



**ÇOKLU SINIFLANDIRMA PROBLEMLERİNE ÖNERİLEN YENİ
MODELLER**

Zülal TÜZÜNER

**DOKTORA TEZİ
İSTATİSTİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ARALIK 2020

Zülal TÜZÜNER tarafından hazırlanan “ÇOKLU SINIFLANDIRMA PROBLEMLERİNE ÖNERİLEN YENİ MODELLER” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi İstatistik Ana Bilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Hasan BAL

İstatistik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Başkan: Prof. Dr. İhsan ALP

İstatistik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Prof. Dr. Cemal ATAKAN

İstatistik Ana Bilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Prof. Dr. Reşat KASAP

İstatistik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Prof. Dr. Gül ERGÜN

İstatistik Ana Bilim Dalı, Hacettepe Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Tez Savunma Tarihi: 25/12/2020

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Doktora Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Cevriye GENCER
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Zülal TÜZÜNER

25/12/2020

ÇOKLU SINIFLANDIRMA PROBLEMLERİNE ÖNERİLEN YENİ MODELLER

(Doktora Tezi)

Zülal TÜZÜNER

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Aralık 2020

ÖZET

Sınıflandırma; finans, pazarlama, sağlık ve diğer birçok alanda yaygın olarak uygulanmaktadır. Sınıflandırmanın amacı; iki veya daha fazla grup arasındaki farkı incelemek ve yeni gözlemi uygun bir gruba sınıflandırmaktır. Sınıflandırmada kullanılan en popüler yöntem, Fisher (1936) tarafından geliştirilen doğrusal ayırma fonksiyonudur. Ayrıca, zamanla sınıflandırma problemi çözümü için matematiksel programlamaya dayalı da birçok model geliştirilmiştir. Bu çalışmada, çok gruplu sınıflandırma problemlerinin çözümünde kullanılabilecek Bulanık Hedef Programlama'ya dayanan yeni sınıflandırma modelleri geliştirilmiştir. Önerilen modeller, literatürdeki diğer matematiksel programlamaya dayanan modellere göre daha açık ve kullanışlı şeklindedir. Farklı üyelik fonksiyonlarına dayanarak önerilen matematiksel programlama modellerinin performansı, 5 farklı gerçek veri seti ve simülasyon verisi ile test edilmiştir. Sonuçlarda yeni önerilen matematiksel programlama modellerinin diğer sınıflandırma yöntemlerine göre daha iyi performans gösterdiği gözlemlenmiştir.

Bilim Kodu : 20517
Anahtar Kelimeler : Sınıflandırma problemi, matematiksel programlama, bulanık mantık, hedef programlama
Sayfa Adedi : 101
Danışman : Prof. Dr. Hasan BAL

THE PROPOSED NEW MODELS TO MULTIPLE CLASSIFICATION PROBLEMS

(Ph. D. Thesis)

Zülal TÜZÜNER

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

December 2020

ABSTRACT

Classification is widely applied in finance, marketing, healthcare and many other fields. The purpose of the classification is to examine the difference between two or more groups and to classify the new observation into a suitable group. The most popular method used in classification is the linear separation function, developed by Fisher (1936). In addition, many models based on mathematical programming have been developed over time to solve classification problems. In this study, new classification models were developed that might be used in solving the multi-group classification problems based on Fuzzy Goal Programming. The proposed models are more clear and useful than other models based mathematical programming in the literature. The performance of the mathematical programming models proposed based on different membership functions was tested by 5 different real data sets and simulation data obtained from the literature. In the results, it was observed that the newly proposed mathematical programming models performed better than other classification methods.

Science Code : 20517

Key Words : Classification problem, mathematical programming, fuzzy logic, goal programming

Page Number : 101

Supervisor : Prof. Dr. Hasan BAL

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim ve tez çalışması sürecim boyunca yakın ilgi ve desteğiyle beni yönlendiren değerli hocam ve tez danışmanım Prof. Dr. Hasan BAL'a; tez çalışmamın ilerleme sürecinde fikir ve katkıları ile her zaman yol gösterici olan tez izleme komitemin değerli jüri üyeleri Prof. Dr. Cemal ATAKAN ile Prof. Dr. İhsan ALP'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Yüksek lisans ve doktora eğitimim boyunca emeği geçen Gazi Üniversitesi İstatistik Bölümü'nde görev yapan değerli hocalarıma, kıymetli dostlarıma ve mesai arkadaşlarıma çok teşekkür ederim. Ayrıca tezimi savunmam sırasında önerileri ve eleştirileriyle tezimin daha yararlı olmasını sağlayan Prof. Dr. Gül ERGÜN ve Prof. Dr. Reşat KASAP'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her anında yanımda olup desteğini ve dualarını esirgemeyen, beni bugünlere getiren, haklarını ne yaparsam yapayım ödeyemeyeceğim, başarılarımla benden daha çok mutlu olan canım anneme, kıymetlim babama binlerce teşekkürler, iyi ki varsınız.

Son olarak tezimi; çalışmalarım boyunca hep yanımda olan, sabrıyla ve desteğiyle beni yalnız bırakmayan eşim Kemal Kağan TÜZÜNER'e, yakın zamanda aramıza katılacak ve yaşamımızın yeni rengi olacak kızım Meva Asel'e adıyorum.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ.....	ix
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	x
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xi
1. GİRİŞ.....	1
2. İSTATİSTİKSEL YÖNTEMLER	5
3. MATEMATİKSEL PROGRAMLAMA YAKLAŞIMLARI.....	11
4. BULANIK MANTIK VE BULANIK KÜME TEORİSİ	27
4.1. Bulanık Kümeler	29
4.2. Üyelik Fonksiyonları.....	31
4.2.1. Destek kümesi	34
4.2.2. Çekirdek kümesi.....	34
4.2.3. α -kesim (α -seviye) kümesi.....	34
4.2.4. Yükseklik	35
4.2.5. Normallik	36
4.2.6. Konvekslik (Dışbükeylik)	36
4.3. Bulanık Sayılar.....	37
4.3.1. Üçgen tipi bulanık sayı.....	38
4.3.2. Yamuk tipi bulanık sayı	39
4.3.3. Gauss tipi bulanık sayı	40

5. DOĞRUSAL PROGRAMLAMA VE BULANIK DOĞRUSAL PROGRAMLAMA	43
5.1. Doğrusal Programlama.....	43
5.2. Bulanık Doğrusal Programlama	45
5.2.1. Bulanık kısıtlı doğrusal programlama problemi	48
5.2.2. Bulanık amaç fonksiyonlu ve bulanık kısıtlı doğrusal programlama problemi	50
5.2.3. Bulanık amaç katsayılı doğrusal programlama problemi.....	50
5.2.4. Bulanık parametrelili doğrusal programlama problemi	51
6. HEDEF PROGRAMLAMA VE BULANIK HEDEF PROGRAMLAMA	53
6.1. Hedef Programlama.....	53
6.1.1. Tek hedefli hedef programlama	54
6.1.2. Eşit ağırlıklı hedef programlama.....	55
6.1.3. Ağırlıklı hedef programlama.....	55
6.1.4. Öncelikli hedef programlama.....	56
6.2. Bulanık Hedef Programlama.....	57
7. ÖNERİLEN SINIFLANDIRMA MODELLERİ.....	65
7.1. Gerçek Veri Uygulaması.....	70
7.2. Simülasyon Çalışması	73
8. SONUÇ VE ÖNERİLER	83
KAYNAKLAR	87
EKLER.....	95
EK-1. Önerilen üçgen bulanık sayılı modele ait MATLAB kodları.....	96
EK-2. Önerilen yamuk bulanık sayılı modele ait MATLAB kodları	97
EK-3. Önerilen gauss bulanık sayılı modele ait MATLAB kodları	98
ÖZGEÇMİŞ	99

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 6.1. Amaç fonksiyonunda yer alacak sapma değişkenleri.....	54
Çizelge 7.1. Gerçek veri setleri için yöntemlerin doğru sınıflandırma oranları	72
Çizelge 7.2. Simülasyon çalışmasında kullanılan veri tipleri	74
Çizelge 7.3. Simülasyon çalışmasına ait doğru sınıflandırma oranları.....	76
Çizelge 7.4. Aykırı değerler tarafından bozulan veri tipleri	79
Çizelge 7.5. Aykırı veri setine ilişkin simülasyon çalışmasına ait doğru sınıflandırma oranları.....	80

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 3.1. Ayırma analizinde çakışma olmama durumu	12
Şekil 3.2. Ayırma analizinde çakışma olma durumu	13
Şekil 4.1. Geçiş bölgelerinin gösterimi.....	33
Şekil 4.2. Bulanık sayının özellikleri.....	35
Şekil 4.3. (a) Konveks bulanık küme, (b) Konveks olmayan bulanık küme	36
Şekil 4.4. Bulanık sayı gösterimi $A = [a_1, a_2, a_3]$	37
Şekil 4.5. Üçgen bulanık sayı	38
Şekil 4.6. Konveks küme üyelik derecesi	39
Şekil 4.7. Yamuk bulanık sayı	40
Şekil 4.8. Gauss bulanık sayı	40
Şekil 7.1. 10- kat çapraz doğrulama yönteminin gösterimi	69
Şekil 7.2. Veri setlerine göre yöntemlerin karşılaştırılması.....	73
Şekil 7.3. Uniform dağılım kullanılması durumunda yöntemlerin karşılaştırılması	77
Şekil 7.4. Normal dağılım kullanılması durumunda yöntemlerin karşılaştırılması	78

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Kısaltmalar	Açıklamalar
BHP	Bulanık Hedef Programlama
DDA	Doğrusal Diskriminant Analizi
DP	Doğrusal Programlama
FLDF	Fisher'in Doğrusal Ayırma Fonksiyonu
GMFC	Genel Çok Fonksiyonlu Sınıflandırma Modeli
GPMED	Medyandan Sapmalar Hedef Programlama Modeli
GSFC	Genel Tek Fonksiyonlu Sınıflandırma Modeli
HP	Hedef Programlama
LCM	Lam, Choo ve Moy'un İki Gruplu Sınıflandırma Modeli
LPMED	Medyandan Sapmalar Doğrusal Programlama Modeli
MF2MSD	Smaoui ve Aouni'nin Çok Gruplu Sınıflandırma Modeli
MF2MSDGA	Smaoui ve Aouni tarafından Gauss Bulanık Sayı Kullanılarak Oluşturulan Model
MF2MSDT	Smaoui ve Aouni tarafından Üçgen Bulanık Sayı Kullanılarak Oluşturulan Model
MF2MSDTR	Smaoui ve Aouni tarafından Yamuk Bulanık Sayı Kullanılarak Oluşturulan Model
MFMSDGA	Gauss Bulanık Sayı Kullanılarak Önerilen Model
MFMSDT	Üçgen Bulanık Sayı Kullanılarak Önerilen Model
MFMSDTR	Yamuk Bulanık Sayı Kullanılarak Önerilen Model
MINMAX	Minimum Sapmayı Maksimum Yapma Yaklaşımı
MLM	Lam ve Moy'un Çok Gruplu Sınıflandırma Modeli
MSD	Sapmalar Toplamının Minimizasyonu

1. GİRİŞ

Veri analizinde en önemli problemlerden biri olan sınıflandırma, gözlemlerin ilgili değişkenler kümesine dayanarak önceden belirlenmiş gruplardan birine atanmasını içerir. En eski ve en temel sorunlardan biri olan sınıflandırma, bir gözlemin değişkenlerine dayalı olarak, bir gruba gözlem atamakla ilgilenen önemli bir araştırma alanıdır. Sınıflandırma işleminin performansı, belirli bir problem için ayırma fonksiyonunun ne kadar iyi performans gösterdiğine bağlıdır. Eğitim veri seti olarak adlandırılan değişken kümesinin verilen bazı gözlemlerine göre yanlış sınıflandırma oranını en aza indirmek için ayırma fonksiyonu oluşturulur. Bu ayırma fonksiyonu daha sonra yeni gözlemleri önceden tanımlanmış gruplara sınıflandırmak ve sınıflandırmanın doğruluğunu test etmek için kullanılır. Gözlemlerin farklı gruplara atanması yani gerçekte olması gereken grup dışında başka bir gruba atanması problemi birçok alanda önemli rol oynamaktadır. Daha doğru ve yaygın olarak uygulanan sınıflandırma modellerinin geliştirilmesi, bu alanlarda önemli etkilere sahiptir. Mevcut çok sayıdaki sınıflandırma modeline rağmen, bu modellerin etkinliğini artırma araştırmalarının hiç durmamasının nedeni budur.

Sınıflandırma problemi, araştırmacının bir gözlem üzerinde ölçümler yaptığında, bu ölçümlere bağlı olarak gözlemi bilinen gruplardan birine atanmasını gerçekleştiren istatistiksel bir teknik olarak da tanımlanır. Gözlemin gelebileceği sonlu sayıda grup veya yığının olabileceği kabul edilir ve her yığın ölçümlere karşılık gelen rassal vektörün olasılık dağılımı ile karakterize edilir. Olasılık dağılımları tamamen bilindiğinde problem; atama kuralını belirlemektir. Dağılım bilindiğinde problem, yığından alınan örneklem yardımıyla parametre tahmini ve atama kuralını oluşturmaktır (Atakan,1997).

İstatistiksel analizler ile yapılan sınıflandırma çalışmalarında karar verici farklı gruplardan alınan birimlere ilişkin değişkenlerin değerini ölçtüğünde incelenen birimin hangi gruba ait olduğuna tahmini olarak karar verir.

Optimizasyon teorisi ve araçları ile yapılan çalışmalarda ise sınıflandırma problemi, gelecekteki birimler için yanlış sınıflandırmaların gerçek olasılıkları veya beklenen maliyetleri gibi gözlenemeyen miktarlar üzerinden tanımlanır ve bir optimizasyon problemi olarak kavramsal biçimde formüle edilebilir. Ayırma Analizi teknikleri ile incelenen

sınıflandırma problemine Matematiksel Programlama yaklaşımı, bu teorik formülasyona dayanır, ancak tüm bilinmeyenleri gözlemlenen birimlerle yeniden yerleştirir. Bu nedenle, matematiksel programlama yaklaşımı net ve yorumlanabilir sonuçlara yol açan ayırma analizi probleminin üstesinden gelmenin sezgisel ve doğrusal bir yoludur.

