



q-STANCU-BETA TİP OPERATÖRLERİN YAKLAŞIMI

Merve KORKMAZ

YÜKSEK LİSANS

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HAZİRAN 2021

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Merve KORKMAZ

16/06/2021

q-STANCU-BETA TİP OPERATÖRLERİN YAKLAŞIMI
(Yüksek Lisans Tezi)

Merve KORKMAZ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2021

ÖZET

Bu tezde; Aral ve Gupta tarafından tanımlanan ve çalışılan q-Stancu-Beta tip operatörlerinin yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Bu operatörlerin Korovkin tip yaklaşımı ve yakınsama oranlarını tahmin eden bazı teoremler incelenmiştir ve bu operatörlerin asimptotik bir formülü ve ağırlıklı yaklaşımı verilmiştir. Ayrıca Özkan ve Korkmaz tarafından tanımlanan ve çalışılan iki değişkenli q-Stancu-Beta tip operatörlerinin Volkov tip düzgün yakınsaklık ve Gadzhiev tip ağırlıklı yaklaşım teoremleri incelenmiştir.

Bilim Kodu : 20404

Anahtar Kelimeler : Operatörlerin yaklaşımı, q-beta fonksiyonu, q-genelleştirilmiş integral, düzgün yakınsaklık, yakınsama oranı, ağırlıklı yaklaşım

Sayfa Adedi : 47

Danışman : Doç. Dr. Esmâ YILDIZ ÖZKAN

APPROXIMATION OF q -STANCU-BETA TYPE OPERATORS
(M. Sc. Thesis)

Merve KORKMAZ

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
June 2021

ABSTRACT

In this thesis, the approximation properties of q -Stancu-Beta type operators introduced and studied by Aral and Gupta are investigated. The Korovkin type approximation and some theorems estimating the rate of convergence of these operators are investigated, and the asymptotic formula and the weighted approximation theorem of these operators are given. Moreover, the Volkov type uniform convergence and the Gadzhiev-type weighted approximation theorems of the bivariate q -Stancu-Beta type operators introduced and studied by Özkan and Korkmaz are investigated.

Science Code : 20404

Key Words : Approximation of operators, q -beta function, q -improper integral,
uniform convergence, rate of convergence, weighted approximation

Page Number : 47

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Esma YILDIZ ÖZKAN

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca bana yol gösteren, yardım ve katkılarını esirgemeyen, bilgi ve birikimlerini paylaşarak sabırla ve ilgiyle yardımcı olan saygıdeğer danışman hocam Doç. Dr. Esmâ YILDIZ ÖZKAN' a çok teşekkür ederim. Eğitim hayatım boyunca bana yardımcı olan tüm hocalarıma, değerli çalışma arkadaşlarıma ve tüm dostlarıma teşekkür ederim. Hayatım boyunca attığım her adımda maddi, manevi desteklerini hiç esirgemeyen beni sevgi ve saygıyla bugünlere getiren en büyük şansım, biricik aileme sonsuz teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. Lineer Pozitif Operatörlerin Tanımı ve Özellikleri	3
2.2. q-Analiz'in Temel Kavramları	6
3. q-STANCU-BETA TİP OPERATÖRLER.....	11
3.1. Tek Değişkenli q-Stancu-Beta Tip Operatörlerin Tanımı ve Özellikleri.....	11
3.2. Tek Değişkenli q-Stancu-Beta Tip Operatörlerin Yaklaşımı	17
3.2.1. Korovkin tip yaklaşım	17
3.2.2. Doğrudan yaklaşım sonuçları.....	20
3.2.3. Ağırlıklı yaklaşım	23
4. İKİ DEĞİŞKENLİ q-STANCU-BETA TİP OPERATÖRLER	27
4.1. İki Değişkenli q-Stancu-Beta Tip Operatörlerin Tanımı ve Özellikleri	27
4.2. İki Değişkenli q-Stancu-Beta Tip Operatörlerinin Ağırlıklı Yaklaşımı.....	35
4.2.1. Volkov tip teorem	35
4.2.2. Ağırlıklı yaklaşım	39
5. SONUÇLAR	43
KAYNAKLAR	45
ÖZGEÇMİŞ	47

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

Açıklamalar

(f_n)	$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, bir fonksiyon dizisi
$C[a, b]$	$[a, b]$ kapalı aralığında tanımlı ve sürekli tüm reel değerli fonksiyonların uzayı
$\ f\ _{C[a,b]}$	$\ f\ _{C[a,b]} = \max_{a \leq x \leq b} f(x) $ ile tanımlanan norm
$\ f\ _{C[I]}$	$I = [0, r_1] \times [0, r_2]$ olmak üzere, $\ f\ _{C[I]} = \max_{(x,y) \in I} f(x) $ ile tanımlı norm
$\Gamma_q(t)$	$t > 0$ için q-gamma fonksiyonu
$B_q(t, s)$	$t, s > 0$ için q-beta fonksiyonu
$\ f\ $	$\ f\ = \sup_{0 \leq x \leq \infty} f(x) $ ile tanımlanan norm
$L_n(f; x)$	$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere Stancu-Beta operatörleri
$L_n^q(f; x)$	Tek değişkenli q-Stancu-Beta operatörler dizisi
$L_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}(f; x, y)$	İki değişkenli q-Stancu-Beta operatörler dizisi
$K_2(f, \delta)$	f fonksiyonunun Peetre K- fonksiyoneli
$\omega(f, \delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü
$\omega_2(f, \delta)$	f fonksiyonunun ikinci süreklilik modülü
$B_{x^2}[0, \infty)$	Ağırlıklı fonksiyon uzayı
$C_{x^2}[0, \infty)$	$B_{x^2}[0, \infty)$ ağırlıklı uzayındaki tüm sürekli fonksiyonların alt uzayı

1. GİRİŞ

Stancu [1], $(0, \infty)$ aralığı üzerinde tanımlı Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlar yardımıyla

$$L_n(f, x) = \frac{1}{B(nx, n+1)} \int_0^\infty \frac{t^{nx-1}}{(1+t)^{nx+n+1}} f(t) dt \quad (1.1)$$

olarak verdiği operatörleri tanımlamıştır. Abel ve Gupta [2], Eş. 1.1 ile verilen bu operatörlerin yakınsama oranını hesaplamışlardır. Gupta ve arkadaşları [3] da bu operatörlerin yakınsama oranını sınırlı salınımlı fonksiyonların türevleri yardımıyla elde etmişlerdir.

q-Stancu-Beta operatörleri Aral ve Gupta [4] tarafından

$$L_n^q(f, x) = \frac{K(A, [n]_q x)}{B_q([n]_q x, [n]_q + 1)} \int_0^{\infty/A} \frac{u^{[n]_q x - 1}}{(1+u)_q^{[n]_q x + [n]_q + 1}} f(q^{[n]_q x} u) d_q u$$

olarak tanımlanmıştır. Burada $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0, \infty)$, $q \in (0, 1)$ ve f , $[0, \infty)$ üzerinde tanımlı reel değerli sürekli ve sınırlı bir fonksiyondur.

Aral ve Gupta [4] bu operatörlerin doğrudan ve ağırlıklı yaklaşım sonuçlarını elde etmişlerdir.

İki değişkenli q-Stancu-Beta tip operatörler Özkan ve Korkmaz [5] tarafından tanımlanmış ve Volkov tip düzgün yakınsaklık ve Gadzhiev tip ağırlıklı yaklaşım teoremleri çalışılmıştır.

Bu tezde, Aral ve Gupta [4] tarafından tanımlanan tek değişkenli ve Özkan ve Korkmaz [5] tarafından tanımlanan iki değişkenli q-Stancu-Beta tip operatörlerin Volkov tip düzgün yakınsaklık ve Gadzhiev tip ağırlıklı yaklaşım teoremleri araştırılmıştır.

Tezin birinci bölümünde literatür geçmiş sunularak giriş yapılmıştır.

İkinci bölümde tezin anlaşılmasını kolaylaştıracak bazı temel kavramlar sunulmuştur.

Üçüncü bölümde Aral ve Gupta [4] tarafından tanımlanan tek değişkenli q-Stancu-Beta tip

operatörlerin tanımı, özellikleri verilmiş ve bu operatörlerin yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde Özkan ve Korkmaz [5] tarafından tanımlanan iki değişkenli q -Stancu-Beta tip operatörlerin tanımı ve özellikleri verilmiştir. Bu operatörlerin Volkov tip teoremi ve Gadzhiev tip ağırlıklı yaklaşımı incelenmiştir.



2. TEMEL KAVRAMLAR

Lineer Pozitif Operatörlerin Tanımı ve Özellikleri

2.1.1 Tanım

X ve Y lineer iki fonksiyon uzayı olsun. Eğer herhangi bir $f \in X$ fonksiyonunu bir $g \in Y$ fonksiyonuna karşılık getiren bir $L: X \rightarrow Y$ dönüşümü varsa, bu durumda L 'ye X ' den Y 'ye bir operatör denir. Bu operatör $L(f(t); x) = g(x)$ ile gösterilir [6].

2.1.2. Tanım

X ve Y lineer iki fonksiyon uzayı ve L, X ' den Y 'ye bir operatör olsun. Her $f, g \in X$ ve $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ için,

$$L(\alpha_1 f(t) + \alpha_2 g(t); x) = \alpha_1 L(f(t); x) + \alpha_2 L(g(t); x)$$

koşulu sağlanırsa, bu durumda L ' ye lineer operatör denir [6].

2.1.3. Tanım

X ve Y lineer iki fonksiyon uzayı, L, X ' den Y 'ye bir operatör olsun. $f \geq 0$ koşulunu sağlayan her $f \in X$ için $L(f; \cdot) \geq 0$ koşulu sağlanırsa, bu durumda L 'ye pozitif operatör denir.

X ve Y iki lineer fonksiyon uzayı olsun. Hem lineerlik hem de pozitiflik koşulunu sağlayan bir $L: X \rightarrow Y$ operatörüne lineer pozitif operatör denir [6].

2.1.1. Lemma

X ve Y lineer iki fonksiyon uzayı olsun. Bir $L: X \rightarrow Y$ lineer pozitif operatörü monoton artandır. Yani, her $f, g \in X$ için $f \leq g$ ise $L(f; \cdot) \leq L(g; \cdot)$ eşitsizliği doğrudur [6].

İspat

Kabul edelim ki, $f \leq g$ olsun. Bu durumda, $g - f \geq 0$ olacağından ve L , pozitif operatör olduğundan,

$$L(g - f; \cdot) \geq 0 \quad (2.1)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca, L operatörü lineer olduğundan,

$$L(g - f; \cdot) = L(g; \cdot) - L(f; \cdot)$$

elde edilir. Bu ifadenin Eş.2.1'de kullanılması ile

$L(g; \cdot) - L(f; \cdot) \geq 0$ elde edilir. Bu da $L(g; \cdot) \geq L(f; \cdot)$ olmasını gerektirir.

2.1.2. Lemma

X ve Y lineer iki fonksiyon uzayı ve L , X ' den Y 'ye bir lineer pozitif operatör olsun. Bu durumda

$$|L(f; \cdot)| \leq L(|f|; \cdot)$$

eşitsizliği sağlanır [6].

İspat

Herhangi bir g fonksiyonu için,

$$-|g| \leq g \leq |g|$$

dir. L operatörünün lineer olmasından ve monoton artan özelliğinden,

$$L(-|g|; \cdot) \leq L(g; \cdot) \leq L(|g|; \cdot)$$

yazılabilir. Bu ise,

$$|L(g; \cdot)| \leq L(|g|; \cdot)$$

olduğunu gösterir.

2.1.4. Tanım

X lineer bir fonksiyon uzayı olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n \in X$ ise (f_n) 'ye X üzerinde fonksiyon dizisi denir.

Her $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ için $f_{n_1, n_2} \in X$ ise (f_{n_1, n_2}) de iki indisli fonksiyon dizisidir.

2.1.5. Tanım

X ve Y lineer iki fonksiyon uzayı olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ ve $f \in X$ için $L_n(f; \cdot) \in Y$ olacak şekildeki X uzayından Y uzayına tanımlı $(L_n(f; \cdot))$ 'ye bir operatör dizisi denir.

2.1.6. Tanım

$[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı sürekli ve reel değerli fonksiyonların kümesi $C[a, b]$ ile gösterilir. Bu uzaydaki norm $\|f\|_{C[a,b]} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ şeklinde tanımlıdır. $C[a, b]$ fonksiyon uzayı $\|\cdot\|_{C[a,b]}$ normu ile bir normlu uzaydır [7].

2.1.7. Tanım

(f_n) , $C[a, b]$ içinde bir fonksiyon dizisi olsun. Eğer her $x \in [a, b]$ için, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{C[a,b]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f(x)| = 0$ şartı sağlanıyorsa, (f_n) fonksiyon dizisi $[a, b]$ kapalı aralığında, f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır denir [7].

2.1.8. Tanım

$I = [0, r_1] \times [0, r_2]$ olmak üzere, $C(I)$, I üzerinde tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonlar uzayı olsun. $C(I)$, $\|f\|_{C(I)} = \max_{(x,y) \in I} |f(x, y)|$ normu ile bir Banach uzayıdır [7].

2.1.9. Tanım

$n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ olsun. (f_{n_1, n_2}) , $C(I)$ üzerinde bir fonksiyon dizisi olmak üzere, $\lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \|f_{n_1, n_2} - f\|_{C(I)} = \lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \max_{(x,y) \in I} |f_{n_1, n_2}(x, y) - f(x, y)| = 0$ koşulu sağlanıyorsa, (f_{n_1, n_2}) fonksiyon dizisi I üzerinde f ye düzgün yakınsaktır denir [7].

2.1.10. Tanım

(x_n) ve (y_n) reel herhangi iki dizi, $1 < p, q < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olacak şekilde p ve q iki sayı olsun. Eğer

$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q$ serileri yakınsaksa,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q \right)^{1/q}$$

eşitsizliğine Hölder eşitsizliği denir. Burada $p = q = 2$ alınırsa, bu eşitsizlik Cauchy-Schwarz eşitsizliği olarak bilinmektedir [7].

