEEE Seventh International Conference on Dielectric Materials Measurements & Applications*, 430: 176-179 (1996).
14. Tezcan, S.S., “Yüksek Gerilim Tekniğinde Yapay Sinir Ağları Uygulamaları”, *Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ankara, 49-51 (2004).

15. Li, X.G., Xiao, D.M., Qui, Tsai, S.J., Liu, Y., "Electron Ionization, Attachment and Detachment Coefficients in SF<sub>6</sub> and Xe Gas Mixture", *IEEE*, 1666-1669 (2002).
16. Dincer, M.S., Aydin, T., "Simulating of Limiting Field Behavior in Electron Swarms in SF<sub>6</sub> N<sub>2</sub> Gas Mixture", *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, 139-145 (1994).
17. Raju, G.G., "Gaseous Electronics: Theory and Practice", *Taylor & Francis Group*, New York, 329-536 (2006).
18. Raju, G.G., "Dielectrics in Electric Fields", *Marcel Dekker*, New York, 383-473 (2003).
19. Dincer, M.S., Hiziroglu, H.R., "Effective Ionization Coefficients in Binary Gas Mixtures of Argon and SF<sub>6</sub>", *Annual Report Conference on Electrical Insulation and Dielectric Phenomena*, 385-387 (2001).



## ÖZGEÇMİŞ

### Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : DÜZKAYA, Hıdır  
 Uyuğu : Türkiye Cumhuriyeti  
 Doğum Yeri ve Tarihi : 29.10.1983 Elazığ  
 Medeni Hali : Bekâr  
 Telefon : 0 (312) 231 74 00 / 2352  
 e-mail : [hduzkaya@gmail.com](mailto:hduzkaya@gmail.com)

Eğitim Derecesi	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Lisans	Gazi Üniversitesi Elektrik Elektronik Mühendisliği	2005
Lise	Balakgazi Lisesi	2000

### İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2005-2008	Gazi Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2005-2005	Özensan A.Ş.	Sistem Yöneticisi

### Yabancı Dil

İngilizce

### Yayınlar

1. Düzkaya H., Yıldırım E., “Analysis of Maximum Power Point Tracking (MPPT) and Sample Analog Circuits”, 3rd International Conference and Exhibition on Technical and Physical Problem in Power Engineering, TPE2006, Ankara, TURKEY, 2006.