Matematiksel programlamaya dayalı sınıflandırma yöntemi, 1980'lerde Freed ve Glover tarafından önerilmiştir (MSD (Sapmalar toplamının minimumu)). Ardından 1990'lı yılların başında Stam ve Ragsdale tarafından geliştirilen İki Aşamalı MSD modeli temel alınarak Matematiksel Programlamaya dayalı çok sayıda sınıflandırma modeli geliştirilmiştir. Bu modellerin amacı, gruplar arasındaki ayırma izin veren kesme değerini belirlemektir.

Bulanık mantık kuramı, dilsel ifadelerin (sözel değişkenlerin) matematiksel olarak kullanılabilmesine imkân verir. Günümüzde gelişen olaylar giderek daha belirsiz hale geldiği için klasik yöntemler yetersiz kalmaktadır. Bulanık mantık kullanımı için herhangi bir sınırlama yoktur ve neredeyse her alanda kullanılabilir.

Günümüzdeki karar vermeler her zamankinden çok veri bilimine ve bu verilerden elde edilen bilgiye dayanmaktadır. Ancak bu bilgilerin çoğu kesin değildir ve bu durumda, mantıksal karar verme bu belirsizliğe dayanarak zor bir hal almaktadır. Bulanık belirsizliği göstermek için bulanık sayılar da dâhil olmak üzere farklı yöntemler kullanılmaktadır. Bulanık doğrusal programlama problemi, bulanık optimizasyonda ele alınması gereken ilginç kavramlardan biridir.

Hedef Programlama (HP), belirlenen kısıtlar altında amacı doğrudan maksimum ya da minimum yapmaktan çok, hedeflerin kendi içinde sapmalarını minimum yapmayı amaçlayan bir tekniktir. HP, hedefler ve bu hedefler arasındaki sapmaları minimum yapmayı amaçlayan bir yöntemdir. HP problemlerinde amaç, kısıtlar altında birden çok hedefin aynı anda gerçekleşmesini sağlamaktır. Bunun için hedeflerin kesin olarak belirlenmesi ve matematiksel modelin eksiksiz şekilde formüle edilmesi şarttır. Ancak birçok alanda, amaç ve hedefin kesin olarak belirlenmesi mümkün değildir. Böyle durumlarda Bulanık Hedef Programlama (BHP)'ye başvurulur. BHP'de amaç fonksiyonu katsayılarının bulanık olması ya da kısıtların katsayıları matrisinin elemanlarının veya sağ taraf sabitlerinin bulanık olması söz konusudur.

Çok gruplu sınıflandırma problemi, iki gruplu sınıflandırma problemi gibi Matematiksel Programlama literatüründe aynı öneme sahip olamamıştır. Bunun olası nedenleri; yanlış sınıflandırılan birim sayısına dayalı çok gruplu modelleri çözmek için gereken artan hesaplama sayısı ve farklı gruplara ayrılması gereken çoklu sınıflandırma sınırlarından uygun mesafeleri ve sapma değişkenlerini tanımlamaktaki zorluklar olabilir.

Bu çalışmanın amacı, çok gruplu sınıflandırma problemlerini çözebilmek için farklı üyelik fonksiyonları kullanılarak Hedef Programlama'ya dayanan yeni yaklaşımlar elde etmektir. Önerilen modellerin ve literatürdeki bilinen bazı sınıflandırma modellerinin performansları doğru sınıflandırma oranları hesaplanarak değerlendirilmiştir. Bu amaçla, hem simülasyon verisi hem de gerçek veri seti kullanılarak yöntemin uygulanabilirliği ve kullanılabilirliği gösterilmiştir.

Çalışmanın ikinci bölümünde, sınıflandırmada kullanılan istatistiksel yöntemlerden olan Doğrusal Diskriminant Analizi'ne ve Fisher'in doğrusal ayırma fonksiyonuna yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, iki gruplu ve çok gruplu sınıflandırma problemleri için literatürde yer alan matematiksel programlamaya dayanan modeller incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, bulanık mantık ve bulanık küme teorisine ait kavramların açıklamaları verilmiştir.

Beşinci bölümde, doğrusal programlama ve bulanık programlama üzerinde durularak, aralarındaki benzerlikler ve farklılıklar incelenmiştir.

Altıncı bölümde, hedef programlama ve bulanık hedef programlamanın yapısı incelenerek, bulanık hedef programlama üzerine yapılan çalışmalardan bahsedilmiştir.

Yedinci bölümde, çok gruplu sınıflandırma problemi için önerilen modeller ve bu modellerle birlikte Fisher'in doğrusal ayırma fonksiyonu ve literatürde önerilen matematiksel programlama yaklaşımlarının gerçek sınıflandırma problemi verileri ve simülasyon ile elde edilen verilerin sınıflandırma performansları incelenmiştir.

Çalışmada yapılan uygulama sonuçları ve kazanımları ile ilgili değerlendirmeler ise, sonuç ve öneriler kısmında sunulmuştur.



2. İSTATİSTİKSEL YÖNTEMLER

Sınıflamada yaygın olarak kullanılan tekniklerin başında Doğrusal Diskriminant Analizi (DDA) gelmektedir. Bu analizin amaçları arasında; analiz öncesi tanımlanmış iki veya daha fazla sayıda grup ortalamaları arasında önemli farkların olup olmadığının test edilmesi, gruplar arasındaki farka her bir değişkenin katkısının saptanması ve grup içi değişime oranla, gruplar arasındaki ayrımı maksimum yapması sayılabilir.

Doğrusal diskriminant analizi, uygulama alanı geniş, çok basit ve etkili bir denetlenen sınıflandırma yöntemidir. İki gruplu doğrusal diskriminant analizinin temel teorisi, p boyutlu bir tanımlayıcı alanı, doğrusal bir ayırma fonksiyonu tarafından tanımlanan hiper düzlem ile ayrılmış iki bölgeye bölerek sınıflandırmaktır. Diskriminant analizi genel olarak sınıflandırma problemlerini veriyi sınıflara ayıran fonksiyonlara dönüştürür, böylece problemi bir fonksiyonun tanımlanmasına indirir. Diskriminant analizinin amacı, bu fonksiyonel formun belirlenmesi ve katsayılarının tahmin edilmesidir.

Kümeleme analizi genellikle bir küme içindeki birimlerin farklı kümelerdeki birimlerden daha benzer olduğu grupta problemlerinde kullanılan denetimsiz sınıflandırma yöntemidir (Johnson ve Wichern, 2007). n tane birimin verilen bir örnekleme için, aynı sınıfa benzer birimleri atama işlemi yapar. Kümeleme analizindeki benzer birimleri grupta düşüncesi, diskriminant analizindeki sınıflandırma problemine uygulanabilir. Gözlem birimlerinin iki gruptan oluştuğu varsayılırsa, G_1 birimlerinin sınıflandırma skorları birbirlerine yakın fakat G_2 birimlerinin sınıflandırma skorlarına uzak olmalıdır.

Doğrusal diskriminant fonksiyonu Fisher (1936) tarafından ortaya atılmıştır. Fonksiyon, değişken noktalarını kendi sınıflar arasındaki varyansı maksimum düzeyde ayıran ve sınıflar içi varyansları minimum yapan vektör üzerine yansıtarak bunu gerçekleştirir. Fisher (1936)'ın iki grup için önerdiği istatistiksel doğrusal diskriminant fonksiyonu, diskriminant analizinde en çok kullanılan yöntemdir (Johnson ve Wichern, 2007).

Fisher'in doğrusal ayırma fonksiyonu, sınıflar arası ayrıştırılabilirliği büyütürken sınıflar içi varyansı küçültmeyi amaçlayan bir tekniktir. Amaçtan biri, gözlemlerin sınıflandırılması için gerekli olan değişkenleri seçip, ayırt edici olmayan değişkenleri elemektir.

Π_1 ve Π_2 grupları veya yığınları gösterebiliriz. $\underline{X}'=(X_1, X_2, \dots, X_p)$ birim üzerinden alınacak ölçümlere karşılık gelen p boyutlu rassal vektör olsun. $\underline{X}$ 'in gözlem değeri gruptan gruba değişecektir. $\underline{X}$ rassal vektörüne ilişkin gözlem değeri $\underline{x}$, Π_1 'de ise $\underline{X}$ 'in olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_1(\underline{x})$ ve Π_2 'de ise $\underline{X}$ 'in olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_2(\underline{x})$ 'dir.

$\underline{\mu}_1=E(\underline{X}/ \Pi_1)$: Π_1 ' e ait $\underline{X}$ rassal vektörünün beklenen değeri

$\underline{\mu}_2=E(\underline{X}/ \Pi_2)$: Π_2 ' ye ait $\underline{X}$ rassal vektörünün beklenen değeri

İki yığın için varyans-kovaryans matrislerinin eşit olduğu kabul edilirse;

$$\text{Cov}(\underline{X}/ \Pi_1)=\text{Cov}(\underline{X}/ \Pi_2)=\text{Cov}(\underline{X})= \Sigma \quad (2.1)$$

$\Sigma=E(\underline{X} - \underline{\mu}_i)(\underline{X} - \underline{\mu}_i)'$ $i=1,2$ olmak üzere,

$Y=\underline{l}'_{p \times 1} \underline{X}_{p \times 1}$ doğrusal bileşimi göz önüne alınsın. Buradan,

$$\begin{aligned} \mu_{1Y} &= E(Y/ \Pi_1) \\ &= E(\underline{l}' \underline{X}/ \Pi_1) \\ &= \underline{l}' \underline{\mu}_1 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \mu_{2Y} &= E(Y/ \Pi_2) \\ &= E(\underline{l}' \underline{X}/ \Pi_2) \\ &= \underline{l}' \underline{\mu}_2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_Y^2 &= \text{Var}(Y/ \Pi_1, \Pi_2) \\ &= \text{Var}(\underline{l}' \underline{X}) \\ &= \underline{l}' \text{Cov}(\underline{X}) \underline{l} \\ &= \underline{l}' \Sigma \underline{l} \end{aligned} \quad (2.4)$$

elde edilir.

En iyi doğrusal birleşim, iki yığın için Y 'nin ortalamaları arası kare uzaklığının, Y 'nin varyansına oranlanarak bulunan ifadeyi maksimum yapacak şekilde elde edilmiştir. Yani en iyi doğrusal birleşim,

$$\begin{aligned} \frac{(\mu_{1y} - \mu_{2y})^2}{\sigma_Y^2} &= \frac{(\underline{l}' \underline{\mu}_1 - \underline{l}' \underline{\mu}_2)^2}{\underline{l}' \underline{\Sigma} \underline{l}} \\ &= \frac{\underline{l}' (\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2) (\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2)' \underline{l}}{\underline{l}' \underline{\Sigma} \underline{l}} \\ &= \frac{(\underline{l}' \underline{\delta})^2}{\underline{l}' \underline{\Sigma} \underline{l}} \end{aligned} \quad (2.5)$$

oranından elde edilir. Burada $\underline{\delta} = (\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2)$ iki yığın ortalama vektörlerinin farkıdır. $p \times p$ tipindeki $\underline{\delta} \underline{\delta}'$ matrisi, Π_1 ve Π_2 yığınlarının ortalamaları arası fark bileşenlerinin kareler ve çapraz çarpımlar matrisidir.

$\frac{(\underline{l}' \underline{\delta})^2}{\underline{l}' \underline{\Sigma} \underline{l}}$ ifadesi her zaman $c \neq 0$ için $\underline{l} = c \underline{\Sigma}^{-1} \underline{\delta} = c \underline{\Sigma}^{-1} (\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2)$ 'nin seçilmesiyle maksimum olur. $c=1$ alınmasıyla elde edilen $Y = \underline{l}'_{p \times 1} \underline{X}_{p \times 1}$ doğrusal birleşimine Fisher'in Doğrusal Ayırma Fonksiyonu (FLDF) denir.

FLDF, çok değişkenli $\underline{X}$ gözlemler matrisini Π_1 ve Π_2 yığınlarına ilişkin tek değişkenli y değerlerine dönüştürür. Bu tek değişkenli yığınların ortalamaları arası fark, yığın varyansına göre mümkün olduğunca büyük olur.

Yeni bir $\underline{x}_0$ gözlemi için diskriminant fonksiyonu $y_0 = (\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2)' \underline{\Sigma}^{-1} \underline{x}_0$ biçiminde tanımlansın. Bu doğrusal birleşime göre oluşan iki değişkenli yığının ortalamalarının orta noktası olan m ,

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2} (\mu_{1Y} + \mu_{2Y}) \\ &= \frac{1}{2} (\underline{l}' \underline{\mu}_1 + \underline{l}' \underline{\mu}_2) \\ &= \frac{1}{2} (\underline{l}' (\underline{\mu}_1 + \underline{\mu}_2)) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} (\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2)' \Sigma^{-1} (\underline{\mu}_1 + \underline{\mu}_2) \quad (2.6)$$

biçimindedir. Buradan, $E(Y_0 / \Pi_1) - m \geq 0$ ve $E(Y_0 / \Pi_2) - m < 0$ 'dır. Yani eğer yeni birim $\underline{x}_0$, Π_1 'den ise Y_0 'ın beklenen değeri orta noktadan büyük, $\underline{x}_0$, Π_2 'den ise Y_0 'ın beklenen değeri orta noktadan küçük olacaktır.

Böylece sınıflandırma kuralı:

“ $y_0 \geq m$ ise, $\underline{x}_0$ Π_1 'e,

$y_0 < m$ ise, $\underline{x}_0$ Π_2 'ye atanır”

şeklinde ifade edilebilir. Burada verilen diskriminant fonksiyonunda yığın parametreleri bilinmektedir.