2.2. q-Analiz'in Temel Kavramları

Bu kısımda q-analiz'in temel kavramlarından bahsedilecektir.

2.2.1. Tanım

$q > 0$ olmak üzere, negatif olmayan herhangi bir n tamsayısı için n 'nin q -tamsayısı

$$[n]_q = \begin{cases} \frac{q^n - 1}{q - 1}, & q \neq 1 \\ n, & q = 1 \end{cases} \quad (2.2)$$

olarak tanımlanır [8].

2.2.2. Tanım

$n \geq r \geq 0$ olmak üzere, q -faktöriyel,

$$[n]_q! = \begin{cases} [1]_q [2]_q \dots [n]_q, & n = 1, 2, \dots \\ 1, & n = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

olarak ifade edilir. Ayrıca q -binom katsayıları,

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[n-r]_q! [r]_q!} \quad (2.4)$$

olarak ifade edilir. $q = 1$ durumunda q -binom katsayılarının klasik binom katsayılarına indirgendiği Eş.2.3'ten açıktır [8].

2.2.3. Tanım

Gamma ve Beta fonksiyonları Euler tarafından sırasıyla

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx, \quad t > 0 \quad (2.5)$$

ve

$$B(t, s) = \int_0^1 x^{t-1} (1-x)^{s-1} dx, \quad s, t > 0 \quad (2.6)$$

olarak tanımlanmıştır [8].

Bu iki fonksiyon için aşağıdaki özellikler sağlanmaktadır:

$$(i) \quad \Gamma(t+1) = t\Gamma(t), \quad (2.7)$$

$$(ii) \quad \Gamma(n) = (n-1)!, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.8)$$

$$(iii) \quad B(t, s) = \frac{\Gamma(t)\Gamma(s)}{\Gamma(t+s)}. \quad (2.9)$$

2.2.4. Tanım

$t > 0$ için q- gamma fonksiyonu,

$$\Gamma_q(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} E_q^{-qx} d_q x \quad (2.10)$$

şeklinde tanımlıdır. Burada E_q^x , klasik e^x üstel fonksiyonunun q-analoğunu göstermektedir.

$$E_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(j-1)/2} \frac{x^j}{[j]_q!} \quad (2.11)$$

serisi ile tanımlıdır ve

$$\int_0^{\infty} f(x) d_q x = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(q^j) q^j (1-q), \quad q \in (0,1)$$

olur [8].

q-Gamma fonksiyonu aşağıdaki iki özelliği sağlamaktadır.

$$(i) \quad \Gamma_q(t+1) = [t]_q \Gamma_q(t) \quad (2.12)$$

$$(ii) \quad \Gamma_q(t+1) = [t]_q!. \quad (2.13)$$

2.2.5 Tanım

$t, s > 0$ için q-beta fonksiyonu,

$$B_q(t, s) = \int_0^1 x^{t-1} (1 - qx)_q^{s-1} d_q x \quad (2.14)$$

olarak tanımlıdır [8].

q-Beta fonksiyonu için aşağıdaki özellikler sağlanır:

$$(i) \quad B_q(t, n + 1) = \frac{1 - q^n}{1 - q^{t+n}} B_q(t, n), \quad t > 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.15)$$

$$(ii) \quad B_q(t, 1) = \frac{1}{[t]_q}, \quad (2.16)$$

$$(iii) \quad B_q(t, n) = \frac{(1 - q)(1 - q)_q^{n-1}}{(1 - q^t)_q^n}. \quad (2.17)$$

q-Gamma ve q-Beta fonksiyonları arasındaki ilişki,

$$B_q(t, s) = \frac{\Gamma_q(t) \Gamma_q(s)}{\Gamma_q(t+s)} \quad (2.18)$$

eşitliğiyle bilinmektedir [8].

2.2.6. Tanım

$A > 0$ olmak üzere, q-genelleştirilmiş integral

$$\int_0^{\infty/A} f(x) d_q x = (1 - q) \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{q^n}{A}\right) \frac{q^n}{A} \quad (2.19)$$

olarak tanımlanır [9].

2.2.7. Tanım

q-Beta integral,

$$B_q(t, s) = K(A, t) \int_0^{\infty/A} \frac{x^{t-1}}{(1+x)_q^{t+s}} d_q x \quad (2.20)$$

olarak tanımlanır [10]. Burada $A > 0$ için,

$$K(A, t + 1) = q^t K(A, t) \quad (2.21)$$

ve

$$K(A, t) = \frac{1}{A+1} A^t \left(1 + \frac{1}{A}\right)_q^t (1 + A)_q^{1-t}. \quad (2.22)$$

2.2.8. Tanım

q-Binom formülü ise,

$$(x + a)_q^n = \sum_{j=0}^n \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q q^{j(j-1)/2} a^j x^{n-j} \quad (2.23)$$

olarak tanımlanır [8].

2.2.9. Tanım

$$(x + a)_q^n = \prod_{j=0}^{n-1} (x + q^j a) \quad (2.24)$$

gösterimi q-Pochhammer sembolü olarak bilinmektedir [4].



3. q-STANCU-BETA TİP OPERATÖRLER

3.1. Tek Değişkenli q-Stancu-Beta Tip Operatörlerin Tanımı ve Özellikleri

$C_B[0, \infty)$ ile $[0, \infty)$ aralığında tanımlı reel değerli sürekli sınırlı f fonksiyonlarının uzayı gösterilsin. $C_B[0, \infty)$ uzayındaki norm,

$$\|f\| = \sup_{0 \leq x \leq \infty} |f(x)|$$

ile tanımlıdır.

3.1.1. Tanım

$q \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}$ ve $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve sınırlı bir fonksiyon olsun.

$$L_n^q(f, x) = \frac{K(A, [n]_q x)}{B_q([n]_q x, [n]_q + 1)} \int_0^{\infty/A} \frac{u^{[n]_q x - 1}}{(1+u)_q^{[n]_q x + [n]_q + 1}} f(q^{[n]_q x} u) d_q u \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanan operatörlere q-Stancu-Beta operatörleri denir [4].

$q = 1$ alındığında Eş. 3.1 ile verilen q-Stancu-Beta operatörü Eş.1.1'de tanımlı L_n operatörüne indirgenir.

3.1.1. Lemma

$n \in \mathbb{N}$, $q \in (0,1)$ ve $e_i(t) = t^i$, $i = 0,1,2,3,4$ olsun. Eş.3.1'de verilen q-Stancu-Beta operatörleri için aşağıdaki ifadeler doğrudur [4].

$$(i) L_n^q(e_0(t); x) = 1$$

$$(ii) L_n^q(e_1(t); x) = x$$

$$(iii) L_n^q(e_2(t); x) = \frac{([n]_q x + 1)x}{q([n]_q - 1)}$$

$$(iv) L_n^q(e_3(t); x) = \frac{([n]_q x + 2)([n]_q x + 1)x}{([n]_q - 1)([n]_q - 2)q^3}$$

$$(v) \quad L_n^q(e_4(t); x) = \frac{([n]_q x + 3)([n]_q x + 2)([n]_q x + 1)x}{([n]_q - 1)([n]_q - 2)([n]_q - 3)q^6}.$$

İspat

$$(i) \quad L_n^q(e_0(t); x) = \frac{K(A, [n]_q x)}{B_q([n]_q x, [n]_q + 1)} \int_0^{\infty/A} \frac{u^{[n]_q x - 1}}{(1+u)_q^{[n]_q x + [n]_q + 1}} d_q u$$

Eş.2.20'den

$$L_n^q(e_0(t); x) = \frac{K(A, [n]_q x)}{B_q([n]_q x, [n]_q + 1)} \frac{B_q([n]_q x + 1, [n]_q)}{K(A, [n]_q x + 1)} = 1$$

elde edilir.

(ii) Eş.2.20'den

$$\begin{aligned} L_n^q(e_1(t); x) &= \frac{K(A, [n]_q x) q^{[n]_q x}}{B_q([n]_q x, [n]_q + 1)} \int_0^{\infty/A} \frac{u^{[n]_q x}}{(1+u)_q^{[n]_q x + [n]_q + 1}} d_q u \\ &= \frac{K(A, [n]_q x) q^{[n]_q x}}{B_q([n]_q x, [n]_q + 1)} \frac{B_q([n]_q x + 1, [n]_q)}{K(A, [n]_q x + 1)} \end{aligned}$$

yazılabilir.

Eş.2.18 ve Eş.2.21'den

$$\begin{aligned} L_n^q(e_1(t); x) &= \frac{K(A, [n]_q x) q^{[n]_q x}}{B_q([n]_q x, [n]_q + 1)} \frac{\Gamma_q([n]_q x + 1) \Gamma_q([n]_q)}{\Gamma_q([n]_q x + [n]_q + 1) K(A, [n]_q x + 1)} \\ L_n^q(e_1(t); x) &= \frac{K(A, [n]_q x) q^{[n]_q x} \Gamma_q([n]_q x + [n]_q + 1)}{\Gamma_q([n]_q x) \Gamma_q([n]_q + 1)} \\ &\quad \times \frac{\Gamma_q([n]_q x + 1) \Gamma_q([n]_q)}{\Gamma_q([n]_q x + [n]_q + 1) q^{[n]_q x} K(A, [n]_q x)}. \end{aligned}$$

Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$L_n^q(e_1(t); x) = \frac{\Gamma_q([n]_q x + 1) \Gamma_q([n]_q)}{\Gamma_q([n]_q x) \Gamma_q([n]_q + 1)}$$

elde edilir. Daha sonra Eş. 2.12'den

$$L_n^q(e_1(t); x) = \frac{[n]_q x \Gamma_q([n]_q x) \Gamma_q([n]_q)}{\Gamma_q([n]_q x) \Gamma_q([n]_q) [n]_q}$$

$= x$

bulunur.

(iii) Eş.2.20'den

$$\begin{aligned} L_n^q(e_2(t); x) &= \frac{K(A, [n]_q x) q^{2[n]_q x}}{B_q([n]_q x, [n]_q + 1)} \int_0^{\infty/A} \frac{u^{[n]_q x + 1}}{(1 + u)_q^{[n]_q x + [n]_q + 1}} d_q u \\ &= \frac{K(A, [n]_q x) q^{2[n]_q x}}{B_q([n]_q x, [n]_q + 1)} \frac{B([n]_q x + 2, [n]_q - 1)}{K(A, [n]_q x + 2)} \end{aligned}$$

yazılabilir.

Eş.2.18 kullanılarak

$$\begin{aligned} L_n^q(e_2(t); x) &= \frac{K(A, [n]_q x) q^{2[n]_q x} \Gamma_q([n]_q x + [n]_q + 1)}{\Gamma_q([n]_q x) \Gamma_q([n]_q + 1)} \\ &\quad \times \frac{\Gamma_q([n]_q x + 2) \Gamma_q([n]_q - 1)}{K(A, [n]_q x + 2) \Gamma_q([n]_q x + [n]_q + 1)}. \end{aligned}$$

Gerekli sadeleştirmelerden sonra

$$L_n^q(e_2(t); x) = \frac{K(A, [n]_q x) q^{2[n]_q x}}{\Gamma_q([n]_q x) \Gamma_q([n]_q + 1)} \frac{\Gamma_q([n]_q x + 2) \Gamma_q([n]_q - 1)}{K(A, [n]_q x + 2)}.$$

elde edilir.

Şimdi Eş.2.12 kullanılarak ve gerekli sadeleştirmeler yapılarak

$$\begin{aligned} L_n^q(e_2(t); x) &= \frac{K(A, [n]_q x) q^{2[n]_q x}}{\Gamma_q([n]_q x) [n]_q \Gamma_q([n]_q)} \frac{([n]_q x + 1) [n]_q x \Gamma_q([n]_q x) \Gamma_q([n]_q - 1)}{K(A, [n]_q x + 2)} \\ &= \frac{K(A, [n]_q x) q^{2[n]_q x}}{\Gamma_q([n]_q)} \frac{x([n]_q x + 1) \Gamma_q([n]_q - 1)}{K(A, [n]_q x + 2)} \end{aligned}$$

bulunur.

Eş. 2.21 ve Eş.2.12 kullanılarak

$$\begin{aligned} L_n^q(e_2(t); x) &= \frac{K(A, [n]_q x) q^{2[n]_q x}}{\Gamma_q([n]_q)} \frac{x([n]_q x + 1) \Gamma_q([n]_q - 1)}{q^{2[n]_q x} q K(A, [n]_q x)} \\ &= \frac{x([n]_q x + 1) \Gamma_q([n]_q - 1)}{q \Gamma_q([n]_q)} \\ &= \frac{x([n]_q x + 1) \Gamma_q([n]_q - 1)}{q([n]_q - 1) \Gamma_q([n]_q - 1)} \\ &= \frac{x([n]_q x + 1)}{q([n]_q - 1)} \end{aligned}$$

elde edilir.

