



**YENİ ARŞİMEDYAN KAPULA AİLELERİ VE FİNANS ALANINDA BİR
UYGULAMA**

Vadoud NAJJARI

**DOKTORA TEZİ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Temmuz 2014

Vadoud NAJJARI tarafından hazırlanan YENİ ARŞİMEDYAN KAPULA AİLELERİ VE FİNANS ALANINDA BİR UYGULAMA” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ / OY ÇOKLUĞU ile Gazi Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Hasan BAL

İstatistik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum

Başkan : Prof. Dr. Ayşen APAYDIN

İstatistik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum

Üye : Prof. Dr. Firkri ÖZTÜRK

İstatistik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum

Üye : Prof. Dr. İhsan ALP

İstatistik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum

Üye : Prof. Dr. Salih ÇELEBİOĞLU

İstatistik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum

Tez Savunma Tarihi: 22/07/2014

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Doktora Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....
Prof.Dr. Şeref SAĞIROĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Vadoud NAJJARI

YENİ ARŞİMEDYEN KAPULA AİLELERİ VE FİNANS ALANINDA BİR
UYGULAMA
(Doktora Tezi)

Vadoud NAJJARI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Temmuz 2014

ÖZET

Kapula modellerinin matematiksel ifadesi genellikle karmaşık bir yapıya sahiptir. Bu sebepten kapulalara ilişkin Kendall'ın τ , Spearman'ın ρ değerlerinin, kuyruk bağımlılığı ve bunun gibi bazı ifadelerin kapalı biçimlerinin hesaplanması ya oldukça zordur ya da hesaplanamamaktadır. Kapulaların bir ailesi olan Arşimedyen Kapula (AK)'larda da aynı durum söz konusudur ve AK'larda bu ölçüler, kapulanın üreticisinden yararlanılarak elde edilir. Bu yüzden bu tezde amaçlanan, bahsi edilen ölçülerin hesaplanmasında daha esnek bir yapıya sahip olan üreticilerle yeni bir AK ailesi elde etmektir. Yeni bulunacak üreticilerin elde edilmesinde birçok özelliği iyi bilinen hiperbolik fonksiyonlardan yararlanılacaktır. Burada elde edilecek olan kapulaların gerekli özellikleri daha kolay bir şekilde elde edilebilecektir. AK aileleri arasında daha önce hiperbolik fonksiyonlara dayalı üreticilerden yararlanılmamıştır. Bu özelliğiyle tez özgün bir çalışma olacaktır. Tezin üçüncü bölümde, Kim ve diğerleri (2011) tarafından önerilen, kapula genişletme modelinin yanlışlığı gösterilmiş ve onun yerine başka bir genişletme önerilmiştir. Dördüncü bölümde bir kapula türü olan çarpım kapulasının farklı bir genişletmesi önerilmiş ve elde edilen kapulaların birkaç ölçüsü hesaplanmıştır. Beşinci bölümde, West Texas Intermediate (WTI) ve Brent-Europe petrol fiyatları arasındaki bağımlılığı modellemek için birkaç Arşimedyen kapula ve bunların konveks kombinasyonları uygulanmıştır. Bölüm altıda ise kapula tekniğini stokastik sınır analizinde ve karar verme birimlerinin teknik etkinliğinde nasıl kullanılabileceğine ilişkin bilgiler verilmiştir.

Bilim Kodu : 205.1.066

Anahtar Kelimeler : Kapula, üretici, hiperbolik fonksiyonlar, Kendall τ , Spearman ρ , korelasyon, kuyruklar, stokastik sınır analizi.

Sayfa Adedi : 67

Danışman : Prof. Dr. Hasan BAL

NEW ARCHIMEDEAN COPULAS FAMILY AND THEIR APPLICATIONS IN
FINANCE
(PHd Thesis)

Vadoud NAJJARI

GAZI UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
JULY 2014

ABSTRACT

In the theory of copulas, the closed form of many copulas are generally complicated. Hence, sometimes the calculation of copula measures, such as the Kendall's τ , Spearman's ρ tail dependence parameters, and so on, are very difficult and occasionally impossible in respect of obtaining their closed forms. The family of Archimedean copulas (AC) have also the same problems. In the AC families, the generator function plays the main role in obtaining a closed form for these measures. Because of the reasons mentioned, the main endeavor is to generate a new Archimedean family whose generator is flexible for calculations. Since hyperbolic functions have very nice properties and well known by their structure, we planned to introduce a new AC family with hyperbolic generators, so that this study is an original contribution by this respect. In Section 3, the accuracies of the model proposed by Kim et al. (2001) are given and instead a new model is proposed. In Section 4, it is proposed a new generalization for the product copula and then several properties of the new generated families are shown. As an application, modeling the dependence structure between crude oil prices of West Texas Intermediate (WTI) and Brent – Europe by copula technique is presented in Section 5. A use of copulas in stochastic frontier analysis (SFA) to estimate production frontier and also technical efficiency of DMUs are given in Section 6.

Science Code : 205.1.066

Key Words : Copulas, generator, hyperbolic functions, Kendall's τ , Spearman's ρ , correlation, tails, stochastic frontier analysis.

Page Number : 67

Supervisor : Prof. Dr. Hasan BAL

TEŞEKKÜR

Bu çalışma sürecinde değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren danışman hocam Prof. Dr. Hasan BAL'a; tüm tez süresinde değerli katkıları ve ayırdıkları zaman için Tez İzleme Komitesindeki değerli hocalarım Prof. Dr. Fikri ÖZTÜRK ve Prof. Dr. İhsan ALP'e; görüş ve düşüncelerinden yararlandığım, tezimde jüri üyeliği yapmış değerli hocalam Prof. Dr. Ayşen APAYDIN'a teşekkürlerimi sunarım. Destekleriyle bana yol gösteren ve ilerlemem için teşvik eden Prof. Dr. Salih ÇELEBİOĞLU'na minnettarlığımı sunarım. Tez için yardımlarını unutamayacağım değerli arkadaşlarım Arş. Gör. Harun KINACI ve Arş. Gör. Irmak ACARLAR'a çok teşekkür ederim. Bu zorlu süreçte manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan tüm çalışma arkadaşlarıma ve özellikle Arş. Gör. Dr. Sinem Tuğba ŞAHİN TEKİN'e yardımları için teşekkür ederim. Fen bilimleri enstitüsündeki tüm elemanları ve özellikle, Aslan ÜLKER, Doğan KARA ve Hülya AYDIN hanımın yardımlarını heç bir zaman unutmuyacam. Son olarak, her zaman yanımda olan sevgili babam, annem, kardeşlerim'e ve bu zor durumlarda beni anlayan ve manevi olarak destekleyen eşim Zhila'ya sevgilerimle birlikte sonsuz teşekkürler.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ.....	ix
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	x
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xi
1. GİRİŞ.....	1
2. YENİ ARŞİMEDYEN KAPULA AİLESİ.....	5
2.1. Giriş.....	5
2.1.1. Sklar teoremi	6
2.1.2. Arşimedyen kapulalar	7
2.2. Yeni Arşimedyen Ailesi.....	8
2.2.1. Coth-kapula.....	8
2.2.2. Csch-kapula.....	10
3. MEVCUT KAPULALARA BİR GENİŞLENDİRME	13
3.1. Giriş.....	13
3.2. Kim Ve Diğerleri Tarafından Önerilen Modelin İncelenmesi	14
3.3. Önerilen Model İle Kapulaları Genişletme	16
3.4. Önerilen Ailelerin Bazı Ölçüleri	19
3. 5. Bazı Kapular İçin Genişletmeler	20
4. BAĞIMSIZLIK KAPULASININ BİR GENİŞLETMESİ	23

4.1. Giriş	23
4.2. Bağımsızlık Kapulasının Genişletmesi	24
4. 3. Önerilen Ailelerin Bazı Ölçüleri	28
4.4. Önerilen Genişletme İçin Uygulamalar	29
4.5. Önerilen Metotla Bazı Kapula Üretim Metodları Arasındaki İlişki	36
4.6. SONUÇ	38
5. ARŞİMEDYEN KAPULALARLA BİR UYGULAMA	39
5.1. Giriş	39
5.2. Uygun Kapula Seçme Teknikleri	40
5.2.1. Kapula parametrelerinin tahmini.....	40
5.2.2. Bağımlılık yapısına uygun kapula seçme teknikleri	41
5.3. Ham Petrol Verisinin Fiyatlarının Bağımlılık Yapısının Modellemesi	43
5.4. Sonuç	47
6. KAPULALAR VE STOKASTİK SINIR ANALİZİ.....	49
6.1. Giriş	49
6.2. Temel Kavramlar	50
6.3. Kapula Ve Stokastik Sınır Analizi	51
6.4. Uygulama	52
6.5. Sonuç.....	57
7. SONUÇ VE ÖNERİLER	59
KAYNAKLAR.....	61
ÖZGEÇMİŞ.....	65

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 3.1. Kullanılan kapulalara ilişkin temel bilgiler	21
Çizelge 5.1. Bu çalışmada ele alınan kapulalar ve bunlara ilişkin bilgiler	43
Çizelge 5.2. WTI ve Brent-Europe ham petrol fiyatları için bağımlılık ölçüleri	44
Çizelge 5.3. Parametrik olamayan tahminler ve uygun kapula testlerinin sonuçları	45
Çizelge 5.4. Parametrik olmayan tahmin ve konveks kombinasyon sonuçları	45
Çizelge 5.5. EÇÖ tahminleri ve uygun kapula seçme sonuçları	46
Çizelge 5.6. EÇÖ ve konveks kombinasyon sonuçları	46
Çizelge 5.7. Uyum iyiliği testinin değerini minimum yapan parametre	47
Çizelge 6.1. Japonyada 12 profesyonel beysbal takımının bilgisi	53
Çizelge 6.2. Çalışmada kullanılan kapulalar	53
Çizelge 6.3. Stokastik sınır modelinde parametrelerin tahmini	54
Çizelge 6.4. Beysbal takımlarının etkinlik skorları ve etkinlik sıraları	55
Çizelge 6.5. Beysbal takımlarının etkinlik sıraları arasındaki uyuma	56

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şeki 2.1. W, M ve Çarpım kapulaların yüzey eğrileri	6
Şekil 2.2. W, M ve Çarpım kapulalarının kontur diyagramları	7
Şekil 2.3. Coth-kapulasının serpm diyagramı	11
Şekil 2.4. Csch-kapulasının serpm diyagramı	12
Şekil 3.1. Clayton ailesi için serpm diyagramları	21
Şekil 3.2. A12 ailesi için serpm diyagramları	21
Şekil 3.3. Frank ailesi için serpm diyagramları	22
Şekil 3.4. Bağımsızlık kapula ailesinin serpm diyagramları	22
Şekil 4.1. Önerme (4.2.1) ve (4.2.2)'den (λ_1, λ_2) için mümkün alan (sol tarafta), Teorem 4.2.1'den (λ_1, λ_2) için mümkün alan (sağ tarafta)	30
Şekil 4.2. $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$ için kapula C üstde ve onun yoğunluğu c aşağıda	31
Şekil 4.3. Önerme (4.2.1) ve (4.2.2)'den (λ_1, λ_2) için mümkün alan (sol tarafta), Teorem 4.2.1'den (λ_1, λ_2) için mümkün alan (sağ tarafta)	32
Şekil 4.4. Önerme (4.2.1) ve (4.2.2)'den (λ_1, λ_2) için mümkün alan (sol tarafta), Teorem 4.2.1'den (λ_1, λ_2) için mümkün alan (sağ tarafta)	33
Şekil 4.5. Önerme (4.2.1) ve (4.2.2)'den (λ_1, λ_2) için mümkün alan (sol tarafta), Teorem 4.2.1'den (λ_1, λ_2) için mümkün alan (sağ tarafta)	35
Şekil 5.1. WTI (U) and Brent-Europe (V) ham petrollerinin fiyatları arasındaki bağımlılık yapısı	44

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

Açıklamalar

I	[0,1] aralığı
φ	Arşimedyen kapulanın üreticisi
ρ_c	Sperman ρ değeri
τ_c	Kendall τ değeri
$W(u, v)$	Fréchet-Hoeffding alt sınırı ($\max(u + v - 1, 0)$)
$M(u, v)$	Fréchet-Hoeffding üst sınırı ($\min(u, v)$)
$V_c([a, b])$ veya $V_c(B)$	$[a, b]$ 'nin veya B'nin C hacmi

Kısaltmalar

Açıklamalar

AK	Arşimedyen kapulalar
BCC	Banker, Charnes ve Cooper modeli (1984)
CCR	Charnes, Cooper ve Rhodes modeli (1978)
COLS	Corrected Ordinary Least Squares
FDH	Free Disposal Hull
FGM	Farlie-Gumbel-Morgenstern Kapula Ailesi
ML	Maximum Likelihood
EÇÖ	En çok olabilirlik tahmini
SFA	Stochastic frontier analysis
SSA	Stokastik sınır analizi
TE	Teknik etkinsizlik
VZA	Veri Zarflama Analizi

1. GİRİŞ

İlk kez Sklar (1959) tarafından aralarında özel bir bağımlılık yapısına sahip düzgün dağılımlı değişkenleri birleştirerek, ortak dağılım elde eden bir fonksiyon için “kapula” terimi kullanıldı. Kapulalar, marjinallerin dağılımları ne olursa olsun bağımlılık yapısını modelleyebilmektedir. Başka bir korelasyon ölçüsü bu özelliğe sahip değildir. Kapulaların birçoğu eliptik ve Arşimedyen kapulalarda yer almaktadır (Habiboellah, 2007). *Eliptik kapulalar*, eliptik dağılıma sahiptir. Yani eliptik yapıdadır bu nedenle de simetrik kuyruğa sahiptirler. Bu aileye mensup en iyi bilinen kapulalar, Gaussian ve Student kapulalarıdır. Gaussian kapula, Student kapulasına göre kullanım kolaylığı bakımından daha sık kullanılır. *Arşimedyen kapulalar (AK)* kolay inşa edilebilir. Parametrik ailelerin çoğu bu aileye aittir. Çok farklı bağımlılık yapısına sahiptirler, bu yüzden bu tip kapulalar üzerine oldukça fazla çalışma yapılmıştır. Yapılan bu çalışmaların çoğu bağımlılık yapısını ikili olarak incelemiştir. Bu tezde çoklu Arşimedyen kapula aileleriyle çalışılacaktır.

Arşimedyen gösterimle, çok değişkenli kapulalar tek boyutlu düzgün fonksiyona indirgenir. Arşimedyen kapulalar $C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))$ 'dan elde edilir. Buradaki her u, v değeri $[0,1]$ aralığındadır ve φ fonksiyonu kapula üreticisi olarak adlandırılır.

Problem Durumu/ Konunun Tanımı

Kapula teorisinde, çoğu kapulaların kapalı formu oldukça karmaşıktır. Bu sebepten çoğu zaman kapulaların, Kendall's τ , Spearman's ρ , kuyruk bağımlılığı ve bunun gibi başka ölçülerinin hesaplanması oldukça zordur ve bazen de elde edilememektedir. AK'larda da aynı durum söz konusudur ve AK'larda bu ölçüler kapulanın üreticisinden yararlanılarak elde edilir.

Araştırmanın Amacı

Bu tezde amaç, bahsi edilen ölçülerin hesaplanmasında daha esnek bir yapıya sahip olan üreticilerle yeni AK aileleri elde etmektir. Yeni bulunacak üreticilerin elde edilmesinde birçok özelliği iyi bilinen hiperbolik fonksiyonlardan yararlanılacaktır. Böylece burada elde edilecek olan kapulaların gerekli ölçüleri daha kolay bir şekilde elde edilebilecektir.

Araştırmanın Önemi

AK aileleri arasında daha önce hiperbolik fonksiyonlara dayalı üreticilerden yararlanılmamıştır. Bu çalışmada ilk kez AK'larda hiperbolik fonksiyonlardan üretici olarak yararlanılmıştır. Böylece kapula ailelerine yeni bir kapula ailesi kazandırılmıştır. Bu yeni kapulalar, stokastik sınır analizinde de uygulanmış ve sonuçları hem başka kapula hem de stokastik sınır analiziyle karşılaştırılmıştır.

Varsayımlar/Sayıtlar

AK'larda üretici φ 'nin konveks ve azalan olması gerekir. φ eğer türevlenebilirse, o da her $t \in [0,1]$ için

$$\varphi(1) = 0, \varphi'(t) < 0, \varphi''(t) > 0$$

özelliklerin sağlandığı anlamına gelir. Hiperbolik fonksiyonlarda hangisi bu özellikleri sağlıyor. Sağladıkdan sonra, yukarıda bahsedilen ölçülerin hesaplanması hangi kapula için daha kolaydır.

Sınırlılıklar

Kapula fonksiyonlarında, Kendall τ , Spearman ρ , kuyruk bağımlılığı ve bunun gibi ölçülerin hesaplanması oldukça zordur ve bazen de elde edilememektedir. AK'larda da aynı durum söz konusudur ve AK'larda bu ölçüler kapulanın üreticisinden yararlanılarak elde edilir. İntegrallerin ve limitlerin hesaplanması bu konuda çok önemlidir ve çalışmayı sınırlamaktadır.

Tezin devamındaki her bölüm birbirinden bağımsız şekilde hazırlanmış, dolayısıyla her bölümün girişinde kısa bir tanıtım verilmiştir. Yeni coth-kapula ailesinin üretilmesi, bağımlılık ölçüleri ve başka detayları tezin ikinci bölümünde yer almıştır. Üçüncü bölümde Kim ve diğerleri (2011) tarafından kapulalara önerilen genişletmenin tüm durumlarda doğru olmadığı gösterildi, sonra kapulalara yeni bir genişletme önerildi. Örnek olarak birkaç ailenin genişletmesi verilecek. Dördüncü bölümde Çarpım kapulaya yeni bir genişletme gösterilecek ve sonra birkaç örnekle bu önerme daha net açıklanacaktır. Bu genişletme yeni bir kapula üretme metodudur ve planladığımız simetrik, asimetrik kapulaları üretebilir. Beşinci bölümde coth-kapulasının bir uygulaması planlanmıştır.

Burada West Texas Intermediate and Brent-Europe ham petrollerinin fiyatları arasındaki bağımlılık yapısını modellemesinde farklı kapula ve metodlarla çalışılmıştır. Altıncı bölümde coth-kapulayı, stokastik sınır analizinde de kullanılmıştır. Amaç stokastik sınır analizinde u ve v rastgele değişkenlerin bağımlılığını kapulalar ile modelleyip, En Çok Olabilirlik(EÇO) yöntemiyle parametrelerini tahmin etmektir. Burada bir kaç kapulayı değerlendirip sonuçlarını birbiriyle, ayrıca hem CCR, BCC hem de stokastik sınır analiziyle karşılaştırılacaktır. Sonuç ve tartışmalar ise yedinci bölümde yer almaktadır.

2. YENİ ARŞİMEDYEN KAPULA AİLESİ

Bu bölümde amaç AK'larda yeni bir üretici önermektir. Kesim 2.1.'de kapula konusunda tanımlar ve açıklamalar verilmiştir. Bu tanımlar diğer bölümlerde de kullanılmıştır.

2.1. Giriş

Kapula teorisinde, çoğu kapulaların kapalı formu oldukça karışıktır. Bu sebepten kapulaların, Kendall τ , Spearman ρ , kuyruk bağımlılığı ve bunun gibi değerlerinin hesaplanması oldukça zordur ve bazen de elde edilememektedir. AK'larda da aynı durum söz konusudur ve AK'larda bu özellikler kapulanın üreticisinden yararlanılarak elde edilir. Bu yüzden tezde amaçlanan bahsi geçen değerlerin hesaplanmasında daha esnek bir yapıya sahip olan üreticilerle yeni AK aileleri elde etmektir. Yeni bulunacak üreticilerin elde edilmesinde birçok özelliği iyi bilinen hiperbolik fonksiyonlardan yararlanılacaktır. Burada elde edilecek olan kapulaların gerekli ölçüleri daha kolay bir şekilde elde edilebilecektir.

AK aileleri arasında daha önce hiperbolik fonksiyonlara dayalı üreticilerden yararlanılmamıştır. Bu çalışmada ilk kez AK'larda hiperbolik fonksiyonlardan üretici olarak kullanacağız.

Hiperbolik fonksiyonlar, 1760'larda Vincenzo Riccati ve Johann Heinrich Lambert tarafından tanımlanmıştır. $(\cos t, \sin t)$ noktalarının birim yarıçaplı bir çember oluşturması gibi, $(\cosh t, \sinh t)$ noktaları da eşkenar hiperbolün sağ yarısını oluşturur. Hiperbolik fonksiyonlar, zincir eğrisini tanımlayan denklem ile elektromanyetik teori, ısı transferi, akışkanlar dinamiğine özel görelilik gibi fiziğin çeşitli alanlarında önemli bir denklem olan Kartezyen koordinat sisteminde Laplace denklemi gibi lineer diferansiyel denklemlerin çözümlerinde görülür. Hiperbolik fonksiyonlar trigonometrik özdeşliklere biçimsel olarak benzeyen birçok özdeşliği sağlar. Sürekliler ve rahatca törevlenebilirler hemde integralları kolay şekilde hesaplanabilir (Robert ve diğerleri, 2007).

Kapulalar aşağıdaki özelliklere sahip olan $C: I^2 \rightarrow I$ fonksiyonlarıdır.

a) Her $u, v \in I$, $C(u, 1) = u$, $C(1, v) = v$ ve $C(u, 0) = 0 = C(0, v)$;

b) Her $u_1, u_2, v_1, v_2 \in I$ ($u_1 \leq u_2$, $v_1 \leq v_2$),

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0.$$

Kapulalar, en yalın ifade ile rastgele değişkenler arasındaki bağımlılık yapısını ortaya koymak amacıyla kullanılmaktadır. Son yıllarda kapulaların istatistiksel özelliklerinin araştırılması artarak sürmekte ve kapula uygulamaları ile yapılan çalışmalar gün geçtikçe daha fazla yaygınlaşmaktadır.