Yığın parametreleri bilinmiyorsa, ilgili yığınlardan alınan örneklemlerden parametreler tahmin edilir. Her bir yığından alınan n_1 ve n_2 birimlik örneklemlerden sırasıyla yığın parametrelerinin tahmin edicileri; $\hat{\underline{\mu}}_1 = \overline{\underline{X}}_1$, $\hat{\underline{\mu}}_2 = \overline{\underline{X}}_2$ ve $\hat{\Sigma} = S_{\text{pooled}}$ olmak üzere Fisher'in örneklem doğrusal diskriminant fonksiyonu;

$$Y = \hat{\underline{\Gamma}}' \underline{X} \\ = (\overline{\underline{X}}_1 - \overline{\underline{X}}_2)' S_{\text{pooled}}^{-1} \underline{X} \quad (2.7)$$

olarak elde edilir. Burada S_{pooled} iki yığın için birleştirilmiş örneklem varyans kovaryans matrisidir. Yığınların aynı Σ kovaryans matrisine sahip olduğu varsayıldığından, örnek varyans kovaryans matrisleri Σ 'nın yansız tahminini elde etmek için birleştirilir. $S_{\text{pooled}} = S$ alınırsa iki tek değişkenli yığının örneklem ortalama değerleri $\bar{y}_1 = \hat{\underline{\Gamma}}' \underline{\bar{x}}_1$ ve $\bar{y}_2 = \hat{\underline{\Gamma}}' \underline{\bar{x}}_2$ arasındaki orta nokta,

$$\hat{m} = \frac{1}{2} (\bar{y}_1 + \bar{y}_2) \\ = \frac{1}{2} (\overline{\underline{X}}_1 - \overline{\underline{X}}_2)' S^{-1} (\overline{\underline{X}}_1 + \overline{\underline{X}}_2) \text{ dir ve örneklemle ilgili sınıflandırma kuralı } y_0 \geq \hat{m} \text{ ise } \underline{x}_0, \Pi_1 \text{'e} \\ \text{yani birinci yığına atanır. Aksi halde } \underline{x}_0, \Pi_2 \text{'ye yani ikinci yığına atanır.}$$

Fisher'in doğrusal ayırma fonksiyonu, Doğrusal Diskriminant Analizi ile benzer bir yöntemdir, boyut azaltma yaptığı gibi sınıflandırma da yapabilir. Fisher'in doğrusal ayırma fonksiyonu ve Doğrusal Diskriminant Analizi sıklıkla birbirlerinin yerine kullanılırlar. Fisher bu iki algoritma arasında çok az fark olduğunu belirtmiştir. Fisher'in doğrusal ayırma fonksiyonunda, Doğrusal Diskriminant Analizi'nde olduğu gibi normal dağılım ve varyans kovaryans matrisi eşitliği varsayımları yoktur (Fisher, 1936).

Anderson (1984), normal dağılım ve eşit varyans-kovaryans varsayımı altında iki ya da daha fazla gruptan oluşan örnekleme gözlemlerini gruplardan birine sınıflandırmak için doğrusal bir fonksiyon önermiştir. Yöntem m grubun birbiri ile kıyaslanmasına dayanmaktadır. Bu durumda $m(m - 1)/2$ tane ayırma fonksiyonu bulunması gerekmektedir. Bu fonksiyonlar, karşılaştırılan grupların olasılık yoğunluk fonksiyonlarının birbirine oranlanmasından elde edilir ve Eş. 2.8 ile gösterildiği gibidir.

$$\hat{W} = (\bar{X}_i - \bar{X}_j)' S_{\text{pool}}^{-1} x_0 - \frac{1}{2} (\bar{X}_i - \bar{X}_j)' S_{\text{pool}}^{-1} (\bar{X}_i + \bar{X}_j) = f_{ij} = \frac{f_i(X)}{f_j(X)} \quad (2.8)$$

Eğer $f_{ij} \geq 0$ ise, birim i. gruba aksi halde j. gruba sınıflandırılır.



3. MATEMATİKSEL PROGRAMLAMA YAKLAŞIMLARI

Doğrusal Diskriminant Analizi; sınıfların ağırlık merkezi (sınıfın ortalaması) etrafında sınıflandırılacak noktaları gruplandırmak için sınıfları doğrusal bir hiper düzlem ile ayırmak ve ayrıca sınıflar arasında doğrusal bir hiper düzlem oluşturmaktan meydana gelir. Bu yöntemin uygulanması örneklemin normal dağılıma, iki grubun varyans kovaryans matrisinin homojenliği, değişkenler arasında çoklu doğrusal bağlantı olmaması varsayımlarını gerektirir.

İstatistiksel yöntemler kullanarak sınıflandırma problemlerinin incelenmesine alternatif olarak birçok matematiksel programlama yaklaşımı geliştirilmiştir. Matematiksel programlama teknikleri, sınıflandırma problemlerinde istatistiksel yöntemlere ait varsayımların sağlanmaması durumunda kullanılırlar.

Sınıflama problemlerindeki uygulama çalışmaları ilk olarak 1960'ların sonlarında ve 1970'lerin başlarında ortaya çıkmıştır ((Rosen, 1965), (Mangasarian,1965), (Smith, 1968) ve (Grinold, 1972), Freed ve Glover (1981)). Ancak sınıflandırma modelinin geliştirilmesi için matematiksel programlama yaklaşımlarına ilgi, Freed ve Glover (1986) tarafından önerilen sapmalar toplamının minimizasyonuna dayanan (MSD) sınıflandırma modeli ile artmıştır. p değişkenli iki gruplu sınıflandırma problemi için önerilen MSD modeli,

$$\min \sum_i d_i$$

Kısıtlar:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^p w_j x_{ij} &\leq c + d_i & i \in G_1 \\ \sum_{j=1}^p w_j x_{ij} &> c - d_i & i \in G_2 \end{aligned} \tag{3.1}$$

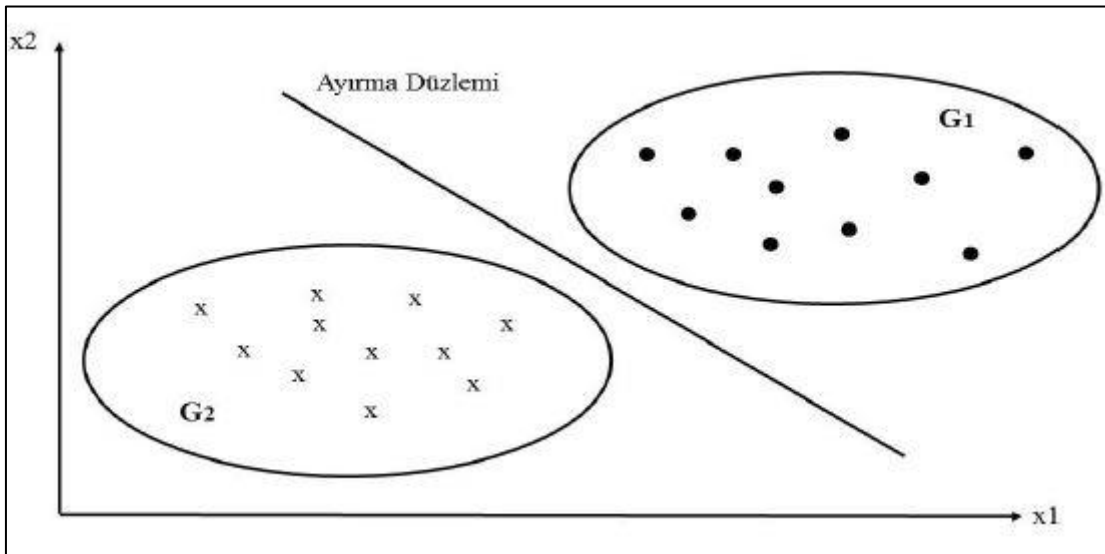
şeklinde tanımlanabilir. x ; G_1 ve G_2 gruplarından alınan n çaplı bir örneğin p . değişken skorlarını gösteren bir matris, $w_1, w_2, \dots, w_p$ değişkenlere atanan ağırlıklar olmak üzere i . birime ait sınıflandırma skoru $S_i = \sum_{j=1}^p w_j x_{ij}$ ($i=1,2,\dots,n$) olarak tanımlanır.

$x_{ij} \geq 0, d_i \geq 0, w_j$ ve c işaretçe serbest değişkenlerdir. Eş. 3.1 ile verilen modelin çözülmesi ile w_j ve c değerleri elde edilerek, herhangi bir i biriminin S_i sınıflandırma skoru elde edilir. $S_i \leq c$ ise birim G_1 grubuna, aksi durumda birim G_2 grubuna sınıflandırılır.

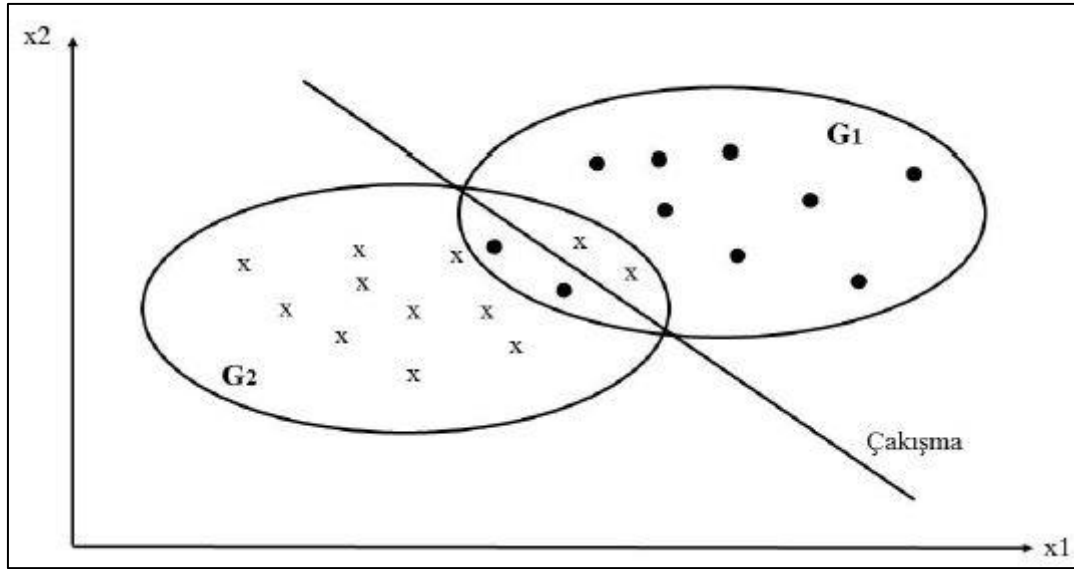
İlerleyen yıllarda Bajgier ve Hill (1982), Stam ve Ragsdale (1992), Glen (1999) gibi birçok yazar tarafından matematiksel programlamaya dayalı modeller önerilmiştir. Matematiksel programlama modellerinin avantajı, matematiksel programlama temelli diskriminant analiz yöntemlerinin bir grup dağılımı üzerinde herhangi bir varsayım gerektirmemesidir.

Sınıflandırma problemlerinde, önemli bir durum bazı birimlerin hangi gruba ait olduğunun tam olarak belirlenememesidir. İki gruplu durum (G_1 ve G_2) için, G_1 'deki bazı birimler G_2 'ye ait olabilirken G_2 'deki bazı birimler de G_1 grubuna ait olabilir. Böyle bir durum “çakışma” olarak adlandırılır ve önemli bir yanlış sınıflandırma kaynağıdır (Stam ve Ragsdale, 1992).

İki gruplu durum için çakışma olmama ve olma durumları sırasıyla Şekil 3.1. ve Şekil 3.2.'de verildiği gibidir.



Şekil 3.1. Ayırma analizinde çakışma olmama durumu



Şekil 3.2. Ayırma analizinde çakışma olma durumu

Stam ve Ragsdale (1992)'in ayırma fonksiyonunun bulunması için önerdikleri yöntem iki aşamalıdır. Bu yöntemde, çakışma durumunda olan gözlemler ilk aşamada tanımlanır ve bu gözlemler ikinci aşamada yeniden incelenir. Yöntemin ilk aşaması Eş. 3.2 ile verilmiştir.

$$\min \sum_{i \in G_1} d_{1i} + \sum_{i \in G_2} d_{2i}$$

Kısıtlar:

$$\sum_{j=1}^p w_j x_{ij} + d_{1i} \geq 1 \quad i \in G_1$$

$$\sum_{j=1}^p w_j x_{ij} - d_{2i} \leq 0 \quad i \in G_2$$

$$d_{1i}, d_{2i} \geq 0, w_j \text{ işaretçe serbest} \quad (3.2)$$

Sağ taraf sabitleri olan 1 ve 0; gruplar arasındaki çakışmayı belirlemek için konulmuştur. Bu model Simpleks algoritması ile çözülerek w^* optimum değeri elde edilir. X_{jm} ile gösterilen yeni örneklenen m. birimin G_1 , G_2 ya da $G_1 \cap G_2$ durumlarından hangisine sınıflandırılacağı,

- i) $\sum_{j=1}^p w_j^* X_{jm} \geq 1$ ise $m \in G_1$
- ii) $0 < \sum_{j=1}^p w_j^* X_{jm} < 1$ ise $m \in G_1 \cap G_2$
- iii) $\sum_{j=1}^p w_j^* X_{jm} \leq 0$ ise $m \in G_2$

kriterleri ile belirlenir.

Bu kriterlere göre tüm birimler aşağıdaki alt kümelere sınıflandırılabilir:

$$C_1 = \{i \in G_1 / \sum_{j=1}^p w_j^* x_{ij} \geq 1\}$$

$$C_2 = \{i \in G_2 / \sum_{j=1}^p w_j^* x_{ij} \leq 0\}$$

$$D_1 = G_1 - C_1 \text{ ve } D_2 = G_2 - C_2$$

$C_1 = G_1$ 'e doğru sınıflandırılan gözlemlerin kümesi

$C_2 = G_2$ 'ye doğru sınıflandırılan gözlemlerin kümesi

$D_1 =$ İlk sınıflandırma boşluğundaki ya da yanlış sınıflandırılan G_1 'den gelen gözlemlerin kümesi

$D_2 =$ İlk sınıflandırma boşluğundaki ya da yanlış sınıflandırılan G_2 'den gelen gözlemlerin kümesi

İkinci aşamada C_1 ve C_2 kümelerinde yer alan birimlerin gruplarını bozmadan D_1 ve D_2 kümelerinde yer alan birimler yeni bir ayırma fonksiyonu ile yeniden değerlendirilir. Bu aşama Eş. 3.3 ile verildiği gibidir.

$$\min \sum_{i \in D_1} d_{1i} + \sum_{i \in D_2} d_{2i}$$

Kısıtlar:

$$\sum_{j=1}^p w_j x_{ij} \geq 1 \quad i \in C_1$$

$$\sum_{j=1}^p w_j x_{ij} \leq 0 \quad i \in C_2$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^p w_j x_{ij} + d_{1i} \geq c \quad i \in D_1 \\
& \sum_{j=1}^p w_j x_{ij} - d_{2i} \leq c \quad i \in D_2 \\
& c \leq 1 \\
& d_{1i}, d_{2i} \geq 0, w_j \text{ işaretçe serbest}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Modelin Simpleks algoritması ile çözümünden ağırlık tahminleri w^* ve ayırma skoru c^* elde edilir. İlk aşamada çakışma grubunda tanımlanan m. birim,

- i) $\sum_{j=1}^p w_j X_{jm} > c^*$ ise G_1 grubuna
- ii) $\sum_{j=1}^p w_j X_{jm} < c^*$ ise G_2 grubuna aittir.