(iv) Eş. 2.20 ve Eş. 2.18'den

$$\begin{aligned}
 L_n^q(e_3(t); x) &= \frac{K(A, [n]_q x) q^{3[n]_q x}}{B_q([n]_q x, [n]_q + 1)} \int_0^{\infty/A} \frac{u^{[n]_q x + 2}}{(1 + u)_q^{[n]_q x + [n]_q + 1}} d_q u \\
 L_n^q(e_3(t); x) &= \frac{q^{3[n]_q x} K(A, [n]_q x)}{B_q([n]_q x, [n]_q + 1)} \frac{B([n]_q x + 3, [n]_q - 2)}{K(A, [n]_q x + 3)} \\
 L_n^q(e_3(t); x) &= \frac{q^{3[n]_q x} K(A, [n]_q x) \Gamma_q([n]_q x + [n]_q + 1)}{\Gamma_q([n]_q x) \Gamma_q([n]_q + 1)} \\
 &\quad \times \frac{\Gamma_q([n]_q x + 3) \Gamma_q([n]_q - 2)}{K(A, [n]_q x + 3) \Gamma_q([n]_q x + 3 + [n]_q - 2)}
 \end{aligned}$$

Eş.2.12 ve Eş.2.21' den

$$\begin{aligned}
 L_n^q(e_3(t); x) &= \frac{q^{3[n]_q x} K(A, [n]_q x) ([n]_q x + 2) ([n]_q x + 1) [n]_q x \Gamma_q([n]_q x)}{\Gamma_q([n]_q x) [n]_q ([n]_q - 1) ([n]_q - 2) \Gamma_q([n]_q - 2)} \\
 &\quad \times \frac{\Gamma_q([n]_q - 2)}{q^{3[n]_q x + 3} K(A, [n]_q x)}
 \end{aligned}$$

gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$L_n^q(e_3(t); x) = \frac{([n]_q x + 2) ([n]_q x + 1) x}{([n]_q - 1) ([n]_q - 2) q^3}$$

elde edilir.

(v) Eş.2.20'den

$$\begin{aligned}
 L_n^q(e_4(t); x) &= \frac{K(A, [n]_q x) q^{4[n]_q x}}{B_q([n]_q x, [n]_q + 1)} \int_0^{\infty/A} \frac{u^{[n]_q x + 3}}{(1 + u)_q^{[n]_q x + [n]_q + 1}} d_q u \\
 &= \frac{K(A, [n]_q x) q^{4[n]_q x}}{B_q([n]_q x, [n]_q + 1)} \frac{B([n]_q x + 4, [n]_q - 3)}{K(A, [n]_q x + 4)}
 \end{aligned}$$

Eş. 2.18 ve Eş. 2.21'den,

$$\begin{aligned}
 L_n^q(e_4(t); x) &= \frac{q^{4[n]_q x} K(A, [n]_q x) \Gamma_q([n]_q x + [n]_q + 1)}{\Gamma_q([n]_q x) \Gamma_q([n]_q + 1)} \\
 &\quad \times \frac{\Gamma_q([n]_q x + 4) \Gamma_q([n]_q - 3)}{K(A, [n]_q x + 4) \Gamma_q([n]_q x + 4 + [n]_q - 3)} \\
 &= \frac{q^{4[n]_q x} K(A, [n]_q x) \Gamma_q([n]_q x + [n]_q + 1)}{\Gamma_q([n]_q x) \Gamma_q([n]_q + 1)} \frac{\Gamma_q([n]_q x + 4) \Gamma_q([n]_q - 3)}{q^{[n]_q x + 3} q^{[n]_q x + 2} q^{[n]_q x + 1} q^{[n]_q x} K(A, [n]_q x) \Gamma_q([n]_q x + [n]_q + 1)}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{q^{4[n]_q x} K(A, [n]_q x) \Gamma_q([n]_q x + [n]_q + 1)}{\Gamma_q([n]_q x) \Gamma_q([n]_q + 1)} \frac{\Gamma_q([n]_q x + 4) \Gamma_q([n]_q - 3)}{q^{4[n]_q x} q^6 K(A, [n]_q x) \Gamma_q([n]_q x + [n]_q + 1)}$$

gerekli sadeleştirmeler yapıp Eş. 2.12 kullanılırsa

$$\begin{aligned} L_n^q(e_4(t); x) &= \frac{\Gamma_q([n]_q x + 4) \Gamma_q([n]_q - 3)}{\Gamma_q([n]_q x) \Gamma_q([n]_q + 1) q^6} \\ &= \frac{([n]_q x + 3)([n]_q x + 2)([n]_q x + 1)[n]_q x \Gamma_q([n]_q x) \Gamma_q([n]_q - 3)}{([n]_q)([n]_q - 1)([n]_q - 2)([n]_q - 3) \Gamma_q([n]_q - 3) q^6 \Gamma_q([n]_q x)} \end{aligned}$$

gerekli sadeleştirmeler yapılsa

$$L_n^q(e_4(t); x) = \frac{([n]_q x + 3)([n]_q x + 2)([n]_q x + 1)x}{([n]_q - 1)([n]_q - 2)([n]_q - 3)q^6}$$

elde edilir.

3.1.2. Lemma

$q \in (0,1)$ ve $x \in [0, \infty)$ için, aşağıdaki ifadeler doğrudur [4].

i) $L_n^q((t - x); x) = 0$

ii) $L_n^q((t - x)^2; x) = \frac{x^2 \left(1 - q + \frac{q}{[n]_q}\right) + x \frac{1}{[n]_q}}{q - \frac{q}{[n]_q}}$

iii) $L_n^q((t - x)^3; x) = \frac{\left(x + \frac{2}{[n]_q}\right)\left(x + \frac{1}{[n]_q}\right)x}{\left(1 - \frac{1}{[n]_q}\right)\left(1 - \frac{2}{[n]_q}\right)q^3} - \frac{3x^2\left(x + \frac{1}{[n]_q}\right)}{\left(1 - \frac{1}{[n]_q}\right)q} + 2x^3$

iv) $L_n^q((t - x)^4; x) = \frac{\left(x + \frac{3}{[n]_q}\right)\left(x + \frac{2}{[n]_q}\right)\left(x + \frac{1}{[n]_q}\right)x}{\left(1 - \frac{1}{[n]_q}\right)\left(1 - \frac{2}{[n]_q}\right)\left(1 - \frac{3}{[n]_q}\right)q^6} - \frac{4x\left(x + \frac{2}{[n]_q}\right)\left(x + \frac{1}{[n]_q}\right)x}{\left(1 - \frac{1}{[n]_q}\right)\left(1 - \frac{2}{[n]_q}\right)q^3} + \frac{6x^3\left(x + \frac{1}{[n]_q}\right)}{\left(1 - \frac{1}{[n]_q}\right)q} - 3x^4$

İspat

i) L_n^q nin lineerliğinden ve Lemma 3.1.1 (i), (ii) den

$$L_n^q(t; x) - xL_n^q(1; x) = x - x = 0$$

elde edilir.

ii) L_n^q nin lineerliğinden ve Lemma 3.1.1 (i), (ii), (iii)'den,

$$L_n^q((t - x)^2; x)$$

$$= L_n^q(t^2 - 2xt + x^2; x) = L_n^q(t^2; x) - 2xL_n^q(t; x) + x^2L_n^q(1; x)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x([n]_q x + 1)}{([n]_q - 1)q} - 2x^2 + x^2 \\
&= \frac{x^2[n]_q + x - x^2 q[n]_q + x^2 q}{q([n]_q - 1)} \\
&= \frac{x^2([n]_q - q[n]_q + q) + x}{q([n]_q - 1)} \\
&= \frac{x^2 \left(1 - q + \frac{1}{[n]_q}\right) + x \frac{1}{[n]_q}}{q - \frac{q}{[n]_q}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
&\text{iii) } L_n^q((t-x)^3; x) \\
&= L_n^q(t^3 - 3t^2x + 3tx^2 - x^3; x) \\
&= L_n^q(t^3; x) - 3xL_n^q(t^2; x) + 3x^2L_n^q(t; x) - x^3L_n^q(1; x) \tag{3.2}
\end{aligned}$$

Lemma 3.1.1 de tanımlanan (i) (ii) (iii) ifadeleri Eş. 3.2 de yazılırsa,

$$\begin{aligned}
L_n^q((t-x)^3; x) &= \frac{([n]_q x + 2)([n]_q x + 1)x}{([n]_q - 1)([n]_q - 2)q^3} - 3x \left(\frac{x([n]_q x + 1)}{([n]_q - 1)q} \right) + 3x^3 - x^3 \\
L_n^q((t-x)^3; x) &= \frac{\left(x + \frac{2}{[n]_q}\right) \left(x + \frac{1}{[n]_q}\right) x}{\left(1 - \frac{1}{[n]_q}\right) \left(1 - \frac{2}{[n]_q}\right) q^3} - \frac{3x^2 \left(x + \frac{1}{[n]_q}\right)}{\left(1 - \frac{1}{[n]_q}\right) q} + 2x^3
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
&\text{iv) } L_n^q((t-x)^4; x) \\
&= L_n^q(t^4 - 4t^3x + 6t^2x^2 - 4tx^3 + x^4; x) \\
&= L_n^q(t^4; x) - 4xL_n^q(t^3; x) + 6x^2L_n^q(t^2; x) - 4x^3L_n^q(t; x) + x^4L_n^q(1; x) \\
&= \frac{([n]_q x + 3)([n]_q x + 2)([n]_q x + 1)x}{q^6([n]_q - 1)([n]_q - 2)([n]_q - 3)} - 4x \frac{([n]_q x + 2)([n]_q x + 1)x}{([n]_q - 1)([n]_q - 2)q^3} \\
&\quad + \frac{6x^2x([n]_q x + 1)}{([n]_q - 1)q} - 4x^4 + x^4 \\
&= \frac{\left(x + \frac{3}{[n]_q}\right) \left(x + \frac{2}{[n]_q}\right) \left(x + \frac{1}{[n]_q}\right) x}{\left(1 - \frac{1}{[n]_q}\right) \left(1 - \frac{2}{[n]_q}\right) \left(1 - \frac{3}{[n]_q}\right) q^6} - \frac{4x^2 \left(x + \frac{2}{[n]_q}\right) \left(x + \frac{1}{[n]_q}\right)}{\left(1 - \frac{1}{[n]_q}\right) \left(1 - \frac{2}{[n]_q}\right) q^3} + \frac{6x^3 \left(x + \frac{1}{[n]_q}\right)}{\left(1 - \frac{1}{[n]_q}\right) q} - 3x^4
\end{aligned}$$

elde edilir.

3.1.3. Lemma

$q \in (0,1)$ ve $x \in [0, \infty)$ olsun. Lemma 3.1.1'in ispatı doğrultusunda ilerlenirse, aşağıdaki rekürrens formülü elde edilir [4].

$$L_n^q(t^m; x) = \frac{\Gamma_q([n]_q x + m) \Gamma_q([n]_q - m + 1)}{\Gamma_q([n]_q x) \Gamma_q([n]_q + 1) q^{m(m-1)/2}}.$$

3.2. Tek Değişkenli q-Stancu-Beta Tip Operatörlerin Yaklaşımı

3.2.1. Korovkin tip yaklaşım

Bu kısımda öncelikle Korovkin teoremi hatırlanacaktır. Daha sonra q-Stancu Beta operatörleri için Korovkin tip teorem verilecektir.

3.2.1. Teorem (P. P. Korovkin Teoremi)

Her $n \in \mathbb{N}$ için $L_n: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ şeklinde tanımlı (L_n) lineer pozitif operatörler dizisi olsun. Her bir $i = 0, 1, 2$ için $e_i(x) = x^i$ olmak üzere,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(e_i; \cdot) - e_i\|_{C[a,b]} = 0, i = 0, 1, 2$$

koşulları sağlanırsa, bu durumda $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli ve tüm reel ekseninde sınırlı olan her $f \in C[a, b]$ fonksiyonu için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f; \cdot) - f\|_{C[a,b]} = 0$$

olur [11].

3.2.2. Teorem

(q_n) , her $n \in \mathbb{N}$ için $q_n \in (0,1)$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1$ olacak şekilde herhangi bir dizi olsun. Bu durumda her $f \in C[0, r]$ için $(L_n^{q_n}(f, \cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ lineer pozitif operatörler dizisi $[0, r]$ aralığında f fonksiyonuna düzgün yakınsar.

İspat

$i = 0, 1, 2$ için t bir parametre olmak üzere, $e_i(t) = t^i$ Korovkin teoremindeki test fonksiyonları olsun.

$i = 0, 1$ için, Lemma 3.1.1 (i) ve (ii) den,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n^{q_n}(e_i; \cdot) - e_i\|_{C[0,r]} = 0$$

olduğu açıktır.

$i = 2$ için, Lemma 3.1.1 (iii) den,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n^{q_n}(e_2(t); \cdot) - e_2\|_{C[0,r]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq x \leq r} \left| \frac{x([n]_{q_n}x+1)}{([n]_{q_n}-1)q_n} - x^2 \right| \quad (3.3)$$

$$f(x) = \frac{x([n]_{q_n}x+1)}{([n]_{q_n}-1)q_n} - x^2 \text{ ve eğer}$$

$$c_1 = \frac{1}{([n]_{q_n}-1)q_n}, c_2 = [n]_{q_n} \quad (3.4)$$

alınırsa,

$$f(x) = c_1x(c_2x + 1) - x^2 \text{ olur ve } x \in [0, r] \text{ olmak üzere,}$$

$$f(x) = (c_1c_2 - 1)x^2 + c_1x$$

olur.

$$f'(x) = 2(c_1c_2 - 1)x + c_1 = 0$$

sağlanır.

$$x = -\frac{c_1}{2(c_1c_2 - 1)}$$

elde edilir.

Şimdi c_1 ve c_2 yerine Eş.3.4'deki değerlerini yazarsak

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{([n]_{q_n}-1)q_n} \frac{1}{2\left(\frac{[n]_{q_n}}{([n]_{q_n}-1)q_n}\right) - 2} \\ &= -\frac{1}{2([n]_{q_n} - q_n[n]_{q_n} + q_n)} < 0 \end{aligned}$$

olur.

$f'(x) > 0$ olduğundan f artan olup, maksimum değerini aralığın sağ uç noktasında alır.