Mümkün en büyük kapula M ile ve en küçük kapula W ile ifade edilir (Nelsen, 2006) ve aşağıdaki gibi tanımlanırlar,

$$W(u, v) = \max(u + v - 1, 0) \quad \text{ve} \quad M(u, v) = \min(u, v).$$

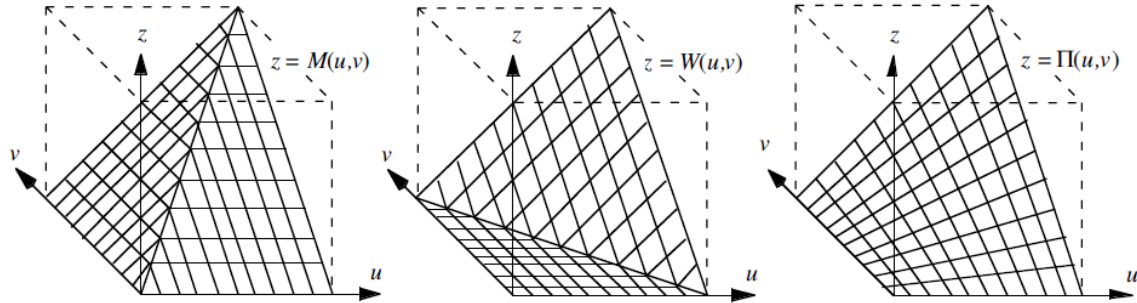
Böylece her C kapulası aşağıdaki eşitsizlikte yer alır,

$$W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v)$$

W ve M 'ye sırasıyla Fréchet-Höeffding alt ve üst sınırı denilir. Başka bir sık kullanılan kapula, Çarpım kapulasıdır ve aşağıda tanımlanmıştır:

$$\Pi(u, v) = uv.$$

Yukarıda bahsedilen W, M ve Çarpım kapulaların yüzey eğrileri aşağıda Şekil 2.1.'de ve onların kontur diyagramı da Şekil 2.2.'de verilmiştir:



Şekil 2.1. W, M ve Çarpım kapulaların yüzey eğrileri

Kapulaların istatistikteki önemi Sklar Teoremiyle aşağıdaki gibi açıklanmaktadır:

2.1.1. Sklar teoremi

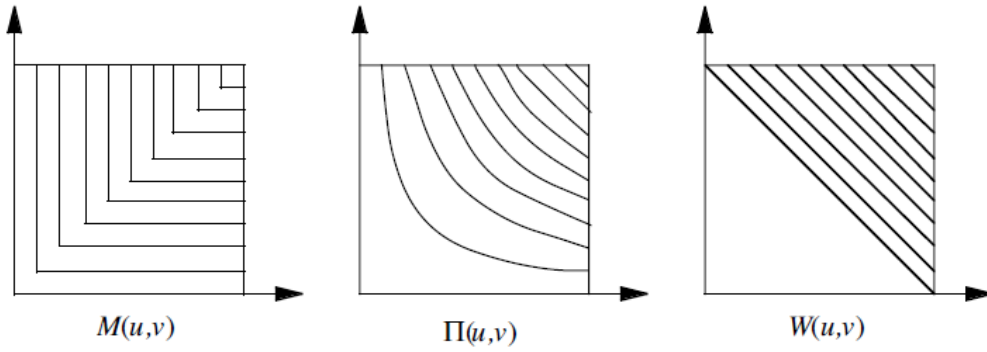
Dağılım fonksiyonları sırasıyla $F(x) = P(X \leq x), G(y) = P(Y \leq y)$ ve ortak dağılım fonksiyonu $H(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$ olan X ve Y rastgele değişkenler çifti göz önüne alınsın. O zaman her $x, y \in \mathbb{R}$ için $H(x, y) = C(F(x), G(y))$ olacak şekilde bir C kapulası vardır. F ve G sürekli oldukları zaman C tekdir. Teoremin tersi de doğrudur.

Başka bir ifadeyle kapula, çok değişkenli dağılım fonksiyonlarını bir değişkenli

marjinallerine indirgeyen veya bağlayan aynı zamanda bir değişkenli marjinalleri de düzgün olan dağılım fonksiyonlarıdır.

2.1.2. Arşimedyen kapulalar

Bu kapulalar ilk kez 1974 yılında Kimberling tarafından önerildi. Uygulamada hem rahat kullanılmaları hem de farkı bağımlılık yapılarına sahip oldukları için araştırmacıların bir çoğu bu alanda çalışmaktadır.



Şekil 2.2. W , M ve Çarpım kapulalarının kontur diyagramları

Bu kısımda AK'ların temel özellikleri gösterilmiştir. Daha detaylı bilgi için Nelsen (2006)'e bakılmalıdır. Eğer $\varphi: I \rightarrow [0, \infty]$ sürekli konveks ve kesin azalan bir fonksiyon (strictly decreasing function) ve $\varphi(1) = 0$ olursa, o zaman φ 'nin sözde (pseudo)-tersi $\varphi^{[-1]}$ aşağıda verilmiştir,

$$\varphi^{[-1]} = \begin{cases} \varphi^{(-1)}(t), & 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ 0, & \varphi(0) \leq t \leq \infty. \end{cases}$$

Her $u, v \in [0,1]$ için $C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))$ fonksiyonu bir Arşimedyen kapuladır ve φ fonksiyonu Arşimedyen kapulanın üreticisi olarak tanımlanır. $\varphi(0) = \infty$ olduğunda φ fonksiyonu kesin üretici (strict generator) olarak tanımlanır. Dolayısıyla bu durumda $\varphi^{[-1]} = \varphi^{(-1)}$ olur ve $C(u, v) = \varphi^{(-1)}(\varphi(u) + \varphi(v))$ fonksiyonu kesin Arşimedyen kapula (strict Archimedean copula) olarak adlandırılır.

Örnek

Eğer $\varphi(t) = -\ln t$, $t \in [0,1]$ olursa, o zaman $\varphi(0) = \infty$ olur ve böylece $C(u, v) = \varphi^{(-1)}(\varphi(u) + \varphi(v)) = \exp(-[-\ln u - \ln v]) = uv = \Pi(u, v)$ olur. Yani $\varphi(t) = -\ln t$ Çarpım kapulsı $\Pi(u, v) = uv$ 'nın üreticisidir.

Örnek

Eğer $\varphi(t) = -\ln(1 - \theta \ln t)$, $t \in [0,1], \theta \in (0,1]$ olursa, o zaman $\varphi(0) = \infty$ olur ve böylece

$$C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)) = uv \exp(-\theta \ln u \ln v) \text{ olur.}$$

2.1.1. Teorem

Farz edelim C bir Arşimedyen kapula ve φ onun üreticisi olsun. O zaman her $u, v \in [0,1]$ için,

- a) $C(u, v) = C(v, u)$ dir. Yani Arşimedyen kapulalar simetriktir.
 - b) $C(C(u, v), w) = C(u, C(v, w))$ dir. Yani, Arşimedyen kapulalar birleşmelidir.
 - c) Her $a > 0$ için, $a\varphi$ de bir Arşimedyen kapula üreticisidir.
- Bu arada $M(u, v) = \min(u, v)$ Arşimedyen kapula değildir.

2.2. Yeni Arşimedyen Ailesi

AK'larda üretici φ 'nin konveks ve azalan olması gerekir. φ türevlenebilirse, o da her $t \in [0,1]$ için aşağıdaki özelliklerin sağlanması anlamına gelmektedir:

$$\varphi(1) = 0, \varphi'(t) < 0, \varphi''(t) > 0. \quad (2.1)$$

Sonraki iki alt kesimde, iki yeni üretici tanıtılmıştır, sonra üretilen kapulaların bazı ölçüleri hesaplanmıştır. Bu yeni ailelerin hiperbolik üreticileri vardır ve bağımlılık modellemesinde daha esnek davranışa sahiptirler.

2.2.1. Coth-kapula

Her $t \in [0,1]$ için $\varphi(t) = \coth(t\theta) - \coth(\theta)$ olarak tanımlıyalım. Açıkça φ her $t \in (0,1)$ için 1.inci ve 2. inci dereceden sürekli türevi vardır ve $\theta \in (0, \infty)$ olduğunda, bu fonksiyon (2.1)'deki özellikleri sağlar. $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t) = \infty$ olduğunda φ fonksiyonu kesin üreticidir ve coth-kapulasını aşağıdaki şekilde üretir:

$$C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v))$$

$$= \frac{1}{\theta} [acoth(coth(\theta u) + coth(\theta v) - coth(\theta))].$$

Coth-kapula özel durumu

θ parametresinin değeri sıfıra yaklaşıyorsa $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} C_\theta(u, v) = \frac{uv}{u+v-uv}$ olur, ve bu da Ali-Mikhail-Haq kapulasıdır. Yani $\theta \rightarrow 0^+$ olduğunda coth-kapulası, Ali-Mikhail-Haq kapulasını kapsamaktadır. Benzer şekilde $\lim_{\theta \rightarrow \infty} C_\theta(u, v) = \min(u, v) = M(u, v)$ olur. Yani $\theta \rightarrow \infty$ olduğunda, coth-kapula, Fréchet-Höeffding üst sınırı elde edilir.

Coth-kapulada bağımlılık ölçüleri

Bu yeni kapula için Kendall τ , Spearman ρ ve kuyrukların hesaplanması aşağıda verilmiştir. Önce Kendall τ ölçüsüne bakalım:

$$\begin{aligned} \tau_C &= 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt \\ &= 1 + \frac{2}{\theta^2} - \frac{2}{\theta} coth(\theta). \end{aligned}$$

L'Hospital kuralı dört kez uygulandıktan sonra $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \tau_C = \frac{1}{3}$ olarak hesaplanmıştır.

$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \tau_C = 1$ olmasının gösterilmesi zor değildir. Sonuç olarak $\tau_C \in (\frac{1}{3}, 1]$ dir, yani coth-kapulasının $(\frac{1}{3}, 1]$ aralığında olan bağımlılıkların modellenmesinde başarılı olduğunu göstermektedir. Spearman ρ ölçüsünün bulunmasında,

$$\rho_C = 12 \int \int_{[0,1]^2} C_\theta(u, v) du dv - 3$$

integralinin bu yeni kapula için kapalı formu olmadığından dolayı nümerik metodlarla aşağıdaki tahmin hesaplandı:

$$\hat{\rho}_C = \rho_0 + (1 - \rho_0) \frac{\theta^2}{k^2 + \theta^2}$$

burada $\rho_0 = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \rho_C \approx 0,4784$ ve $k \approx 2,925$ dir. k nin değeri, şekil ve konum

parametrelerinin değeri sırasıyla 1/2 ve 0 olan Pareto tip III, birikimli dağılım fonksiyonunun yardımıyla hesaplanmıştır. Her θ için mutalaka $|\hat{\rho}_C - \rho_C| \leq 0,004$ ifadesi sağlanmaktadır.

Alt ve üst kuyruk bağımlılık ölçülerinin hesaplanması sırasıyla

$$\lambda_L = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C(t, t)}{t}$$

ve

$$\lambda_U = \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2t + C(t, t)}{1 - t}$$

Limitlerine dayanmakta ve coth-kapulada bu değerler her θ için $\lambda_L = \frac{1}{2}$ ve $\lambda_U = 0$ 'dir.

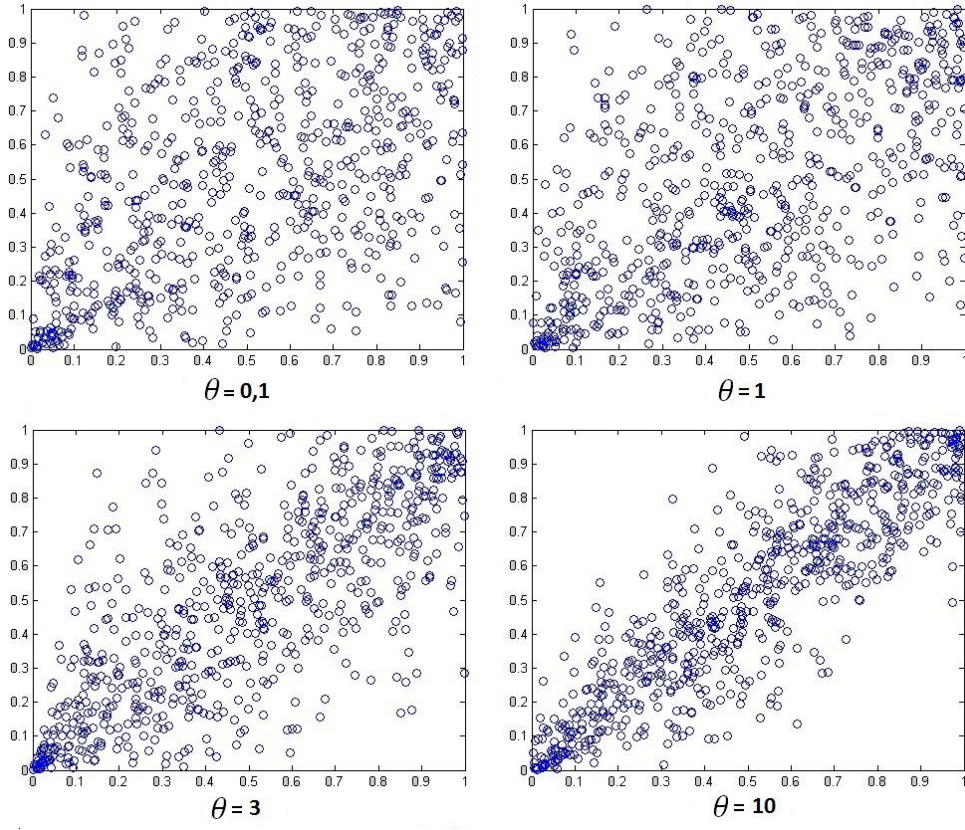
Şekil 2.3 'de coth-kapulanın serpmeye diyagramı birkaç parametre değeri için verilmiştir.

2.2.2. Csch-kapula

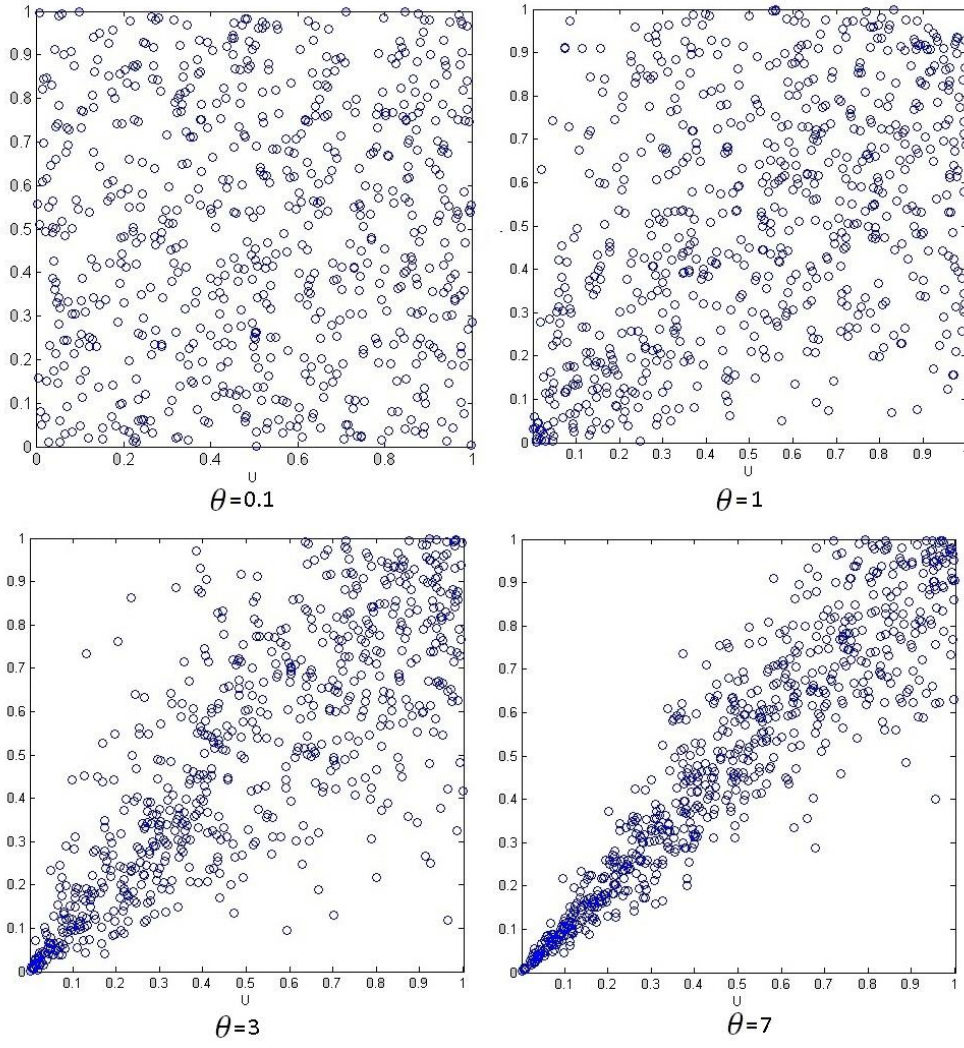
Her $t \in [0,1]$ için $\varphi(t) = csch(t^\theta) - csch(1)$ olarak tanımlayalım. Açıkça φ 'nın her $t \in (0,1)$ için 1. ve 2. dereceden türevi vardır ve $\theta \in (0, \infty)$ olduğunda, bu fonksiyon (2.1)'deki özellikleri sağlar. $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t) = \infty$ olduğundan φ fonksiyonu kesin üreticidir ve csch-kapulasını

$$\begin{aligned} C(u, v) &= \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)) \\ &= [acsch(csch(u^\theta) + csch(v^\theta) - csch(1))]^{1/\theta} \end{aligned}$$

şekilde üretir . Bu kapula Bal ve Najjari (2013) tarafından önerilmiştir. Bu kapula Clayton kapulasına benzer davranışlar göstermektedir. Şekil 2.4'de csch-kapulunun serpmeye diyagramı parametresinin birkaç değeri için verilmiştir.



Şekil 2.3. Coth-kapulasının serpmeye diyagramı



Şekil 2.4. Csch-kapulasının serpmeye diyagramı

3. MEVCUT KAPULALARA BİR GENİŞLENDİRME

İki boyutlu bir kapula ailesi olan Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) ve bağımsız kapula ailesinin bir genişletmesi Rodriguez-Lallena ve Ubada (2004) tarafından önerilmiştir. Bu çalışmadan yararlanarak Dolati ve Ubada (2006), önerilen modelin n boyutlu genişletmesini çalışmışlardır. Sonra Kim ve diğerleri (2011) herhangi bir kapulanın 2 boyutlu genişlendirilmiş hali için genel bir form elde etmişlerdir. Nitekim önerilen bu son model, 2 boyutlu kapulalar bakımından Rodriguez-Lallena ve Ubada (2004)'de önerilen modelin en genel formudur. Bu bölümde, Kim ve diğerleri (2011)'da önerilen modelin tüm durumlarda doğru olmadığı, farklı açılardan gösterilmiştir. Sonra her kapula için yeni bir genişletme modeli önerilerek bu problemin giderilmesi amaçlanmıştır.

3.1. Giriş

Kapulalar, en yalın ifade ile rastgele değişkenler arasındaki bağımlılık yapısını oluşturmak amacıyla kullanılmaktadır. Son yıllarda kapulaların istatistiksel özelliklerinin araştırılması artarak sürmekte ve kapula uygulamaları gün geçtikçe daha fazla yaygınlaşmaktadır. Kapulaların bir genişletmesi Rodriguez-Lallena ve Ubada (2004) tarafından önerilmiştir. Önerilen bu model ile Çarpım kapulası ve Farlie-Gumbel-Morgenstern kapula ailesi gibi bazı 2 boyutlu kapula ailelerinin genişletmesi yapılabilir. Bu çalışmada önerilen genişletme modeli yeni bir kapula üretme yöntemi olarak da ele alınabilir. Rodriguez-Lallena ve Ubada (2004) tarafından önerilen model

$$C_{\lambda}(u, v) = uv + \lambda f(u)g(v) \quad (u, v) \in I^2$$

ile verilir. Burada $\lambda \in R$ ve f, g fonksiyonları sıfırdan farklı, mutlak sürekli reel fonksiyonlardır ve $f(0) = g(0) = f(1) = g(1) = 0$, ve λ 'nın değişim aralığı

$$\frac{-1}{\max(\alpha\gamma, \beta\delta)} \leq \lambda \leq \frac{-1}{\min(\alpha\delta, \beta\gamma)}$$

olur. Burada

$$\alpha = \inf\{f'(u): u \in A\} < 0, \quad \beta = \sup\{f'(u): u \in A\} > 0$$

$$\gamma = \inf\{g'(v): v \in B\} < 0, \quad \delta = \sup\{g'(v): v \in B\} > 0$$

$$A = \{u \in I : f'(u) \text{ vardır} \}, \quad B = \{v \in I : g'(v) \text{ vardır} \}$$

ile verilir. Bu çalışmadan yola çıkarak, Dolati and Ubada (2006), Rodriguez-Lallena ve Ubada (2004) tarafından önerilen modeli n -boyuta genişletmişlerdir. Bu genişletme

$$C_\lambda(u) = \prod_{i=1}^n u_i + \lambda \prod_{i=1}^n f_i(u_i) \quad u \in I^n$$

olarak verilir. Burada $\lambda \in R$ ve f_i fonksiyonları sıfır olmayan mutlak sürekli reel fonksiyonlardır ve $f_i(0) = f_i(1) = 0$ 'dir. λ aralığı ise

$$\frac{-1}{\sup_{u \in D^+} (\prod_{i=1}^n f_i'(u_i))} \leq \lambda \leq \frac{-1}{\inf_{u \in D^-} (\prod_{i=1}^n f_i'(u_i))}$$

ile verilir. Burada

$$D^- = \{u \in I^n : \prod_{i=1}^n f_i'(u_i) < 0\} \quad \text{ve} \quad D^+ = \{u \in I^n : \prod_{i=1}^n f_i'(u_i) > 0\}$$

olarak tanımlanır. Kim ve diğerleri (2011) tarafından önerilen bir başka model de ele alınan herhangi bir kapulanın genişletmesini elde etmek için kullanılmaktadır. Yani Kim ve diğerleri (2011) çalışmalarında Rodriguez-Lallena ve Ubeda (2004) tarafından önerilen modelin, her kapula için genel bir formunu önermişlerdir.