Lam ve diğerleri (1996), MSD modelinin yaptığı işlemi iki adıma ayırmışlardır. Bu modelde amaç, grup ortalamasının sınıflandırma skorundan sapmalar toplamını minimize etmektir. LCM olarak adlandırdıkları modelin ilk adımı Eş. 3.4 ile gösterilmiştir.

$$\min \sum_{i \in G_1} S_i^+ + \sum_{i \in G_2} S_i^-$$

Kısıtlar:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^p w_j (X_{ij} - \mu_{1j}) + S_i^+ \geq 0 \quad i \in G_1 \\
& \sum_{j=1}^p w_j (X_{ij} - \mu_{2j}) - S_i^- \leq 0 \quad i \in G_2 \\
& \sum_{j=1}^p w_j (\mu_{1j} - \mu_{2j}) \geq 1 \\
& S_i^+, S_i^- \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), w_j \quad (j=1, 2, \dots, p) \text{ işaretçe serbest değişken}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Burada μ_{1j} ; G_1 grubundaki birimlerin j . değişkenine ait ortalama ve μ_{2j} ; G_2 grubundaki birimlerin j . değişkenine ait ortalamadır. Model çözümünden değişkenlerin ayırma katsayıları, değişkenlere ait ağırlıklar olan w_j bulunarak, birimlerin sınıflandırma skorları (S_i) elde edilir. Bu skorlar Eş. 3.5'te kullanılarak sınıflandırma yapılır.

$$\min \sum_{i=1}^n d_i$$

Kısıtlar:

$$\begin{aligned} S_i + d_i &\geq c & i \in G_1 \\ S_i - d_i &\leq c & i \in G_2 \\ d_i &\geq 0 \quad (i=1,2,\dots,n), c \text{ işaretçe serbest} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Bal ve diğerleri (2006a), LCM modelinde ortalamadan sapmalar yerine medyan değerinden sapmalar toplamını minimize etmeyi amaçlayarak LPMED modelini önermişlerdir. Daha sonra Bal ve diğerleri (2006b), LCM ve LPMED modellerinin iki aşamada yaptığı işlemi öncelikli hedef programlama modeline indirgeyerek GPMED isimli sınıflandırma modeli geliştirmişlerdir.

Literatürdeki sınıflandırma çalışmaları genellikle iki gruplu çalışmalar üzerinedir ((Lam ve diğerleri, 1996), (Bal ve diğerleri, 2006a, 2006b), (Sueyoshi, 1999), (Bal ve Örkücü, 2007)). Buna rağmen, çok gruplu matematiksel programlama yaklaşımı öneren çalışmalar az sayıdadır. Freed ve Glover (1981)'e göre; iki gruplu durumu çok gruplu duruma genişletmenin yolu, bütün iki gruplu kombinasyonları kullanmaktır.

Çok gruplu sınıflandırma problemleri için, Gehrlein(1986) tarafından önerilen genel tek fonksiyonlu sınıflandırma modeli (GSFC) ya da genel çok fonksiyonlu sınıflandırma modeli (GMFC) kullanılabilir.

GSFC modeli aşağıdaki gibidir:

$$\text{Min } \sum_{i=1}^n y_i$$

Kısıtlar:

$$\alpha_0 + \sum_{j=1}^p \alpha_j Z_{ij} - My_i \leq U_r, \quad \forall i \in G_r, r = 1, 2, \dots, k$$

$$\alpha_0 + \sum_{j=1}^p \alpha_j Z_{ij} + My_i \geq L_r, \quad \forall i \in G_r, r = 1, 2, \dots, k$$

$$\begin{aligned} U_r - L_r &\geq e', & r = 1, 2, \dots, k \\ L_r - U_r + M J_{rt} &\geq e, & \forall G_r, \forall G_t, r \neq t, r = 1, 2, \dots, k \\ L_r - U_r + M J_{tr} &\geq e, & \forall G_r, \forall G_t, r \neq t, r = 1, 2, \dots, k \\ J_{rt} + J_{tr} &= 1, & r \neq t, r = 1, 2, \dots, k \end{aligned} \quad (3.6)$$

y: yanlış sınıflandırılan gözlem sayısı

k: grup sayısı

p: değişken sayısı

n: toplam gözlem sayısı

α_0 : sabit terim

U_r : G_r grubuna atanan aralığın son üst noktası

L_r : G_r grubuna atanan aralığın son alt noktası

e' : bir gruba atanan aralığın minimum genişliği

e : bitişik gruplar arasındaki aralığın (oluşacak boşluğun) minimum büyüklüğü

M : pozitif büyük bir sabittir, yanlış sınıflandırılmış bir gözlemin kendi grubuna ilişkin aralığın en yakın uç noktasına olan maksimum sapmayı tanımlar. J_{rt} değişkeni ise;

$$J_{rt} = \begin{cases} 1, & G_r \text{ grubu } G_t \text{ grubundan önce ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \text{ olarak tanımlanır.}$$

Bu modelde, y_i ($i=1,2,\dots,n$) ve J_{rt} ($r,t=1,2,\dots,k; r \neq t$) değişkenleri ikili değer alan değişkenlerdir. α_j ($j=1,2,\dots,p$), L_r ve U_r ($r=1,2,\dots,k$) değişkenleri ise serbest değişkenlerdir.

Bu modelde, her gözlem için $\alpha_0 + \sum_{j=1}^p \alpha_j Z_{ij}$ ayırma skoru tanımlanmakta ve bu skorun $[L_r, U_r]$ aralığının içine düşüp düşmediği kontrol edilmektedir. Ayırma skorları gruplar arasındaki boşluğa düşen bir gözlem, yanlış sınıflandırılmış sayılmaktadır.

Veride fazla sayıda aykırı değer olduğunda GSFC modeli, gözlemlerin mutlaka bir gruba sınıflandırılacağını garanti etmemektedir. Bu sorunu çözmek için Gehrlein (1986) ve aynı zamanlarda Choo ve Wedley (1985) bir genel çok fonksiyonlu sınıflandırma modeli (GMFC) önermişlerdir. GMFC'nin gösterimi aşağıdaki gibidir:

$$\text{Min } \sum_{i=1}^n y_i$$

Kısıtlar:

$$\alpha_{r0} + \sum_{j=1}^p \alpha_{rj} Z_{ij} - \alpha_{t0} - \sum_{j=1}^p \alpha_{tj} Z_{ij} + M y_i \geq e$$

$$\forall i \in G_r, i = 1, 2, \dots, n \quad r = 1, 2, \dots, k, r \neq t \quad (3.7)$$

$$y_i = \begin{cases} 1, & i \text{ gözlemi yanlış sınıflandırılmışsa} \\ 0, & i \text{ gözlemi doğru sınıflandırılmışsa} \end{cases}$$

Z_{ij} : i. gözleminin j. değişkeni için gözlem değeri

k: Grup sayısı

M: Büyük pozitif bir sabit

p: değişken sayısı

n: toplam gözlem sayısı

α_{rj} : G_r grubundaki i. gözlem için Z_{ij} 'ye atanan ağırlık

α_{r0} : G_r grubu için sabit terim (G_r grubu için eşik değeri)

α_{rj} işaretçe serbest değişkendir.

GMFC modeli bir gözlemi, en büyük ayırma skoruna sahip grup içine sınıflandırır. Modeldeki kısıt ile her bir grup için ayrı bir ayırma fonksiyonu oluşturulmaktadır.

Bal (1999), doğrusal hedef programlama ile üç gruplu sınıflandırma problemini ele alarak, grupları bilinen p değişkenli birimi, her birimin puanlarını hesaplayarak uygun grup

aralığına yerleştirecek ayırma fonksiyonunun ağırlığını bulmayı amaçlamıştır. Model; w_j , j. değişkenin ağırlığı; Z_{ij} , i. birimin j. değişken değeri olmak üzere; Z_{ij} değerleri ve G_r ($r=1, 2, 3$) grupları biliniyorken $S_i = \sum_{j=1}^p w_j Z_{ij}$ birimlerin sınıflandırma puanlarını uygun gruplara ayıracak, gruplara ait L_r , U_r alt ve üst sınırları ile w_j ağırlığının bulunmasına dayanmaktadır. Buna göre üç gruplu matematiksel programlama modeli, Eş. 3.8'in çözümünden elde edilecek L_r , U_r ve w_j değerlerinin belirlenmesinden oluşur.

$$L_r \leq \sum_{j=1}^p w_j Z_{ij} \leq U_r, \quad i \in G_r, r = 1, 2, 3$$

$$L_1 \leq U_1 \leq L_2 \leq U_2 \leq L_3 \leq U_3 \quad (3.8)$$

Doğrusal hedef programlama ile sınıflandırma probleminde $S_i = \sum_{j=1}^p w_j Z_{ij}$ puanlarından grupları ayırmaya yarayan L_r ve U_r grup sınırları hedef değerleri olarak alınarak bu değerlerden sapmaları minimum yapan çözümler elde edilebilir. Hedef değerlerine uygun sapma değişkenlerinin eklenmesiyle doğrusal hedef programlamaya dayalı sınıflandırma modeli Eş. 3.9'da verildiği gibidir.

$$\min a = \sum_{i=1}^n (n_i^L + p_i^L)$$

Kısıtlar:

$$\sum_{j=1}^p w_j Z_{ij} + n_i^L - p_i^L = L_r, \quad i \in G_r, r = 1, 2, 3$$

$$\sum_{j=1}^p w_j Z_{ij} + n_i^U - p_i^U = U_r, \quad i \in G_r, r = 1, 2, 3 \quad (3.9)$$

Burada w_j ($j=1, \dots, p$), L_r ve U_r ($r=1, 2, 3$) işaretçe serbest, n_i^L, p_i^L, n_i^U ve p_i^U sapma değişkenleri ise negatif olmayan değişkenlerdir.

Lam ve Moy (1996), Lam ve diğerleri (1996) tarafından geliştirilen iki grup sınıflandırma modelini çok gruplu bir sınıflandırma modeline genişletmiştir. MLM olarak

isimlendirdikleri modelin ilk aşaması, m grup sayısı, $u=1, \dots, m-1$, $v=u+1, \dots, m$ olmak üzere, her bir (u,v) çifti için Eş. 3.10'da verildiği gibidir.

$$\min \sum_{i \in G_u, i \in G_v}^n d_i$$

Kısıtlar:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^p w_j (X_{ij} - \bar{x}_j^u) + d_i &\geq 0, \quad i \in G_u \\ \sum_{j=1}^p w_j (X_{ij} - \bar{x}_j^v) - d_i &\leq 0, \quad i \in G_v \\ \sum_{j=1}^p w_j (\bar{x}_j^u - \bar{x}_j^v) &\geq 1 \end{aligned} \quad (3.10)$$

n_r , G_r grubundaki birim sayısı, $n=n_1+n_2+\dots+n_m$ toplam birim sayısı olmak üzere j . değişkene ilişkin ortalama $\bar{x}_j^r = \frac{1}{n_r} \sum_{i \in G_r} X_{ij}$, ($r=1,2,\dots,m$) olarak tanımlanır. Modelde w_j ($j=1,\dots,p$) serbest değişken ve $i \in G_u$ ve $i \in G_v$ için $d_i \geq 0$ 'dır. Eş. 3.10 çözüldükten sonra, her (u,v) grup çifti için elde edilen w_j yardımıyla G_u ve G_v 'deki birimlerin S_i sınıflandırma skorları bulunur. İkinci aşamada ise grupları ayırmada yararlanılacak c_{uv} değerleri Eş. 3.11 modelinin çözülmesi ile elde edilir. c_{uv} değerleri serbest değişken, $d_{iuv} \geq 0$ 'dır.

$$\min \sum_{i \in G_u} \sum_{u=1}^{m-1} \sum_{v=u+1}^m d_{iuv} + \sum_{i \in G_v} \sum_{u=1}^{m-1} \sum_{v=u+1}^m d_{iuv}$$

Kısıtlar:

$$\begin{aligned} S_{iuv} + d_{iuv} &\geq c_{uv}, u = 1, \dots, m-1, v=u+1, \dots, m, i \in G_u \\ S_{iuv} - d_{iuv} &\leq c_{uv}, u = 1, \dots, m-1, v=u+1, \dots, m, i \in G_v \end{aligned} \quad (3.11)$$

Örkcü ve Bal (2011), literatürde olan iki yöntemin güçlü yönlerini birleştirerek bir model geliştirmişlerdir. Bal ve Örkcü (2011), sınıflandırma skorundan negatif sapmayı minimum yapmayı amaçlayan bir model önermişlerdir. Doğan ve diğerleri (2019), çok gruplu sınıflandırma problemlerinin çözümü için regresyon analizi ve matematiksel programlamaya dayanan iki aşamalı bir yöntem geliştirmişlerdir.

Youssef ve diğerleri (2011), üç gruplu sınıflandırma problemlerini çözmek için model önermişlerdir. p değişken tarafından tanımlanan her gözlemle m ($m=1, 2, 3$) grubuna ait n_m gözlem olduğu varsayılınsın. m grubunun i . gözlemi için j ($j=1,2,\dots,p$) değişkeninin değeri X_{ij} olsun. İkinci grup; birinci ve üçüncü grup arasındadır ve çakışma sadece G_1 ve G_2 grupları arasında ve G_2 ve G_3 grupları arasındadır. Yöntem birbiriyle ilişkili iki aşamadan oluşmaktadır. İlk aşama çakışmayı belirleme, yanlış sınıflandırılmış gözlemleri belirlemeyi ve sınıflandırma durumunu tanımlamayı amaçlamaktadır. 1. Aşama aşağıda verildiği gibidir. Bu aşamada j değişken için w_j katsayıları ve a_1, a_2, b_1, b_2 sabit terimleri belirlenir.

$$\min \sum_{m=1}^3 \sum_{i \in G_m} d_{mi}$$

Kısıtlar:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^p w_j x_{ij} + d_{1i} &\geq a_1, i \in G_1 \\ \sum_{j=1}^p w_j x_{ij} - d_{2i} &\leq a_2, i \in G_2 \\ \sum_{j=1}^p w_j x_{ij} + d_{2i} &\geq b_1, i \in G_2 \\ \sum_{j=1}^p w_j x_{ij} - d_{3i} &\leq b_2, i \in G_3 \end{aligned} \quad (3.12)$$

a_1, a_2, b_1, b_2 ve $w_j, j=1,2,\dots,p$ işaretçe serbesttir. $d_{mi} \geq 0$; $a_1 > a_2$ ve $b_1 > b_2$ dir.