O halde,

$$\begin{aligned}
 c_n &= \max_{x \in [0, r]} \left| \frac{x([n]_{q_n} x + 1)}{([n]_{q_n} - 1)q_n} - x^2 \right| = \frac{r([n]_{q_n} r + 1)}{([n]_{q_n} - 1)q_n} - r^2 \\
 &= \frac{r^2([n]_{q_n} - q_n[n]_{q_n} + q_n) + r}{([n]_{q_n} - 1)q_n} \\
 &= \frac{[n]_{q_n} \left[\left(1 - q_n + \frac{q_n}{[n]_{q_n}}\right) r^2 + \frac{1}{[n]_{q_n}} r \right]}{[n]_{q_n} \left[q_n - \frac{q_n}{[n]_{q_n}} \right]} \\
 &= \frac{\left[\left(1 - q_n + \frac{q_n}{[n]_{q_n}}\right) r^2 + \frac{1}{[n]_{q_n}} r \right]}{\left[q_n - \frac{q_n}{[n]_{q_n}} \right]}
 \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{\left[\left(1 - q_n + \frac{q_n}{[n]_{q_n}}\right) r^2 + \frac{1}{[n]_{q_n}} r \right]}{\left[q_n - \frac{q_n}{[n]_{q_n}} \right]} = 0$$

olur.

Dolayısıyla,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n^{q_n}(e_2(t); \cdot) - e_2\|_{C[0, r]} = 0$$

bulunur.

Sonuç olarak

$i = 0, 1, 2$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n^{q_n}(e_i; \cdot) - e_i\|_{C[0, r]} = 0$$

olup, Korovkin teoreminden $[0, r]$ aralığı üzerinde her $f \in C[0, r]$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n^{q_n}(f) - f\|_{C[0, r]} = 0$$

olur. Bu da ispatı tamamlar.

3.2.2. Not

Eş.2.2'den, $q_n \neq 1$ için,

$$[n]_{q_n} = \frac{q_n^{n-1}}{q_n - 1}.$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{[n]_{q_n}} &= \frac{q_n - 1}{q_n^n - 1} = \frac{q_n - 1}{(q_n - 1)(q_n^{n-1} + q_n^{n-2} + \dots + q_n + 1)} \\ &= \frac{1}{q_n^{n-1} + q_n^{n-2} + \dots + q_n + 1}\end{aligned}$$

yazılabilir ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{q_n \rightarrow 1} \frac{1}{[n]_{q_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{q_n \rightarrow 1} \frac{1}{q_n^{n-1} + q_n^{n-2} + \dots + q_n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

bulunur.

3.2.2. Doğrudan yaklaşım sonuçları

3.2.1. Tanım

$f \in C_B[0, \infty)$ olsun. f fonksiyonunun birinci mertebeden süreklilik modülü $\delta > 0$ için

$$\omega(f, \delta) = \sup_{0 < h \leq \delta} \sup_{0 \leq x < \infty} |f(x+h) - f(x)| \quad (3.5)$$

olarak tanımlıdır [12].

f fonksiyonunun ikinci mertebeden süreklilik modülü ise,

$$\omega_2(f, \delta) = \sup_{0 < h \leq \delta} \sup_{0 \leq x < \infty} |f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)| \quad (3.6)$$

olarak tanımlıdır [12].

$W^2 := \{g \in C_B[0, \infty) : g', g'' \in C_B[0, \infty)\}$ olsun.

$\delta > 0$ olsun.

Her $f \in C_B[0, \infty)$ için Peetre K -fonksiyoneli,

$$K_2(f, \delta) = \inf\{\|f - g\| + \delta\|g''\| : g \in W^2\} \quad (3.7)$$

olarak tanımlanır [12].

Her $f \in C_B[0, \infty)$ için

$$K_2(f, \delta) \leq C \omega_2(f, \sqrt{\delta}), \delta > 0 \quad (3.8)$$

koşulunu sağlayan bir pozitif C sabiti vardır [12].

3.2.3. Teorem

$f \in C_B[0, \infty)$ ve $0 < q < 1$ olsun. O zaman her $x \in [0, \infty)$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$|L_n^q(f, x) - f(x)| \leq C \omega_2(f, \delta_n(x))$$

eşitsizliğini sağlayan bir $C > 0$ sabiti vardır[4].

Burada,

$$\delta_n^2(x) = \frac{x^2 \left(1 - q + \frac{1}{[n]_q}\right) + x \frac{1}{[n]_q}}{q - \frac{q}{[n]_q}}. \quad (3.9)$$

İspat

$g \in W^2$ olsun. Taylor açılımından

$$g(t) = g(x) + g'(x)(t - x) + \int_x^t (t - u)g''(u)du, \quad t \in [0, \infty)$$

yazılabilir.

Son eşitliğin her iki tarafına L_n^q uygulanırsa

$$L_n^q(g(t), x) = L_n^q(g(x); x) + L_n^q(g'(x)(t - x); x) + L_n^q\left(\int_x^t (t - u)g''(u)du; x\right)$$

elde edilir ve operatörün lineerlik özelliği kullanılırsa

$$L_n^q(g(t); x) = g(x)L_n^q(1; x) + g'(x)L_n^q((t - x); x) + L_n^q\left(\int_x^t (t - u)g''(u)du; x\right)$$

elde edilir.

Lemma 3.1.1 (i) ve Lemma 3.1.2 (i) den

$$L_n^q(g(t); x) = g(x) + L_n^q\left(\int_x^t (t - u)g''(u)du; x\right)$$

bulunur.

Son eşitlikte düzenleme yapıp eşitliğin her iki tarafında mutlak değer alınırsa

$$|L_n^q(g; x) - g(x)| \leq \left| L_n^q\left(\int_x^t (t - u)g''(u)du; x\right) \right|$$

elde edilir.

Operatörün monoton özelliği ve belirli integralin özelliğinden

$$\begin{aligned} |L_n^q(g; x) - g(x)| &\leq L_n^q\left(\int_x^t |(t-u)g''(u)|du; x\right) \\ &\leq L_n^q\left(\int_x^t |t-u||g''(u)|du; x\right) \end{aligned}$$

yazılabilir.

Burada,

$$v = t - u, \quad dv = -du$$

$$u_1 = x, \quad v_1 = t - x$$

$$u_2 = t, \quad v_2 = t - t = 0 \text{ ve } x < t \text{ olsun.}$$

$$\int_x^t |t-u|du = \int_{t-x}^0 |v|dv = \int_0^{t-x} vdv = \frac{(t-x)^2}{2} \leq (t-x)^2$$

$\|g''\| = \sup_{x \in [0, \infty)} |g''(x)|$ olup her $x \in [0, \infty)$ için $|g''(x)| \leq \|g''\|$ eşitsizliğinden

$$|L_n^q(g; x) - g(x)| \leq L_n^q\left(\int_x^t |t-u||g''(u)|du; x\right) \leq L_n^q((t-x)^2; x)\|g''\|$$

$$|L_n^q(g; x) - g(x)| \leq L_n^q((t-x)^2; x)\|g''\| \quad (3.10)$$

elde edilir.

Şimdi,

$L_n^q(f, x) - f(x)$ ifadesine terim ekleyip terim çıkartılırsa

$$L_n^q(f, x) - f(x) = L_n^q(f(t); x) + L_n^q(g(t); x) - L_n^q(g(t); x) + g(x) - g(x) - f(x)$$

$$L_n^q(f, x) - f(x) = L_n^q(f(t) - g(t); x) - (f(x) - g(x)) + L_n^q(g(t); x) - g(x)$$

$$L_n^q(f, x) - f(x) = L_n^q(f - g; x) - (f - g)(x) + L_n^q(g; x) - g(x) \quad (3.11)$$

olur.

Üçgen eşitsizliği Eş. 3.11'e uygulanırsa

$$\begin{aligned} |L_n^q(f, x) - f(x)| &\leq |L_n^q(f - g; x) - (f - g)(x)| + |L_n^q(g; x) - g(x)| \\ &\leq |L_n^q(f - g; x)| + |(f - g)(x)| + |L_n^q(g; x) - g(x)| \\ &\leq |(f - g)(x)| L_n^q(1; x) + |(f - g)(x)| + |L_n^q(g; x) - g(x)| \end{aligned} \quad (3.12)$$

elde edilir.

Eş. 3.10, Eş. 3.12'ye uygulanırsa

$$|L_n^q(f, x) - f(x)| \leq 2\|f - g\| + L_n^q((t-x)^2; x)\|g''\|$$

bulunur.

Lemma 3.1.2 (ii) den

$$\begin{aligned} |L_n^q(f, x) - f(x)| &\leq 2\|f - g\| + \left(\frac{x^2 \left(1 - q + \frac{q}{[n]_q} \right) + x \frac{1}{[n]_q}}{q - \frac{q}{[n]_q}} \right) \|g''\| \\ &\leq 2 \left(\|f - g\| + \left(\frac{x^2 \left(1 - q + \frac{q}{[n]_q} \right) + x \frac{1}{[n]_q}}{q - \frac{q}{[n]_q}} \right) \|g''\| \right) \end{aligned}$$

yazılabilir.

Eş.3.9'dan $\delta = \delta_n^2$ seçilirse

$$\leq 2(\|f - g\| + \delta_n^2 \|g''\|)$$

elde edilir.

eşitsizliğin sağ tarafına $g \in W^2$ üzerinden infimum alınırsa

$$|L_n^q(f, x) - f(x)| \leq 2 \inf(\|f - g\| + \delta_n^2 \|g''\|) \quad (3.13)$$

olur.

Peetre K -fonksiyonelinin tanımını Eş. 3.13'e uygulanırsa

$$|L_n^q(f, x) - f(x)| \leq 2K_2(f, \delta_n^2(x))$$

elde edilir. Eş.3.8' den,

$$|L_n^q(f, x) - f(x)| \leq 2 C \omega_2(f, \delta_n(x)).$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

3.2.3. Ağırlıklı yaklaşım

f , $[0, \infty)$ üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer her $x \in [0, \infty)$ için

$$|f(x)| \leq M_f(1 + x^2) \quad (3.14)$$

olacak şekilde f fonksiyonuna bağlı bir $M_f > 0$ mevcut ise bu şekildeki tüm f fonksiyonların uzayına ağırlıklı uzay denir ve bu uzay $B_{x^2}[0, \infty)$ ile gösterilir.

$B_{x^2}[0, \infty)$ üzerindeki norm, her $f \in B_{x^2}[0, \infty)$ için

$$\|f\|_{x^2} = \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{|f(x)|}{1+x^2} \quad (3.15)$$

ile tanımlıdır. $B_{x^2}[0, \infty)$ içindeki tüm sürekli fonksiyonların alt uzayı $C_{x^2}[0, \infty)$ ile gösterilsin. $f \in C_{x^2}[0, \infty)$ ve

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{1+x^2} \quad (3.16)$$

limiti mevcut olacak şekildeki tüm f fonksiyonların alt uzayı $C_{x^2}^*[0, \infty)$ ile gösterilsin [4].

3.2.4. Teorem

$f \in C_{x^2}^*[0, \infty)$, ayrıca $f', f'' \in C_{x^2}^*[0, \infty)$ olsun. $A > 0$ iken, $[0, A]$ üzerinde, (q_n) , her $n \in \mathbb{N}$ için $q_n \in (0, 1)$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1$ olacak şekilde bir dizi olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlik sağlanır [4].

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [n]_{q_n} \left(L_n^{q_n}(f; x) - f(x) \right) = \frac{x(1+x)}{2} f''(x)$$

İspat

Taylor formülünden

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + \frac{1}{2}f''(x)(t-x)^2 + r(t, x)(t-x)^2 \quad (3.17)$$

yazılabilir.

Burada $r(t, x)$ kalan terim ve $\lim_{t \rightarrow x} r(t, x) = 0$ dır.

Eş.3.17'de düzenleme yapıp, $L_n^{q_n}$ operatörü eşitliğin her iki tarafına uygulanırsa

$$L_n^{q_n}(f, x) - f(x) =$$

$$L_n^{q_n}(t-x; x)f'(x) + L_n^{q_n}((t-x)^2; x)\frac{f''(x)}{2} + L_n^{q_n}(r(t, x)(t-x)^2; x)$$

elde edilir.

Son eşitliğin her iki tarafını $[n]_{q_n}$ ile çarparsak,

$$\begin{aligned} [n]_{q_n} \left(L_n^{q_n}(f, x) - f(x) \right) &= [n]_{q_n} L_n^{q_n}(t-x; x)f'(x) + [n]_{q_n} L_n^{q_n}((t-x)^2; x)\frac{f''(x)}{2} \\ &\quad + [n]_{q_n} L_n^{q_n}(r(t, x)(t-x)^2; x) \end{aligned}$$

bulunur.

Cauchy- Schwartz eşitsizliğinden,

$$L_n^{q_n}(r(t, x)(t - x)^2; x) \leq \sqrt{L_n^{q_n}(r^2(t, x); x)} \sqrt{L_n^{q_n}((t - x)^4; x)} \quad (3.18)$$

elde edilir.

$r^2(\cdot, x) \in C_{x^2}^*[0, \infty)$ ve $r^2(x, x) = 0$ dır. Teorem 3.2.3'ten ve $x \in [0, A]$ olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n^{q_n}(r^2(t, x); x) = r^2(x, x) = 0 \quad (3.19)$$

bulunur.

Eş.3.18, Eş.3.19 ve Lemma 3.1.3'ten faydalanılarak sıkıştırma teoreminden,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [n]_{q_n} L_n^{q_n}(r(t, x)(t - x)^2; x) = 0$$

olur.

Son olarak, Lemma 3.1.2 kullanılarak,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} [n]_{q_n} (L_n^{q_n}(f; x) - f(x)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [n]_{q_n} \left(L_n^{q_n}(t - x; x) f'(x) + \frac{1}{2} L_n^{q_n}((t - x)^2; x) f''(x) + L_n^{q_n}(r(t, x)(t - x)^2; x) \right) \\ &= \frac{x(1 + x)}{2} f''(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece ispat tamamlanmış olur.

3.2.5. Teorem (Gadzhiev' in ağırlıklı yaklaşım teoremi)

(L_n) , $C_{x^2}[0, \infty)$ 'dan $B_{x^2}[0, \infty)$ 'a tanımlı lineer pozitif operatörlerin dizisi ve $k = 0, 1, 2$

için $e_k(t) = t^k$ olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(e_k; \cdot) - e_k\|_{x^2} = 0, \quad k = 0, 1, 2 \quad (3.20)$$

ise, o zaman her $f \in C_{x^2}^*[0, \infty)$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f; \cdot) - f\|_{x^2} = 0$$

dır [13,14].