Bu bölümde temel amaç, Kim ve diğerleri (2011)'deki modelin eksik taraflarını göstermektir. Bu amaçla birkaç durum için model incelenmiş ve aynı hedefi amaçlayan yeni bir model önerilmiştir. Daha sonra da birkaç örnekle önerilen modelin doğruluğu gösterilmiştir.

3.2. Kim Ve Diğerleri Tarafından Önerilen Modelin İncelenmesi

Rodriguez-Lallena ve Ubeda tarafından önerilen modelin, tüm kapulalara genişletmesi için Kim ve diğerleri (2011)

$$C_\lambda^*(u, v) = C(u, v) + \lambda f(u)g(v), \quad (u, v) \in I^2 \quad (3.1)$$

modelini önermişlerdir. Burada $C(u, v)$ herhangi bir kapula olabilir. $\lambda \in R$ ve f, g fonksiyonları sıfır olmayan mutlak sürekli reel fonksiyonlardır ve

$$f(0) = g(0) = f(1) = g(1) = 0$$

dir. C_λ^* 'ın kapula olması için aşağıdaki koşulları sağlaması gerekir.

$$\frac{-V_C(B)}{(u_2 - u_1)(v_2 - v_1)\max(\alpha\gamma, \beta\delta)} \leq \lambda \leq \frac{-V_C(B)}{(u_2 - u_1)(v_2 - v_1)\min(\alpha\gamma, \beta\delta)} \quad (3.2)$$

burada $u_1, u_2, v_1, v_2 \in I$, $(u_1 \leq u_2, v_1 \leq v_2)$ ve

$$V_C(B) = C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1)$$

ile verilir. Ayrıca

$\alpha = \inf\{f'(u): u \in A\} < 0$, $\beta = \sup\{f'(u): u \in A\} > 0$
 $\gamma = \inf\{g'(v): v \in B\} < 0$, $\delta = \sup\{g'(v): v \in B\} > 0$
 $A = \{u \in I : f'(u) \text{ mevcut} \}$, $B = \{v \in I : g'(v) \text{ mevcut} \}$
 olarak tanımlanır.

Eşitsizlik (3.2)'de verilen aralığın üzerinde bazı açıklamalar yapılmak istenirse,

- Bu aralığın alt ve üst sınırları $u_1, u_2, v_1, v_2 \in I$ 'lara bağlı fonksiyonlardır ve bu sınır değerinin hesaplanması oldukça zordur.
- Bu aralığın alt ve üst sınırları $u_1, u_2, v_1, v_2 \in I$ 'lara bağlı fonksiyonlardır ve λ 'nın her u_1, u_2, v_1, v_2 durumunda geçerli olabilmesi için aşağıdaki gibi bir aralık tanımlanmalıdır.

$$\max\left(\frac{-V_C(B)}{\Delta \times \max(\alpha\gamma, \beta\delta)}\right) \leq \lambda \leq \min\left(\frac{-V_C(B)}{\Delta \times \min(\alpha\gamma, \beta\delta)}\right) \quad (3.3)$$

burada $\Delta = (u_2 - u_1)(v_2 - v_1)$ biçimindedir.

- Eğer $f(u) = u(1 - u)$, $g(v) = v(1 - v)$ olursa o zaman,
 $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $\gamma = -1$, $\delta = 1$ ve $\max(\alpha\gamma, \beta\delta) = \min(\alpha\gamma, \beta\delta) = 1$ olacaktır.
 Dolayısıyla

$$\lambda = \frac{-V_C(B)}{(u_2 - u_1)(v_2 - v_1)}$$

olarak elde edilir. Yani λ 'ya bir aralık atanması gerekirken yalnızca bir sayı elde edilmiş olur. Bu durum Rodriguez-Lallena ve Ubeda'nın bulduğu sonuca uymamaktadır.

- Eğer $f(u) = u(1 - u)^2$, $g(v) = v(1 - v)$ ise o zaman $\alpha = -0.3333$,
 $\beta = 1$, $\gamma = -1$, $\delta = 1$ ve $\max(\alpha\gamma, \beta\delta) = 1$, $\min(\alpha\gamma, \beta\delta) = 0.3333$
 olarak elde edilir. Eşitsizlik (3.2)'de verilen denklemin eşitsizlik (3.3)'teki gibi olduğunu varsayalım. Bu durumda aşağıda verilen iki kapulanın genişletilmesi için,
 1.1. $C(u, v) = uv = \Pi$ alınır ve gerekli matematiksel işlemler yapılırsa λ 'nın aralığı
 $-3.003 \leq \lambda \leq -1$ olarak elde edilir. Dolayısıyla $\lambda = -3$ iken $V_{C^*}(B)$ hacmi bazı
 u_1, u_2, v_1, v_2 için negatif değer alabilir. Örnek olarak $u_1 = 0$, $u_2 = 0.2$, $v_1 = 0$, $v_2 =$
 0.2 ise $V_{C^*}(B) = -0.0214$ olur. Bu durumda 2-artan özelliği sağlanamadığından C^* bir
 kapula olamaz.

1.2. $C(u, v) = \min(u, v) = M$ alınır ve gerekli matematiksel işlemler yapılırsa λ 'nın aralığı $-5 \leq \lambda \leq -0.0001$ olarak elde edilir. Dolayısıyla $\lambda = -4$ için $V_{C^*}(B)$ hacmi bazı u_1, u_2, v_1, v_2 için negatif değer alabilir. Örnek olarak $u_1 = 0, u_2 = 0.3, v_1 = 0, v_2 = 0.1$ ise $V_{C^*}(B) = -0.0238$ olur. Bu durumda 2-artan özelliği sağlanamadığından C^* bir kapula olamaz.

Sonuç olarak Kim ve diğerleri (2011) tarafından önerilen genişletme bazı durumlarda kapulalar için iki koşuldan en az birini sağlamamaktadır.

3.3. Önerilen Model İle Kapulaları Genişletme

Bu kesimde amaç tüm kapulaları genişletecek yeni bir model önermektir. $C(u, v)$ herhangi bir kapula ve $\lambda \in R$ ve f, g fonksiyonları da sıfır olmayan sürekli reel fonksiyonlar olarak tanımlansın. Bu durumda aşağıdaki eşitliği göz önüne alınsın.

$$C_\lambda^*(u, v) = C(u, v) + \lambda f(u)g(v) \quad (u, v) \in I^2 \quad (3.4)$$

Buradaki amaç $C_\lambda^*(u, v)$ için kapula koşullarını sağladığı durumda, λ için bir aralık elde etmektir. Öncelikle bu amaçla kullanılan bir teorem olan Teorem 3.1. verilsin (teoremin ispatı için Rodriguez-Lallena ve Ubeda, 2004'e bakınız).

3.3.1. Teorem

Eğer $f: [a, b] \rightarrow R$ ve $\alpha, \beta \in R$, ise aşağıdaki ifadeler denktir.

- i) $\alpha(y - x) \leq f(y) - f(x) \leq \beta(y - x)$, her $x, y \in [a, b]$ ve $x < y$.
- ii) f fonksiyonu $[a, b]$ 'de mutlak süreklidir ve her $x \in [a, b]$ için $\alpha \leq f'(x) \leq \beta$.

Eşitlik (3.4)'de verilen denklemdeki $C(u, v)$ kapula olduğundan, hem kapula özelliklerini taşımaktadır hem de Fréchet-Hoeffding sınırlarının içerisinde yer almaktadır (Fréchet, 1958; Nelsen, 2006).

$C^*(u, v)$ kapula olması için bu kapulanın birinci bölümde verilen a ve b koşullarını sağlaması gerekmektedir. $f(0) = g(0) = f(1) = g(1) = 0$ şartının sağlanması a şartın sağlanması için yeterlidir. Önemli ve zor kısmı b şartının sağlanmasıdır. Burada λ 'nın iki özelliği sağlayacak biçimde belirlenmesi gerekmektedir. Bunlardan birincisi $C^*(u, v)$ 'nin 2-artan olma koşuludur ve

$$V_{C^*}(B) = C^*(u_2, v_2) - C^*(u_2, v_1) - C^*(u_1, v_2) + C^*(u_1, v_1) \geq 0$$

olarak tanımlanır. İkinci koşul ise

$$0 \leq C^*(u, v) \leq 1 \quad \text{her } u, v \in I \quad (3.5)$$

ile verilir.

2-artan olma koşulunu incelemek için, matematiksel işlemlerle sadeleştirilerek aşağıdaki denklem elde edilir.

$$V_{C^*}(B) = V_C(B) + \lambda f(u_2 - u_1)g(v_2 - v_1) \geq 0$$

buradan

$$-\lambda f(u_2 - u_1)g(v_2 - v_1) \leq V_C(B)$$

elde edilir. Dolayısıyla her kapula için $V_C(B) \leq 1$ olduğundan

$$-\lambda f(u_2 - u_1)g(v_2 - v_1) \leq 1 \quad (3.6)$$

olarak yazılabilir. Sonra eşitsizlik (3.6)'ın her iki tarafı $\frac{1}{(u_2 - u_1)(v_2 - v_1)}$ ile çarpılırsa,

$$-\lambda \frac{f(u_2 - u_1)g(v_2 - v_1)}{(u_2 - u_1)(v_2 - v_1)} \leq \frac{1}{(u_2 - u_1)(v_2 - v_1)}$$

elde edilir. Burada $u_1, u_2, v_1, v_2 \in I$ ve $(u_1 < u_2, v_1 < v_2)$ olarak tanımlanır.

Ayrıca $\min\left(\frac{1}{(u_2 - u_1)(v_2 - v_1)}\right) = 1$ olduğundan,

$$-\lambda \frac{f(u_2 - u_1)g(v_2 - v_1)}{(u_2 - u_1)(v_2 - v_1)} \leq 1$$

olarak yazılabilir. f, g fonksiyonları sıfır olmayan mutlak sürekli reel fonksiyonlar olduğu varsayılırsa Teorem 3.3.1'den Rodriguez-Lallena ve Ubeda'in çalışmasına benzer şekilde, aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\frac{-1}{\max(\alpha\gamma, \beta\delta)} \leq \lambda \leq \frac{-1}{\min(\alpha\delta, \beta\gamma)} \quad (3.7)$$

burada $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ terimleri Rodriguez-Lallena and Ubeda-Flores'de önerildiği gibidir. İşlemlerden görüldüğü üzere elde edilen aralık bazı λ değerleri için C^* değerini Fréchet-Hoeffding sınırının dışına taşımaktadır. Dolayısıyla λ 'ya C^* değerinin Fréchet-Hoeffding sınırından dışarı çıkmaması için başka bir kısıt koymak gerekmektedir.

C^* değeri Fréchet-Hoeffding sınırının içerisinde olursa eşitsizlik (3.5)'de verilen koşul da sağlanacaktır. W, M sırasıyla Fréchet-Hoeffding alt ve üst sınırları olarak tanımlansın. Yani $W(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$, $M(u, v) = \min(u, v)$ ile verilsin. Buradaki amaç λ 'yı aşağıdaki denklemi sağlayacak biçimde kısıtlamaktır. Bu durumda Fréchet-Hoeffding alt ve üst sınırları yazılırsa

$$W(u, v) \leq C^*(u, v) \leq M(u, v)$$

her $u, v \in I$ olarak verilir. Buradan aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\frac{W(u, v) - C(u, v)}{f(u)g(v)} \leq \lambda \leq \frac{M(u, v) - C(u, v)}{f(u)g(v)}$$

her u, v için genel bir aralık bulmak amacıyla bu eşitsizlik, aşağıdaki gibi tekrar yazılabilir.

$$\max \left(\frac{W(u, v) - C(u, v)}{f(u)g(v)} \right) \leq \lambda \leq \min \left(\frac{M(u, v) - C(u, v)}{f(u)g(v)} \right). \quad (3.8)$$

Eşitsizlik (3.8) elde edilen alt ve üst sınırların her ikisi de çok değişkenli (en az 2 değişkenli) fonksiyonlardır ve dolayısıyla bunların min-max (ya da inf-sup) değerlerini bulmak zor değildir.

Sonuç olarak, eşitlik (3.4)'deki C^* 'ın kapula olması için eşitsizlik (3.7) ve (3.8) verilen koşulların ikisinin de aynı anda sağlanması gerekmektedir. Yani λ bu denklemlerin ikisinin kesişimi biçiminde kısıtlanmalıdır. Bu tartışmanın sonucu aşağıdaki teoremin bir ispatı olarak değerlendirilebilir.

3.3.2. Teorem

Eğer $\lambda \in \mathbb{R}$ ve f, g fonksiyonları sıfır olmayan mutlak sürekli reel fonksiyonlar ve $f(0) = g(0) = f(1) = g(1) = 0$ ve $C(u, v)$ herhangi bir kapula ailesi olsun. Bu durumda eşitlik (3.4)' de verilen C^* 'ın bir kapula olması için λ 'nın aralığı ancak ve ancak eşitsizlik (3.9) ve (3.10)'deki koşulların kesişimidir.

$$\frac{-1}{\max(\alpha\gamma, \beta\delta)} \leq \lambda \leq \frac{-1}{\min(\alpha\delta, \beta\gamma)} \quad (3.9)$$

$$\max \left(\frac{W(u, v) - C(u, v)}{f(u)g(v)} \right) \leq \lambda \leq \min \left(\frac{M(u, v) - C(u, v)}{f(u)g(v)} \right). \quad (3.10)$$

Yukarıdaki (3.9) ve (3.10) eşitsizliklerde

$$\alpha = \inf\{f'(u): u \in A\} < 0, \quad \beta = \sup\{f'(u): u \in A\} > 0$$

$$\gamma = \inf\{g'(v): v \in B\} < 0, \quad \delta = \sup\{g'(v): v \in B\} > 0$$

$$A = \{u \in I : f'(u) \text{ mevcut} \}, \quad B = \{v \in I : g'(v) \text{ mevcut} \}$$

ile verilir.

Not: $C(u, v)$ herhangi bir kapula ailesi olsun o zaman $C^*(u, v)$ ailesi $C(u, v)$ ailesinden daha esnektir.

3.3.1. Sonuç

Bu çalışmada önerilen genişletmede $C(u, v) = uv$ alınırsa Rodriguez-Lallena ve Ubeda'da verilen sonuç elde edilir. Yani bu çalışmadaki sonuç Rodriguez-Lallena ve Ubeda'daki sonucun daha genel bir halidir. Çalışmanın devamında Teorem 3.3.2'den türetilen yeni kapula ailelerinin kümesi Φ ile gösterilmiştir.

3.4. Önerilen Ailelerin Bazı Ölçüleri

Bu kesimde Φ 'deki yeni aileleri için hem bir kaç bağımlılık ölçüsü (Kendall τ , Spearman ρ , Gini γ ölçüleri) hem de kuyruk bağımlılıkları üzerinde açıklamalar yapılmıştır. Her hangi bir $C(u, v)$ kapulası için bu bağımlılık ölçüleri aşağıdaki şekilde verilir (Nelsen, 2006).

$$\tau_C = 1 - 4 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial C}{\partial u} \frac{\partial C}{\partial v} dudv$$

$$\rho_C = 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dudv - 3$$

$$\gamma_C = 4 \int_0^1 [C(u, u) - C(u, 1 - u)] du - 2$$

$$t_{LC} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C(t, t)}{t}$$

$$t_{UC} = 2 - \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1 - C(t, t)}{1 - t}$$

Φ 'deki bir aile için, yukarıdaki ölçülerin hesaplamasına yönelik yeni bir teorem aşağıda verilmiştir.

3.4.1. Teorem

(X, Y) sürekli rastgele değişken çifti olsun. Bu durumda Φ kümesinde C^* kapulasının, Kendall τ , Spearman ρ , Gini γ ve kuyruk bağımlılık parametreleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\tau_{C^*} = \tau_C - 4\lambda \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial C}{\partial u} f(u)g'(v) + \frac{\partial C}{\partial v} f'(u)g(v) + \lambda f(u)f'(u)g(v)g'(v) \right] dudv$$

$$\rho_{C^*} = \rho_C + 12\lambda \int_0^1 \int_0^1 f(u)g(v) dudv$$

$$\gamma_{C^*} = \gamma_C + 4\lambda \left(\int_0^1 f(u)g(1-u)du + \int_0^1 f(u)g(u)du \right)$$

$$t_{L_{C^*}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C^*(t, t)}{t} = t_{L_C} + \lambda \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)g(t)}{t}$$

$$t_{U_{C^*}} = 2 - \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1 - C^*(t, t)}{1 - t} = t_{U_C} - \lambda \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{f(t)g(t)}{1 - t}.$$

3. 5. Bazı Kapulalar İçin Genişletmeler

Bu bölümde Clayton, Frank, A12 ve Bağımsızlık kapulalarının genişletmeleri verilmiştir. $f(u) = u(1 - u)$, $g(v) = v(1 - v)$ ise f, g fonksiyonları $(0, 1/2)$ aralığında artan ve $(1/2, 1)$ aralığında azalanlardır ve $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $\gamma = -1$, $\delta = 1$ olarak elde edilir. Teorem 3.4.1'deki ölçülerin hesaplaması bu fonksiyonlar için aşağıda verilmiştir.

$$\tau_{C^*} = \tau_C - 4\lambda \int_0^1 \int_0^1 \Delta du dv$$

Burada

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial u} u(1 - u)(1 - 2u) + \frac{\partial C}{\partial v} v(1 - v)(1 - 2v) +$$

$$\lambda uv(1 - 2u)(1 - 2v)(1 - u)(1 - v)$$

$$\rho_{C^*} = \rho_C + \frac{\lambda}{3}$$

$$\gamma_{C^*} = \gamma_C + \frac{4\lambda}{3}$$

$$t_{L_{C^*}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C^*(t, t)}{t} = t_{L_C}$$

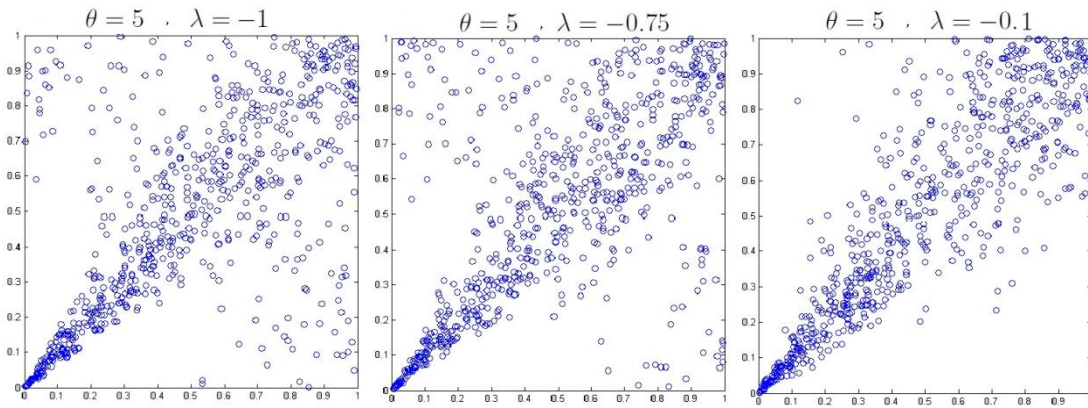
$$t_{U_{C^*}} = 2 - \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1 - C^*(t, t)}{1 - t} = t_{U_C}$$

elde edilir. Buradan anlaşılacağı gibi f ve g fonksiyonları kuyrukları etkilememektedir.

Bu fonksiyonlar uygulamada sıkça kullanılan Arşimedyen kapula ailelerinden bazılarıdır. Bu aileler önerilen model ile genişletilmiştir ve genişletilmiş ailelerin daha esnek olacağı açıktır. Dolayısıyla daha fazla durumu modelleyebilir. Çizelge. 3.1'de bu ailelere ilişkin bazı bilgiler vardır.

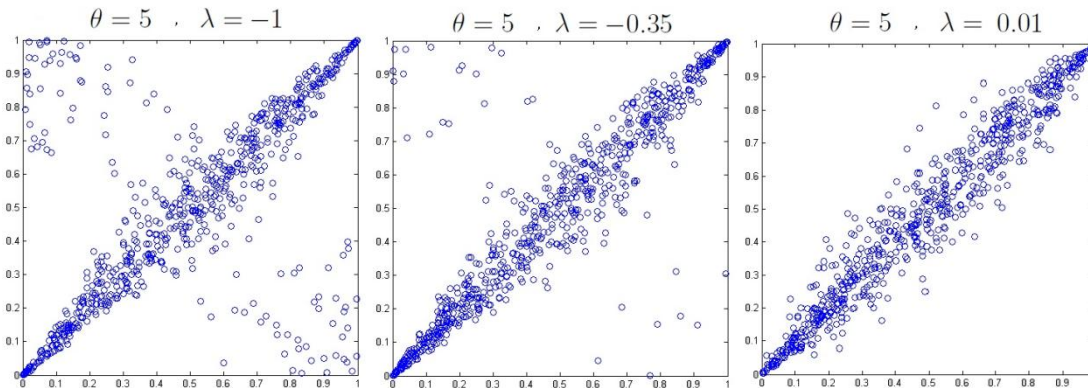
Çizelge 3.1. Kullanılan kapulalara ilişkin temel bilgiler

Kapula	$C(u, v)$	λ_L	λ_U	θ aralığı
Clayton	$\max([u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1]^{-1/\theta}, 0)$	$2^{-\frac{1}{\theta}}$	0	$[-1, \infty)$ $-\{0\}$
Frank	$\frac{-1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right)$	0	0	$(-\infty, \infty)$ $-\{0\}$
A12	$\left(1 + [(u^{-1} - 1)^\theta + (v^{-1} - 1)^\theta]^{1/\theta} \right)^{-1}$	$2^{-\frac{1}{\theta}}$	$2 - 2^{\frac{1}{\theta}}$	$[1, \infty)$
Çarpım	uv	0	0	-



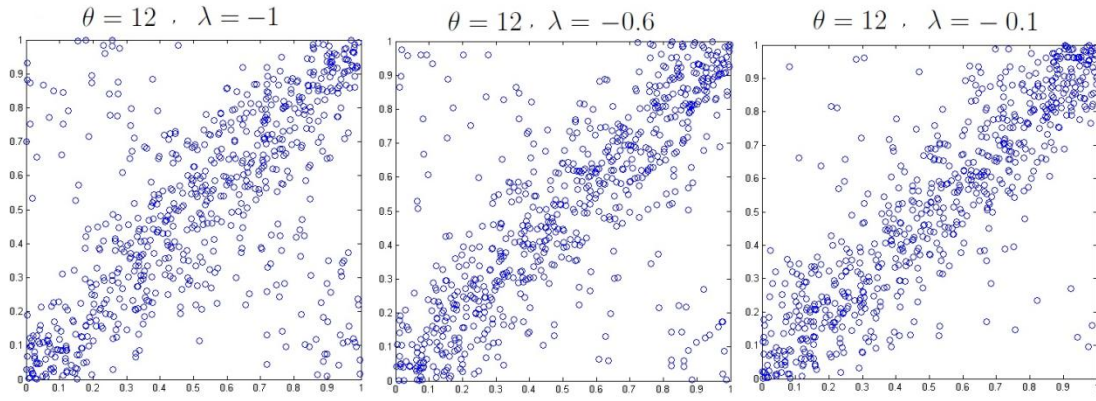
Şekil 3.1. Clayton ailesi için serpmeye diyagramları

$C(u, v)$ Clayton ailesi için Teorem 3.2 kullanılarak ve yukarıdaki f, g fonksiyonları kullanılarak λ aralığı $[-1, 0]$ olarak hesaplanır. Şekil 3.1’de bazı parametre değerleri için bu genişletilmiş ailenin serpmeye diyagramları verilmiştir.