1. Aşamanın çözülmesiyle sırasıyla a_1, a_2, b_1, b_2 ve w_j 'nin optimal değerleri olan $a_1^*, a_2^*, b_1^*, b_2^*$ ve w_j^* elde edilir.

Farklı gözlemler aşağıdaki alt kümelere sınıflandırılabilir:

$$E_1 = \{i \in G / \sum_{j=1}^p w_j^* x_{ij} \geq a_1^*\}$$

$$E_2 = \{i \in G / b_1^* \leq \sum_{j=1}^p w_j^* x_{ij} \leq a_2^*\}$$

$$E_3 = \{i \in G / \sum_{j=1}^p w_j^* x_{ij} \leq b_2^*\}$$

$$E_0 = \{i \in G / a_2^* < \sum_{j=1}^p w_j^* x_{ij} < a_1^*\}$$

$$E'_0 = \{i \in G / b_2^* < \sum_{j=1}^p w_j^* x_{ij} < b_1^*\}$$

E_1 = Grup 1'e doğru sınıflandırılan gözlemlerin kümesi

E_2 = Grup 2'ye doğru sınıflandırılan gözlemlerin kümesi

E_3 = Grup 3'e doğru sınıflandırılan gözlemlerin kümesi

E_0 = İlk sınıflandırma boşluğundaki (Grup 1 ve Grup 2 arasında kalan) gözlemlerin kümesi

E'_0 = İkinci sınıflandırma boşluğundaki (Grup 2 ve Grup 3 arasında kalan) gözlemlerin kümesi

Bazı gözlemler yanlış sınıflandırıldığı için, diğer alt kümeler aşağıdaki gibi tanımlanır:

$C_m = G_m \cap E_m$, ($m=1,2,3$); G_m grubuna doğru sınıflandırılan gözlemlerin kümesi

$D_1 = G_1 \cap (E_2 \cup E_0)$; İlk sınıflandırma boşluğundaki ya da yanlış sınıflandırılan G_1 'den gelen gözlemlerin kümesi

$D_2 = G_2 \cap (E_1 \cup E_0)$; İlk sınıflandırma boşluğundaki ya da yanlış sınıflandırılan G_2 'den gelen gözlemlerin kümesi

$D'_2 = G_2 \cap (E_3 \cup E'_0)$; İkinci sınıflandırma boşluğundaki ya da yanlış sınıflandırılan G_2 'den gelen gözlemlerin kümesi

$D'_3 = G_3 \cap (E_2 \cup E'_0)$; İkinci sınıflandırma boşluğundaki ya da yanlış sınıflandırılan G_3 'ten gelen gözlemlerin kümesi

İkinci aşamada çakışma durumu ve yanlış sınıflandırılmış gözlemlerin tekrar sınıflandırma durumu ele alınır, bu aşamada w_j^{**} ($j=1, 2, \dots, p$), c^* ve s^* sabit terimleri belirlenir. Burada sınıflandırılmak istenen gözlem, üç gruptan birine sınıflandırılır.

İkinci aşamanın amacı iki yönlüdür. İlk olarak, C_1 ve C_2 'deki gözlemlerin doğru sınıflandırılmasını korurken, D_1 ve D_2 'deki gözlemleri mümkün olduğunca ayıran yeni bir

fonksiyon oluşturmayı amaçlamaktadır. İkinci olarak, C_2 ve C_3 'teki gözlemlerin doğru sınıflandırılmasını korurken D'_2 ve D'_3 'deki gözlemleri ayırmak için yeni üretilen fonksiyonunun kullanımını amaçlar.

İkinci aşama modelinin çözülmesiyle değişkenlerin ağırlık katsayıları olan w_j ile c ve s 'nin optimal değerleri ile bir ayırma fonksiyonu üretilir. Bu aşama Eş. 3.13 ile verildiği gibidir.

$$\min \sum_{m=1}^3 \sum_{i \in G_m} d_{mi}$$

Kısıtlar:

$$\sum_{j=1}^p w_j x_{ij} \geq a_1^*, i \in C_1$$

$$\sum_{j=1}^p w_j x_{ij} - c + d_{1i} \geq 0, i \in D_1$$

$$\sum_{j=1}^p w_j x_{ij} - c - d_{2i} \leq 0, i \in D_2$$

$$\sum_{j=1}^p w_j x_{ij} \leq a_2^*, i \in C_2$$

$$\sum_{j=1}^p w_j x_{ij} \geq b_1^*, i \in C_2$$

$$\sum_{j=1}^p w_j x_{ij} - s + d_{2i} \geq 0, i \in D'_2$$

$$\sum_{j=1}^p w_j x_{ij} - s - d_{3i} \leq 0, i \in D'_3$$

$$\sum_{j=1}^p w_j x_{ij} \leq b_2^*, i \in C_3$$

(3.13)

w_j ($j=1, 2, \dots, n$) işaretçe serbest;

$d_{mi} \geq 0$, $a_2^* < c < a_1^*$, ve $b_2^* < s < b_1^*$ biçimindedir.

w , c ve s 'nin sırasıyla ikinci aşamadan elde edilen optimal değerleri w_j^{**} , c^* ve s^* olmak üzere, Z_j yeni gözleminin sınıflandırma kuralı aşağıdaki gibi olur:

$\sum_{j=1}^p w_j^{**} Z_j \geq c^*$ ise gözlem G_1 grubuna sınıflandırılır.

$s^* < \sum_{j=1}^p w_j^{**} Z_j < c^*$ ise gözlem G_2 grubuna sınıflandırılır.

$\sum_{j=1}^p w_j^{**} Z_j \leq s^*$ ise gözlem G_3 grubuna sınıflandırılır.

Smaoui ve Aouni (2017), Bulanık Hedef Programlamaya dayalı, ayırma eksenine karşılık gelen kesme değeri c 'nin yani sağ taraf sabitinin bulanık olduğu sınıflandırma problemleri için bir yaklaşım önermişlerdir. Bulanıklığı, üçgen, yamuk ve Gauss üyelik fonksiyonları ile ele almışlardır. MF2MSD olarak adlandırdıkları model iki aşamadan oluşmaktadır.

Modelin ilk aşaması Eş. 3.14 ile formüle edilmiştir.

$$\min \sum_{u=1}^{m-1} \sum_{v=u+1}^m \left(\sum_{i \in G_u} d_{iuv}^+ + \sum_{i \in G_v} e_{iuv}^- \right)$$

Kısıtlar:

$$\sum_{j=1}^p w_{juv} x_{ij} - d_{iuv}^+ + d_{iuv}^- = c_{1uv}, i \in G_u; u = 1, 2, \dots, m-1 \quad v = u+1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^p w_{juv} x_{ij} - e_{iuv}^+ + e_{iuv}^- = c_{2uv}, i \in G_v; u = 1, 2, \dots, m-1 \quad v = u+1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^p w_{juv} = 1; u = 1, 2, \dots, m-1 \quad v = u+1, \dots, m$$

$$c_{2uv} - c_{1uv} \geq 1 \quad u=1,2,\dots,m-1 \quad v=u+1,\dots,m; \quad (3.14)$$

d_{iuv}^+ ve d_{iuv}^- (e_{iuv}^+ ve e_{iuv}^-) sırasıyla, G_u gözlemleri (G_v gözlemleri) ile c_{1uv} (c_{2uv}) hiper düzlemleri arasındaki pozitif ve negatif sapmalardır. Sınıflandırma kuralı aşağıda verildiği gibidir.

$$\sum_{j=1}^p w_{juv}^* x_{ij} \leq c_{1uv}^* \text{ ise } i \in G_u$$

$$\sum_{j=1}^p w_{juv}^* x_{ij} \geq c_{2uv}^* \text{ ise } i \in G_v$$

$$c_{1uv}^* < \sum_{j=1}^p w_{juv}^* x_{ij} < c_{2uv}^* \text{ ise } i \in G_u \cap G_v$$

Bu sınıflandırma kuralına dayanarak, tüm gözlemler iki alt gruba ayrılabilir:

$$E_u = \{i \in G_u / \sum_{j=1}^p w_{juv}^* x_{ij} \leq c_{1uv}^*\}$$

$$E_v = \{i \in G_v / \sum_{j=1}^p w_{juv}^* x_{ij} \geq c_{2uv}^*\} \text{ olmak üzere } C_u = G_u - E_u \text{ ve } C_v = G_v - E_v \text{ } u=1,2,\dots,m-1 \\ v=u+1,\dots,m \text{ olarak tanımlanır.}$$

İkinci aşamada, kesme değeri olan c_l 'nin üçgen bulanık sayı kullanılarak oluşturulan modeli Eş. 3.15 ile verilmiştir.

$$\min \sum_{u=1}^{m-1} \sum_{v=u+1}^m \left(\sum_{i \in C_u} d_{iuv}^+ + \sum_{i \in C_v} e_{iuv}^- \right)$$

Kısıtlar:

$$\sum_{j=1}^p w_{juv} x_{ij} \leq c_{1uv}, i \in E_u$$

$$\sum_{j=1}^p w_{juv} x_{ij} - d_{iuv}^+ + d_{iuv}^- = c_l - (1-h)\eta_{1l}, \quad i \in C_u$$

$$\sum_{j=1}^p w_{juv} x_{ij} - e_{iuv}^+ + e_{iuv}^- = c_l + (1-h)\eta_{2l}, \quad i \in C_v$$

$$\sum_{j=1}^p w_{juv} x_{ij} \geq c_{2uv}, i \in E_v$$

$$c_{2uv} - c_{1uv} \geq 1$$

$$c_l - c_{1uv} = \eta_{1l}$$

$$c_{2uv} - c_l = \eta_{2l}$$

$$c_{1uv} \leq c_l \leq c_{2uv}$$

$w_{juv}, c_{1uv}, c_{2uv}, c_l$ işaretçe serbest

$$\eta_{1l}, \eta_{2l} \geq 0 \quad (3.15)$$

$$u=1,2,\dots,m-1 \quad v=u+1,\dots,m$$

d_{iuv}^+ ve d_{iuv}^- (e_{iuv}^+ ve e_{iuv}^-) sırasıyla, G_u gözlemleri (G_v gözlemleri) ile $\tilde{c}_l$ kesme değeri arasındaki pozitif ve negatif sapmalardır. Sınıflandırma kuralı aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\sum_{j=1}^p w_{juv}^* x_{ij} \leq c_l^* \quad u=1,2,\dots,m-1 \quad v=u+1,\dots,m \text{ ise, } i \in G_u$$

$$\sum_{j=1}^p w_{juv}^* x_{ij} > c_l^* \quad u=1,2,\dots,m-1 \quad v=u+1,\dots,m \text{ ise, } i \in G_v$$

4. BULANIK MANTIK VE BULANIK KÜME TEORİSİ

Gerçek dünyadaki karmaşıklığın nedeni genel olarak belirsizlik ve kararsızlıktan kaynaklanır. Araştırılmak istenen pek çok konuda insan düşüncesinin olgunlaşmaması ya da yeterli veriye ulaşamaması gibi durumlardan dolayı belirsizlikler her zaman karşımıza çıkar. Ayrıca araştırılmak istenen konu hakkında büyük ölçeklerden küçük ölçeklere doğru gidildikçe incelenen olaylar kesinlikten uzaklaşarak belirsizliğe doğru ilerler. Bu nedenle incelenen durumlar arasında kesin bir geçişten ziyade dereceli bir geçiş olduğu kabul edilir. Ayrıca gerçek dünya sorunları ne kadar yakından incelenmeye çalışılırsa çözüm de o kadar bulanık hale gelir (Zadeh, 1965).

1965'te Lütü (Lotfi) Askerzade Zadeh tarafından ortaya atılan bulanık küme; mantık ve sistem kavramları üzerine kontrol altında çalışması, istediği kontrolü elde edebilmesi için fazla sayıda doğrusal olmayan denklemlerin işin içine girmesi, yöntemin karmaşık bir duruma gelmesi ve çözümün zorlaşması sonucunda ortaya çıkmıştır (Şen, 2009). Zadeh, sonsuz değerleri $[0,1]$ aralığındaki sayılarla ifade ettiği teorisini "Bulanık Kümeler (Fuzzy Sets)" adlı çalışmasında tanımlayana dek, sonsuz değerli mantık uygulamada başarılı olamamıştır. Zadeh'e göre, bir sistemdeki karmaşıklık arttıkça, sistemi tanımlayan ifadelerin anlamı azalmakta ve anlamlı ifadeler de belirsizliğe doğru gitmektedir. Buradaki belirsizlikten kasıt, söz konusu hedef ya da kısıtlara ait alternatiflerin sınırlarının tam veya kesin olarak çizilmemiş olmasıdır. Zadeh, bu tür durumları bulanık kabul edip, bulanık hedef ya da kısıtların bir bulanık küme oluşturduğunu göstererek, her bir durum için bir üyelik fonksiyonu oluşturarak, üyelik derecelerine göre karar almayı sağlayacak yöntemlerin geliştirilmesinin ilk adımını atmıştır.

Değişen belirsizlik durumları arasında sözel olanların mükemmel olmayan bilgi içeriği olması açısından daima yaklaşıklık ve bulanıklık içerdiği söylenebilir. Bu gibi belirsizlik durumlarında en uygun yöntem bilim esasının küme elemanlarına farklı üyelik derecelerinin verilmesi ile olacağı Zadeh tarafından 1965 yılında belirtilmiştir. Aristo mantığına (ikili mantığa) göre insanlar boy bakımından ya uzundur ya da değildir. Zadeh yaklaşımına göre uzun boyluluğun farklı dereceleri vardır. Uzun boylulardan bir tanesi gerçek uzun boylu olarak esas alınırsa ondan biraz daha uzun veya kısa olanlar uzun boylu değil diye dışlanamazlar. Esas alınan uzun boyluluğun altında ve üstündeki boylar o kadar kuvvetli

olmasa bile uzun boyluluğa ait olma derecesi biraz daha az olmakla beraber yine de uzun boylular kümesine girmektedir. Böylelikle boy açısından uzunluğa dayalı üyelik dereceleri oluşturulabilir.