Şimdi, q-Stancu-Beta operatörleri için Gadzhiev tip ağırlıklı yaklaşım teoremini verelim.

3.2.6. Teorem

(q_n) , her $n \in \mathbb{N}$ için $q_n \in (0,1)$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1$ olacak şekilde herhangi bir dizi olsun.

Bu durumda her $f \in C_{x^2}^*[0, \infty)$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n^{q_n}(f; \cdot) - f\|_{x^2} = 0$$

olur [4].

İspat

İspat Eş.3.20'deki koşullar gösterilerek yapılır.

$v = 0,1$ için Lemma 3.1.1 (i), (ii) den,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n^{q_n}(e_v(t); \cdot) - e_v\|_{x^2} = 0 \quad (3.21)$$

olduğu açıktır.

$v = 2$ için, Lemma 3.1.1 (iii) ve Eş.3.15' ten,

$$\begin{aligned} & \|L_n^{q_n}(e_2(t); \cdot) - e_2\|_{x^2} \\ & \leq \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{|[n]_{q_n} - q_n[n]_{q_n} + q_n|}{q_n([n]_{q_n} - 1)} \frac{x^2}{1+x^2} + \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{1}{q_n([n]_{q_n} - 1)} \frac{x}{1+x^2} \\ & \leq \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{[n]_{q_n} \left(1 - q_n + \frac{q_n}{[n]_{q_n}}\right)}{[n]_{q_n} \left(q_n - \frac{q_n}{[n]_{q_n}}\right)} \frac{x^2}{1+x^2} + \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{1}{q_n([n]_{q_n} - 1)} \frac{x}{1+x^2} \\ & \leq \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{\left(1 - q_n + \frac{q_n}{[n]_{q_n}}\right)}{q_n \left(1 - \frac{1}{[n]_{q_n}}\right)} \frac{x^2}{1+x^2} + \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{1}{q_n([n]_{q_n} - 1)} \frac{x}{1+x^2} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Eş. 3.22 de teoremin hipotezi dikkate alınır

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n^{q_n}(e_2(t); \cdot) - e_2\|_{x^2} = 0 \quad (3.23)$$

elde edilir. Teorem 3.2.5 dikkate alınarak, Eş.3.21 ve Eş.3.23' den ispat tamamlanır.

4. İKİ DEĞİŞKENLİ q -STANCU-BETA TİP OPERATÖRLER

Bu bölümde, Barbosu'nun [15] çalışmasındaki benzer teknik kullanılarak Özkan ve Korkmaz [5] tarafından tanımlanan ve çalışılan iki değişkenli q -Stancu-Beta tip operatörlerinin Volkov tip yaklaşım teoremi ve Gadzhiev tip ağırlıklı yaklaşım teoremleri incelenecektir.

4.1. İki Değişkenli q -Stancu-Beta Tip Operatörlerin Tanımı ve Özellikleri

4.1.1. Tanım

$\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ olmak üzere, $f, \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ üzerinde tanımlı iki değişkenli reel değerli sürekli ve sınırlı bir fonksiyon olsun. $A_1, A_2 > 0$ ve $q_1, q_2 \in (0, 1)$ olmak üzere, her $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ için iki değişkenli q -Stancu-Beta tip operatörler

$$L_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}(f(t, s); x, y) = \frac{K(A_1, [n_1]_{q_1} x)}{B_{q_1}([n_1]_{q_1} x, [n_1]_{q_1} + 1)} \frac{K(A_2, [n_2]_{q_2} y)}{B_{q_2}([n_2]_{q_2} y, [n_2]_{q_2} + 1)} \\ \times \int_0^{\infty/A_1} \int_0^{\infty/A_2} \frac{u^{[n_1]_{q_1} x - 1}}{(1+u)_{q_1}^{[n_1]_{q_1} x + [n_1]_{q_1} + 1}} \frac{v^{[n_2]_{q_2} y - 1}}{(1+v)_{q_2}^{[n_2]_{q_2} y + [n_2]_{q_2} + 1}} f(q_1^{[n_1]_{q_1} x} u, q_2^{[n_2]_{q_2} y} v) d_{q_2} v d_{q_1} u \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlanır [5].

Bu operatörler lineer pozitif operatörlerdir.

a, b keyfi reel sabitleri ve $f, g \in C([0, \infty) \times [0, \infty))$ keyfi fonksiyonları için

$$L_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}((af + bg); x, y) = aL_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}(f; x, y) + bL_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}(g; x, y)$$

eşitliğinin sağlandığını gösterelim:

$$L_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}((af + bg); x, y) = \frac{K(A_1, [n_1]_{q_1} x)}{B_{q_1}([n_1]_{q_1} x, [n_1]_{q_1} + 1)} \frac{K(A_2, [n_2]_{q_2} y)}{B_{q_2}([n_2]_{q_2} y, [n_2]_{q_2} + 1)} \\ \times \int_0^{\infty/A_1} \int_0^{\infty/A_2} \frac{u^{[n_1]_{q_1} x - 1}}{(1+u)_{q_1}^{[n_1]_{q_1} x + [n_1]_{q_1} + 1}} \frac{v^{[n_2]_{q_2} y - 1}}{(1+v)_{q_2}^{[n_2]_{q_2} y + [n_2]_{q_2} + 1}} \\ \times (af + bg)(q_1^{[n_1]_{q_1} x} u, q_2^{[n_2]_{q_2} y} v) d_{q_2} v d_{q_1} u$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{K(A_1, [n_1]_{q_1} x)}{B_{q_1}([n_1]_{q_1} x, [n_1]_{q_1} + 1)} \frac{K(A_2, [n_2]_{q_2} y)}{B_{q_2}([n_2]_{q_2} y, [n_2]_{q_2} + 1)} \\
&\times \int_0^{\infty/A_1} \int_0^{\infty/A_2} \frac{u^{[n_1]_{q_1} x - 1}}{(1+u)_{q_1}^{[n_1]_{q_1} x + [n_1]_{q_1} + 1}} \frac{v^{[n_2]_{q_2} y - 1}}{(1+v)_{q_2}^{[n_2]_{q_2} y + [n_2]_{q_2} + 1}} \\
&\times [af(q_1^{[n_1]_{q_1} x} u, q_2^{[n_2]_{q_2} y} v) + bg(q_1^{[n_1]_{q_1} x} u, q_2^{[n_2]_{q_2} y} v)] d_{q_2} v d_{q_1} u \\
&= \frac{K(A_1, [n_1]_{q_1} x)}{B_{q_1}([n_1]_{q_1} x, [n_1]_{q_1} + 1)} \frac{K(A_2, [n_2]_{q_2} y)}{B_{q_2}([n_2]_{q_2} y, [n_2]_{q_2} + 1)} \\
&\times \int_0^{\infty/A_1} \int_0^{\infty/A_2} \frac{u^{[n_1]_{q_1} x - 1}}{(1+u)_{q_1}^{[n_1]_{q_1} x + [n_1]_{q_1} + 1}} \frac{v^{[n_2]_{q_2} y - 1}}{(1+v)_{q_2}^{[n_2]_{q_2} y + [n_2]_{q_2} + 1}} af(q_1^{[n_1]_{q_1} x} u, q_2^{[n_2]_{q_2} y} v) d_{q_2} v d_{q_1} u \\
&+ \frac{K(A_1, [n_1]_{q_1} x)}{B_{q_1}([n_1]_{q_1} x, [n_1]_{q_1} + 1)} \frac{K(A_2, [n_2]_{q_2} y)}{B_{q_2}([n_2]_{q_2} y, [n_2]_{q_2} + 1)} \\
&\times \int_0^{\infty/A_1} \int_0^{\infty/A_2} \frac{u^{[n_1]_{q_1} x - 1}}{(1+u)_{q_1}^{[n_1]_{q_1} x + [n_1]_{q_1} + 1}} \frac{v^{[n_2]_{q_2} y - 1}}{(1+v)_{q_2}^{[n_2]_{q_2} y + [n_2]_{q_2} + 1}} bg(q_1^{[n_1]_{q_1} x} u, q_2^{[n_2]_{q_2} y} v) d_{q_2} v d_{q_1} u \\
&= a \frac{K(A_1, [n_1]_{q_1} x)}{B_{q_1}([n_1]_{q_1} x, [n_1]_{q_1} + 1)} \frac{K(A_2, [n_2]_{q_2} y)}{B_{q_2}([n_2]_{q_2} y, [n_2]_{q_2} + 1)} \\
&\int_0^{\infty/A_1} \int_0^{\infty/A_2} \frac{u^{[n_1]_{q_1} x - 1}}{(1+u)_{q_1}^{[n_1]_{q_1} x + [n_1]_{q_1} + 1}} \frac{v^{[n_2]_{q_2} y - 1}}{(1+v)_{q_2}^{[n_2]_{q_2} y + [n_2]_{q_2} + 1}} f(q_1^{[n_1]_{q_1} x} u, q_2^{[n_2]_{q_2} y} v) \\
&+ b \frac{K(A_1, [n_1]_{q_1} x)}{B_{q_1}([n_1]_{q_1} x, [n_1]_{q_1} + 1)} \frac{K(A_2, [n_2]_{q_2} y)}{B_{q_2}([n_2]_{q_2} y, [n_2]_{q_2} + 1)} \\
&\times \int_0^{\infty/A_1} \int_0^{\infty/A_2} \frac{u^{[n_1]_{q_1} x - 1}}{(1+u)_{q_1}^{[n_1]_{q_1} x + [n_1]_{q_1} + 1}} \frac{v^{[n_2]_{q_2} y - 1}}{(1+v)_{q_2}^{[n_2]_{q_2} y + [n_2]_{q_2} + 1}} g(q_1^{[n_1]_{q_1} x} u, q_2^{[n_2]_{q_2} y} v) d_{q_2} v d_{q_1} u \\
&= aL_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}(f; x, y) + bL_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}(g; x, y)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda, $L_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}$ lineer operatördür.

Her $f \in C([0, \infty) \times [0, \infty))$ için $f \geq 0$ olsun. Tanım 2.2.7'den

$L_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}(f(t, s); x, y) \geq 0$ olduğu açıktır. O halde $L_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}$ pozitif operatördür.

İki değişkenli q-Stancu-Beta tip operatörlerin tanımına eşdeğer olan yardımcı teorem aşağıdaki gibi verilebilir.

4.1.1. Lemma

$$(i) L_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}(f(t, s); x, y) = L_{n_1}^x(L_{n_2}^y(f(t, s); q_2); q_1)$$

$$(ii) L_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}(f(t, s); x, y) = L_{n_2}^y(L_{n_1}^x(f(t, s); q_1); q_2)$$

eşitlikleri doğrudur [5].

Burada,

$$\begin{aligned} & L_{n_1}^x(f(t, s); q_1) \\ &:= \frac{K(A_1, [n_1]_{q_1} x)}{B_{q_1}([n_1]_{q_1} x, [n_1]_{q_1} + 1)} \int_0^{\infty/A_1} \frac{u^{[n_1]_{q_1} x - 1}}{(1 + u)_{q_1}^{[n_1]_{q_1} x + [n_1]_{q_1} + 1}} f(q_1^{[n_1]_{q_1} x} u, s) d_{q_1} u \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} & L_{n_2}^y(f(t, s); q_2) \\ &:= \frac{K(A_2, [n_2]_{q_2} y)}{B_{q_2}([n_2]_{q_2} y, [n_2]_{q_2} + 1)} \int_0^{\infty/A_2} \frac{v^{[n_2]_{q_2} y - 1}}{(1 + v)_{q_2}^{[n_2]_{q_2} y + [n_2]_{q_2} + 1}} f(t, q_2^{[n_2]_{q_2} y} v) d_{q_2} v \end{aligned} \quad (4.3)$$

İspat

$$(i) L_{n_1}^x(L_{n_2}^y(f(t, s); q_2); q_1)$$

$$= L_{n_1}^x \left(\frac{K(A_2, [n_2]_{q_2} y)}{B_{q_2}([n_2]_{q_2} y, [n_2]_{q_2} + 1)} \int_0^{\infty/A_2} \frac{v^{[n_2]_{q_2} y - 1}}{(1 + v)_{q_2}^{[n_2]_{q_2} y + [n_2]_{q_2} + 1}} f(t, q_2^{[n_2]_{q_2} y} v) d_{q_2} v; q_1 \right)$$

olup burada $L_{n_1}^x$ 'in lineerliğinden

$$= \frac{K(A_2, [n_2]_{q_2} y)}{B_{q_2}([n_2]_{q_2} y, [n_2]_{q_2} + 1)} \int_0^{\infty/A_2} \frac{v^{[n_2]_{q_2} y - 1}}{(1 + v)_{q_2}^{[n_2]_{q_2} y + [n_2]_{q_2} + 1}} L_{n_1}^x(f(t, q_2^{[n_2]_{q_2} y} v); q_1) d_{q_2} v \quad (4.4)$$

elde edilir. Eş.4.4 ve Eş. 4.2 birlikte düşünülürse

$$\begin{aligned} &= \frac{K(A_2, [n_2]_{q_2} y)}{B_{q_2}([n_2]_{q_2} y, [n_2]_{q_2} + 1)} \int_0^{\infty/A_2} \frac{v^{[n_2]_{q_2} y - 1}}{(1 + v)_{q_2}^{[n_2]_{q_2} y + [n_2]_{q_2} + 1}} \\ &\times \frac{K(A_1, [n_1]_{q_1} x)}{B_{q_1}([n_1]_{q_1} x, [n_1]_{q_1} + 1)} \int_0^{\infty/A_1} \frac{u^{[n_1]_{q_1} x - 1}}{(1 + u)_{q_1}^{[n_1]_{q_1} x + [n_1]_{q_1} + 1}} f(q_1^{[n_1]_{q_1} x} u, q_2^{[n_2]_{q_2} y} v) d_{q_1} u d_{q_2} v \end{aligned}$$

son ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned}
&= \frac{K(A_1, [n_1]_{q_1} x)}{B_{q_1}([n_1]_{q_1} x, [n_1]_{q_1} + 1)} \frac{K(A_2, [n_2]_{q_2} y)}{B_{q_2}([n_2]_{q_2} y, [n_2]_{q_2} + 1)} \\
&\times \int_0^{\infty/A_1} \int_0^{\infty/A_2} \frac{u^{[n_1]_{q_1} x - 1}}{(1+u)_{q_1}^{[n_1]_{q_1} x + [n_1]_{q_1} + 1}} \frac{v^{[n_2]_{q_2} y - 1}}{(1+v)_{q_2}^{[n_2]_{q_2} y + [n_2]_{q_2} + 1}} f(q_1^{[n_1]_{q_1} x} u, q_2^{[n_2]_{q_2} y} v) d_{q_2} v d_{q_1} u \\
&= L_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}(f(t, s); x, y)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
&\text{(ii) } L_{n_2}^y(L_{n_1}^x(f(t, s); q_1); q_2) \\
&= L_{n_2}^y\left(\frac{K(A_1, [n_1]_{q_1} x)}{B_{q_1}([n_1]_{q_1} x, [n_1]_{q_1} + 1)} \int_0^{\infty/A_1} \frac{u^{[n_1]_{q_1} x - 1}}{(1+u)_{q_1}^{[n_1]_{q_1} x + [n_1]_{q_1} + 1}} f(q_1^{[n_1]_{q_1} x} u, s) d_{q_1} u; q_2\right)
\end{aligned}$$

olup burada, $L_{n_2}^y$ 'nin lineerliğinden

$$\begin{aligned}
&= \frac{K(A_1, [n_1]_{q_1} x)}{B_{q_1}([n_1]_{q_1} x, [n_1]_{q_1} + 1)} \int_0^{\infty/A_1} \frac{u^{[n_1]_{q_1} x - 1}}{(1+u)_{q_1}^{[n_1]_{q_1} x + [n_1]_{q_1} + 1}} L_{n_2}^y(f(q_1^{[n_1]_{q_1} x} u, s); q_2) d_{q_1} u \\
&\hspace{25em} (4.5)
\end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 4.5 ve Eş. 4.3 birlikte düşünülürse

$$\begin{aligned}
&= \frac{K(A_1, [n_1]_{q_1} x)}{B_{q_1}([n_1]_{q_1} x, [n_1]_{q_1} + 1)} \int_0^{\infty/A_1} \frac{u^{[n_1]_{q_1} x - 1}}{(1+u)_{q_1}^{[n_1]_{q_1} x + [n_1]_{q_1} + 1}} \\
&\times \frac{K(A_2, [n_2]_{q_2} y)}{B_{q_2}([n_2]_{q_2} y, [n_2]_{q_2} + 1)} \int_0^{\infty/A_2} \frac{v^{[n_2]_{q_2} y - 1}}{(1+v)_{q_2}^{[n_2]_{q_2} y + [n_2]_{q_2} + 1}} f(q_1^{[n_1]_{q_1} x} u, q_2^{[n_2]_{q_2} y} v) d_{q_2} v d_{q_1} u
\end{aligned}$$

elde edilir.

Son ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned}
&= \frac{K(A_1, [n_1]_{q_1} x)}{B_{q_1}([n_1]_{q_1} x, [n_1]_{q_1} + 1)} \frac{K(A_2, [n_2]_{q_2} y)}{B_{q_2}([n_2]_{q_2} y, [n_2]_{q_2} + 1)} \\
&\times \int_0^{\infty/A_1} \int_0^{\infty/A_2} \frac{u^{[n_1]_{q_1} x - 1}}{(1+u)_{q_1}^{[n_1]_{q_1} x + [n_1]_{q_1} + 1}} \frac{v^{[n_2]_{q_2} y - 1}}{(1+v)_{q_2}^{[n_2]_{q_2} y + [n_2]_{q_2} + 1}} f(q_1^{[n_1]_{q_1} x} u, q_2^{[n_2]_{q_2} y} v) d_{q_2} v d_{q_1} u \\
&= L_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}(f(t, s); x, y)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece ispat tamamlanmış olur.

4.1.2. Lemma

$e_{ij}(t, s) = t^i s^j$ iki boyutlu test fonksiyonları olmak üzere, Eş.4.1’de tanımlanan operatör için aşağıdaki eşitlikler doğrudur [5].

- (i) $L_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}(e_{00}; x, y) = 1$
- (ii) $L_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}(e_{10}; x, y) = x$
- (iii) $L_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}(e_{01}; x, y) = y$
- (iv) $L_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}(e_{20}; x, y) = \frac{x([n_1]_{q_1} x + 1)}{q_1([n_1]_{q_1} - 1)}$
- (v) $L_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}(e_{02}; x, y) = \frac{y([n_2]_{q_2} y + 1)}{q_2([n_2]_{q_2} - 1)}$

İspat

- (i) $e_{00}(t, s) = t^0 s^0 = 1$ için,

Lemma 4.1.1 (i) den

$$L_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}(1; x, y) = L_{n_1}^x(L_{n_2}^y(1; q_2, x, y); q_1, x, y) \\ = L_{n_1}^x \left(\frac{K(A_2, [n_2]_{q_2} y)}{B_{q_2}([n_2]_{q_2} y, [n_2]_{q_2} + 1)} \int_0^{\infty/A_2} \frac{v^{[n_2]_{q_2} y - 1}}{(1 + v)_{q_2}^{[n_2]_{q_2} y + [n_2]_{q_2} + 1}} d_{q_2} v \right)$$

yazılabilir. $L_{n_1}^x$ ’nin lineerliğinden

$$= \frac{K(A_2, [n_2]_{q_2} y)}{B_{q_2}([n_2]_{q_2} y, [n_2]_{q_2} + 1)} \int_0^{\infty/A_2} L_{n_1}^x(1; q_1, x, y) \frac{v^{[n_2]_{q_2} y - 1}}{(1 + v)_{q_2}^{[n_2]_{q_2} y + [n_2]_{q_2} + 1}} d_{q_2} v \\ = L_{n_1}^x(1; q_1, x, y) \frac{K(A_2, [n_2]_{q_2} y)}{B_{q_2}([n_2]_{q_2} y, [n_2]_{q_2} + 1)} \int_0^{\infty/A_2} \frac{v^{[n_2]_{q_2} y - 1}}{(1 + v)_{q_2}^{[n_2]_{q_2} y + [n_2]_{q_2} + 1}} d_{q_2} v$$

Lemma 3.1.1 (i)’den ve Lemma 4.1.1’de Eş.4.2’den

$$= \left(\frac{K(A_1, [n_1]_{q_1} x)}{B_{q_1}([n_1]_{q_1} x, [n_1]_{q_1} + 1)} \int_0^{\infty/A_1} \frac{u^{[n_1]_{q_1} x - 1}}{(1 + u)_{q_1}^{[n_1]_{q_1} x + [n_1]_{q_1} + 1}} d_{q_1} u \right) \cdot 1$$

Lemma 3.1.1 (i)’den

$$= 1$$

elde edilir.

$$(ii) \quad e_{10}(t, s) = t^1 s^0 = t \text{ için,}$$

Lemma 4.1.1 (ii) den

$$L_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}(t; x, y) = L_{n_2}^y(L_{n_1}^x(t; q_1, x, y); q_2, x, y)$$

$$= L_{n_2}^y \left(\frac{K(A_1, [n_1]_{q_1} x)}{B_{q_1}([n_1]_{q_1} x, [n_1]_{q_1} + 1)} \int_0^{\infty/A_1} \frac{u^{[n_1]_{q_1} x - 1}}{(1+u)_{q_1}^{[n_1]_{q_1} x + [n_1]_{q_1} + 1}} q_1^{[n_1]_{q_1} x} u d_{q_1} u \right)$$

yazılabilir. $L_{n_2}^y$ 'nin lineerliğinden

$$\begin{aligned} &= \frac{K(A_1, [n_1]_{q_1} x)}{B_{q_1}([n_1]_{q_1} x, [n_1]_{q_1} + 1)} \int_0^{\infty/A_1} L_{n_2}^y(1; q_2, x, y) \frac{u^{[n_1]_{q_1} x - 1}}{(1+u)_{q_1}^{[n_1]_{q_1} x + [n_1]_{q_1} + 1}} q_1^{[n_1]_{q_1} x} u d_{q_1} u \\ &= L_{n_2}^y(1; q_2, x, y) \left(\frac{K(A_1, [n_1]_{q_1} x) q_1^{[n_1]_{q_1} x}}{B_{q_1}([n_1]_{q_1} x, [n_1]_{q_1} + 1)} \int_0^{\infty/A_1} \frac{u^{[n_1]_{q_1} x}}{(1+u)_{q_1}^{[n_1]_{q_1} x + [n_1]_{q_1} + 1}} d_{q_1} u \right) \end{aligned}$$

Eş.4.3 ve Lemma 3.1.1 (ii)'den

$$= \left(\frac{K(A_2, [n_2]_{q_2} y)}{B_{q_2}([n_2]_{q_2} y, [n_2]_{q_2} + 1)} \int_0^{\infty/A_2} \frac{v^{[n_2]_{q_2} y - 1}}{(1+v)_{q_2}^{[n_2]_{q_2} y + [n_2]_{q_2} + 1}} d_{q_2} v \right) x$$

Lemma 3.1.1 (i)'den

$$= 1 \cdot x = x$$

elde edilir.

$$(iii) \quad e_{01} = t^0 s^1 = s \text{ için,}$$

Lemma 4.1.1 (i)'den

$$L_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}(s; x, y) = L_{n_1}^x(L_{n_2}^y(s; q_2, x, y); q_1, x, y)$$

$$L_{n_1}^x \left(\frac{K(A_2, [n_2]_{q_2} y)}{B_{q_2}([n_2]_{q_2} y, [n_2]_{q_2} + 1)} \int_0^{\infty/A_2} \frac{v^{[n_2]_{q_2} y - 1}}{(1+v)_{q_2}^{[n_2]_{q_2} y + [n_2]_{q_2} + 1}} q_2^{[n_2]_{q_2} y} v d_{q_2} v \right)$$

yazılabilir. $L_{n_1}^x$ 'in lineerliğinden

$$\begin{aligned} &= \frac{K(A_2, [n_2]_{q_2} y)}{B_{q_2}([n_2]_{q_2} y, [n_2]_{q_2} + 1)} \int_0^{\infty/A_2} L_{n_1}^x(1; q_1, x, y) \frac{v^{[n_2]_{q_2} y}}{(1+v)_{q_2}^{[n_2]_{q_2} y + [n_2]_{q_2} + 1}} q_2^{[n_2]_{q_2} y} d_{q_2} v \\ &= L_{n_1}^x(1; q_1, x, y) \left(\frac{K(A_2, [n_2]_{q_2} y)}{B_{q_2}([n_2]_{q_2} y, [n_2]_{q_2} + 1)} \int_0^{\infty/A_2} \frac{v^{[n_2]_{q_2} y}}{(1+v)_{q_2}^{[n_2]_{q_2} y + [n_2]_{q_2} + 1}} q_2^{[n_2]_{q_2} y} d_{q_2} v \right) \end{aligned}$$

Eş.4.2 ve Lemma 3.1.1 (ii)'den

$$= \left(\frac{K(A_1, [n_1]_{q_1} x)}{B_{q_1}([n_1]_{q_1} x, [n_1]_{q_1} + 1)} \int_0^{\infty/A_1} \frac{u^{[n_1]_{q_1} x - 1}}{(1 + u)_{q_1}^{[n_1]_{q_1} x + [n_1]_{q_1} + 1}} d_{q_1} u \right) y$$

Lemma 3.1.1 (i)'den

$$= 1 \cdot y$$

$$= y$$

elde edilir.

$$(iv) \quad e_{20} = t^2 s^0 = t^2 \text{ için,}$$

Lemma 4.1.1 (ii)'den

$$L_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}(e_{20}; x, y) = L_{n_2}^y(L_{n_1}^x(t^2; q_1, x, y); q_2, x, y)$$

$$= L_{n_2}^y \left(\frac{K(A_1, [n_1]_{q_1} x)}{B_{q_1}([n_1]_{q_1} x, [n_1]_{q_1} + 1)} \int_0^{\infty/A_1} \frac{u^{[n_1]_{q_1} x - 1}}{(1 + u)_{q_1}^{[n_1]_{q_1} x + [n_1]_{q_1} + 1}} q_1^{2[n_1]_{q_1} x} u^2 d_{q_1} u \right)$$

$L_{n_2}^y$ 'in lineerliğinden

$$\begin{aligned} &= \frac{K(A_1, [n_1]_{q_1} x)}{B_{q_1}([n_1]_{q_1} x, [n_1]_{q_1} + 1)} q_1^{2[n_1]_{q_1} x} \int_0^{\infty/A_1} L_{n_2}^y(1; q_2, x, y) \frac{u^{[n_1]_{q_1} x + 1}}{(1 + u)_{q_1}^{[n_1]_{q_1} x + [n_1]_{q_1} + 1}} d_{q_1} u \\ &= L_{n_2}^y(1; q_2, x, y) \frac{K(A_1, [n_1]_{q_1} x)}{B_{q_1}([n_1]_{q_1} x, [n_1]_{q_1} + 1)} q_1^{2[n_1]_{q_1} x} \int_0^{\infty/A_1} \frac{u^{[n_1]_{q_1} x + 1}}{(1 + u)_{q_1}^{[n_1]_{q_1} x + [n_1]_{q_1} + 1}} d_{q_1} u \end{aligned}$$

Eş.4.3 ve Lemma 3.1.1(iii)'den

$$= \left(\frac{K(A_2, [n_2]_{q_2} y)}{B_{q_2}([n_2]_{q_2} y, [n_2]_{q_2} + 1)} \int_0^{\infty/A_2} \frac{v^{[n_2]_{q_2} y - 1}}{(1 + v)_{q_2}^{[n_2]_{q_2} y + [n_2]_{q_2} + 1}} d_{q_2} v \right) \left(\frac{x([n_1]_{q_1} x + 1)}{q_1([n_1]_{q_1} - 1)} \right)$$