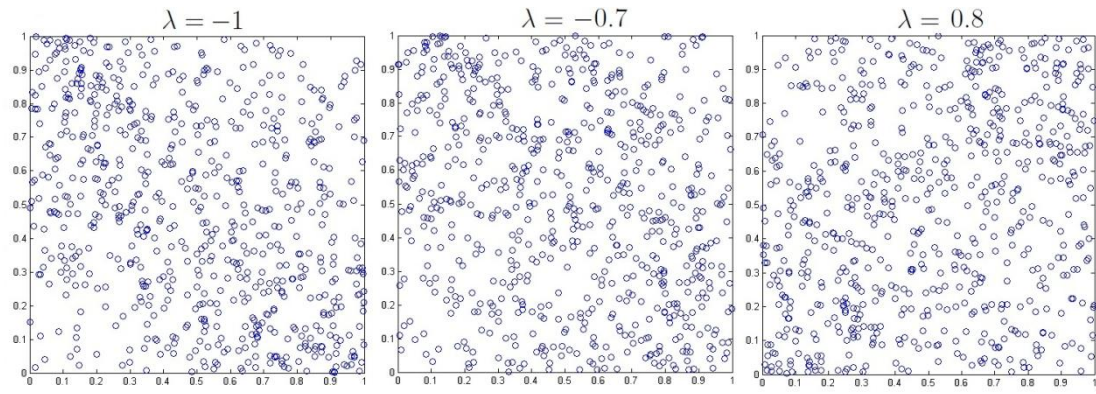


Şekil 3.2. A12 ailesi için serpmeye diyagramları

Benzer şekilde A12, Frank ailesi ve bağımsız kapula için λ aralığı sırasıyla $[-1, 0.011]$, $[-1, 0]$ ve $[-1, 1]$ olarak hesaplanır. Şekil 3.2, Şekil 3.3 ve Şekil 3.4’te bazı parametre değerleri için sırasıyla A12, Frank ailesi ve bağımsız kapula ile elde edilen serpmeye diyagramları verilmiştir.



Şekil 3.3. Frank ailesi için serpm diyagramları



Şekil 3.4. Bağımsızlık kapula ailesinin serpm diyagramları

4. BAĞIMSIZLIK KAPULSİNİN BİR GENİŞLETMESİ

İki boyutlu bir kapula ailesi olan Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) bağımsız kapula ailesinin bir genişletmesi Rodriguez-Lallena ve Ubeda (2004) tarafından önerilmiştir. Bu çalışmadan yararlanarak Dolati ve Flores (2006), önerilen modelin n boyutlu bir genişletmesini çalışmışlardır. Bu çalışmada, Rodriguez-Lallena ve Ubeda (2004)'da önerilen model için, yeni bir genişletme modeli önererek simetrik ve asimetrik kapula aileleri türetilenektir.

4.1. Giriş

Kapulaların bir genişletmesi Rodriguez-Lallena ve Ubeda (2004) tarafından önerilmiştir. Önerilen bu model ile Çarpım kapulası ve Farlie-Gumbel-Morgenstern gibi bazı iki boyutlu kapula ailelerinin genişletmesi yapılabilir. Bu çalışmada önerilen genişletme modeli yeni bir kapula türetme yöntemi olarak da ele alınmıştır. Rodriguez-Lallena ve Ubeda tarafından önerilen model

$$C_\lambda(u, v) = uv + \lambda f(u)g(v) \quad (u, v) \in I^2 \quad (4.1)$$

şekilindedir. Burada $\lambda \in \mathbb{R}$ ve f, g fonksiyonları sıfırdan farklı, mutlak sürekli reel fonksiyonlardır ve $f(0) = g(0) = f(1) = g(1) = 0$, ve λ aralığı

$$\frac{-1}{\max(\alpha\gamma, \beta\delta)} \leq \lambda \leq \frac{-1}{\min(\alpha\delta, \beta\gamma)}$$

olarak yazılır. Yine

$$\alpha = \inf\{f'(u): u \in A\} < 0, \quad \beta = \sup\{f'(u): u \in A\} > 0$$

$$\gamma = \inf\{g'(v): v \in B\} < 0, \quad \delta = \sup\{g'(v): v \in B\} > 0$$

$$A = \{u \in I : f'(u) \text{ mevcut} \}, \quad B = \{v \in I : g'(v) \text{ mevcut} \}$$

ile verilir. Bu çalışmadan yola çıkarak, Dolati ve Ubeda (2006), Rodriguez-Lallena ve Ubeda (2004) tarafından önerilen modeli n -boyuta genişletmişlerdir. Bu genişletme

$$C_\lambda(u) = \prod_{i=1}^n u_i + \lambda \prod_{i=1}^n f_i(u_i), \quad u \in I^n$$

olarak verilir. Burada $\lambda \in \mathbb{R}$ ve f_i fonksiyonları sıfır olmayan mutlak sürekli reel fonksiyonlardır ve $f_i(0) = f_i(1) = 0$ 'dır. λ aralığı ise

$$\frac{-1}{\sup_{u \in D^+} (\prod_{i=1}^n f_i'(u_i))} \leq \lambda \leq \frac{-1}{\inf_{u \in D^-} (\prod_{i=1}^n f_i'(u_i))}$$

ile verilir. Burada

$$D^- = \{u \in I^n : \prod_{i=1}^n f_i'(u_i) < 0\} \quad \text{ve} \quad D^+ = \{u \in I^n : \prod_{i=1}^n f_i'(u_i) > 0\}$$

olarak tanımlanır. Benzer bir yaklaşım Kim ve diğerleri (2011) tarafından önerilen bir başka modelde ele alınan herhangi bir kapulanın genişletmesini elde etmek için kullanılmaktadır. Yani Kim et al. (2011) çalışmalarında, Rodriguez-Lallena ve Ubeda tarafından önerilen modelin, her kapula için genel bir formunu aşağıdaki gibi önermişlerdir:

$$C^*_\lambda(u, v) = C(u, v) + \lambda f(u)g(v), \quad (u, v) \in I^2 \quad (4.2)$$

Bununla birlikte Kim ve diğerleri (2011) tarafından önerilen modelin tüm durumlarda doğru olmadığı Najjari ve diğerleri (2013a) tarafından gösterilmiştir. Mesiar ve diğerleri. (2013)'da literatürdeki metotları kullanarak (4.1) ve (4.2)'deki genel formları 2-boyutlu kapulalar için (4.3)'deki gibi önermiştir.

$$C^*_\lambda(u, v) = \max\left(0, C(u, v) - \lambda \Pi(f(u)g(v))\right), \quad (u, v) \in I^2 \quad (4.3)$$

Bu kesimdeki temel amaç Rodriguez-Lallena ve Ubeda (2004)'da önerilen model için yeni bir genişletilmiş model önererek, yeni simetrik ve asimetrik kapula aileleri türetmektir. Yeni türetilen aileler n ($n \geq 1$) parametreye sahiptirler ve dolayısıyla Rodriguez-Lallena ve Ubeda'nın önerdiği ailelerden daha esnektirler. Yeni aileler için Kendal Tau, Spearman Rho, Gini Gama gibi bağımlılık ölçüleri ve kuyruklardaki davranışları da hesaplanmıştır. Ayrıca önerilen model için birkaç örnek verilmiştir.

Çalışmanın 4.2 Kesim'inde yeni simetrik/asimetrik kapula ailelerinin bağımsızlık kapulasından türetilen modelleri gösterilmiştir. Kesim 4.3'de bu yeni modelden üretilen kapulaların bağımlılık ölçüleri ve özellikleri incelenmiştir. Kesim 4.4'de ise değişik kapula ailelerini türetmek için önerilen yeni modelin bir uygulaması yapılmıştır. Yeni modelin, bazı kapula türetme modeliyle olan ilişkisi bölüm 4.5'de gösterilmiştir. Sonuç ve tartışmalar ise bölüm 4.6'da verilmiştir.

4.2. Bağımsızlık Kapulasının Genişletmesi

$f_i(u), g_i(v)$ her $i = 1, \dots, n$ için $[0,1]$ aralığında sıfır olmayan mutlak sürekli reel fonksiyonlar olsun. O zaman

$$C(u, v) = uv + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(u) g_i(v) \quad (u, v) \in [0, 1]^2, n \geq 1 \quad (4.4)$$

modelini öneriyoruz. Burada amaç $\lambda_i \in \mathbb{R}$ için (4.4)'deki C 'nin kapula olma durumlarını belirlemektir. Buradaki kapulanın mutlak sürekli bir kapula olduğu açıkça görülmektedir. Ayrıca (4.4)'de verilen form (4.1)'deki formun daha genel bir halidir ve $n = 1$ için (4.4), model (4.1)'e denk olmaktadır. C 'yi kapula yapan sınır koşul için yeter şart $i = 1, \dots, n$ için aşağıdaki eşitliğin sağlanmasıdır:

$$f_i(0) = g_i(0) = f_i(1) = g_i(1) = 0.$$

Ancak burada dikkat edilmesi gereken husus (4.4)'de C 'nin 2-artan olması için uygun λ_i 'lerin belirlenmesidir. Yani köşeleri $[0, 1]^2$ 'de yer alan tüm $R = [u_1, u_2] \times [v_1, v_2]$ tipindeki dörtgenler için aşağıdaki eşitsizliğin sağlanmış olması gerekir:

$$V_C(R) > 0 \quad (4.5)$$

Rodriguez-Lallena ve Ubeda-Flores (2004)'deki sonuca göre, her

$$C_{\tau_i}^{(i)}(u, v): [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1] \text{ için, } i = 1, \dots, n \text{ olmak üzere}$$

$$C_{\tau_i}^{(i)}(u, v) = uv + \tau_i f_i(u) g_i(v) \quad (4.6)$$

$$\tau_i \in \left[\frac{-1}{\max(\alpha_i \gamma_i, \beta_i \delta_i)}, \frac{-1}{\min(\alpha_i \delta_i, \beta_i \gamma_i)} \right] \text{ olduğunda bir kapuladır. Ayrıca her } a_1, \dots, a_n \in [0, 1]$$

olsun ve $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ özelliğini de sağlasın. Bu durumda $C = \sum_{i=1}^n a_i C_{\tau_i}^{(i)}$ de bir kapuladır (Kapulaların konveks toplamı da kapuladır). Yani her $(u, v) \in [0, 1]^2$ için kolayca aşağıdaki eşitlik gösterilir.

$$C(u, v) = uv + \sum_{i=1}^n a_i \tau_i f_i(u) g_i(v) \quad (4.7)$$

Böylece her $i = 1, \dots, n$ için $\lambda_i = a_i \tau_i$ olarak alındığında, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (a_1 \tau_1, \dots, a_n \tau_n)$, (4.4)'de verilen denkleminin kapula olduğu göstermiş olur. Yukarıdaki durum aşağıdaki önermede özetlenmiştir.

4.2.1. Önerme

Yukarıdaki verilen bilgilere göre,

$$\tau_i \in \left[\frac{-1}{\max(\alpha_i \gamma_i, \beta_i \delta_i)}, \frac{-1}{\min(\alpha_i \delta_i, \beta_i \gamma_i)} \right] \quad (4.8)$$

ve $a_1, \dots, a_n \in [0,1]$ ($\sum_{i=1}^n a_i=1$) olmak üzere, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (a_1\tau_1, \dots, a_n\tau_n)$ olsun. O zaman her $i = 1, \dots, n$ için (4.4) ile verilen $C(u, v): [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu bir kapuladır.

Önerme 4.2.1, denklem (4.4)'de verilen fonksiyonun kapula olması için $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 'lere sadece bir yeter koşul verir. Açıkça (4.4)'de verilen C fonksiyonunun 2-artan olması için buna karşılık gelen yoğunluk fonksiyonu c 'yi incelemek, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 'lerin belirlenmesinde başka bir yöntemdir. (4.4)'de verilen C fonksiyonunun yoğunluk fonksiyonu;

$c(u, v): [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ aşağıda verilmiştir:

$$c(u, v) = 1 + \sum_{i=1}^n \lambda_i f'_i(u) g'_i(v). \quad (4.9)$$

4.2.1. Teorem

(4.4)'de verilen $C(u, v): [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu kapuladır ancak ve ancak (4.9)'da verilen $c(u, v)$ fonksiyonu, $f'_i(u)$ ve $g'_i(v)$ 'lerin $i = 1, \dots, n$ için mevcut olduğu yerlerde negatif değildir.

Genelde C bir kapula ise λ_i 'lerin her $i = 1, \dots, n$ için tanım kümesini bulmak zor veya karmaşık olabilir. Dolayısıyla amacımız yeni bir yeterli metod eklemektir. Kesim 4.4'de bazı örnekler verilmiştir.

4.2.2. Önerme

Önerme 4.2.1'deki bilgileri kullanarak, (4.3)'de verilen $C(u, v)$ fonksiyonu $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ için aşağıdaki eşitsizlikler sağlandığında bir kapula olur.

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i (d_i \max(\alpha_i \gamma_i, \beta_i \delta_i) + e_i \min(\alpha_i \delta_i, \beta_i \gamma_i)) \geq -1$$

her $(d_1, \dots, d_n), (e_1, \dots, e_n) \in \{0,1\}^n$ için öyle ki

$$(d_1, \dots, d_n) \cdot (e_1, \dots, e_n) = (d_1 e_1, \dots, d_n e_n) = (0, \dots, 0)$$

dir.

İspat:

Her $(u, v) \in [0,1]^2$ için $f'_i(u)$ ve $g'_i(v)$, $i = 1, \dots, n$ mevcut olduğunda, eğer $f'_i(u) g'_i(v) \geq 0$ ise, o zaman $0 \leq f'_i(u) g'_i(v) \leq \max(\alpha_i \gamma_i, \beta_i \delta_i)$ olur. Eğer her $i = 1, \dots, n$ için $\lambda_i \geq 0$ ise o zaman $d_i = 0 = e_i$ seçeriz ve dolayısıyla

$$\lambda_i f'_i(u) g'_i(v) \geq 0 = \lambda_i (d_i \max(\alpha_i \gamma_i, \beta_i \delta_i) + e_i \min(\alpha_i \delta_i, \beta_i \gamma_i))$$

olur. Eğer $\lambda_i < 0$ ise o zaman $d_i = 1$, $e_i = 0$ seçeriz ve dolayısıyla

$$\lambda_i f'_i(u) g'_i(v) \geq \lambda_i (d_i \max(\alpha_i \gamma_i, \beta_i \delta_i) + e_i \min(\alpha_i \delta_i, \beta_i \gamma_i))$$

olacaktır. Benzer şekilde $f'_i(u) g'_i(v) < 0$ olması durumunda da eşitsizliğin sağlanması incelenir. Yani $(d_1, \dots, d_n)$ ve $(e_1, \dots, e_n)$ uygun seçildiğinde aşağıdaki eşitsizlik de sağlanır.

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f'_i(u) g'_i(v) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i (d_i \max(\alpha_i \gamma_i, \beta_i \delta_i) + e_i \min(\alpha_i \delta_i, \beta_i \gamma_i)) \geq -1$$

Yani hemen hemen her yerde $c(u, v)$ mevcut ise $c(u, v) \geq 0$ koşulunu sağlar. Bu da $C(u, v)$ 'nin 2-artan olduğu anlamına gelir.

Açıkça her $L_1 = (\lambda^{(1)}_1, \dots, \lambda^{(1)}_n), \dots, L_k = (\lambda^{(k)}_1, \dots, \lambda^{(k)}_n)$ 'lara (4.4)'de karşı gelen $C_1, \dots, C_k$ fonksiyonları kapula olsun. Böylece her konveks kombinasyonları da $L = \sum_{i=1}^k a_i L_i = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ olmak üzere bir $C = \sum_{i=1}^k a_i C_i$ kapulası elde edilir. Dolayısıyla Teorem 4.2'de belirlenen $L \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi (tüm $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 'ların çözümleri) bir konveks kümedir. Buna ek olarak beklenmedik bir şekilde Önerme 4.2.1 ve Önerme 4.2.2 aynı konveks L kümesini belirtebileceğini de söyleyebiliriz (Kesim 4.4'de bu, bir örnek üzerinden gösterilecektir). Burada bu durumu sadece $n = 2$ için ispat ediyoruz. Daha basit bir gösterim için

$$a_i = \max(\alpha_i \gamma_i, \beta_i \delta_i) > 0, \quad b_i = \min(\alpha_i \delta_i, \beta_i \gamma_i) < 0$$

olsun, o zaman Önerme 4.2.2, L kümesini aşağıdaki sekiz eşitsizlikle belirleyebilir:

$$(1) \quad \lambda_1 a_1 \geq -1$$

$$(2) \quad \lambda_1 b_1 \geq -1$$

$$(3) \quad \lambda_2 a_2 \geq -1$$

$$(4) \quad \lambda_2 b_2 \geq -1 \tag{4.10}$$

$$(5) \quad \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \geq -1$$

$$(6) \quad \lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_2 \geq -1$$

$$(7) \quad \lambda_1 b_1 + \lambda_2 a_2 \geq -1$$

$$(8) \quad \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \geq -1$$

Açıkça $(\lambda_1, \lambda_2) = (0,0)$ tüm bu eşitsizlikleri sağlar ve eğer her i . eşitsizliğin çözümü L_i ise, $L = \cap_{i=1}^8 L_i$ 'dir. Beşinci eşitsizlik bir $(0,0)$ noktasını kapsayan L_5 yarı-düzlemi, bu da $(-1/a_1, 0)$ ve $(0, -1/a_2)$ noktalardan geçen bir doğruyla belirlenir. Benzer şekilde L_6 da $(-1/a_1, 0)$ ve $(0, -\frac{1}{b_2})$, hem de L_7 de $(-1/b_1, 0)$ ve $(0, -\frac{1}{a_2})$ son olarak L_8 yarı düzlemi de $(-1/b_1, 0)$ ve $(0, -\frac{1}{b_2})$ noktalarıyla belirlenir. Sonuç olarak L kümesi, $(-\frac{1}{a_1}, 0), (0, -\frac{1}{a_2}), (-\frac{1}{a_1}, 0),$ ve $(0, -1/a_2)$ noktalarıyla sınırlandırılmış bir konveks kümedir. Ayrıca Önerme 4.2.1 incelediğimizde de aynı sonuç elde edilir.

4. 3. Önerilen Ailelerin Bazı Ölçüleri

Bu kısımda (4.4)'de önerilen yeni aileler için hem Kendall τ , Spearman ρ , Gini γ gibi birkaç bağımlılık ölçüsü ve hem de kuyruk bağımlılıkları üzerinde açıklamalar yapılmıştır. Açıkça kapulaların uygulamalarında bunlar çok önemlilerdir. Birçok kapulanın bu ölçüler için açık formları yoktur. Bu Kesim'de (4.4)'de önerilen yeni ailelerin Kendall τ , Spearman ρ , Gini γ gibi ölçüler için açık formlarının olduğu gösterilmiştir.

Herhangi bir $C(u, v)$ kapulası için bağımlılık ölçüleri

$$\tau_C = 1 - 4 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial C}{\partial u} \frac{\partial C}{\partial v} du dv$$

$$\rho_C = 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) du dv - 3$$

$$\gamma_C = 4 \int_0^1 [C(u, u) - C(u, 1 - u)] du - 2$$

$$t_{LC} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C(t, t)}{t}$$

$$t_{UC} = 2 - \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1 - C(t, t)}{1 - t}$$

ile verilir (Nelsen, 2006).

(4.4)'deki her yeni aile için, yukarıdaki ölçülerin hesaplamasına yönelik yeni bir teorem aşağıda verilmiştir. İspat açık olduğu için burada verilmemiştir.

4.3.1. Teorem

(4.4)'deki C kapulası ele alınsın. Bu durumda Kendall τ , Spearman ρ , Gini γ ve kuyruk bağımlılıkları aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\tau_C = -4 \int_0^1 \int_0^1 \left[v \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(u) g'_i(v) u \sum_{i=1}^n \lambda_i f'_i(u) g_i(v) + \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(u) g'_i(v) \right) \times \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i f'_i(u) g_i(v) \right) \right] du dv$$

$$\rho_C = 12 \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i \int_0^1 f_i(u) du \int_0^1 g_i(v) dv \right)$$

$$\gamma_C = 4 \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(u) g_i(u) + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(u) g_i(1-u) \right) du$$

$$t_{L_C} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(t) g_i(t)}{t} = 0$$

$$t_{U_C} = \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(t) g_i(t)}{1-t} = 0$$

Yukarıdaki ölçüler bağımsız kapula için sıfıra eşittir. Fakat Teorem 4.3.1'de görüldüğü gibi yeni ailelerde bu ölçüler f_i, g_i ($i = 1, \dots, n$) fonksiyonlarına bağlıdır ve bu yüzden bu aileler için yukarıdaki ölçüler sıfıra eşit olmayabilir.