Matematiğin doğruluğundaki ve bütünlüğündeki başarısında Aristo'nun ve Aristo gibi düşünen düşünürlerin büyük katkısı olmuştur. Onların mantık teorisini oluşturma çabaları ve matematik gelişmiş, "Düşüncenin Yasaları" oluşturulmuştur. Bu yasalardan biri, her önermenin "Doğru" ya da "Yanlış" olması gerektiğini öngörmüştür. Aristo mantığına göre iki değer arasında başka seçeneklere, kesin değil düşüncesi ile yer verilmez. Aristo mantığına göre çalışılan ve şimdiye kadar alışlagelen klasik küme kavramında, bir kümeye giren elamanların oraya ait olmaları durumunda üyelik dereceleri 1'e, ait olmamaları durumunda ise 0'a eşit varsayılmıştır. İkisi arasında hiçbir üyelik derecesi düşünülmemiştir. Hâlbuki bulanık kümeler kavramında 0 ile 1 arasında değişen değişik üyelik derecelerinden söz etmek mümkündür. Böylece bulanık kümelerdeki öğelerin üyelik derecelerinin kesintisiz olarak 0 ile 1 arasında değerler aldığından söz edilebilir. Aslında Zadeh küme elamanlarının üyelik derecelerinin 0 ile 1 arasında değişebileceğini ileriye sürerek kümeler teorisinde geniş uygulamaya sahip ve doğal hayatla uyumlu olan bulanık küme teorisini geliştirmiştir.

Bulanıklık, birçok karar sürecinde ana belirsizliğin kaynağıdır. Tutarsızlık türü olan bulanıklık, üye olmamaktan üyeliğe kadar keskin sınırların olmadığı bulanık küme ile ilişkilidir. Bulanıklık durumunda, tam üyelik ile üye olmayanlar arasında ara üyelik dereceleri vardır. Belirli bir elemanın bulanık olmayan kümeye ait olup olmadığı ile ilgili kanıtlar eksik veya elde edilmesi zordur. (Bellman ve Zadeh, 1970, Lodwick ve Jamison, 2007).

Belirsizliklerin çözümlenmesinde klasik küme yaklaşımı yetersiz kalmaktadır. Klasik kümelerden birçok yönden farklılık gösteren bulanık kümeler, bir sistemde karşılaşılan belirsizlikleri çözümlemeye yönelik bir yaklaşımdır.

4.1. Bulanık Kümeler

Klasik küme kuramına göre bir küme, iyi tanımlanmış özelliklere sahip olmalıdır (Keskin sınırlı olmalıdır). Klasik küme kuramındaki bu sınırların üstesinden gelmek için başka bir küme kuramı gerekli görülüp, bulanık küme kavramı geliştirilmiştir.

Bulanık küme kavramı ilk olarak Azeri asıllı L. A. Zadeh tarafından 1965 yılında ortaya atılmıştır. Brown, 1971 yılında bulanık kümelerde temel kavramları ayrıntısıyla açıkladığı makalesini yayınlamıştır. Mizumoto ve Tanaka, 1981 yılında bulanık kümelerin özelliklerini incelemiştir. Türkşen, 1985 yılında bulanık küme teorisini ve uygulamalarını incelediği makalesini yayınlamıştır.

Bulanık küme kavramı, hayat koşullarında karşılaşılan belirsizliklerin matematiksel olarak açıklanmasını ve bir fonksiyon yardımıyla ifade edilmesini öngörür. Türkşen (1985)'e göre, bulanık küme teorisinin amacı, belirsizlik ifade eden, tanımlanması güç ya da anlamı zor kavramlara üyelik derecesi atayarak onlara belirlilik kazandırmaktır. Bu nedenle yaklaşım, iki değerli kümeler teorisinin çok değerli kümeler teorisine dönüşümünden doğmaktadır. Bulanık kümeler, belirlilik derecesi ya hep ya da hiç kavramının ötesinde bir görüşten ortaya çıkmaktadır (Yapıcı, 2000).

Bulanık küme teorisi, klasik küme teorisinin bir uzantısı olarak anılmasının yanında, tanımlanması zor olan kavramlara bir üyelik derecesi verilerek onları belirli hale getirmeye çalışan yaklaşım olarak da tanımlanabilir.

Klasik küme yaklaşımının yetersiz kaldığı durumda kullanılan bir diğer yöntem olasılık teorisidir. Bulanık kavramların ortaya atılması ile özellikle olasılık teorisi ve istatistik gibi belirsizliklerle uğraşan bilim insanları bu kavrama karşı çıkmıştır. Bulanık yöntemlerin yapacağı her türlü modellemenin olasılık ve istatistik hesaplamaları ile yapılabileceğini ileri sürmüşlerdir. Ancak burada gözden kaçırılan basit bir nokta sözel bilgilerin bulunması durumunda rassallıktan yararlanılamadığıdır.

Bulanıklık özellikle sözel belirsizliğin bir ifadesi olarak karşımıza çıkar. Geçmişte, belirsizliklerin işlenmesi ve anlamlı sonuçlara varabilmesi için olasılık teorisi kullanılmıştır. Matematik ve mühendislikte bu teori belirsizlik durumlarında istatistiksel yöntemlerle

beraber kullanılır. Bu nedenle de, bütün belirsizliklerin rassal karakterde olduğu kavramı yaygınlaşmıştır. Rassallığın en önemli özelliği sonuçların ortaya çıkmasında tamamen şans olayının rol oynaması ile gerekli öngörü ve tahminlerin kesin bir doğrulukla önceden yapılamamasıdır. Ancak bilinen belirsizliklerin hepsi rassal değildir. Sözel belirsizlikler içeren rassal karakterde olmayan olaylarda olasılık ve istatistik yöntemleri kullanılamaz (Şen, 2009).

Kesin olmayan bilginin sayısal gösterimi olan bulanık kümelerin kullanılması ile gerçek dünya problemlerinin belirsiz yapısının modellenmesinde kullanılacak yeni matematiksel teknikler geliştirilmektedir. Bulanık kümeler, bulanık sınırlı kümelerdir; bu özelliğinden dolayı klasik kümelere göre daha geniş uygulama alanına sahiptir.

X evrensel küme $x \in X$ ve $A \subseteq X$ olmak üzere, klasik küme, normal olarak sonlu, sayılabilir ya da sayılamaz olabilen $x \in X$ elemanlarının bir birleşimi olarak düşünülebilir ve

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} \quad (4.1)$$

olarak tanımlanabilir.

Eğer $A \subseteq X$ kümesinin üyelik derecesi $[0,1]$ aralığı kabul edilirse A “bulanık küme” olarak adlandırılır ve $\tilde{A}$ ile gösterilir. $\tilde{A}$ bulanık kümesi Zadeh (1965) tarafından matematiksel olarak; $\tilde{A} = \{(x; \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in X\}$ biçiminde tanımlanmıştır. Bu ifadenin ilk kısmı kümenin bir elemanı, ikinci kısmı bu elemanın üyelik derecesini belirten sayısal değer olmak üzere, elemanları sıralı ikililer olan kümedir (Zimmermann, 2001).

Zadeh, sonlu ve sonsuz sayıda elemana sahip bulanık kümelerin gösterimini sırasıyla Eş. 4.2 ve Eş. 4.3 ile tanımlamıştır. Burada $\sum$ sembolü toplama ve $\int$ sembolü integral anlamında kullanılmayıp, üyelik fonksiyonlarının birleşimini ifade etmektedir. Ayrıca bölü işareti bölmeyi göstermez. İfadenin paydasında küme elemanı bulunur. Pay kısmı ise paydada bulunan elemanın kümeye hangi üyelik derecesiyle bağlı olduğunu gösterir (Zimmermann, 2001).

$$A = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \dots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_A(x_i)}{x_i} \quad (4.2)$$

$$A = \int \mu_A(x)/x \quad (4.3)$$

4.2. Üyelik Fonksiyonları

Bulanık mantık sistemleri; kontrol, sistem tanımlama, örüntü tanıma problemleri ve endüstriden akademiye daha birçok uygulama için yaygın olarak kullanılmaktadır. Herhangi bir alt aralıktaki öğelerin tümünün ayrı ayrı o alt kümeye aitlik derecelerine o elemanın üyelik derecesi denir. Küme üyelerinin değerleri ile değişiklik gösteren eğri olarak adlandırılan üyelik fonksiyonları, bulanıklığın gösterilmesinin performansında önemli bir rol oynamaktadır. Üyelik fonksiyonları bulanık küme teorisinin yapı taşları olduğundan, bulanıklık üyelik fonksiyonları tarafından belirlenir. Bulanık bir kümede oluşan belirsizliği gidermek için kesin sınırlar belirlemek yerine kümede yer alan elemanlar için kısmi üyelikler dikkate alınır. Bulanık kümedeki bir elemanın kısmi üyeliği, elemanın kümeye aitlik derecesini belirleyen üyelik fonksiyonudur. Bulanık küme teorisindeki üyelik fonksiyonu ile herhangi bir elemanın kümeye aitlik derecesi tanımlanarak, bu aitliğin hangi derecede olduğu belirlenir.

Aristo mantığında alt kümelerin üyelik fonksiyonları dikdörtgen şeklindedir. Bunun anlamı herhangi bir öğenin aitlik bakımından bir ayrıcalığı yoktur ve hepsi aynı derecede o alt kümenin birer öğesidir. Klasik bir küme ile bulanık bir küme arasındaki en temel farklardan biri, aitlik derecesini belirten üyelik fonksiyonundan kaynaklanmaktadır. Klasik kümenin üyeleri kesin olarak bilinirken, bulanık bir kümenin elemanları negatif olmayan gerçel bir sayıyı ifade eden ve $[0,1]$ kapalı aralığında yer alan üyelik fonksiyonları ile karakterize edilir (Kumar ve diğerleri, 2004). Klasik ve bulanık kümenin arasındaki önemli farklardan diğeri; klasik kümelerin dikdörtgen üyelik derecesi fonksiyonu bulunmasına karşılık, bulanık kümenin normallik ve monotonluk şartlarını mutlaka sağlayacak biçimde farklı üyelik derecesi fonksiyonları vardır.

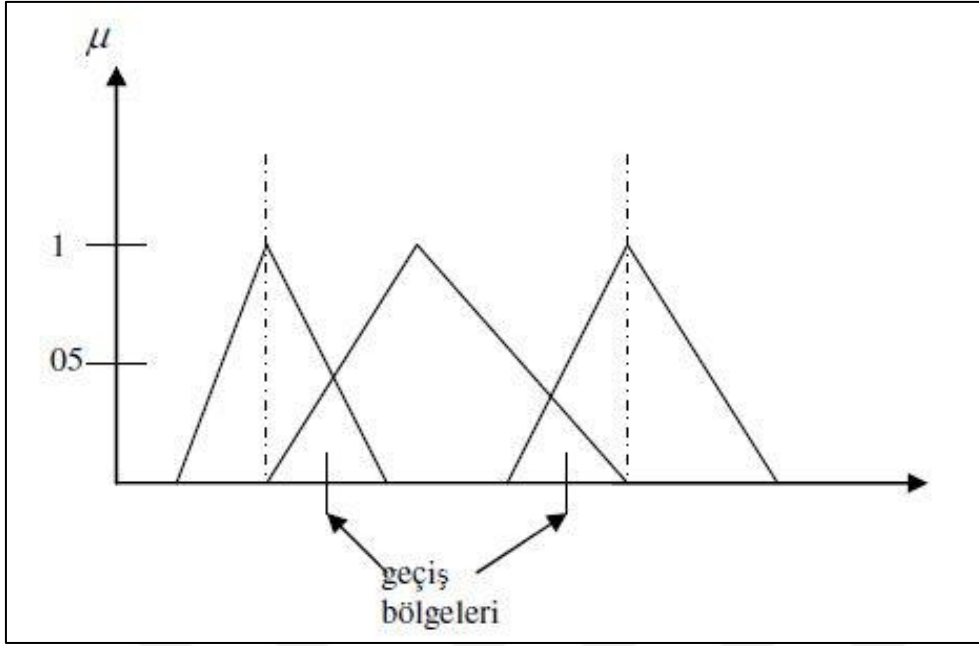
Üyelik fonksiyonu, verilen verileri istenen üyelik dereceleriyle eşleştirdiği sürece herhangi bir şekil ve biçimde olabilir. Üyelik fonksiyonu seçiminde kullanıcı karar verir. Bulanıklığı karakterize etmenin sonsuz sayıda yolu olduğundan, bulanıklığı tanımlayan üyelik

fonksiyonlarını grafiksel olarak göstermenin sonsuz sayıda yolu vardır. Hangi yöntemlerin kullanılacağına seçimi tamamen problemin büyüklüğüne ve türüne bağlıdır. Üyelik fonksiyonu şekli için genellikle deneme yanılma yöntemi kullanılır, çünkü seçim için kesin bir yöntem yoktur. Birçok literatürün kapsamlı incelemesine dayanarak, üçgen üyelik fonksiyonunun sadeliği nedeniyle yaygın olarak kullanıldığı sonucuna varılabilir. Verilen problemler için çeşitli üyelik fonksiyonlarının kullanılmasıyla, genellikle Gauss ve üçgen üyelik fonksiyonlarının diğer üyelik fonksiyonu türlerinden daha iyi performans gösterdiği bulunmuştur (Czekalski, 2006).

Üyelik fonksiyonlarının simetrik olması gerekmez. Üyelik fonksiyonunun en önemli özelliği kümeye üye olma durumundan üye olmama durumuna geçişte kademeli bir geçişe izin vermesidir. Dolayısıyla her elemanın bir üyelik derecesi vardır. Bulanık kümeler bu özelliği nedeniyle kesin kümelerin genelleştirilmiş hali olarak görülür. $[0,1]$ aralığında bulunan her elemana karşılık gelen bir üyelik derecesi verilir. Ortaya yakın elemana 1 değeri verilirse diğer elemanlar 0 ile 1 arasında değerler alır.

Üyelik dereceleri 0'a veya 1'e eşit olmayan elemanların oluşturduğu kısımlara ise üyelik fonksiyonunun "sınırları" veya "geçiş bölgeleri" denir (Şekil 4.1.). Genel olarak bütün üyelik fonksiyonlarında sağda ve solda olmak üzere iki geçiş bölgesi vardır. Matematiksel tanımı

$0 < \mu_{\tilde{A}}(x) < 1$ şeklindedir (Zimmermann, 2001).



Şekil 4.1. Geçiş bölgelerinin gösterimi (Zimmermann, 2001)

$\mu_A(x)$: $X \rightarrow \{0,1\}$ klasik kümeler için üyelik fonksiyonu ya da üyelik derecesini göstermektedir.

Üyelik fonksiyonu, X evrensel kümesine ait bir x elemanın A kümesine ait olma derecesini belirtir. $\mu_A(x)=1$ ise “ x elemanı A kümesine aittir”, $\mu_A(x)=0$ ise “ x elemanı A kümesine ait değildir” demektir. A klasik kümesinin üyelik derecesi olan $\mu_A(x)$ ’in değer kümesi $\{0,1\}$ dir.

A bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu $\mu_{\tilde{A}}(x): X \rightarrow [0,1]$ ile gösterilir. Bu iki değer arasında yer alan değerler ise, ilgili nesnenin kümeye aitlik derecesini ya da kısmi üyeliğini belirtir.

Eğer A , $R \in (-\infty, +\infty)$ ’da, kümenin elemanı ise $\mu_A(x)$ üyelik fonksiyonu $R \rightarrow [0,1]$ aralığında oluşur. Yani A kümesi $[a_1, a_2]$ aralığında ise $\mu_A(x)$ üyelik fonksiyonu,

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < a_1 \\ 1, & a_1 \leq x \leq a_2 \\ 0, & x > a_2 \end{cases} \quad (4.4)$$

olarak gösterilir.

Klasik kümelerde bir elemandan diğerine geçiş keskin ve aniden değişen üyelik dereceleri sayesinde. Bulanık kümelerde bu geçiş yumuşak ve sürekli bir şekilde olmaktadır. Klasik kümede elemanın kümeye ait olması için üyelik derecesinin mutlaka 1'e eşit olması gerekirken, bulanık kümede bütün elemanların değişik derecelerle kümeye ait olmaları mümkündür.

$\tilde{A}$ bulanık kümesi için bazı kavramların açıklamaları aşağıda verilmiştir.

4.2.1. Destek kümesi

A bulanık kümesinin evrensel kümedeki destek kümesi, üyelik derecesi sıfırdan büyük olan elemanların oluşturduğu kümedir. $\text{Sup}(\tilde{A}) = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$ eşitliği ile tanımlanır.

4.2.2. Çekirdek kümesi

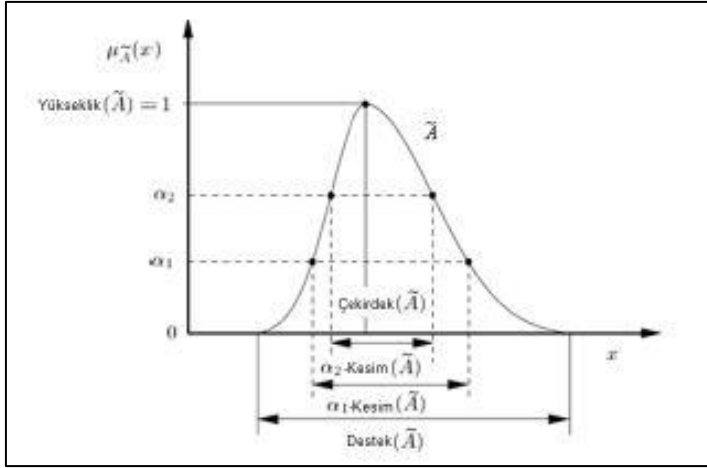
Bulanık bir sayı için üyelik derecesi 1'e eşit olan tüm elemanlar, bu sayının çekirdeğini oluşturur ve $\text{Core}(\tilde{A}) = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}$ olarak tanımlanır.

4.2.3. α -kesim (α -seviye) kümesi

α -kesimi, bulanık mantığı matematiksel morfolojiye 1988 yılında ilk uygulayan Kaufmann tarafından bulanık küme işlemleri için önerilmiş bir tekniktir. α -kesimi, tanımlanmış bulanık bir küme kullanılarak yeni net bir küme oluşturmak için sıklıkla faydalanan bir yöntemdir (Tomsovic, 1992). Ortaya çıkan yeni alt küme artık bulanık değildir. Aslında α -kesimi, bir bulanık kümenin desteğinin daha genişletilmiş halinden başka bir şey değildir.

α -kesim kümesi, belirlenen herhangi bir α değerine eşit veya daha büyük üyelik fonksiyonlarına sahip bulanık küme elemanlarını içine alan yeni bir kümedir ve α seviyesi her değiştiğinde yeni bir küme daha oluşur. A bulanık kümesinin α -kesim kümesi, üyelik fonksiyon değeri α 'ya eşit veya daha büyük elemanların yer aldığı küme olarak tanımlanır. $\tilde{A}_\alpha = \{x \in R / \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$, $\alpha \in [0, 1]$ olarak gösterilir.

Bulanık sayının çekirdek, destek ve α -kesimleri Şekil 4.2.'de verilmektedir.



Şekil 4.2. Bulanık sayının özellikleri (İçen, 2015)

α değeri, bulanık mantık kavramında kesim katsayısı olarak da adlandırılır. A_α sayısı üzerinde herhangi bir α -kesim aralığı A_α olarak belirtildiğinde bu aralık, $A_\alpha = [a_1^\alpha, a_3^\alpha]$ olarak tanımlanmaktadır (Güneş, 2006). a_1^α ve a_3^α sayıları a_2 normal değerinin komşuluğunu oluşturan aralığın alt ve üst sınır değerleridir. a_1^α ve a_3^α değerleri sırasıyla Eş. 4.5 ve Eş. 4.6 ile elde edilebilmektedir (Kaya, 2010).

$$\frac{a_1^\alpha - a_1}{a_2 - a_1} = \alpha \quad (4.5)$$

$$\frac{a_3 - a_3^\alpha}{a_3 - a_2} = \alpha \quad (4.6)$$

Yukarıda ifade edilen eşitliklerden A_α aralığı kolaylıkla belirlenebilmektedir. Özetle $\forall \alpha \in [0,1]$ için $A_\alpha = [a_1^\alpha, a_3^\alpha]$ aralığında ifade edilen a_1^α ve a_3^α sırasıyla Eş. 4.7 ve Eş. 4.8'deki gibi bulunur (Yaralıoğlu, 2005).

$$a_1^\alpha = \alpha(a_2 - a_1) + a_1 \quad (4.7)$$

$$a_3^\alpha = a_3 - \alpha(a_3 - a_2) \quad (4.8)$$

4.2.4. Yükseklik

A bulanık kümesi X evrensel kümesinde tanımlı bulanık bir küme olsun. Bu durumda, A bulanık kümenin yüksekliği; bulanık kümenin X'de tanımlı olan elemanları arasında üyelik

derecesi en yüksek olan elemanın, üyelik fonksiyonu değerine eşittir. A bulanık kümenin yüksekliği $h(\tilde{A}) = \sup_x \mu_{\tilde{A}}(x)$ eşitliği ile tanımlanır.

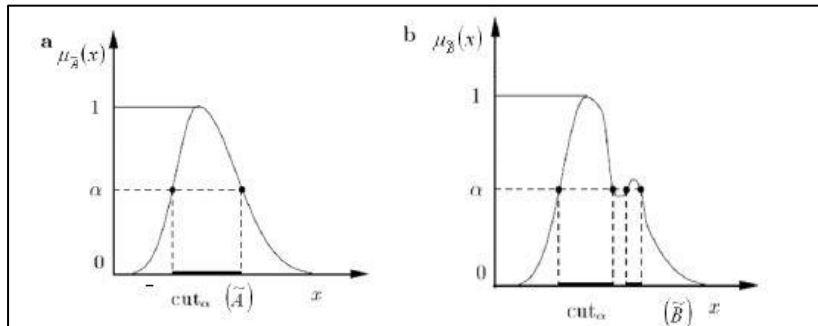
4.2.5. Normallik

Bulanık A kümesi, $\sup_x \mu_{\tilde{A}}(x) = 1$ eşitliği sağlandığında normaldir. Supremum, A bulanık kümesinde üyelik derecelerinden “en yüksek” olanı tanımlar. $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0$ ise, $\tilde{A}$ bulanık kümesi boş kümedir.

Yüksekliği 1’e eşit olan bulanık kümeler normal bulanık kümeler denir. Normal olmayan bulanık kümeleri normal hale dönüştürmek için kümenin üyelik derecelerinin en büyük üyelik derecesine bölünmesi gereklidir. Böylece normal olmayan bulanık kümeler dış bükey olmaları şartı ile normal bulanık kümeye dönüştürülür.

4.2.6. Konvekslik (Dışbükeylik)

Herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçası üzerindeki noktalar aynı kümede kalıyorsa, bu $\mathbb{R}^n$ kümesine konveks (dışbükey) küme denir. A bulanık kümesi $\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min(\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2))$, $x_1, x_2 \in X$ eşitliğini sağlarsa konvekstir (dışbükeydir) ($\lambda \in [0,1]$). Hanss (2005)’ın verdiği örnekte $x \in \mathcal{R}$ olmak üzere bulanık A ve B kümelerine ait $\mu_{\tilde{A}}(x)$ ve $\mu_{\tilde{B}}(x)$ üyelik fonksiyonları Şekil 4.3. ile verilmiştir.

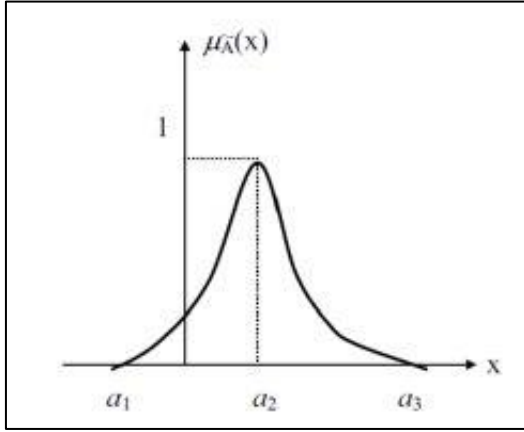


Şekil 4.3. (a) Konveks bulanık küme, (b) Konveks olmayan bulanık küme

A bulanık kümesinde alınan her α kesimi için ($\alpha \in [0,1]$) kümenin konveks küme olduğu, B bulanık kümesinde alınan her α kesimi için çizilen bazı doğrular küme dışına çıktığı için konveks küme olmadığı sonucuna varılır.

4.3. Bulanık Sayılar

Reel sayılarda tanımlı, kapalı ve konveks bir alt küme olan A bulanık sayısı, bulanık bir aralık olan $[a_1, a_2, a_3]$ olarak verilir. Burada a_1 ve a_3 sınırları, a_2 tepe noktasını gösterir (Şekil 4.4.). Her bulanık sayı bulanık bir küme olmasına rağmen, her bulanık küme bulanık bir sayı değildir. Bulanık bir kümenin üyelik fonksiyonunun alacağı değerlere ilişkin tek bir tanımlama yapmak mümkün değildir. Bulanık kümeler üyelik fonksiyonlarıyla tanımlandıkları için, bulanık sayıların üyelik fonksiyonları ile aynı kavramdır ve bu nedenle üyelik fonksiyonu çeşidi kadar bulanık sayı çeşidi vardır.



Şekil 4.4. Bulanık sayı gösterimi $\tilde{A} = [a_1, a_2, a_3]$

Bulanık sayılar, bulanık kümelerin özel bir alt kümesidir. Bulanık sayılar dışbükey, normalize edilmiş, sınırlı-sürekli üyelik fonksiyonuna sahip ve reel sayılarla tanımlanmış olan bulanık bir kümedir. Yani; bulanık bir küme; normal, dışbükey, destek kümesi sınırlı ve her bir α -kesimi reel sayı doğrusunun kapalı bir aralığında tanımlanmışsa bulanık sayı olur.

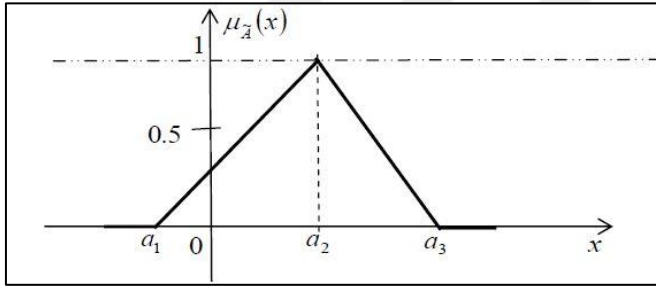
Çeşitli bulanık sayı biçimleri arasında en önemli grubu üçgen, yamuk ve Gauss şeklindeki bulanık sayılar oluşturur. Özellikle matematiksel programlama problemlerini çözmede bu tip bulanık sayılar çok sık kullanılır. Bu sayılar, isimlerini üyelik fonksiyonlarının biçimlerinden alır. Üyelik fonksiyonlarının diğer türleri; sigmoid, s-biçimli, z-biçimli ve Π tipleridir.

4.3.1. Üçgen tipi bulanık sayı

Gerçel sayı doğrusunda tanımlı olan üçgen bulanık sayı, aşağıda belirtilen üyelik fonksiyonu ile parametrik olarak ifade edilir.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < a_1 \\ \frac{x-a_1}{a_2-a_1}, & a_1 \leq x \leq a_2 \\ \frac{a_3-x}{a_3-a_2}, & a_2 \leq x \leq a_3 \\ 0, & x > a_3 \end{cases} \quad (4.9)$$

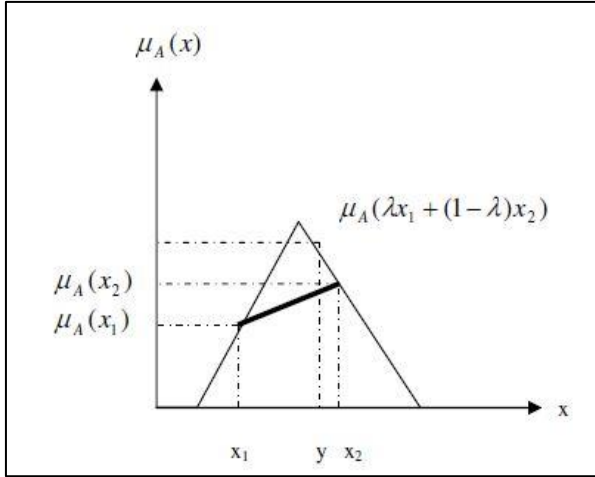
Üçgen bir bulanık sayı olan $\tilde{A}$, $\tilde{A}=(a_1,a_2,a_3)$ olarak ifade edilir. Ayrıca $\tilde{A}$ bulanık sayısının α kesimi, $A_\alpha=[a_2-(1-\alpha)\eta_1, a_2+(1-\alpha)\eta_2]$, $\alpha \in [0,1]$ aralığı ile ifade edilir. Bu aralık, üçgen bulanık sayıdan oluşan modelde kullanılmıştır. Burada $\eta_1 = a_2 - a_1$ ve $\eta_2 = a_3 - a_2$ olarak ifade edilmiştir. Üçgen bulanık sayının gösterimi Şekil 4.5.'deki gibidir.