Lemma 3.1.1 (i)'den

$$= 1 \cdot \frac{x([n_1]_{q_1} x + 1)}{q_1([n_1]_{q_1} - 1)}$$

$$= \frac{x([n_1]_{q_1} x + 1)}{q_1([n_1]_{q_1} - 1)}$$

elde edilir.

$$(v) \quad e_{02} = t^0 s^2 = s^2 \text{ için,}$$

Lemma 4.1.1 (i)'den

$$L_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}(s^2; x, y) = L_{n_1}^x(L_{n_2}^y(s^2; q_2, x, y); q_1, x, y)$$

$$= L_{n_1}^x \left(\frac{K(A_2, [n_2]_{q_2} y)}{B_{q_2}([n_2]_{q_2} y, [n_2]_{q_2} + 1)} \int_0^{\infty/A_2} \frac{v^{[n_2]_{q_2} y - 1}}{(1+v)_{q_2}^{[n_2]_{q_2} y + [n_2]_{q_2} + 1}} q_2^{2[n_2]_{q_2} y} v^2 d_{q_2} v \right)$$

$L_{n_1}^x$ 'in lineerliğinden

$$\begin{aligned} &= \frac{K(A_2, [n_2]_{q_2} y) q_2^{2[n_2]_{q_2} y}}{B_{q_2}([n_2]_{q_2} y, [n_2]_{q_2} + 1)} \int_0^{\infty/A_2} L_{n_1}^x(1; q_1, x, y) \frac{v^{[n_2]_{q_2} y + 1}}{(1+v)_{q_2}^{[n_2]_{q_2} y + [n_2]_{q_2} + 1}} d_{q_2} v \\ &= L_{n_1}^x(1; q_1, x, y) \frac{K(A_2, [n_2]_{q_2} y) q_2^{2[n_2]_{q_2} y}}{B_{q_2}([n_2]_{q_2} y, [n_2]_{q_2} + 1)} \int_0^{\infty/A_2} \frac{v^{[n_2]_{q_2} y + 1}}{(1+v)_{q_2}^{[n_2]_{q_2} y + [n_2]_{q_2} + 1}} d_{q_2} v \end{aligned}$$

Eş.4.2 ve Lemma 3.1.1 (iii)'den

$$= \left(\frac{K(A_1, [n_1]_{q_1} x)}{B_{q_1}([n_1]_{q_1} x, [n_1]_{q_1} + 1)} \int_0^{\infty/A_1} \frac{u^{[n_1]_{q_1} x - 1}}{(1+u)_{q_1}^{[n_1]_{q_1} x + [n_1]_{q_1} + 1}} d_{q_1} u \right) \left(\frac{y([n_2]_{q_2} y + 1)}{q_2([n_2]_{q_2} - 1)} \right)$$

Lemma 3.1.1 (i)'den

$$= 1 \cdot \frac{y([n_2]_{q_2} y + 1)}{q_2([n_2]_{q_2} - 1)}$$

elde edilir.

Sonuç 4.1.1

$e_{ij}(t, s) = t^i s^j$ iki boyutlu test fonksiyonları olmak üzere, Eş.4.1'de tanımlanan operatör için aşağıdaki eşitlikler doğrudur [5].

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad L_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}((e_{10} - x)^2; x, y) &= \frac{x^2 \left(1 - q_{1, n_1} + \frac{q_{1, n_1}}{[n_1]_{q_1, n_1}} \right) + x \frac{1}{[n_1]_{q_1, n_1}}}{\left(q_{1, n_1} - \frac{q_{1, n_1}}{[n_1]_{q_1, n_1}} \right)} \\ \text{ii)} \quad L_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}((e_{01} - y)^2; x, y) &= \frac{y^2 \left(1 - q_{2, n_2} + \frac{q_{2, n_2}}{[n_2]_{q_2, n_2}} \right) + y \frac{1}{[n_2]_{q_2, n_2}}}{\left(q_{2, n_2} - \frac{q_{2, n_2}}{[n_2]_{q_2, n_2}} \right)} \end{aligned}$$

Lemma 4.1.2 kullanılarak küçük bir hesaplamayla kolaylıkla görülebilir.

4.2. İki Değişkenli q-Stancu-Beta Tip Operatörlerin Yaklaşımı

Bu bölümde, Özkan ve Korkmaz [5] tarafından verilen iki değişkenli q-Stancu-Beta tip operatörlerinin düzgün yakınsaklığı incelenmiştir.

İlk önce Volkov'un [16] iki değişkenli fonksiyonlar için verdiği düzgün yakınsaklık teoremini hatırlayalım.

4.2.1. Volkov tip teorem

4.2.1. Teorem (Volkov teoremi)

$A, \mathbb{R}^{2'}$ de kapalı ve sınırlı bir bölge, $C(A)$, bu A bölgesinde tanımlı sürekli ve reel değerli f fonksiyonların kümesi ve $L_{n,m}(f(t,s); x, y), C(A)$ üzerinde tanımlı bir lineer pozitif operatörler dizisi olsun.

$$f_0 = e_{00}(t, s) = 1$$

$$f_1 = e_{10}(t, s) = t$$

$$f_2 = e_{01}(t, s) = s$$

$$f_3 = e_{20}(t, s) + e_{02}(t, s) = t^2 + s^2$$

olmak üzere, $(L_{n,m})$ lineer pozitif operatörler dizisi

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|L_{n,m}(f_i) - f_i\|_{C(A)} = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3$$

koşullarını sağlıyorsa bu durumda her $f \in C(A)$ için A üzerinde

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|L_{n,m}(f) - f\|_{C(A)} = 0$$

gerçeklenir [16].

4.2.2. Teorem

$0 < q_{1,n_1}, q_{2,n_2} \leq 1$ olmak üzere, $(q_{1,n_1}) (q_{2,n_2})$ dizileri

$$\lim_{n_1 \rightarrow \infty} q_{1,n_1} = 1, \quad \lim_{n_2 \rightarrow \infty} q_{2,n_2} = 1 \quad (4.6)$$

koşullarını gerçekliyorsa, her $f \in C(I)$ için, $(L_{n_1, n_2}^{q_{1,n_1}, q_{2,n_2}}(f; x, y))$ operatörler dizisi I üzerinde $f(x, y)$ 'ye düzgün yakınsaktır [5].

İspat

Bu teoremin ispatında Teorem 4.2.1 kullanılacağından öncelikle

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|L_{n,m}(f_i) - f_i\|_{C(A)} = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3$$

şartlarının sağlandığı gösterilmelidir.

Öte yandan, $C(I)$ uzayındaki normun

$$\lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \|L_{n_1, n_2}^{q_1, n_1, q_2, n_2} - f\|_{C(I)} = \lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \max_{(x, y) \in I} |L_{n_1, n_2}^{q_1, n_1, q_2, n_2}(f; x, y) - f(x, y)|$$

şeklinde tanımlandığı biliniyor. O halde,

i) Lemma 4.1.2 (i)'den

$$\lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \max_{(x, y) \in I} |L_{n_1, n_2}^{q_1, n_1, q_2, n_2}(1; x, y) - 1| = 0$$

olduğu açıktır.

ii) Lemma 4.1.2 (ii)'den ve Eş.4.6'dan

$$\lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \max_{(x, y) \in I} |L_{n_1, n_2}^{q_1, n_1, q_2, n_2}(t; x, y) - x| = \lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \max_{(x, y) \in I} |x - x| = 0$$

bulunur.

iii) Lemma 4.1.2 (ii) ve Eş.4.6'dan

$$\lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \max_{(x, y) \in I} |L_{n_1, n_2}^{q_1, n_1, q_2, n_2}(s; x, y) - y| = \lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \max_{(x, y) \in I} |y - y| = 0$$

bulunur.

iv) $0 \leq x \leq r_1$ olsun.

$$\lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \max_{x \in [0, r_1]} |L_{n_1, n_2}^{q_1, n_1, q_2, n_2}(t^2, x, y) - x^2| = \lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \max_{x \in [0, r_1]} \left| \frac{x([n_1]_{q_1, n_1} x + 1)}{q_{1, n_1}([n_1]_{q_1, n_1} - 1)} - x^2 \right|$$

sağlanır.

$$f_{n_1}(x) = \frac{x([n_1]_{q_1, n_1} x + 1)}{q_{1, n_1}([n_1]_{q_1, n_1} - 1)} - x^2 \text{ ve}$$

$$c_1 = \frac{1}{q_{1, n_1}([n_1]_{q_1, n_1} - 1)}, \quad c_2 = [n_1]_{q_1, n_1} \quad (4.7)$$

olsun.

O halde, $x \in [0, r_1]$ için,

$$f_{n_1}(x) = c_1 x(c_2 x + 1) - x^2$$

$$k_{n_1} = \max_{x \in [0, r_1]} |f_{n_1}(x)| \text{ olur.}$$

$$f_{n_1}'(x) = 2c_1 c_2 x + c_1 - 2x = 0 \text{ ise,}$$

$$x = \frac{-c_1}{2(c_1 c_2 - 1)}$$

olur.

Son eşitlikte Eş.4.7 kullanılırsa,

$$x = \frac{\frac{-1}{q_{1,n_1}([n_1]_{q_{1,n_1}} - 1)}}{\frac{2([n_1]_{q_{1,n_1}} - q_{1,n_1}[n_1]_{q_{1,n_1}} + 1)}{q_{1,n_1}([n_1]_{q_{1,n_1}} - 1)}} = -\frac{1}{2([n_1]_{q_{1,n_1}} - q_{1,n_1}[n_1]_{q_{1,n_1}} + 1)} < 0$$

olup bu nokta kritik noktadır.

Her $x \in I$ için $f_{n_1}'(x) > 0$ olduğundan fonksiyon artan olup, f_{n_1} fonksiyonu maksimum değerini aralığın sağ uç noktasında alır.

O halde,

$$\begin{aligned} k_{n_1} &= \max_{x \in [0, r_1]} \left| \frac{x([n_1]_{q_{1,n_1}} x + 1)}{q_{1,n_1}([n_1]_{q_{1,n_1}} - 1)} - x^2 \right| = \max_{x \in [0, r_1]} \left| \frac{(1 - q_{1,n_1})x^2}{q_{1,n_1}} + \frac{x}{q_{1,n_1}[n_1]_{q_{1,n_1}}} \right| \\ &\leq \frac{(1 - q_{1,n_1})}{q_{1,n_1}} r_1^2 + \frac{1}{q_{1,n_1}[n_1]_{q_{1,n_1}}} r_1 \end{aligned}$$

ve sıkıştırma teoreminden

$$\lim_{n_1 \rightarrow \infty} \left(\frac{(1 - q_{1,n_1})}{q_{1,n_1}} r_1^2 + \frac{1}{q_{1,n_1}[n_1]_{q_{1,n_1}}} r_1 \right) = 0$$

$$\lim_{n_1 \rightarrow \infty} k_{n_1} = 0 \text{ olur.}$$

v) $0 \leq y \leq r_2$ olsun.

$$\begin{aligned} &\lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \max_{y \in [0, r_2]} |L_{n_1, n_2}^{q_{1,n_1}, q_{2,n_2}}(s^2, x, y) - y^2| \\ &= \lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \max_{y \in [0, r_2]} \left| \frac{y([n_2]_{q_{2,n_2}} y + 1)}{q_{2,n_2}([n_2]_{q_{2,n_2}} - 1)} - y^2 \right| \end{aligned}$$

sağlanır.

$$f_{n_2}(y) = \frac{y([n_2]_{q_{2,n_2}} y + 1)}{q_{2,n_2}([n_2]_{q_{2,n_2}} - 1)} - y^2 \text{ olsun ve}$$

$$c_3 = \frac{1}{q_{2,n_2}([n_2]_{q_{2,n_2}} - 1)}, \quad c_4 = [n_2]_{q_{2,n_2}} \quad (4.9)$$

şeklinde ifade edilsin.

O halde, $y \in [0, r_2]$ için,

$$f_{n_2}(y) = c_3 y(c_4 y + 1) - y^2$$

olur ve

$$m_{n_2} = \max_{y \in [0, r_2]} |f_{n_2}(y)| \text{ sağlanır. Ve}$$

$$y = \frac{-c_3}{2(c_3 c_4 - 1)}$$

elde edilir.

Son eşitlikte Eş.4.9 kullanılırsa,

$$y = \frac{\frac{-1}{q_{2,n_2}([n_2]_{q_{2,n_2}} - 1)}}{\frac{2([n_2]_{q_{2,n_2}} - q_{2,n_2}[n_2]_{q_{2,n_2}} + 1)}{q_{2,n_2}([n_2]_{q_{2,n_2}} - 1)}} = -\frac{1}{2([n_2]_{q_{2,n_2}} - q_{2,n_2}[n_2]_{q_{2,n_2}} + 1)} < 0 \quad (4.10)$$

olur ve bu nokta kritik noktadır.

Her $y \in I$ için $f_{n_2}'(y) > 0$ olduğundan fonksiyon artan olup f_{n_2} fonksiyonu maksimum değerini aralığın sağ uç noktasında alır.