4.4. Önerilen Genişletme İçin Uygulamalar

Burada önerilen bağımsızlık kapulasının genişletmeleri bazı örneklerle açıklanmıştır. Uygulamada genişletmelerin daha kolay incelenebilmesi için $n = 2$ durumu ele alınmıştır.

Örnek

$f_1, f_2, g_1, g_2: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları aşağıdaki gibi verilsin.

$$f_1(u) = u(1-u) = g_1(u), \quad f_2(v) = \min(v, 1-v) = g_2(v)$$

f_i, g_i ($i=1,2$) fonksiyonlarının, $[0,1/2]$ aralığında artan ve $[1/2,1]$ aralığında azalan olduğu açıktır. Burada (4.4)'de verilen C fonksiyonunun bu durumda kapula olması incelenmiş ve sonra da bağımlılık ölçüleri hesaplanmıştır. Bu yeni aile

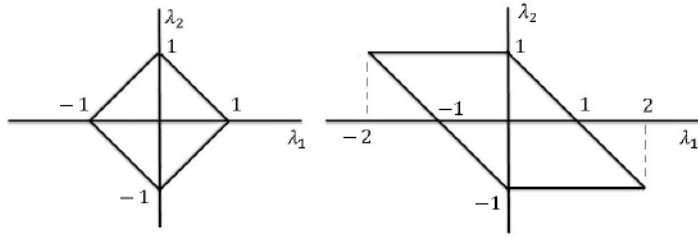
$$C(u, v) = uv + \lambda_1 uv(1-u)(1-v) + \lambda_2 \min(u, 1-u) \min(v, 1-v)$$

ile verilir. f_1, f_2, g_1, g_2 fonksiyonları (a) koşulunu sağlarlar. Bu yüzden $C(u, v)$ 'nin 2-artan olmasını inceliyoruz. Bu kapulanın yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir;

$$c(u, v) = 1 + \lambda_1(1-2u)(1-2v) +$$

$$\lambda_2(1_{[0,1/2[}(u) - 1_{]1/2,1[}(u))(1_{[0,1/2[}(v) - 1_{]1/2,1[}(v)) \geq 0$$

burada $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_1 = \gamma_1 = \gamma_2 = -1$, $\beta_1 = \beta_2 = \delta_1 = \delta_2 = 1$ 'dir. Önerme 4.2.1'den $\tau_1 = \tau_2 \in [-1,1]$ 'dir ve bu yüzden her $a \in [0,1]$ için, $(\lambda_1, \lambda_2) = (a\tau_1, (1-a)\tau_2)$ bir kapula verir (Bkz. Şekil 4.1). (λ_1, λ_2) noktası, köşeleri $(-1,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ ve $(0,-1)$ 'de olan konveks kümenin bir elemanıdır.



Şekil 4.1. Önerme (4.2.1) ve (4.2.2)'ten (λ_1, λ_2) için mümkün alan (sol tarafta), Teorem 4.2.1' den (λ_1, λ_2) için mümkün alan (sağ tarafta).

Önerme 4.2.1'ten aşağıdaki eşitsizliklerin çözülmesi gerekir.

	(d_1, d_2)	(e_1, e_2)	
(1)	(1,1)	(0,0)	$\lambda_1 + \lambda_2 \geq -1$
(2)	(1,0)	(0,0)	$\lambda_1 \geq -1$
(3)	(1,0)	(0,1)	$\lambda_1 - \lambda_2 \geq -1$
(4)	(0,1)	(0,0)	$\lambda_2 \geq -1$
(5)	(0,1)	(1,0)	$-\lambda_1 + \lambda_2 \geq -1$
(6)	(0,0)	(1,1)	$-\lambda_1 - \lambda_2 \geq -1$
(7)	(0,0)	(1,0)	$-\lambda_1 \geq -1$
(8)	(0,0)	(0,1)	$-\lambda_2 \geq -1$

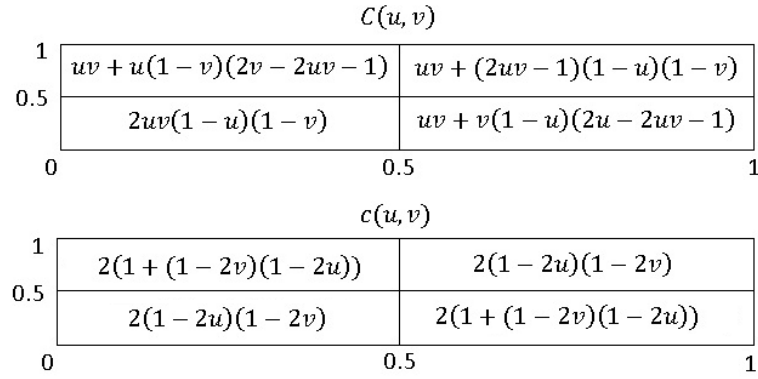
Sonra buradan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2 \in [-1, 1]$ elde edilir ve bu da Şekil 4.1'deki alana karşılık gelir. Teorem 4.2 ile elde edilen çözüm aşağıda verilmiştir (Bkz. Şekil 4.1).

$$-1 \leq \lambda_1 + \lambda_2 \leq 1, \quad -1 \leq \lambda_2 \leq 1$$

Örnek olarak, $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$ olursa (4.4)'den aşağıdaki eşitlik elde edilir

$$C(u, v) = uv + 2uv(1 - u)(1 - v) - \min(u, 1 - u)\min(v, 1 - v) \quad (4.11)$$

Bu yeni kapula daha ayrıntılı olarak Şekil 4.2'de verilmiştir.



Şekil 4.2. $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$ için kapula C (üstde) ve onun yoğunluğu c (aşağıda)

Buradan görüldüğü gibi (4.11)'te verilen kapula, Rodriguez-Lallena and Ubeda-Flores metodunun iki C_1, C_2 kapulasının konveks kombinasyonu olamaz.

$$C_1(u, v) = uv + \tau_1 uv(1 - u)(1 - v)$$

ve

$$C_2(u, v) = uv + \tau_2 \min(u, 1 - u)\min(v, 1 - v) \quad \tau_1, \tau_2 \in [-1, 1]$$

Bu yeni aile için Kesim 4.3'teki bağımlılık ölçüleri aşağıda verilir:

$$\tau_C = \frac{1}{4}\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2$$

$$\rho_C = \frac{1}{3}\lambda_1 + \frac{3}{4}\lambda_2$$

$$\gamma_C = \frac{4}{15}\lambda_1 + \frac{2}{3}\lambda_2$$

$$t_{L_C} = 0 = t_{U_C}$$

Örnek

$f_1(u) = u(1 - u) = g_1(u)$, ve $f_2(v) = g_2(v)$ fonksiyonları aşağıdaki gibi verilsin.

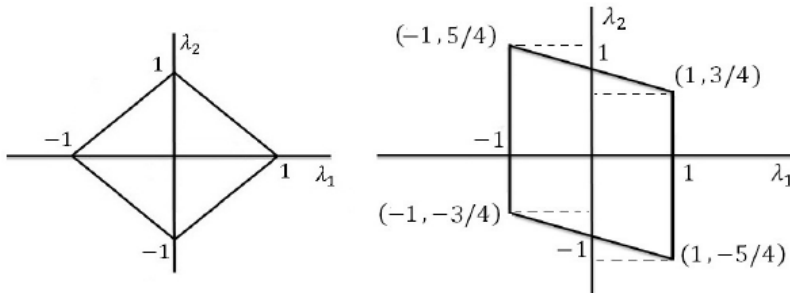
$$f_2(v) = \begin{cases} v - 1/4, & 1/4 \leq v < 1/2 \\ \frac{3}{4} - v, & 1/2 \leq v \leq 3/4 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

f_1, g_1 fonksiyonlarının $[0, 1/2]$ aralığında artan ve $[1/2, 1]$ aralığında azalan olduğu açıktır ve f'_2, g'_2 fonksiyonları $[1/4, 1/2]$ aralığında 1 ve $[1/2, 3/4]$ aralığında -1'dir. Burada (4.4)'de verilen C fonksiyonun bu durumda kapula olup olmadığı incelenmiş ve sonra da bağımlılık ölçülerini hesaplanmıştır. Bu yeni aile

$$C(u, v) = uv + \lambda_1 uv(1 - u)(1 - v) + \lambda_2 f_2(u)g_2(u)$$

ile verilir. Burada $\alpha_1 = \alpha_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = -1$, $\beta_1 = \beta_2 = \delta_1 = \delta_2 = 1$ 'dir. Önerme 4.2.1 ve Önerme 4.2.2'ten benzer şekilde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2 \in [-1, 1]$ elde edilir ve Teorem 4.2.1'den aşağıdaki sonuç elde edilir (Bkz. Şekil 4.3).

$$-1 \leq \frac{1}{4}\lambda_1 + \lambda_2 \leq 1, \quad -1 \leq \lambda_1 \leq 1$$



Şekil 4.3. Önerme (4.2.1) ve (4.2.2)'ten (λ_1, λ_2) için mümkün alan (sol tarafta), Teorem 4.2.1' den (λ_1, λ_2) için mümkün alan (sağ tarafta).

Bu yeni aile için Kesim 4.3'deki bağımlılık ölçüleri aşağıda verilmiştir.

$$\tau_C = \frac{1}{4}\lambda_1 + \frac{1}{32}\lambda_2$$

$$\rho_C = \frac{1}{3}\lambda_1 + \frac{3}{64}\lambda_2$$

$$\gamma_C = \frac{4}{15}\lambda_1 + \frac{1}{8}\lambda_2$$

$$t_{LC} = 0 = t_{UC}$$

Önceki iki Örneklerde $f_1 = g_1$, ve $f_2 = g_2$ olduğundan yeni aileler bağımsız kapulaya simetrik bir genişletme olmaktadır. Bundan sonraki örneklerde bazı asimetrik genişletmelere yer verilmiştir.

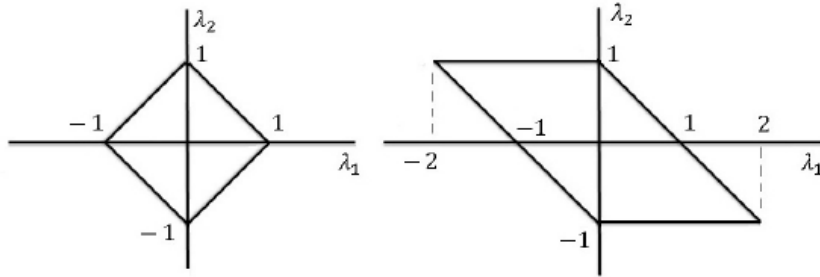
Örnek

$f_1, f_2, g_1, g_2: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları aşağıdaki gibi verilsin

$$f_1(u) = \max\left(0, \min\left(u, \frac{1}{2} - u\right)\right), \quad g_1(v) = \max\left(0, \min\left(v - \frac{1}{2}, 1 - v\right)\right)$$

$$f_2(u) = \max(0, 3u - 1 - 2u^2), \quad g_2(v) = \max(0, v^2 - 2v^3)$$

burada $\alpha_1 = \alpha_2 = \gamma_1 = -1$, $\beta_1 = \beta_2 = \delta_1 = 1$, $\gamma_2 = -\frac{1}{2}$, $\delta_2 = 1/6$ olur. Önerme 4.2.1'den $\tau_1 \in [-1,1]$ ve $\tau_2 \in [-2,2]$ bu yüzden her $a \in [0,1]$ için, $(\lambda_1, \lambda_2) = (a\tau_1, (1-a)\tau_2)$ bir kapula verir (Bkz. Şekil 4.4). (λ_1, λ_2) noktası, köşeleri $(-1,0)$, $(1,0)$, $(0,2)$ ve $(0,-2)$ olan konveks kümenin bir elemanıdır.



Şekil 4.4. Önerme (4.2.1) ve (4.2.2)'ten (λ_1, λ_2) için mümkün alan (sol tarafta), Teorem 4.2.1' den (λ_1, λ_2) için mümkün alan (sağ tarafta).

Önerme (4.3)'den aşağıdaki eşitsizliklerin çözülmesi gerekir.

	(d_1, d_2)	(e_1, e_2)	
(1)	(1,1)	(0,0)	$\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2 \geq -1$
(2)	(1,0)	(0,0)	$\lambda_1 \geq -1$
(3)	(1,0)	(0,1)	$\lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_2 \geq -1$
(4)	(0,1)	(0,0)	$\frac{1}{2}\lambda_2 \geq -1$
(5)	(0,1)	(1,0)	$-\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2 \geq -1$

$$(6) \quad (0,0) \quad (1,1) \quad -\lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_2 \geq -1$$

$$(7) \quad (0,0) \quad (1,0) \quad -\lambda_1 \geq -1$$

$$(8) \quad (0,0) \quad (0,1) \quad -\frac{1}{2}\lambda_2 \geq -1$$

buradan $\lambda_1, \lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2, \lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_2 \in [-1,1], \lambda_2 \in [-2,2]$ olarak elde edilir ve bu da Şekil 4.4'deki alana karşılık gelir. Bu alan Önerme 4.2.1'den hesaplanır. Teorem 4.2.1 ile elde edilen çözüm aşağıda verilmiştir (Bkz. Şekil 4.4).

$$\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2 \leq 1, \quad -1 \leq \lambda_1 \leq 1, \quad \lambda_2 \geq -2$$

bu yeni aile için Kesim 4.3'deki bağımlılık ölçüleri aşağıdaki gibi verilir:

$$\tau_C = \frac{1}{32}\lambda_1 + \frac{1}{512}\lambda_2$$

$$\rho_C = \frac{3}{64}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

$$\gamma_C = 0$$

$$t_{L_C} = 0 = t_{U_C}$$

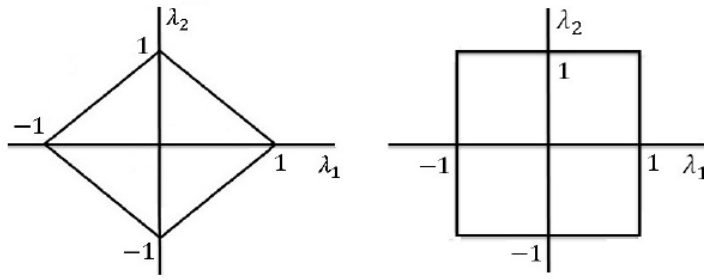
Örnek

$f_1, f_2, g_1, g_2: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları aşağıdaki gibi verilsin.

$$f_1(u) = \frac{1}{3\pi} \sin(3\pi u), \quad g_1(v) = \max\left(0, \min\left(v, \frac{1}{2} - v\right)\right)$$

$$f_2(u) = u(1-u), \quad g_2(v) = \max\left(0, \min\left(v - \frac{1}{2}, 1-v\right)\right)$$

burada $\alpha_1 = \alpha_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = -1, \beta_1 = \beta_2 = \delta_1 = \delta_2 = 1$ olur. Önerme 4.2.1'den $\tau_1, \tau_2 \in [-1,1]$ 'dir, bu yüzden her $a \in [0,1]$ için, $(\lambda_1, \lambda_2) = (a\tau_1, (1-a)\tau_2)$ bir kapula verir (Bkz. Şekil 4.5). (λ_1, λ_2) noktası, köşeleri $(-1,0), (1,0), (0,1)$ ve $(0,-1)$ olan konveks kümenin bir elemanıdır.



Şekil 4.5. Önerme (4.2.1) ve (4.2.2)'den (λ_1, λ_2) için mümkün alan (sol tarafta), Teorem 4.2.1'den (λ_1, λ_2) için mümkün alan (sağ tarafta)

Önerme (4.3)'den aşağıdaki eşitsizliklerin çözülmesi gerekir.

	(d_1, d_2)	(e_1, e_2)	
(1)	(1,1)	(0,0)	$\lambda_1 + \lambda_2 \geq -1$
(2)	(1,0)	(0,0)	$\lambda_1 \geq -1$
(3)	(1,0)	(0,1)	$\lambda_1 - \lambda_2 \geq -1$
(4)	(0,1)	(0,0)	$\lambda_2 \geq -1$
(5)	(0,1)	(1,0)	$-\lambda_1 + \lambda_2 \geq -1$
(6)	(0,0)	(1,1)	$-\lambda_1 - \lambda_2 \geq -1$
(7)	(0,0)	(1,0)	$-\lambda_1 \geq -1$
(8)	(0,0)	(0,1)	$-\lambda_2 \geq -1$

ve buradan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2 \in [-1, 1]$ elde edilir ve bu da Önerme 4.2.1'den hesaplanan Şekil 4.5'deki alana karşılık gelir. Teorem 4.2.1 ile elde edilen çözüm aşağıda verilmiştir. (Bkz. Şekil 4.5):

$$-1 \leq \lambda_1 \leq 1, -1 \leq \lambda_2 \leq 1.$$

4.4.1. Hatırlatma

Her $i = 1, 2, \dots, n$ için f_i, g_i fonksiyonların tanım kümesi ayrık olduğu zaman, λ_i 'lerin hesaplaması için Rodriguez-Lallena ve Ubeda'in sonucunu kullanılabılır. Yani her $i = 1, 2, \dots, n$ için aşağıdaki gibi olur:

$$\frac{-1}{\max(\alpha_i \gamma_i, \beta_i \delta_i)} \leq \lambda_i \leq \frac{-1}{\min(\alpha_i \delta_i, \beta_i \gamma_i)}$$

4.5. Önerilen Metodla Bazi Kapula Üretme Metotları Arasındaki İlişkiler

(4.4)'deki önerdiğimiz model daha ayrıntılı olarak ele alınabilir. Örneğin, bu model kapulalarda sıralı toplamsal yapı (ordinal sum construction) ile uyumludur, Mesiar ve Sempi (2010) ve Nelsen (2006). Bağımsız kapuladan her sıralı toplam (ordinal sum) kapulası aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$D = (\langle u_k, v_k, \Pi \rangle / k \in K) \quad (4.12)$$

burada $([u_k, v_k])_{k \in K}$ aralığı $[0,1]$ aralığının açık alt aralıklarının bir ayrık sistemidir ve D fonksiyonu aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$D(u, v) = \begin{cases} u_k + \frac{(u-u_k)(v-v_k)}{v_k-u_k}, & \text{her } k \in K \text{ için } (u, v) \in]u_k, v_k[\\ \min(u, v), & \text{diğer hallerde} \end{cases} \quad (4.13)$$

$f_k, g_k: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları her $k \in K$ için mutlak sürekli fonksiyonlardır öyle ki her $k \in K$, için $C_k: [0,1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ olarak tanımlanan $C_k(u, v) = uv + \lambda_k f_k(u) g_k(v)$ fonksiyonu her $\lambda_k \in [p_k, q_k]$ için bir kapuladır.

Her $k \in K$ için $f_k^*, g_k^*: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarını

$$f_k^*(u) = \begin{cases} f_k\left(\frac{u-u_k}{v_k-u_k}\right), & u \in]u_k, v_k[\\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (4.14)$$

$$g_k^*(v) = \begin{cases} g_k\left(\frac{v-v_k}{v_k-u_k}\right), & v \in]u_k, v_k[\\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (4.15)$$

gibi tanımlayalım. Açıkça $(f_k^*)_{k \in K}$ fonksiyonlarının tanım kümeleri de ayrıktır. Aynısı $(g_k^*)_{k \in K}$ fonksiyonlarında da söz konusudur. Aşağıda verilen sıralı toplam (ordinal sum)

$$C = (\langle u_k, v_k, C_k \rangle / k \in K). \quad (4.16)$$

Hatırlatma 4.4.1'den yararlanılarak

$$C(u, v) = D(u, v) + \sum_{k \in K} \lambda_k f_k^*(u) g_k^*(v) \quad (4.17)$$

gibi ifade edilebileceği açıktır. Bu C fonksiyonu her $k \in K$ ve $\lambda_k \in [p_k, q_k]$ için bir kapuladır.

4.5.1. Hatırlatma

Yeni önerilen metot ile kapulaların döndürmeli/sağkalım yapısı (flipping/survival construction) metodu arasında ilginç bir ilişki vardır (Nelsen, 2006).

$C: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ kapuladır ancak ve ancak $D: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ ile tanımlanan

$$D(u, v) = u - C(u, 1 - v) \quad (4.18)$$

fonksiyonu kapula olması gerçeğinden (D kapulasına C kapulasının ikinci koordinat döndürmesi denir) yararlanarak eğer (4.4)'de verilen C fonksiyonu kapulaysa, bu kapulaya karşılık gelen

$$D(u, v) = uv - \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(u) g_i(1 - v) \quad (4.19)$$

ile verilen D fonksiyonu da bir kapuladır. Aynı zamanda bunun tersi de geçerlidir. Benzer iddia C kapulasının birinci koordinata göre döndürülmüş fonksiyonu E ve sağkalım kapulası F için de geçerlidir. Bunlar

$$E(u, v) = uv - \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(1 - u) g_i(v) \quad (4.20)$$

ve

$$F(u, v) = uv + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(1 - u) g_i(1 - v) \quad (4.21)$$

ile tanımlanır. Açıkça tüm $((f_i(u), g_i(v)) / i = 1, \dots, n), ((-f_i(1 - u), g_i(v)) / i = 1, \dots, n), ((f_i(u), -g_i(1 - v)) / i = 1, \dots, n),$ ve $((-f_i(1 - u), -g_i(1 - v)) / i = 1, \dots, n)$ fonksiyon sistemlerindeki deki $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ların tanım kümeleri ile (4.4)'deki $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ların tanım kümeleri aynıdır.

Bu kısımda Nelsen (2006)'daki kapulaların döndürmeli/sağkalım yapısında $(a, b) \in [0,1]^2$ üzerinde bir genişletmeden bahsedilmiştir. Her $C: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ iken C 'nin hacmi üzerinden tanımlı bir $C_{(a,b)}: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ kapulası

$$C_{(a,b)}(u, v) = V_C([a(1 - u), u + a(1 - u)] \times [b(1 - v), v + b(1 - v)])$$

ile tanımlanır (Nelsen, 2006). $C_{(a,b)}$ kapulasının (4.4)'de tanımlanan herhangi bir C kapulası için aşağıdaki gibi çıkartıldığının gösterilmesi kolaydır.

$$C_{(a,b)}(u, v) = uv + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_{i,a}(u) g_{i,b}(v); \quad (4.22)$$

burada

$$f_{i,a}(u) = f_i(u + a(1 - u)) - f_i(a(1 - u)) \quad (4.23)$$

ve

$$g_{i,b}(u) = g_i(v + b(1 - v)) - g_i(b(1 - v)) \quad (4.24)$$

ile verilir. Böylece (4.4)'de verilen C kapulası $((f_i(u), g_i(v)) / i = 1, \dots, n)$ gibi bir fonksiyon sistemine bağlanırsa bu durumda $C_{(a,b)}$ kapulası aşağıda verilen fonksiyon sistemine bağlanır.

$$\left((f_{i,a}, g_{i,b}) / i = 1, \dots, n \right) \quad (4.25)$$

Açıkçası birinci fonksiyon sisteminden oluşturulan ve (4.4)'de verilen C 'nin kapula olabilmesi için $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ parametrelerinin tanım kümesi, ikinci fonksiyon sisteminden oluşturulan ve (4.22)'de verilen $C_{(a,b)}$ 'nin kapula olabilmesi için verilen $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ parametrelerinin tanım kümesinin bir alt kümesidir. Örneğin, Örnek 4.1'deki birinci fonksiyon sistemi göz önüne alınsın ve Şekil 4.1 incelensin. $a = b = 0,5$ iken tüm fonksiyonlara karşılık gelen dönüşümle yeni parametrelerin tanım kümesi boş kümedir ve dolayısıyla her $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ iken model (4.4)'de verilen kapula da bağımsızlık kapulası olur.

Örnek

$f(u) = u(1 - u)$ olursa $f_a(u) = u(1 - u)(1 - 2a)$ elde edilir. Eğer $f(u) = \min(u, 1 - u)$ olursa $f_a(u) = \text{sign}(1 - 2a)\min(u, (1 - u)(1 - 2a))$ elde edilir.

4.5.2. Hatırlatma

Genelde $f_a(u) = f(u + a(1 - u)) - f(a(1 - u))$ ile verilir. Böylece $f'_a(u) = (1 - a)f'(u + a(1 - u)) + af'(a(1 - u))$ olur. Açıkça $f'_a(u) \in [\alpha, \beta]$ olur ki burada α, β aralıkları giriş bölümünde

$$\alpha = \inf\{f'(u): u \in A\} < 0, \quad \beta = \sup\{f'(u): u \in A\} > 0$$

ile tanımlanmıştır.

4.6. Sonuç

Bu bölümde bağımsızlık kapulasının genişletmesine dayalı yeni simetrik/asimetrik kapula aileleri önerilmiştir. Bu yeni kapulalar daha esnektir, bu yüzden bu kapulalarla daha çok ve daha farklı bağımlılık durumları modellenabilir. Bu yeni aileler için bir kaç bağımlılık ölçüsü ve kuyruk bağımlılıkları da verilmiştir. Ayrıca bu yeni modelin bir kaç kapula türetme metodu ile ilginç ilişkisinin var olduğu gösterilmiştir (Mesiar ve Najjari, 2014).

5. ARŞİMEDYEN KAPULALARA BİR UYGULAMA

Bu bölümde temel amaç, West Texas Intermediate (WTI) ile Brent–Europe ham petrollerinin fiyatları arasındaki bağımlılığı modellemektir. Bu modellemede kapula tekniğini ele alıp, iyi bilinen bazı Arşimedyen kapula aileleri yanında üç tane de yeni Arşimedyen kapula ailesinden yararlanılacaktır. Veri kümesini oluşturan değişkenlerin bağımlılık yapısının daha iyi modellenmesi için bu ailelerin konveks kombinasyonları da incelenmiştir. Veri kümesi ham petrol fiyatlarının, Haziran 1987–Ekim 2013 tarihleri arasındaki aylık ortalama değerlerini içeren 318 gözlemden oluşmaktadır.

5.1. Giriş

Korelasyon katsayısı, bağımlılığın bir skaler ölçüsüdür ve bağımlılık yapısı hakkında her durumda fazla bir şey açıklamamaktadır. Bir başka deyişle değişkenlerin dağılımı normal olmadığı zaman, korelasyon katsayısı güvenilir değildir. Bu gibi durumlarda bağımlılık yapısının modellenmesi ve incelenmesi için kapulalar tercih edilir. Kapulalar tek değişkenli dağılımları birleştirip, ortak dağılımları özel bir bağımlılık yapısıyla tanımlamaktadır. Böylece ölçek ve şekil marjinallerine dayalı olarak değişkenler arasındaki bağımlılık yapısı kapula ile belirlenir (daha net bilgi için Bertail (2006); Kojadinovic ve Yan (2011); Schweizer (1991)’e bakınız). Dolayısıyla bu özelliğiyle olasılık teorisinin yer aldığı birçok alanda değişkenler arasındaki bağımlılığı modellemede kapulalar oldukça önemli bir role sahiptir.

Son yıllarda, kapula tekniği çok geniş alanlarda kullanılmaya başlamıştır. Örnek olarak, Clemen ve Reilly (1999); McNeil ve diğerleri (2004) birçok araştırmacı kapula yöntemlerini finans alanında kullanmışlardır. Najjari ve diğerleri (2014) kapula ile meteorolojik verileri modellediler ve Çelebioğlu (2003) öğrencilerin vize ve final notları arasındaki bağımlılık yapısını kapula ile modellemiştir. Bacigál ve Komorníková (2006) jeodezik verilerinin bağımlılığında Arşimedyen kapulaları kullanmışlardır. Najjari ve diğerleri (2014) selin aluş zirvesi ve haciminin (flood peak and volume) arasındaki bağımlılığın modellenmesinde kapulalardan yararlanmışlardır. Zhu ve diğerleri (2014) borsadaki ham petrol fiyatlarında koşulu ve koşulsuz kapula modellerini kullanarak

bağımlılığı modellemişlerdir. Al-Harthy ve diğerleri (2007) petrolün yerden çıkarılmasının karar aşamasında kapula tekniğinden yararlanıp bu tekniğin hem Envelop metodu hem de Iman-Conover metodundan daha iyi olduğunu göstermişlerdir. Kapulaların diğer kullanımı ile ilgili çalışmalar için Hua ve Joe (2011)'den yararlanılabilir.

Bu çalışmada amaç West Texas Intermediate (WTI) ve Brent-Europe ham petrollerinin fiyatları arasındaki bağımlılık yapısını modellemede kapula parametrelerinin tahmini için en çok olabilirlik yöntemi ve Genest ve diğerleri (1995)'de verilen parametrik olmayan yöntem ele alınmıştır. Henüz çalışılan yeni bir yöntemle de parametreler tahmin edilip, sonucu diğer tahminlerle karşılaştırılmıştır. Bu yeni yöntem uyum iyiliği testinin değerinin minimum yapılmasına dayalıdır. Kapulanın uygunluğunun karar verilmesinde (Genest ve Rivest (1993); Genest ve diğerleri (1995))'de verilen parametrik olmayan ve yarı parametrik prosedüründen, uyum iyiliği testi ve Akaike bilgi kriteri kullanılmıştır.

Kesim 5.2'de veriye uygun kapula seçim tekniklerinden bahsedilmiştir. Kesim 5.3'de ise ham petrol fiyatları arasındaki bağımlılık yapısının modellenmesine yer verilmiştir. Sonuç ve tartışmalar ise Kesim 5.4'de yer almaktadır.

5.2. Uygun Kapula Seçme Teknikleri

Bu bölümde veri kümesinde yer alan değişkenlerin bağımlılık yapısına uygun kapula seçme tekniklerinin bir kısmı verilecektir. Literatürde uygun kapula seçimi için bazı metotlar önerilmiştir. Uyumluluk içeren metotlar (Genest, Rivest, 1993; Genest ve diğerleri, 1995), en çok olabilirlik (ML), sözde en çok olabilirlik (PML) (Genest ve diğerleri, 1995), marjinallere ilişkin çıkarsama yöntemi (IFM) (Joe, 1997; Hui-Ming ve diğerleri, 2014) ve minimum uzaklık (MD) (Schweizer, 1991; Song, 2007) bunlardan bazılarıdır. Bu bölümde kapula parametrelerinin tahmininde üç metod ve uygun kapula seçiminde de üç ölçüye dayalı olarak çalışılmıştır.

5.2.1. Kapula parametrelerinin tahmini

Bu kısımda kapula parametrelerinin üç ayrı metotla tahmin edilmesi aşamaları verilmiştir. Birincisi parametrik olmayan tahmindir ve Genest ve diğerleri(1995) tarafından

önerilmiştir. Bu metotta veri kümesinden Kendall τ , Spearman ρ ve Gini γ ölçülerinin değerini hesaplanıp bunlar kullanılarak kapula parametreleri tahmin edilmektedir. Bu çalışmada kullandığımız kapulalar tek parametrelidir olduklarından sadece Kendall τ değerini ele alınmıştır.

İkinci metot sözde log-olabilirlik tahminidir. Eğer (X_i, Y_i) her $i = 1, \dots, n$ için mevcut ise, o zaman sözde log-olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi verilir.

$$L(\theta) = \sum_{i=1}^n \log(F_n(x), G_n(y)) \quad (5.1)$$

Burada F_n, G_n benzer şekilde aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$F_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n \text{eğer } [X_i \leq x; 1; 0] \quad (5.2)$$

ve

$$c_\theta = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} C_\theta(u, v). \quad (5.3)$$

Bu durumda θ log-olabilirlik fonksiyonunu en büyükleyecek şekilde tahmin edilir.

Üçüncü metot tarafımızdan önerilen bir metottur ve hâlâ üzerinde çalışmalarımız devam etmektedir. Bu metot uyum iyiliği testine dayanmaktadır:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{[f_i - e_i]^2}{e_i}.$$

Burada k grup sayısıdır ve genelde $k = \sqrt[4]{n}$ ile hesaplanır (n veri sayısı), i .inci gruptaki gözlem sayısı f_i ve aynı grupta teorik (kapulayla) hesaplanan gözlem sayısı $e_i = np(x_i)$ ile gösterilmiştir, tabi ki e_i kapulanın parametere değerine bağlı olarak hesaplanır. Bu durumda χ_θ^2 değerini en küçük yapan $\hat{\theta}$ değeri tahmin edilir.

5.2.2. Bağımlılık yapısına uygun kapula seçme teknikleri

Kapula parametreleri tahmin edildikten sonra, kapulanın uygunluğunu test etmek için üç teknik kullanılmıştır. Bunlar Genest ve Rivest (1993); Genest ve diğerleri (1995) tarafından önerilen parametrik olamayan ve yarı-parametrik olan iki tekniktir. Farz edelim ki (X_i, Y_i) her $i = 1, \dots, n$ mevcut olsun ve ortak dağılım fonksiyonu H , (Skaler teorem ile) Arşimedyen kapulası C_φ kapulası ile ilişkilendirilsin. Amacımız φ fonksiyonunun formunu belirlemektir. İlk başta, bir yeni rasgele değişken $Z_i = H(X_i, Y_i)$ olsun ve bunun

dağılım fonksiyonu $K(z) = Prob(Z_i \leq z)$ olarak verilsin. Bu dağılım fonksiyonu aşağıda verilen denklemle bir Arşimedyen kapulanın üreticisiyle ilişkilidir.

$$K(z) = K_\varphi(z) = z - \frac{\varphi(z)}{\varphi'(z)}. \quad (5.4)$$

φ fonksiyonunun belirlenmesi için,

1. Veriden Kendall's tau değerini aşağıdaki gibi hesaplanır,

$$\tau_n = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} \text{sign}[(X_i - X_j)(Y_i - Y_j)]. \quad (5.5)$$

2. K 'nin bir parametrik olamayan tahminini aşağıdaki gibi bulunur:

- Önce sahte-gözlemler tanıtılır.

$$Z_i = (n-1)^{-1} \sum_{j=1}^n \text{eğer } [X_j < X_i \text{ \& } Y_j - Y_i; 1; 0], \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.6)$$

- Sonra, K 'nin tahminini bulunur:

$$K_n(z) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \text{eğer } [Z_i \leq z; 1; 0]. \quad (5.7)$$

3. Eşitlik (5.5)'te yer alan fonksiyonu kullanarak K_φ 'nin parametrik tahmini bulunur. Özet olarak n tahmini anlamına gelmek üzere $\tau_n \rightarrow \theta_n \rightarrow \varphi_n(t) \rightarrow K_{\varphi_n}(z)$ ile ifade edilir.

Üçüncü adım her karşılaştırmada, arzu ettiğimiz kapula için tekrar edilecektir. En iyi üreteç $K_n(z)$ fonksiyonuna en yakın olan $K_{\varphi_n}(z)$ tahminidir. Bu yakınsama L_2 -norm yardımıyla aşağıdaki gibi ölçülür.

$$\int_0^1 [K_{\varphi_n}(z) - K_n(z)]^2 dz \quad (5.8)$$

Ya da grafiksel olarak (i) $z - K(z)$ grafiğini z 'ye göre veya (ii) karşı gelen Q-Q plotlarını çizerek modelin uyumluluğu anlaşılır. Hatırlatma olarak, Q-Q plotları yardımıyla iki verinin aynı dağılıma sahip olup olmadığı belirlenebilir. Veri kümelerinin çeyrekliklerinden çizilen grafik ne kadar $y = x$ grafiğine yakın olursa, iki verinin dağılımı o kadar birbirine yakındır. Daha detaylı bilgi için Frees ve Valdez (1998)'ye bakılabilir.

İkinci ölçüt AIC'dir ve aşağıdaki gibidir verilir.

$$AIC = -2(\log - \text{likelihood}) + 2k \quad (5.9)$$

burada k parametre sayısıdır. En küçük AIC değerine sahip olan kapula en iyi uyumun elde edildiği kapuladır.

Üçüncü ölçüt, uyum iyiliği testidir ve aşağıdaki gibidir

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{[f_i - e_i]^2}{e_i}$$

burada k grup sayısıdır ve genelde n örnek hacmi olmak üzere $k = \sqrt[4]{n}$ olarak alınır, i. gruptaki gözlem sayısı f_i ve aynı grupta teorik (kapula) hesaplanan gözlem sayısı $e_i = np(x_i)$ ile gösterilmiştir. Detaylar için Genest ve diğerleri (2009)'e bakılabilir. Bu çalışmada bu testi yapmak için her iki değişken 4 eşit düzgün aralığa bölündü, $Sd = 9$ ve $\alpha = 0,05$ olarak alındığında kritik değer $\chi^2_{0,05;9} = 16,9190$ olarak belirlenir. Hesaplamalarda Matlab programı kullanılmıştır.

Çizelge 5.1. Bu çalışmada ele alınan kapulalar ve bunlara ilişkin bilgiler

Kapula	Üretici	Kendall tau	λ_L	λ_U	θ aralığı
Clayton	$\frac{1}{\theta}(\frac{1}{t^\theta} - 1)$	$\frac{\theta}{\theta + 2}$	$2^{-\frac{1}{\theta}}$	0	$(0, \infty)$
Gumbel	$(-\ln t)^\theta$	$\frac{\theta - 1}{\theta}$	0	$2 - 2^{\frac{1}{\theta}}$	$[1, \infty)$
A12	$(\frac{1}{t} - 1)^\theta$	$1 - \frac{2}{3\theta}$	$2^{-\frac{1}{\theta}}$	$2 - 2^{\frac{1}{\theta}}$	$[1, \infty)$
A14	$(t^{-\frac{1}{\theta}} - 1)^\theta$	$1 - \frac{2}{1 + 2\theta}$	$\frac{1}{2}$	$2 - 2^{\frac{1}{\theta}}$	$[1, \infty)$
A15	$(1 - t^{\frac{1}{\theta}})^\theta$	$1 + \frac{2}{1 + 2\theta}$	0	$2 - 2^{\frac{1}{\theta}}$	$[1, \infty)$
cot-kapula	$\cot^\theta(\frac{\pi t}{2})$	$1 - \frac{8}{\pi^2 \theta}$	$2^{-\frac{1}{\theta}}$	$2 - 2^{\frac{1}{\theta}}$	$[1, \infty)$
coth-kapula	$\coth(\theta t) - \coth(\theta)$	$1 + \frac{2}{\theta^2} - \frac{2}{\theta} \coth(\theta)$	1/2	0	$[1, \infty)$
csch-kapula	$\operatorname{csch}(t^\theta) - \operatorname{csch}(1)$	$\frac{\theta}{\theta + 2}$	$2^{-\frac{1}{\theta}}$	0	$(0, \infty)$

5.3. Ham Petrol Verisinin Fiyatlarının Bağımlılık Yapısının Modellemesi

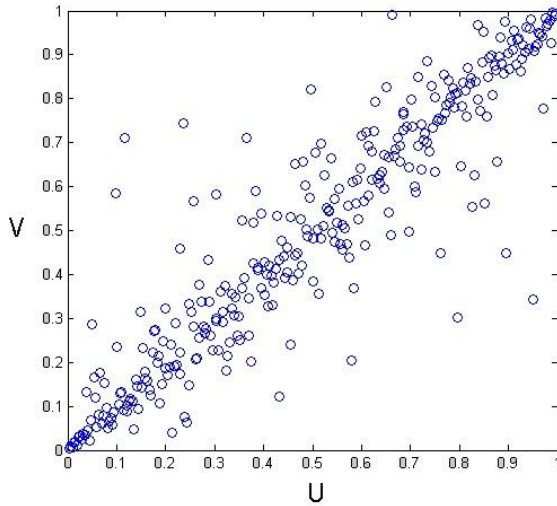
Bu Kesimde West Texas Intermediate (WTI) ve Brent-Europe ham petrollerinin fiyatları arasındaki bağımlılığın modellemesi yer almaktadır. Bu amaçla Haziran 1987-Ekim 2013 tarihleri arasında aylık ortalama ham petrol fiyatları kullanılmıştır. Kullanılan veri seti 318 gözlemden oluşmaktadır. Bu veri kümesi Federal Reserve Bank of St. Louis sitesinde online olarak mevcuttur. Veri kümesinde yer alan gözlemlerin serisel bağımlılıkları (serial/temporal independence) test edildi ve devamında da bir fark alarak durağan hale getirildiler, detaylı bilgi için Joe (2005)'ye bakılabilir. Sonra her verinin sıra sayısını 318'e bölerek bu veriler $[0,1]$ aralığına taşındı. Şekil 5.1'de bu verilerin serpmeye diyagramı ve Çizelge 5.2'de de bağımlılık ölçüleri gösterilmiştir.

Çizelge 5.2. WTI ve Brent-Europe ham petrol fiyatları için bağımlılık ölçüleri

Veriler	Kendall τ	Spearman ρ	Gini γ
Ham petrol fiyatları	0,7802	0,916	0,7886

Modellemede kullanılan Arşimedyen kapula ailelerine ait bilgiler Çizelge 1’de verilmiştir. A12, A14 ve A15 aileleri Nelsen’nin kitabında Çizelge 5.2’de sırasıyla 4.2.12; 4.2.14 ve 4.2.15 aileleri ile numaralandırılmıştır. Çizelge 5.1’de yeni tanıtılmış üç Arşimedyen kapula ailesi vardır. Ayrıca Pirmoradian ve Hamzah (2011) tarafından önerilen cot-kopulanın trigonometrik bir üreticisi de mevcuttur. Bunların dışında Çizelge 1’de yer alan coth-kopula ve csch-kopula sırasıyla Najjari ve diğerleri (2014); Bal ve Najjari (2013) tarafından önerilmiştir ve hiperbolik üreticileri de Çizelgeye eklenmiştir.

Kesim 5.3’de bahsedildiği gibi Çizelge 5.1’de verilen kapulaların parametrelerini üç metotla da tahmin edip, üç farklı metotla da bu ailelerin bağımlılık yapısına uygunluğu test edilmiştir. Çizelge 5.1’de aileler tek parametrelidir olduğundan, parametrik olmayan tahminlerden sadece Kendal τ değeri kullanılmıştır ve 0,7802 olarak hesaplanıp Çizelge 5,2’de verilmiştir. Çizelge 5.3’te ikinci sütunda ailelerin parametrelerinin, parametrik olmayan tahminleri ve üçüncü sütunda K_{φ_n} ve K_n uzaklıkları verilmiştir.



Şekil 5.1. WTI (U) and Brent-Europe (V) ham petrollerinin fiyatları arasındaki bağımlılık yapısı

Son olarak dördüncü sütunda uyum iyiliği testine ait sonuçlar yer almaktadır. Uyum iyiliği testinde kritik nokta $\chi^2_{0,05;9} = 16,9190$ olduğundan hiç bir aile bu veriler için uygun görülmemektedir ve cot-kopula 19,1106 ile en küçük uyum iyiliği test değerine sahiptir.

$d(K_{\varphi_n}, K_n)$ kriterine göre de A12 ve cot-kopula sırasıyla 0,0671 ve 0,0867 ile en küçük değere sahiptir.

Çizelge 5.3. Parametrik olamayan tahminleri ve uygun kapula testlerinin sonuçları

Kapula	Parametre	$d(K_{\varphi_n}, K_n)$	Uyum İ. testi
Gumbel	4,55	0,1466	37,6212
Clayton	7,10	0,6562	126,7121
A12	3,03	0,0671	21,7133
A14	4,05	14,2561	31,7156
A15	5,05	0,2217	53,9645
Cot-kapula	3,69	0,0867	19,1106
Coth-kapula	7,96	0,1786	61,5989
Csch-kapula	7,10	14,3396	126,4086

Kapulaların konveks kombinasyonları da kapula olduğundan Çizelge 5.1’de yer alan bir kaç kapulanın konveks kombinasyonları test yapıldı ve sonuçlar Çizelge 5.4’te verildi. Çizelge 4’te θ_1 birinci aile ve θ_2 ikinci ailenin parametresidir ve a değeri ise uyum iyiliği testinin değerini minimum yapan değer olarak ayarlanmıştır. Burada sadece uyum iyiliği testi yapıldı ve testin değerleri son sütunda verilmiştir. Bu değer ile verinin yapısına uygun kapula görülmemektedir.