O halde,

$$\begin{aligned} m_{n_2} &= \max_{y \in [0, r_2]} \left| \frac{y([n_2]_{q_{2,n_2}} y + 1)}{q_{2,n_2}([n_2]_{q_{2,n_2}} - 1)} - y^2 \right| = \max_{y \in [0, r_2]} \left| \frac{(1 - q_{2,n_2})y^2}{q_{2,n_2}} + \frac{y}{q_{2,n_2}[n_2]_{q_{2,n_2}}} \right| \\ &\leq \frac{(1 - q_{2,n_2})r_2^2}{q_{2,n_2}} + \frac{r_2}{q_{2,n_2}[n_2]_{q_{2,n_2}}} \\ \lim_{n_2 \rightarrow \infty} \left(\frac{(1 - q_{2,n_2})}{q_{2,n_2}} r_2^2 + \frac{1}{q_{2,n_2}[n_2]_{q_{2,n_2}}} r_2 \right) &= 0 \end{aligned}$$

ve sıkıştırma teoreminden

$$\lim_{n_2 \rightarrow \infty} m_{n_2} = 0 \text{ dır.}$$

Dolayısıyla (i), (ii), (iii), (iv), (v) ifadeleri, Teorem 4.1.1'de ki şartları sağladığından $(L_{n_1, n_2}^{q_1, n_1, q_2, n_2}(f; x, y))$ operatörler dizisi, $f(x, y)$ ' ye düzgün yakınsaktır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

4.2.2. Ağırlıklı yaklaşım

Bu bölümde, Özkan ve Korkmaz [5] tarafından verilen iki değişkenli q-Stancu-Beta tip operatörlerinin Gadzhiev tip ağırlıklı yaklaşım teoremi verilmiştir.

$\rho: [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $\rho(x, y) = 1 + x^2 + y^2$ iki değişkenli ağırlık fonksiyonu olsun. B_ρ ile $[0, \infty) \times [0, \infty)$ üzerinde tanımlı, her $(x, y) \in [0, \infty) \times [0, \infty)$ için $|f(x, y)| \leq M_f \rho(x, y)$, $M_f > 0$ şartını sağlayan reel değerli fonksiyonların uzayı gösterilsin.

C_ρ ise, B_ρ ’nın tüm sürekli f fonksiyonlarının alt uzayını gösterebilir.

C_ρ ve B_ρ uzayları üzerindeki norm her $f \in C_\rho$ (veya B_ρ) için

$$\|f\|_\rho = \sup_{x, y \geq 0} \frac{|f(x, y)|}{\rho(x, y)} \quad (4.11)$$

olarak tanımlıdır.

$$C_\rho^0 \text{ ile de } \lim_{\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \infty} \frac{f(x, y)}{\rho(x, y)} < \infty$$

olacak şekilde bütün f fonksiyonlarının C_ρ içindeki alt uzayı gösterilsin.

4.2.1. Lemma

$(L_{n_1, n_2})_{n_1, n_2 \in \mathbb{N}}$, C_ρ ’dan B_ρ ’ya tanımlı herhangi bir lineer pozitif operatörlerin dizisi olsun.

Bu durumda

$$\|L_{n_1, n_2}(\rho)\|_\rho \leq M$$

olacak şekilde bir $M > 0$ reel sayısı mevcuttur.

Gadzhiev, aşağıdaki ağırlıklı yaklaşım teoremini vermiştir [13,14].

4.2.3. Teorem

$$\begin{aligned} f_0 = e_{00}(t, s) &= 1, & f_1 = e_{10}(t, s) &= t, & f_2 = e_{01}(t, s) &= s, \\ f_3 = e_{20}(t, s) + e_{02}(t, s) &= t^2 + s^2 \end{aligned}$$

İki değişkenli test fonksiyonları ve $(L_{n_1, n_2})_{n_1, n_2 \in \mathbb{N}}$ C_ρ 'dan B_ρ 'ya lineer pozitif operatörlerin herhangi bir dizisi olsun. Eğer $(L_{n_1, n_2})_{n_1, n_2 \in \mathbb{N}}$ operatörler dizisi

$$\lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \|L_{n_1, n_2}(f_i) - f_i\|_\rho = 0, i = 0, 1, 2, 3$$

şartlarını sağlar ise, bu durumda her $f \in C_\rho^0$ için

$$\lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \|L_{n_1, n_2}(f) - f\|_\rho = 0$$

limiti doğrudur [5].

$(a_{n_1})_{n_1 \in \mathbb{N}}$ ve $(b_{n_2})_{n_2 \in \mathbb{N}}$

$$\lim_{n_1 \rightarrow \infty} a_{n_1} = \infty, \lim_{n_2 \rightarrow \infty} b_{n_2} = \infty$$

olacak şekilde reel sayı dizileri olsun. $I_{a_{n_1}, b_{n_2}}$ ile

$$I_{a_{n_1}, b_{n_2}} = \{(x, y): 0 \leq x \leq a_{n_1}, 0 \leq y \leq b_{n_2}\}$$

olarak tanımlı bölge gösterilsin.

Aşağıda tanımlı lineer pozitif operatörü ele alalım:

$$\tilde{L}_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}(f; x, y) = \begin{cases} L_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}(f; x, y) & , (x, y) \in I_{a_{n_1}, b_{n_2}} \\ f(x, y) & , (x, y) \notin I_{a_{n_1}, b_{n_2}} \end{cases}$$

(4.13)

4.2.4. Teorem

$0 < q_{1, n_1}, q_{2, n_2} < 1$ olmak üzere $(q_{1, n_1}), (q_{2, n_2})$ Eş.4.6'daki koşulları sağlayan diziler,

$\tilde{L}_{n_1, n_2}^{q_{1, n_1}, q_{2, n_2}}$, Eş. 4.13 ile tanımlı lineer pozitif operatörlerin dizisi olsun. Her $f \in C_\rho^0$ için

$$\lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \|\tilde{L}_{n_1, n_2}^{q_{1, n_1}, q_{2, n_2}}(f) - f\|_\rho = 0$$

doğrudur [5].

İspat

$\tilde{L}_{n_1, n_2}^{q_{1, n_1}, q_{2, n_2}}$ operatörünün C_ρ 'dan B_ρ 'ya bir operatör olduğunu göstermeliyiz.

Lemma 4.1.2 dikkate alınarak

$$\begin{aligned}
\|\tilde{L}_{n_1, n_2}^{q_1, n_1, q_2, n_2}(\rho)\|_\rho &= \sup_{x, y \geq 0} \frac{|\tilde{L}_{n_1, n_2}^{q_1, n_1, q_2, n_2}(1 + t^2 + s^2; x, y)|}{1 + x^2 + y^2} \\
&\leq 1 + \sup_{(x, y) \in I_{a_{n_1}, b_{n_2}}} \frac{|1 + L_{n_1, n_2}^{q_1, n_1, q_2, n_2}(t^2; x, y) + L_{n_1, n_2}^{q_1, n_1, q_2, n_2}(s^2; x, y)|}{1 + x^2 + y^2} \\
&\leq 1 + \sup_{(x, y) \in I_{a_{n_1}, b_{n_2}}} \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \left\{ 1 + \frac{x([n_1]_{q_1, n_1} x + 1)}{q_{1, n_1}([n_1]_{q_1, n_1} - 1)} + \frac{y([n_2]_{q_2, n_2} y + 1)}{q_{2, n_2}([n_2]_{q_2, n_2} - 1)} \right\} \\
&\leq 1 + \left\{ 1 + \frac{2[n_1]_{q_1, n_1}}{q_{1, n_1}([n_1]_{q_1, n_1} - 1)} + \frac{2[n_2]_{q_2, n_2}}{q_{2, n_2}([n_2]_{q_2, n_2} - 1)} \right\} \\
&\leq 6.
\end{aligned}$$

Böylece $\tilde{L}_{n_1, n_2}^{q_1, n_1, q_2, n_2}$, C_ρ ’dan B_ρ ’ya bir lineer operatördür. İspatı tamamlayabilmek için Teorem 4.2.3’ün şartlarının sağlandığı gösterilmelidir.

Lemma 4.1.2 dikkate alınarak, $i = 0, 1, 2$ için

$$\lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \|\tilde{L}_{n_1, n_2}^{q_1, n_1, q_2, n_2}(f_i) - f_i\|_\rho = 0 \quad (4.14)$$

olduğu açıktır.

Lemma 4.1.2 tekrar dikkate alınarak

$$\begin{aligned}
\|\tilde{L}_{n_1, n_2}^{q_1, n_1, q_2, n_2}(f_3) - f_3\|_\rho &= \sup_{x, y \geq 0} \frac{|\tilde{L}_{n_1, n_2}^{q_1, n_1, q_2, n_2}(t^2 + s^2; x, y) - (x^2 + y^2)|}{1 + x^2 + y^2} \\
&\leq \sup_{(x, y) \in I_{a_{n_1}, b_{n_2}}} \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \left\{ \left| \frac{x([n_1]_{q_1, n_1} x + 1)}{q_{1, n_1}([n_1]_{q_1, n_1} - 1)} - x^2 \right| + \left| \frac{y([n_2]_{q_2, n_2} y + 1)}{q_{2, n_2}([n_2]_{q_2, n_2} - 1)} - y^2 \right| \right\} \\
&\leq \frac{|[n_1]_{q_1, n_1} - q_{1, n_1}[n_1]_{q_1, n_1} - q_{1, n_1}|}{q_{1, n_1}([n_1]_{q_1, n_1} - 1)} + \frac{1}{q_{1, n_1}([n_1]_{q_1, n_1} - 1)} \\
&\quad + \frac{|[n_2]_{q_2, n_2} - q_{2, n_2}[n_2]_{q_2, n_2} - q_{2, n_2}|}{q_{2, n_2}([n_2]_{q_2, n_2} - 1)} + \frac{1}{q_{2, n_2}([n_2]_{q_2, n_2} - 1)}
\end{aligned} \quad (4.15)$$

elde edilir.

Eş. 4.15'ten

$$\lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \|\tilde{L}_{n_1, n_2}^{q_1, n_1, q_2, n_2}(f_3) - f_3\|_{\rho} = 0 \quad (4.16)$$

bulunur. Eş.4.14 ve Eş.4.16'dan, Teorem 4.2.3'ün hipotezleri sağlanır.

Bu durumda her $f \in C_g^0$ için,

$$\lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \|\tilde{L}_{n_1, n_2}^{q_1, n_1, q_2, n_2}(f) - f\|_{\rho} = 0$$

elde edilir.

5. SONUÇLAR

Bu tezde, tek ve iki değişkenli q -Stancu-Beta tip operatörlerin yaklaşım özellikleri çalışılmıştır. Teorem 3.2.2’de tek değişkenli operatörlerin düzgün yakınsaklığı Korovkin tip bir teoremle araştırılmıştır. Teorem 3.2.3’ de tek değişkenli operatörlerin yakınsama oranı ikinci mertebeden süreklilik modülü yardımıyla hesaplanmıştır. Teorem 3.2.4’ de tek değişkenli operatör için asimptotik bir formül verilmiştir. Teorem 3.2.6’da tek değişkenli operatörler için Gadzhiev tip ağırlıklı yaklaşım teoremi verilmiştir. Teorem 4.2.2’de iki değişkenli operatörlerin düzgün yakınsaklığı Volkov tip bir teoremle araştırılmıştır.

Son olarak, Teorem 4.2.4’ de iki değişkenli operatörlerin Gadzhiev tip ağırlıklı yaklaşım teoremi incelenmiştir.

Özetle, bu tezde Aral ve Gupta [4] ve Özkan ve Korkmaz [5] tarafından tanımlanan ve çalışılan sırasıyla tek ve iki değişkenli q -Stancu-Beta tip operatörlerinin yaklaşım özellikleri araştırılmıştır.



KAYNAKLAR

1. Stancu, D. D. (1995). On the beta approximating operators of second kind. *Revue d'Analyse Numérique et de Théorie de l'Approximation*, 24, 231-239.
2. Abel, U. and Gupta, V. (2004). Rate of convergence of Stancu beta operators for functions of bounded variation. *Revue d'Analyse Numérique et de Théorie de l'Approximation*, 33(1), 3-9.
3. Gupta, V., Abel, U. and Ivan, M. (2005). Rate of convergence of Beta operators of second kind for functions with derivatives of bounded variation. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, (23), 3827-3833.
4. Aral, A., Gupta, V. (2012). On the q analogue of Stancu-Beta operators. *Applied Mathematics Letters*, 25, 67-71.
5. Özkan, E. Y. ve Korkmaz, M. (2020, 29-31 Ekim). İki Değişkenli q-Stancu Beta Tip Operatörler, II. Uluslararası 29 Ekim Bilimsel Araştırmalar Sempozyumunda sunuldu, Ankara, Türkiye.
6. Hacısalıhoğlu, H. ve Hacıyev, A. (1995). *Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı*, Ankara: A.Ü. Fen Fakültesi Yayınları, 1-20.
7. Bayraktar, M., (2006). “Fonksiyonel Analiz”, Ankara: Gazi Kitabevi, 85-86.
8. Kac, V., Cheung, P. (2002). *Quantum Calculus*, Newyork: Springer, 1-85.
9. Koornwinder, T. H. (1992). q-Special functions, a tutorial. In Gerstenhaber, M. and Stasheff, J. (Eds.), *Deformation Theory and Quantum Groups with Applications to Mathematical Physics, Contemporary Mathematics*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 134.
10. De Sole, A., Kac, V.G. (2005). On integral representations of q-gamma and q-beta functions. *Rendiconti di Matematica Accademia Lincei Series* (9) 16(1), 11-29.
11. Korovkin, P.P. (1953). On the convergence of linear positive operators in the space of continuous functions. (Russian), *Doklady Akademii Nauk*, 90, 961-964.
12. DeVore, R.A., Lorentz, G.G., (1993). *Constructive Approximation*. Berlin: Springer.
13. Gadzhiev, A.D. (1974). The convergence problem for a sequences of positive linear operators on unbounded sets, and theorems analogous to that of P.P. Korovkin, *Doklady Akademii Nauk*, 218, 5.
14. Gadzhiev, A.D. (1976). On Korovkin type theorems. *Math, Zametki*, 20, 5, 781-786.
15. Barbosu, D. (2000). “Some generalized bivariate Bernstein operators”, *Math Notes (Miskolc)*, 1: 3-10.

16. Volkov, V.I. (1957). "On the convergence of sequence of linear positive operators in the space of continuous functions of two variables". (*Russian*), *Doklady Akademii Nauk*, 115:17-19.





GAZİ GELECEKTİR...