Çizelge 5.4. Parametrik olmayan tahmini ve konveks kombinasyon sonuçları

$aC_{\theta_1} + (1 - a)C_{\theta_2}$	θ_1	θ_2	a	GOF test
Clayton, Gumbel	7,10	4,55	0,46	27,1601
Clayton, A12	7,10	3,03	0,01	21,6374
Clayton, A14	7,10	4,05	0,92	28,7528
Clayton, csch-kapula	7,10	7,10	0,01	126,5237
Clayton, coth-kapula	7,10	7,96	0,31	51,8123
Clayton, cot-kapula	7,10	3,69	0,01	19,1840
A12, A14	3,03	4,05	0,91	18,0486
A12, Gumbel	3,03	4,55	0,99	21,6785
A12, cot-kapula	3,03	3,69	0,01	19,1789

Çizelge 5.5’de kapulaların parametrelerini EÇO metoduyla tahmin edilen değerleri verilmektedir. Bu Çizelgede ikinci sütunda AIC değerleri ve üçüncü sütunda GOF testinin değerleri yer almıştır. A15 ailesinin ikinci türevinin açık bir formu olmadığı için MLE tahmini elde edilemedi. AIC kriterine göre csch-kapula en küçük değere sahiptir ve

dolayısıyla 4,01 olan parametre değeri ile bağımlılık yapısına uygun olan model seçilmektedir. Uyum iyiliği testiyle sadece Clayton kapulası 4,96 parametre değeriyle bağımlılık yapısının modellenmesinde uygun olduğu belirlenmiştir ve uyum iyiliği testinin değeri 16,0366'dır.

Çizelge 5.5. EÇO tahminleri ve uygun kapula seçme sonuçları

Kapula	Parametre	AIC	Uyum iyiliği
Gumbel	4,16	-610,55	29,0269
Clayton	4,96	-569,07	16,0366
A12	2,99	-662,7	20,2576
A14	3,73	-132,75	23,425
A15	-	-	-
Cot-kapula	6,82	-376,12	98,5829
Coth-kapula	8,12	-633,2	68,9936
Csch-kapula	4,01	-823,59	29,6509

Çizelge 5.4'e benzer şekilde Çizelge 5.6 EÇO tahminleri için hazırlanmış ve burada kapulanın bazı konveks kombinasyonları test edilmektedir. Burada bazı kapulalar, bu verilerin bağımlılık yapısının modellenmesinde uygun bulunmuştur. Parametre 4,96 değere sahip olan Clayton kapulasının diğer bazı kapulalarla konveks kombinasyonu bağımlılık yapısını modellemeyi başaramamıştır. En küçük uyum iyiliği değeri 0,64Clayton+0,36Gumbel kapulasına aittir ve bu değer 9,2518 olarak bulunmuştur. Açıkça konveks kombinasyon da her kapulanın kotası o kapulanın Çizelge 5.5 de uyum iyiliği testin değerine ilişkilidir.

Çizelge 5.6. EÇO ve konveks kombinasyon sonuçları

$aC_{\theta_1} + (1 - a)C_{\theta_2}$	θ_1	θ_2	a	GOF
Clayton, Gumbel	4,96	4,16	0,64	10,9009
Clayton, A12	4,96	2,99	0,69	9,2518
Clayton, A14	4,96	3,73	0,87	11,3295
Clayton, csch-kapula	4,96	6,82	0,90	16,1664
Clayton, coth-kapula	4,96	8,11	0,90	16,0820
Clayton, cot-kapula	4,96	4,01	0,96	16,0289
A12, A14	2,99	3,73	0,88	17,5999
A12, Gumbel	2,99	4,16	0,93	20,1785
A12, cot-copula	2,99	4,01	0,99	20,3172

Uyum iyiliği testinin değerini minimum yapan parametre değeri metodu ele alındığında elde edilen sonuçlar Çizelge 5.7’de verilmiştir. Açıkça A14 ve A15 kapulaları hariç tüm kapulalar bağımlılık yapısını modellemeye uygun görülmüştür. En küçük uyum iyiliği değeri, parametre değeri 4,11 olan Clayton kapulasıdır. Burada uyum iyiliği testinin değeri 9,8438’dir. Bu metot üzerinde hala çalışmalarımız devam etmektedir ve metodun hangi koşullar altında doğru olduğu, hangi kapulalarda ve ne zaman kullanılabileceği, ve bu tip başka soruları cevaplamaya çalışmaktayız. Dolayısıyla bu metodun kullanımının şimdilik yeterli olduğunu düşünerek bu metot başka testleri tahminde kullanılmamıştır.

Çizelge 5.7. Uyum iyiliği testinin değerini minimum yapan parametre

Kapula	Parametre	Uyum iyiliği
Gumbel	3,6	23,4352
Clayton	4,11	9,8438
A12	2,48	12,2719
A14	3,16	18,1885
A15	4,04	29,5250
csch-kopula	4,12	9,8953
coth-kopula	5,36	16,0298
cot-kopula	3,08	11,9011

5.4. Sonuç

WTI ve Brent-Europe petrol fiyatları arasındaki bağımlılığı modellemek için bazı Arşimedyen kapulalar ve bunların konveks kombinasyonları denendi. Doğru kapulanın seçilmesinde parametrik olmayan ve yarı-parametrik süreç (Genest ve Rivest (1993); Genest, ve diğerleri (1995)), uyum iyiliği testi (Genest ve diğerleri (2009)) ve Akaike bilgi kriteri (AIC) alındı. Çizelge 5.1’de verilen kapulalar ve onların konveks kombinasyonları parametrik olmayan tahmin ile Uyum iyiliği testinde veri kümesinin bağımlılık yapısının modellenmesinde başarılı değildir (Çizelge 5.3 ve Çizelge 5.4). Ancak EÇO tahmin yöntemiyle 4,96 parametre değerine sahip olan Clayton kapulası (Çizelge 5.5) ve hatta bu Clayton kapulanın bazı başka kapulalarla konveks kombinasyonu verinin bağımlılık yapısını modelleyebilirler (Çizelge 5.6). Bu durumda En küçük uyum iyiliği değeri en iyi model 0,69Clayton+0,31Gumbel kapulasına aittir ve bu değer 9,2518 olarak verilmiştir. Çizelge 5.3, Çizelge 5.4, Çizelge 5.5 ve Çizelge 5.6’dan sonuç olarak konveks kombinasyon bağımlılık yapısının modellenmesinde daha iyi uyum sağlamıştır.

6. KAPULALAR VE STOKASTİK SINIR ANALİZİ

Bu bölümde temel amaç, kapula tekniğini, stokastik sınır analizinde kullanmaktır. Amacımız stokastik sınır analizinde u ve v rastgele değişkenlerinin bağımlılığını kapulalar ile modelleyip, EÇO yöntemiyle parametrelerini tahmin etmektir. Burada bazı kapulaları değerlendirip sonuçlarını birbiriyle, CCR, BCC ve ayrıca stokastik sınır analiziyle karşılaştıracğız. Yeni AK'larda trigonometrik ve hiperbolik üretici olan aileleri kullanacağız.

6.1. Giriş

Firmaların (DMU) teknik etkinliğini ölçmek, ekonomide ve finansda çok önemlidir. Genelde veri zarflama analizi (VZA), Free Disposal Hull (FDH) ve stokastik sınır analizi firmaların teknik etkinliğini ölçmek için kullanılır. VZA ve FDH nonparametrik yöntemlerdir ve bu yüzden girdiler, çıktıları hiç bir kısıtlama yapmazlar ve dolayısıyla hatalara firmanın etkinsizliği açısından bakarlar. Ancak stokastik sınır analizinde hatalar $\varepsilon_i = v_i - u_i$ şeklindedir ve v_i istatistiksel gürültüyü ve u_i de i . firmaya ait teknik etkinsizliği göstermektedir. Genelde u 'ların dağılımını, Üstel, Yarı Normal veya Gama dağılımı olarak alınır. v 'lerin dağılımı ise Normal farz edilir (Aigner ve diğerleri, 1977; Meeusen ve Van Den Broeck, 1977; Smith, 2008; El Mehdi, Hafner, 2013; Aigner ve diğerleri, 2014).

Yakın zamanlarda, stokastik sınır analizindeki hata bileşenleri u ve v 'yi birbirinden bağımsız olduğu düşünülerek tahmin ediliyordu. Smith (2008) ilk kez bu rasgele değişkenlerin arasında bir bağımlılık potansiyeli olduğundan ortaya koyarak, kapula ile modellenmesini önerdi. Sonra bu teknik, Carta ve Steel, 2012; El Mehdi ve Hafner, 2013; Amsler ve diğerleri, 2014) tarafından da kullanıldı.

Stokastik sınır analizinde modelin parametreleri, kapula ile modellendikten sonra, Düzeltilmiş En Küçük Kareler (Corrected Ordinary Least Squares (COLS)) ve En Çok Olabilirlik (Maximum Likelihood (ML)) yöntemleri ile hesaplanır. Burada parametrelerin tahmin edilmesi için kullanılacak olan dağılım denklemlerinin çözümü oldukça zordur. Bu sebepten hesaplamalar nümerik metotlar ile yapılır, ve bu metotların üzerinde çalışmalar hala devam ediyor.

Bu bölümün ikinci Kesiminde bazı temel kavramlar verilmiştir. Üçüncü Kesiminde ise kapula kullanımı hakkında temel bilgilerden bahsedilmiştir. Dördüncü Kesiminde ise bir uygulama yer almaktadır. Bu uygulamada Japonya’da 12 profesyonel beysbal takımının verisini ele alıp, onların teknik skorlarını farklı önerilen kapula tekniğiyle bulunmuştur. Sonuçları hem standart CCR, BCC hem de stokastik sınır analiziyle de karşılaştırılmıştır.

6.2. Temel Kavramlar

Stokastik sınır analizi (SFA)’nin başlangıç adımları Aigner, Lovell, Schmidt (1977) ve Meeusen ve Van den Broeck (1977) tarafından önerilmiştir. Bu konuda üretimin sınır modeli rastgele değişkenler olmadan böyle yazılır:

$$y_i = f(x_i; \beta) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, I \quad (6.1)$$

Burada f üretim fonksiyonu, (X_i, Y_i) gözlemler ve $y_i = \log(Y_i)$, $x_i = \log(X_i)$ ’lerdir. ve β ’lar modelde tahminini elde edeceğimiz parametreleridir. $\varepsilon_i = v_i - u_i$ şeklindedir ve v_i istatistiksel gürültüyü ve u_i de i . firmaya ait teknik etkinsizliği (TE) göstermektedir. TE, analizini yapacağımız sürecin fonksiyonuna göre

1- Non-parametrik fonksiyonlar: Matematiksel programlama kullanılır.

2- Parametrik fonksiyonlar: Cobb-Douglas, Linear, Log-linear, Translog, Zellner-Revankar genelleştirilmiş fonksiyonu tiplerindedir (Richmond, 1974; Fare ve Lovell, 1978; Kumbhakar, 1987).

Bu tezde Cobb-Douglas fonksiyonunu ele alıp, uygulama yapılmıştır. Genelde $v_i \sim N(0, \sigma_v^2)$ ve $u_i \sim N^+(0, \sigma_u^2)$ olarak kabul edilir. Ancak literatürde v_i ve u_i hata bileşenlerinin daha başka dağılıma sahip olduğu varsayılan çeşitli çalışmalar da vardır. Bu durumda Cobb-Douglas(log-log) üretim fonksiyonu, aşağıdaki gibi verilebilir,

$$y_i = \beta_0 + \sum_n \beta_n x_{ni} + \varepsilon_i \quad i = 1, \dots, I. \quad (6.2)$$

Burada $E(u) = \sigma_u \sqrt{2/\pi}$ ve $Var(u) = ((\pi - 2)\pi)\sigma_u^2$ olur.

Kesim 6.3’de β ’ları tahmin ederken u ve v rastgele değişkenlerin bağımlılığını kapula modelleyip, EÇO yöntemiyle parametrelerini tahmin edilmesini göstereceğiz.

6.3. Kapula ve Stokastik Sınır Analizi

Eğer v, u arasında bir bağımlılık söz konusuysa o zaman $\varepsilon = v - u$ olduğundan $Var(\varepsilon) = Var(v) + Var(u) - 2Cov(v, u)$ olur ve buradan v, u arasında bir pozitif bağımlılık varsa $Var(\varepsilon)$ azalmasına neden olur ve v, u nin arasında bir negatif bağımlılık olursa $Var(\varepsilon)$ 'nin artmasına neden olmaktadır.

Farz edelim ki $u \sim G_1$ ve $v \sim G_2$ dağılımlara sahip olsunlar o zaman eğer H fonksiyonu u ve v 'nin ortak dağılımı ise Sklar teoremine göre bir C kapulası vardır (Nelsen, 2006):

$$H(u, v) = C_\theta(G_1(u), G_2(v)) \quad (6.3)$$

buradan (6.3)'in olasılık yoğunluk fonksiyonu bulunur,

$$h(u, v) = g_1(u)g_2(v)c_\theta(G_1(u), G_2(v)) \quad (6.4)$$

$\varepsilon = v - u$ olduğundan

$$h(\varepsilon, u) = g_1(u)g_2(\varepsilon + u)c_\theta(G_1(u), G_2(\varepsilon + u)) \quad (6.5)$$

buradan da marjinal fonksiyon aşağıdaki gibi elde edilir.

$$h(\varepsilon) = \int_0^{+\infty} g_1(u)g_2(\varepsilon + u)c_\theta(G_1(u), G_2(\varepsilon + u))du \quad (6.6)$$

ve $\varepsilon_i = y_i - f(x_i; \beta)$ olduğundan, h fonksiyonu β ve θ parametrelerine bağlı bir fonksiyon olur. Böylece h fonksiyonundan EÇO yöntemiyle bu parametreler tahmin edilebilir,

$$l(\vartheta) = \sum_{i=1}^l \log h_\theta(y_i - f(x_i; \beta)) \quad (6.7)$$

burada $\vartheta = (\sigma_u, \sigma_v, \theta, \beta)$ 'dir ve ϑ 'nin EÇO tahmini aşağıda verilir

$$\hat{\vartheta}_{ML} = \operatorname{argmax}_{\vartheta \in \Theta} l(\vartheta).$$

Burada tahmin değerleri elde edilmesinde nümerik metotlardan yararlanılır. Tahmin değerlerinin elde edilmesinde kullanılacak yöntemlere ilişkin çalışmalar halen devam etmektedir. Model tahmin edildikten sonra teknik etkinlik skorlarının tahmini yapılmaktadır. $\vartheta = (\sigma_u, \sigma_v, \theta, \beta)$ 'ya bağlı olan teknik etkinlik skorları x girdi ve y çıktı değerleri olmak üzere aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$TE_\vartheta = E(\exp\{-U\} | \varepsilon) \quad (6.8)$$

burada ε 'nin marjinal dağılımını hem de u, ε ortak olasılık yoğunluk fonksiyonlarını kullanarak aşağıdaki gibi hesaplanır,

$$\begin{aligned}
TE_{\vartheta} &= \int_{R^+} \exp\{-u\} h_{\vartheta}(u|\varepsilon) du \\
&= \frac{1}{h_{\vartheta}(\varepsilon)} \int_{R^+} \exp\{-u\} h_{\vartheta}(u, \varepsilon) du \\
&= \frac{E_U(\exp\{-u\} \cdot g_2(u + \varepsilon) \cdot c_{\vartheta}(G_1(u), G_2(u + \varepsilon)))}{E_U(g_2(u + \varepsilon) \cdot c_{\vartheta}(G_1(u), G_2(u + \varepsilon)))}
\end{aligned} \tag{6.9}$$

(6.9)'den da görüleceği gibi ϑ yerine onun EÇO tahminini $(\hat{\vartheta}_{ML})$ 'yı kullanırsak, o zaman TE_{ϑ} 'nin de EÇO tahmini bulunmuş olur. Burada TE_{ϑ} , nokta tahmini olarak bulunur, buna ilişkin güven aralığının elde edilmesine yönelik çalışmalar ise devam etmektedir (El Mehdi ve Hafner, 2013).

6.4. Uygulama

Uygulama için, Çizelge 6.1'de Japonyada 12 profesyonel beysbal takımının bilgisi verilmektedir. Veriler (Cooper, Seiford, Tone, 2006) den alınmıştır. Burada iki girdi ve tek çıktı vardır.

Girdi 1: takımın menajerinin ortalama geliri.

Girdi 2: takımın oyuncularının ortalama geliri.

Çıktı: katılım, ve bu da yıllık katılan seyircilerin sayısı bölü toplam yıllık seyirci kapasitesidir. Yani yüzde şeklindedir ve 100%'ü geçemez.

Menajer ve oyuncuların geliri onbin Yen (Japon parası) birimlidir. Bütün hesaplamalarda Matlab programı kullanılmıştır ve teknik etkinlik skorunu bulunmasında “fminsearchbnd” komutunun yararlanılmıştır. Burada başlangıç değeri En Küçük Kareler yöntemi yardımıyla hesaplanmıştır.

Altı farklı kapula ile stokastik sınır analizi ile modelleme yapılmıştır. Bu kapula aileleri Çizelge 6.2'de verilmiştir. Parametrelerin tahmini Çizelge 6.3'de ve takımların teknik skorları da Çizelge 6.4'de yer almıştır. Çizelge 6.2'den görüldüğü gibi üç yeni kapula kullanılmıştır. cot kopula, trigonometrik üreticiye sahiptir ve ilk olarak Pirmoradian ve Hamzah (2011) tarafından önerildi. coth-kopula ve csch-kapula hiperbolik üreticileri vardır ve Najjari ve diğerleri(2014); Bal ve Najjari(2013) tarafından önerilmişlerdir. Bu kapulaların bağımlılığı modellemede daha esnek davranışları vardır. A12 kapulası özel bir adı olmadığı için Nelsen (2006)'dan, 4.2.12 numarası ile verilmiştir.

Çizelge 6.1. Japonyada 12 profesyonel beysbal takımının bilgisi

Takım	Yönetmen	Oyuncu	Katılım
Swallows	5220	6183	80,87
Dragons	2250	5733	93,76
Giants	6375	8502	100
Tigers	3125	4780	76,53
Bay stars	3500	4042	79,12
Carp	3125	5623	51,95
Lions	5500	10180	56,37
Fighters	3625	5362	57,44
Blue wave	2715	4405	58,78
Buffalos	3175	6193	53
Marines	2263	5013	43,47
Hawks	3875	3945	82,78

Çizelge 6.2. Çalışmada kullanılan kapulalar

Kapula	Üretici	Kendall τ	λ_L	λ_U	θ
Clayton	$\frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$	$\frac{\theta}{\theta + 2}$	$2^{\frac{-1}{\theta}}$	0	$(0, \infty)$
Gumbel	$(-lnt)^{\theta}$	$\frac{\theta - 1}{\theta}$	0	$2 - 2^{\frac{1}{\theta}}$	$[1, \infty)$
A12	$\left(\frac{1}{t} - 1\right)^{\theta}$	$1 - \frac{2}{3\theta}$	$2^{\frac{-1}{\theta}}$	$2 - 2^{\frac{1}{\theta}}$	$[1, \infty)$
cot	$\cot^{\theta}\left(\frac{\pi t}{2}\right)$	$1 - \frac{8}{\pi^2\theta}$	$2^{\frac{-1}{\theta}}$	$2 - 2^{\frac{1}{\theta}}$	$[1, \infty)$
coth	$\coth(\theta t) - \coth(\theta)$	$1 + 2/\theta^2 - (\frac{2}{\theta})\coth(\theta)$	$\frac{1}{2}$	0	$[1, \infty)$
csch	$\operatorname{csch}(t^{\theta}) - \operatorname{csch}(1)$	$\frac{\theta}{\theta + 2}$	$2^{\frac{-1}{\theta}}$	0	$[1, \infty)$
Çarpım	$-lnt$	-	0	0	-

Çizelge 6.3’de stokastik sınır analizinde modelin parametre tahmini, kapula tekniğini kullandıktan sonra, verilmiştir. Son satırdaki “SSA”, normal stokastik sınır analizi modelidir (kapula kullanmadan).

Burada kapulanın θ değeri u ve v nin arasındaki bağımlılığı göstermektedir. Son sütunda τ değeri kendall τ değeridir ve her kapulada formülü Çizelge 6.2’de verilmiş. Kapulaların hepsi u ve v ’nin arasında yüksek bir bağımlılık olduğunu varsayar. En yüksek bağımlılık A12 kapulasına aittir ve değeri 0,9269’dır. Yani $Var(\varepsilon) = Var(v) + Var(u) - 2Cov(v, u)$ ’na göre, bu durumda $Var(\varepsilon)$ en düşük değeri alır ve böylece, f üretim fonksiyonu $y_i = f(x_i; \beta) + \varepsilon_i$ modelinde, y_i ’lere en yakın fonksiyon demektir. Tabiki bu

en iyi stokastik sınır modeli anlamına gelmez ve bizim burada amacımız sadece τ değerlerinin açıklanmasıydı. Çizelge 6.4’de beysbal takımlarının etkinlik skorları ve etkinlik sıraları tüm uygulanan kapulalarda ve ek olarak CCR ile BCC modelinde verilmiştir. Çizelge 6.4’de incelenen modellerinin karşılaştırması için onların etkinlik sırası üzerinden korelasyon değerleri bulunmuştur ve Çizelge 6.5’de yer verilmiştir.

Çizelge 6.3. Stokastik sınır modelinde parametrelerin tahmini

Kapula	σ_u	σ_v	θ	β_0	β_1	β_2	τ
Clayton	0,1516	0,0695	8,2052	4,1232	0,2830	-0,2042	0,8040
Gumbel	0,1517	0,0257	8,6872	4,2636	0,0951	-0,0528	0,8849
A12	0,1683	0,0669	9,1186	4,2712	0,2780	-0,2148	0,9269
cot	0,1563	0,0685	8,5636	4,1924	0,2762	-0,2061	0,9053
coth	0,1881	0,0301	7,7433	4,7314	0,0787	-0,0902	0,7751
csch	0,1418	0,0896	4,9721	3,8015	0,3936	-0,2647	0,7994
Çarpım	0,1517	0,0257	8,6898	4,2636	0,0951	-0,0528	-
SSA	0,1652	0,0535	-	4,4127	0,0499	-0,0834	-

Çizelge 6.4. beysbal takımlarının etkinlik skorları ve etkinlik sıraları

	CCR		BCC		Clayton		Gumbel		A12	
Takım	Score	Rank	Score	Rank	Score	Rank	Score	Rank	Score	Rank
Swallows	0,6572	6	0,6691	11	0,6903	6	0,7994	4	0,6819	5
Dragons	1	1	1	2	1	1	1	1	0,9829	1
Giants	0,6139	7	1	1	0,8608	2	0,9863	2	0,8542	2
Tigers	0,8699	4	0,9514	7	0,7167	3	0,7836	6	0,7042	3
Bay stars	0,9753	3	1	6	0,6934	5	0,7944	5	0,6805	6
Carp	0,5239	9	0,8199	8	0,5029	11	0,5365	11	0,495	11
Lions	0,3162	12	0,4612	12	0,5249	9	0,5692	9	0,5215	8
Fighters	0,5765	8	0,8042	9	0,528	8	0,5834	8	0,5199	9
Blue wave	0,7368	5	1	5	0,5633	7	0,6073	7	0,5527	7
Buffalos	0,4947	11	0,7739	10	0,5209	10	0,5493	10	0,5133	10
Marines	0,5156	10	1	4	0,4504	12	0,4601	12	0,4421	12
Hawks	1	2	1	3	0,7014	4	0,822	3	0,6886	4
	cot		coth		csch		Çarpım		SSA	
Takım	Score	Rank	Score	Rank	Score	Rank	Score	Rank	Score	Rank
Swallows	0,6943	6	0,7983	4	0,6267	6	0,7994	4	0,7734	3
Dragons	1	1	0,9822	2	0,9919	1	1	1	0,9993	2
Giants	0,8676	2	1	1	0,7793	2	0,9863	2	1,0000	1
Tigers	0,718	3	0,7685	6	0,678	3	0,7836	6	0,7441	5
Bay stars	0,695	5	0,7757	5	0,6412	4	0,7944	5	0,7272	6
Carp	0,504	11	0,5294	11	0,4804	11	0,5365	11	0,5247	11
Lions	0,5287	9	0,5796	8	0,4883	10	0,5692	9	0,6012	7
Fighters	0,5297	8	0,5761	9	0,4948	9	0,5834	8	0,5611	9
Blue wave	0,5638	7	0,5925	7	0,5386	7	0,6073	7	0,5726	8
Buffalos	0,5222	10	0,5441	10	0,4997	8	0,5493	10	0,5463	10
Marines	0,4503	12	0,4497	12	0,4428	12	0,4601	12	0,4486	12
Hawks	0,7035	4	0,8033	3	0,6404	5	0,822	3	0,7450	4

Çizelge 6.5. beysbal takımlarının etkinlik sıraları arasındaki uyuşma

	CCR	BCC	Clayton	Gumbel	A12	cot	coth	csch	Çarpım	SSA
CCR	1	0,58	0,804	0,79	0,755	0,804	0,72	0,783	0,79	0,6364
BCC	0,58	1	0,538	0,51	0,483	0,538	0,497	0,524	0,51	0,3846
Clayton	0,804	0,538	1	0,951	0,986	1	0,937	0,972	0,951	0,9231
Gumbel	0,79	0,51	0,951	1	0,951	0,951	0,986	0,916	1	0,9580
A12	0,755	0,483	0,986	0,951	1	0,986	0,951	0,951	0,951	0,9580
cot	0,804	0,538	1	0,951	0,986	1	0,937	0,972	0,951	0,9231
coth	0,72	0,497	0,937	0,986	0,951	0,937	1	0,902	0,986	0,9790
csch	0,783	0,524	0,972	0,916	0,951	0,972	0,902	1	0,916	0,8811
Çarpım	0,79	0,51	0,951	1	0,951	0,951	0,986	0,916	1	0,9580
SSA	0,6364	0,3846	0,9231	0,9580	0,9580	0,9231	0,9790	0,8811	0,9580	1

Çizelge 6.5'den, CCR modelinin etkinlik sıra değerleri ile en yüksek ilişki 0,804 ile Clayton ve cot kapulaları arasındadır. En az ilişki ise 0,720 ile coth kapulaları arasında bulunmuştur. CCR ve SSA sonuçları arasında ise 0,6364'luk bir bağımlılık tespit edilmiştir. Benzer şekilde BCC modeli ile en yüksek ilişki 0,538 ile Clayton ve cot kapulaları arasındadır. En az ilişkisi ise 0,497 ile coth kapulası arasında bulunmuştur. BCC ve SSA sonuçları arasında 0,3846'luk bir bağımlılık vardır. Yani, SSA modelinin sonuçlarıyla CCR sonuçları daha uyumludur. BCC ve CCR sonuçların arasındaki ilişki ise 0,58 olarak elde edilmiştir.

SSA modeliyle kullanılan kapula modelleri arasındaki en yüksek korelasyon 0,9790 ile coth kapulaya aittir. Yani stokastik sınır analizinde coth kapulasını kullanılırsa, normal stokastik sınır analizine yakın bir sonuç elde edilebilir. Çarpım, Gumbel ve A12 kapulalarını kullanan modellerin sonuçları SSA modeliyle korelasyonda ikinci sırada yer almışlardır. En az korelasyon ise 0,8811 ile csch kapulaya aittir.

Çarpım ve Gumbel kapulaları, beysbal takımlarına farklı etkinlik skoru vermelerine rağmen bu takımların etkinliğini aynı sıralamışlardır. Aynısı cot ve Clayton kapulalarında da geçerlidir. Bu modellerin korelasyon katsayısı 1 olarak hesaplanmıştır.

6.5 Sonuç

Bu bölümde kapula tekniğinin, stokastik sınır analizinde kullanılışı gösterildi. Stokastik sınır analizinde u ve v rastgele değişkenlerin bağımlılığını kapulalar ile modelleyip, EÇÖ yöntemiyle parametrelerini tahmin edilişi açıklandı. Uygulama Japonya'da 12 profesyonel beysbal takımına ait veri ile denendi. Bazi kapulalarla değerlendirip sonuçlarını birbiriyle, hem CCR, BCC hem de normal stokastik sınır analiziyle karşılaştırıldı. CCR modelinin etkinlik sıra değerleri en yüksek ilişkisi 0,804 olarak Clayton ve cot kapulaları arasında ve en az ilişkisi de 0,720 ile coth kapulaları arasında tespit edilmiştir. CCR ve SSA sonuçları arasında ise 0,6364'luk bir bağımlılık tespit edilmiştir. Benzer şekilde BCC modeli ile en yüksek ilişkisi olan kapula 0,538 ile Clayton ve cot kapulaları arasında. en az ilişki ise 0,497 ile coth kapulası arasında tespit edilmiştir. BCC ve SSA sonuçları arasında 0,3846'luk bir bağımlılık tespit edilmiştir. Yani, SSA modelinin sonuçlarıyla CCR sonuçları daha uyumludur. BCC ve CCR sonuçların arasındaki ilişki ise 0,58 olarak tespit edilmiştir.

SSA modeliyle kullanılan kapula modelleri arasında en yüksek korelasyon 0,9790'dır, ve coth kapulasına aittir. Yani stokastik sınır analizinde coth kapulası kullanırsa, normal stokastik sınır analizine yakın bir sonuç alınır. Çarpım, Gumbel ve A12 kapulalarını kullanan modellerin sonuçları SSA modeliyle korelasyonda ikinci sırada yer almıştır. En az korelasyon ise 0,8811 ile csch kapulasına aittir.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Her $t \in [0,1]$ için $\varphi(t) = \coth(t\theta) - \coth(\theta)$ tanımlıyarak AK'lerde yeni bir kesin üretici ortaya kondu. Bu üretici coth-kapulasını aşağıdaki şekilde üretir:

$$\begin{aligned} C(u, v) &= \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)) \\ &= \frac{1}{\theta} [\operatorname{acoth}(\coth(\theta u)) + \coth(\theta v) - \coth(\theta)]. \end{aligned}$$

Bu kapulanın bazı hesaplanan ölçüleri aşağıda verilmiştir:

$$\tau_C = 1 + \frac{2}{\theta^2} - \frac{2}{\theta} \coth(\theta), \quad \tau_C \in (\frac{1}{3}, 1]$$

$$\hat{\rho}_C = \rho_0 + (1 - \rho_0) \frac{\theta^2}{k^2 + \theta^2}, \quad \rho_0 \approx 0,4784 \text{ ve } k \approx 2,925$$

$$\lambda_L = \frac{1}{2}, \quad \lambda_U = 0$$

Böylece AK'lara yeni bir aile eklendi. Tezin devamında Kim ve diğerleri (2011)'de önerdiği kapula genişleme modelinin yanlışlığı gösterildi ve onun yerine başka bir genişletme önerilip, yeni modelin üzerinde açıklamalar yapıldı. Ayrıca bu tezde Çarpım kapulasına yeni bir ilginç genişletme önerildi.

Uygulamalarda, WTI ve Brent-Europe petrol fiyatları arasındaki bağımlılığı modellemek için bazı Arşimedyen kapulalar ve bunların konveks kombinasyonları denendi. cot-kapulanın daha esnek davranışlı olduğu gösterildi.

Ayrıca kapula tekniğinin, stokastik sınır analizinde nasıl kullanılacağı da gösterildi ve sonra coth-kapula ile bazı başka kapulalar, Japonya'da 12 profesyonel beysbal takımının etkinlik skoru üzerinde denendi. Stokastik sınır analizinde coth kapulanın kullanılması halinde, bu veride normal stokastik sınır analizine yakın bir sonuç aldığı tespit edilmiştir.

KAYNAKLAR

- Sklar, A. (1959). Fonctions de repartition Ua n dimensions et leurs marges. *Publ. Inst. Statist. Paris* 8, 229–231.
- Habiboellah, F. (2007). Copulas, modeling dependencies in Financial Risk Management. *Purmerend*, December (BMI Master Thesis).
- Kim, J. M., Sungur, E. A., Choi, T., Heo, T. Y. (2011). Generalized bivariate copulas and their porperties. *Model Assisted Statistics and Applications*, (6) 127-136.
- Robert E. B., Lawrence A. D., Charles E. S. (2007). Euler at 300: an appreciation. *Mathematical Association of America*, Page 100.
- Nelsen, R. B. (2006). An Introduction to Copulas. *Springer*, New York.
- Kimberling, C. (1974). A probabilistic interpretation of complete monotonicity, *Aequationes Math*, 10, 152-164.
- Bal, H., Najjari, V. (2013). Archimedean copulas family via hyperbolic generator, *GU J. Sci.*, 26 (2), 195-200.
- Rodriguez-Lallena, J. A., Ubeda-Flores, M. (2004). A new class of bivariate copulas. *Statistics and Probability Letters*, 66, 315-325.
- Dolati, A., Ubeda-Flores, M. (2006). Some new parametric families of multivariate copulas. *International Mathematical Forum*, (1) 17-25.
- Fréchet. M. (1958). Remarques au sujet de la note precedente. *C R Acad. Sci. Paris Ser I Math*, (246), 2719-2720.
- Najjari, V., Bal, H., Çelebioğlu, S. (2013a). A note on a copula construction method, *Proc. Uncertainty Modelling, STU Bratislava*, ISBN: 978–80–227–4067–8, 51-55.
- Mesiar, R., Komornik, J., Komornikova, M. (2013). On some construction methods for bivariate copulas. *Aggregation Functions in Theory and in Practise. Springer Verlag Berlin Heidelberg*, 39-45.
- Mesiar, R., Sempi, C. (2010). Ordinal sums and idempotents of copulas. *Aequationes mathematicae*, 79(1-2), 39-52.
- Mesiar, R., Najjari, V. (2014). New families of symmetric/asymmetric copulas. *Fuzzy Sets and Systems*, 252, 99-110.
- Bertail, P., Doukhan, P., Soulier, P. (2006). Dependence in Probability and Statistics. *Springer Science, LLC*.
- Kojadinovic, I., Yan, J. (2011). Tests of serial independence for continuous multivariate time series based on a Möbius decomposition of the independence empirical copula process. *Ann. Inst. Stat. Math.*, 63, 347-373.

- Schweizer, B. (1991). Thirty years of copulas. In: Dall'Aglia G, Kotz S, Salinetti G (eds) *Advances in Probability Distributions with Given Marginals*. Kluwer, Dordrecht, pp 13-50.
- Clemen, R. T., Reilly, T. (1999). Correlations and Copulas for Decision and Risk Analysis. *Management Science*, 45, 208-224.
- Najjari, V., Bacigal, T., Bal, H. (2014). An Archimedean copula family with hyperbolic cotangent generator. *IJUFKS*, In Press.
- Çelebioğlu, S. (2003). Archimedean copulas And An Application. *Selcuk University Journal of Science*, 22, 43-52.
- Bacigál, T., Komorníková, M. (2006). Fitting Archimedean copulas to bivariate geodetic data, *COMPSTAT*, 649-656.
- Al-Harthy, M., Begg, S., Reidar B. Bratvold. (2007). Copulas: A new technique to model dependence in petroleum decision making. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 57, 195-208.
- Zhu, H-M., Li, R., Li, S. (2014). Modelling dynamic dependence between crude oil prices and Asia-Pacific stock market returns. *International Review of Economics and Finance*, 29, 208-223.
- Hua, L., Joe. H. (2011). Tail order and intermediate tail dependence of multivariate copulas. *Journal of Multivariate Analysis*, 102, 1454-1471.
- Genest, C., Ghoudi, K., Rivest, L. P. (1995). A semiparametric estimation procedure of dependence parameters in multivariate families of distributions. *Biometrika*, 82, 543-552.
- Genest, C., Rivest, L. P. (1993). Statistical Inference Procedures for Bivariate Archimedean copulas. *Journal of the American Statistical Association*, 88 (423), 1034-1043.
- Joe, H. (1997). Multivariate Models and Dependence Concepts. *Chapman - Hall, London*.
- Song, P. X-K. (2007). Correlated Data Analysis: Modeling, Analytics, and Applications. *Springer Science, LLC*.
- Najjari, V., Bal, H., Çelebioğlu, S. (2013b). Modeling of Dependence Structures in Meteorological Data via Archimedean Copulas. *U.P.B. Sci. Bull., Series D*, 75:3, 131-138.
- Najjari, V., Ünsal, M.G. (2012). An Application of Archimedean Copulas for Meteorological Data. *GU J Sci.*, 25(2), 417-424.
- Frees, E. W., Valdez, E. A. (1998). Understanding Relationships Using Copulas. *North American Actuarial Journal*, 2, 1-25.

- Genest, C., Remillard, B., Beaudion, D. (2009). Goodness-of-fit tests for copulas: A review and a power study. *Insurance: Mathematics and Economics*, 44, 199-213.
- Joe, H. (2005). Asymptotic efficiency of the two-stage estimation method for copula-based models. *J. Multivariate Anal.*, 94, 401-419.
- Pirmoradian, A., Hamzah, A. (2011). Simulation of Tail Dependence in cot-copula. *Proceedings of the 58th WSC of the ISI*.
- Genest, C., Gendron, M., Bourdeau-Brien, M. (2009). The advent of copulas in finance. *Eur. J. Finance*. 15(7-8), 609-618.
- Kojadinovic, I., Yan, J. (2011). Tests of serial independence for continuous multivariate time series based on a Mobius decomposition of the independence empirical copula process. *Ann. Inst. Stat. Math.*, 63, 347-373.
- Clemen, R. T., Reilly, T. (1999). Correlations and Copulas for Decision and Risk Analysis. *Management Science*, 45, 208-224.
- Song, P. X-K. (2007). *Correlated Data Analysis: Modeling, Analytics, and Applications*. Springer Science, LLC.
- Hui-Ming, Z. Rong, L. Sufang, L. (2014) . Modelling dynamic dependence between crude oil prices and Asia-Pacif stock market returns. *International Review of Economics and Finance*, 29, 208-223.
- Aigner, D. J., Lovell, C. A. K., Schmidt, P. (1977). Formulation and estimation of stochastic frontier production functions, *Journal of Econometrics*, (6) 21-37.
- Meeusen , W., Van Den Broeck J. (1977). Efficiency estimation from Cobb-Douglas production functions with composed error, *International Economic Review*, (18) 435-444.
- Smith, M. D. (2008). Stochastic frontier models with dependent error components. *The Econometrics Journal*, (11), 172-192.
- El Mehdi, R., Hafner, C. M. (2013). Inferences in stochastic frontier analysis with dependent error terms. *Mathematics and computers in simulation, Online Press*.
- Amsler, C., Prokhorov, A., Schmidt, P. (2014). Using copulas to model timedependence in stochastic frontier models. *Econometric Reviews*, 33 (5-6), 497-522.
- Carta, A., Steel, M. F. J. (2012). Modelling multi-output stochastic frontiers using copulas. *Computational Statistics and Data Analysis*, (56), 3757-3773.
- Richmond, J. (1974). Estimating the efficiency of production. *International Economic Rewiev*, (15), 515-521.
- Cooper, W. W., Seiford, L. M., Tone, K. (2006). *Introduction to Data Envelopment Analysis and Its Uses*. Springer Science and Business Media, Inc.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : NAJJARI, Vadoud
 Uyuğu : IRAN
 Doğum tarihi ve yeri : 22.11.1979, Maragheh
 Medeni hali : Evli
 Telefon : 0 (541) 9145349
 Faks : -
 E-mail : vnajjari@gazi.edu.tr



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Doktora	Gazi Üniversitesi /Ankara	Devam Ediyor
Y.Lisans	Tabriz Üniversitesi / Tabriz	2005
Lisans	I.K.I. Üniversitesi / Qazvin	2003
Lise	Emam khomeini/Maragheh	1998

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2009-2014	Islamic Azad Üniversitesi	Okudman

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

Kitapları:

1. Najjari, V., Bagherieh, I., Najari, Y., 2012. *An Introduction to Statistics & Probability*, Elm Anduzan-Tehran-Iran.

Makaleler (SCI):

1. Najjari, V., Bal, H. Using copulas to model dependence between crude oil prices of West Texas Intermediate and Brent-Europe. *Int. J. of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*. Değerlendirmede.
2. Kınacı H., Najjari,V., Acarlar, I. A new model for the secondary goal in DEA, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, değerlendirilmedi.

3. Acarlar, I., Kınacı H., Najjari, V. A new measure for detecting influential DMUs in DEA. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, Değerlendirmede.
4. Mesiar, R., Najjari, V., Bacıgal, T. Additive generators of copulas. *Fuzzy Sets and Systems*, Basımda.
5. Mesiar, R., Najjari, V., Bal, H. Generators of copulas and aggregation. *Information science*, Basımda.
6. Najjari, V., Bacıgal, T., Bal, H. An Archimedean Copula Family With Hyperbolic Cotangent Generator. *Int. J. of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, Basımda.
7. Mesiar, R., Najjari, V. (2014). New families of symmetric/asymmetric copulas. *Fuzzy Sets and Systems*.

Makaleler (SCOPUS):

1. Najjari, V., Bal, H., Çelebioğlu, S. (2013). Modeling of Dependency Structures in Meteorological Data Via Archimedean Copulas. *U.P.B. Sci. Bull., Series D*, 75:3, 131-138.
2. Najjari, V., Bal, H., Çelebioğlu, S. (2013). A Note on A Copula Construction Method. *Uncertainty Modeling*, ISBN: 978-80-227-4067-8, 51-55.
3. Bal, H., Najjari, V. (2013). Archimedean copulas family via hyperbolic generator. *GU J Sci.* 26(2):195-200.
4. Najjari, V., Ünsal, M. G. (2012). An Application of Archimedean Copulas For Meteorological Data, *GU J Sci.* 25(2): 417-424.
5. Şahin, S. T., Najjari, V., Orkcü, H. H. Simulation Study on Copulas. *SCMA*, Basımda.

Uluslar Arası Konferanslarda Sunulan ve Tam Metni Basılan Bildirile:

1. Najjari, V., Bal, H., Kınacı, H. A New Method for Parameter Estimation and Model Selection in Copulas, *4th International Scientific Conference of Iranian Academics in Turkey*, 1 Mar 2014 Ankara.
2. Najjari, V., Bal, H. An Application For Copulas. *4th International Scientific Conference of Iranian Academics in Turkey*, 1 Mar 2014 Ankara.
3. Najjari, V., Bal, H., Çelebioğlu, S. Comments on stochastic frontier models and copulas. *11th International Conference on Data Envelopment Analysis*, 27-30 Jun 2013. Samsun, Turkey.
4. Acarlar, I., Kınacı, H., Najjari, V. A new approach in the secondary goal of DEA. *11th International Conference on DEA*, 27-30 Jun 2013. Samsun, Turkey.

5. Najjari, V., Bal, H. Some new generators in Archimedean copulas. *3th International Scientific Conference of Iranian Academics in Turkey*, 15 Feb 2013 Ankara.
6. Najjari, V., Bal, H. Multivariate Copulas. *20th Seminar on Mathematical Analysis and Its Applications-Maragheh, Iran*, July 9-11, 2012.
7. Najjari, V., Bal, H., Çelebioğlu, S. Copulas Functions And Alternative Correlation Measures. *20th Seminar on Mathematical Analysis and Its Applications-Maragheh, Iran*, July 9-11, 2012.
8. Najjari, V., Bal, H., Comments on copulas functions and finance. *International Conference on Applied Analysis and Algebra-Istanbul-Turkey*, 20-24 June 2012.

Hobiler

Yüzme, Futbol



GAZİ GELECEKTİR..