Şekil 4.5. Üçgen bulanık sayı

Üçgen üyelik fonksiyonlarında en az bir elemanın üyelik derecesi 1 olmalıdır ki Şekil 4.5.'e göre a_2 parametresi üyelik derecesinin 1'e eşit olduğu noktayı verir. Böylece bulanık kümenin normallik özelliği gösterdiği sonucuna varılır. a_1 ve a_3 parametreleri üçgen bulanık sayının üyelik derecesinin 0 olduğu değerleri ya da kanat açıklığını gösterir.

Üçgen üyelik fonksiyonlarında, üyelik derecesi bir elemanda 1'e eşit oluncaya kadar artar, 1'e ulaşıldıktan sonra diğer elemanlar için sürekli azalır. Bu özellik bulanık kümenin konveks olmasından kaynaklanır (Şekil 4.6.).



Şekil 4.6. Konveks küme üyelik derecesi (Sakawa, 1993)

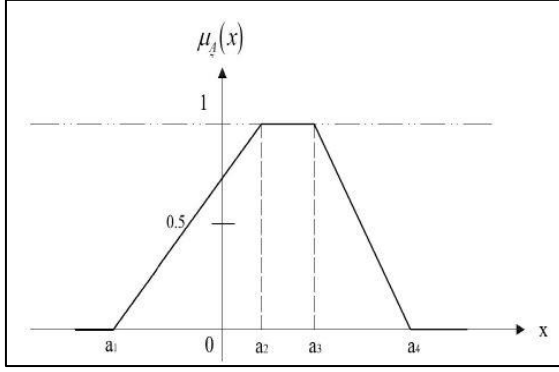
4.3.2. Yamuk tipi bulanık sayı

Yamuk tipi bulanık sayının üyelik fonksiyonuna ait a_1, a_2, a_3, a_4 olmak üzere dört parametresi vardır ve üçgen tipli bulanık sayının özel halidir. Yamuk bulanık sayıda normal kabul edilen iki değer vardır (a_2 ve a_3 değerleri). $a_2=a_3$ ise yamuk tipli bulanık sayı, üçgen tipli bulanık sayıya dönüşür. a_1 ve a_4 parametreleri bulanık sayının desteğini (dayanağını), a_2 ve a_3 parametreleri bulanık sayının çekirdeğini (özünü) temsil eder. Yamuk bulanık sayı, aşağıda belirtilen üyelik fonksiyonu ile parametrik olarak ifade edilir.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < a_1 \\ \frac{x-a_1}{a_2-a_1}, & a_1 \leq x \leq a_2 \\ 1, & a_2 \leq x \leq a_3 \\ \frac{a_4-x}{a_4-a_3}, & a_3 \leq x \leq a_4 \\ 0, & x > a_4 \end{cases} \quad (4.10)$$

$\tilde{A}$ bulanık sayısının α kesimi, $A_\alpha = [(a_2-a_1)\alpha+a_1, -(a_4-a_3)\alpha+a_4]$, $\alpha \in [0,1]$ aralığı ile ifade edilir.

Burada $a_2=c-\varepsilon$ ve $a_3=c+\varepsilon$ alınırsa $A_\alpha = [\alpha(c-\varepsilon)+(1-\alpha)a_1, \alpha(c+\varepsilon)+(1-\alpha)a_4]$, $\alpha \in [0,1]$ olur. Bu aralık, yamuk bulanık sayıdan oluşan modelde kullanılmıştır.



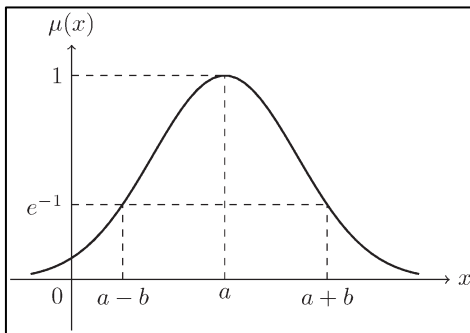
Şekil 4.7. Yamuk bulanık sayı

4.3.3. Gauss tipi bulanık sayı

Üyelik fonksiyonu Gauss fonksiyonu tarafından nitelendirilen bulanık sayılar, Gauss bulanık sayılar olarak adlandırılır. Gauss bulanık sayısının üyeliği, $\mu_{\tilde{A}}(x) = \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-a)^2\right\}$ olarak tanımlanır. Gauss üyeliği merkez değer a etrafında simetrik olduğu için, bir Gauss bulanık sayı $\tilde{A}=(x, \sigma, \sigma)$ ile x model değeri ve hem sol hem de sağ bulanıklık σ 'ya eşit olarak verilir.

Gauss bulanık sayı olan $\tilde{A}$ 'nın alt sınırı $a-b$, merkez değeri a ve üst sınırı $a+b$ tarafından tanımlanırsa, $\tilde{A}$ 'nın α kesimi aşağıdaki gibi aralık olarak hesaplanabilir:

$$A_{\alpha} = [a - \sigma\sqrt{-\log \alpha}, a + \sigma\sqrt{-\log \alpha}], \alpha \in [0,1] \text{ dir.}$$



Şekil 4.8. Gauss bulanık sayı

Ek olarak, normal dağılımda değerlerin %68'inin ortalamadan 1 standart sapma; % 95'i 2 standart sapma içinde ve % 99.7'si 3 standart sapma içinde yer almaktadır. Bu fikre

dayanarak bulanık sayı $\tilde{A}$, % 99.7 ile $[\mu-3\sigma, \mu+3\sigma]$ aralığına aittir. Gösterim kolaylığı açısından $a-b=c_1$ ve $a+b=c_2$ olursa, bu aralık $[c_1, c_2]$ olarak alınır ve eğer ortalama μ 'nın $\frac{c_1+c_2}{2}$ ye eşit olduğu düşünülürse, o zaman standart sapmanın $\sigma = \frac{c_2-c_1}{6}$ değeri çıkarılabilir.

Bu değerler, Gauss bulanık sayı yaklaşımında kullanılır.

Bulanıklık olan kısımlarda oluşabilecek belirsizliği ortadan kaldırmak için yapılması gereken doğru üyelik fonksiyonuna karar verilmesidir. Bulanıklığın söz konusu olduğu yerde doğru bir şekilde belirlenen üyelik fonksiyonu, bulanıklığı ortadan kaldırmaya yardımcı olur.





5. DOĞRUSAL PROGRAMLAMA VE BULANIK DOĞRUSAL PROGRAMLAMA

Matematiksel programlama, eşitlik veya eşitsizlik kısıtları altında bir fonksiyonun en iyi değerinin, dolayısıyla fonksiyona bu en iyi değeri verecek olan çözümlerin araştırıldığı yöntemler bütünüdür. Çözülecek problemdeki kısıtların ve amaç fonksiyonunun doğrusal olup olmamasına göre matematiksel programlama; doğrusal programlama ve doğrusal olmayan programlama olarak sınıflandırılabilir.

5.1. Doğrusal Programlama

Doğrusal Programlama (DP), herhangi bir işletmenin sahip olduğu bütçe, makine, işgücü ve malzeme gibi sınırlı kaynakların, azami değer ve katkı sağlayacak şekilde, optimal dağıtımında yöneticiye yardımcı olan bir karar verme tekniğidir. DP etkili bir çözüm tekniği olan Simpleks yöntemi ile beraber, 1947 yılında George Dantzig tarafından geliştirilmiştir. Bu tarihten itibaren birçok alanda kullanılmıştır.

DP, optimizasyon problemlerinin çözümünde kullanılan bir araçtır. Bir doğrusal programlama problemi genel olarak amaç fonksiyonu ve doğrusal kısıt ya da kısıtların yer aldığı iki kısımdan oluşan matematiksel bir ifadedir. Bu matematiksel ifade ile amaç, istenilen duruma göre maksimize ya da minimize edilir.

DP, yönetsel kararlar almak için çok yönlü, güçlü ve kullanışlı tekniklerden biridir. Doğrusal programlama tekniği; işletme, devlet, sanayi, hastaneler, kütüphaneler, vb. çeşitli problemlerin çözümünde kullanılabilir. İstenen hedefe ulaşmak için rekabet eden çeşitli faaliyetler için mevcut sınırlı kaynaklar tahsis edilmek istendiğinde, bu yöntem yardımcı olur. Bir karar verme aracı olarak; üretim, finans, pazarlama, araştırma geliştirme ve kişisel yönetim gibi çeşitli alanlarda değerini göstermiştir.

DP, belirli bir amacın gerçekleşme derecesini etkileyen bazı kısıtların bulunması ve bunların doğrusal eşitlik veya eşitsizlikler olarak verilmesi durumunda, amaca en iyi biçimde ulaşılması için sınırlı kaynakların en iyi şekilde kullanılmasını sağlar. Diğer bir tanımla DP, verilen optimallik ölçütüne bağlı kalarak kısıtlı kaynakların optimal şekilde dağıtımını içeren deterministik matematiksel bir teknik ve karar verme aracıdır.

DP, karşılıklı ilişkileri doğrusal nitelikte olan ve sınırları kısıtlı kaynaklarla çevrili iki veya daha fazla değişkenlerin, belirlenen amacı en iyileyecek şekilde miktarlarının bulunması yöntemidir. Burada; (i) en iyilenmek (max/min) üzere tek bir amaç, (ii) bu amacı sınırlandıran kısıtlar ve (iii) amaca ulaşmak için alternatif yollar mevcuttur. Bu üç öge birlikte doğrusal programlama tekniğinin ana çerçevesini oluşturmaktadır. Bir DP modeli, amaç fonksiyonu ve kısıt kümesi şeklinde 2 kısımda ele alınır. DP probleminin modeli,

$$\max (\min) Z = \sum_{j=1}^n C_j x_j$$

Kısıtlar:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq (\geq)(=) b_i$$

$$x_j \geq 0$$

(5.1)

şeklinde. Bu formülde kullanılan ifadelerin açıklamaları aşağıdaki gibidir:

$i=1,2,\dots,m$ (kısıt sayısı)

$j=1,2,\dots,n$ (karar değişkeni sayısı)

x_j = karar değişkenleri

C_j = amaç fonksiyonu katsayıları

a_{ij} = i kısıtındaki j karar değişkeninin katsayısı

b_i = i kısıtının sağ taraf sabiti değeri

Karar değişkeni (x_j); bir karar modelinin çözümlenmesi sürecinde değeri hesaplanacak olan karar unsurlarıdır.

Amaç fonksiyonu; karar değişkenlerinden ve bu değişkenlerin parametrelerinden oluşan en iyi çözümün (maksimum ya da minimum) elde edilmesini sağlayan fonksiyondur.

Kısıtlar; bir modeldeki karar değişkenleri ya da karar değişkenleri ile parametreler arasındaki zorunlu ilişkilerin her birine verilen isimdir.

Teknolojik katsayılar (a_{ij}); her faaliyet için gerekli olan kaynak miktarıdır.

Sağ taraf sabitleri (b_i); mevcut kaynak miktarlarını gösteren, problemdeki kısıt denklemlerinin sağ taraflarında yer alan parametrelerdir.

5.2. Bulanık Doğrusal Programlama

Gerçek yaşam karar problemlerinin çoğu, amaç ve kısıt fonksiyonlarının bazı katsayılarının tam olarak belirlenemediği, belirsiz olduğu bir ortamda yer alır. 1965 yılında Lotfi A. Zadeh tarafından yapılan “Bulanık Kümeler” çalışmasından beri, stokastik kavramlara başvurmaksızın, belirsiz ve kesin olmayan veriyi modellemek için Bulanık Mantık teorisi etkin bir şekilde kullanılmaktadır.

Klasik DP problemlerinde, verilerin kesin değerlere sahip olduğu varsayılmaktadır. Bu, elemanların net sayılar olduğu, eşitsizliğin net anlamda tanımlandığı ve amaç fonksiyonun kesin olma zorunluluğu olduğu anlamına gelir. Bununla birlikte, gerçek hayattaki problemlerde gözlenen değerler eksik veya tamamlanamayan bilgilerden dolayı genellikle kesin değildir. Bu gibi durumlarda, bulanık kümeler teorisi, bir küme üyeliği kavramını genelleştirerek DP'de kesinliği ele almak için bir fikir yaklaşımıdır ve bu, bulanık DP problemleri kavramına yol açar.

Günlük hayatta karşılaşılan pek çok problem DP ile ifade edilebilir. Ancak çoğu durumda DP problemlerinde kısıtların veya amaç fonksiyonlarının ya da her ikisinin kesin olarak belirlenmesi mümkün olmayabilir.

Bulanık küme teorisi, gerçek yaşam sistemlerinde dilsel terimleri ve belirsizliği ele alma fırsatı verir. Doğası gereği kesin olmayan veya tam olarak tanımlanamayan modelleme sistemlerinde genellikle bulanık küme teorisine dayanan bulanık matematiksel programlama kullanılır.

Matematiksel programlama probleminde, bulanıklık birçok farklı şekilde ortaya çıkabilir; amaç fonksiyonu katsayıları, kısıtların katsayıları ve kaynakların sınır değerleri (kısıtların sağ taraf sabitleri) bulanık sayılar olarak ifade edilebilir. Bir DP modelinin parametrelerinin

herhangi birinde görülen belirsizliği incelemek için başvurulacak yöntemlerden biri Bulanık Doğrusal Programlama'dır. Diğerleri ise duyarlılık analizidir.

Bellman ve Zadeh (1970), bulanık doğrusal programlamanın yapı taşları olarak kullanılan bulanık ortamlarda karar vermenin temel ilkelerini belirlemişlerdir. Ancak bulanık matematiksel programlama kavramı ilk olarak Tanaka ve diğerleri (1974) tarafından tanıtılmıştır. Sonrasında 1978 yılında Zimmermann, bulanık küme teorisini doğrusal programlama problemlerine entegre ederek, bulanık bir amaç ve bulanık kısıtlamalarla doğrusal programlama problemlerini ele almıştır. O zamandan bu yana, pek çok başarılı uygulama ile birçok bulanık doğrusal programlama modelleri geliştirilmiştir (Mahdavi ve diğerleri, 2006; Mahdavi ve diğerleri, 2007; Mahdavi ve diğerleri, 2009; Maleki ve diğerleri, 2000).

Bulanık matematiksel programlama, parametreleri kesin bilinen sayılardan ziyade bulanık olan matematiksel programlama modelleri olarak formüle edilebilen problemleri çözmek için önerilmiştir (Zimmermann, 1983).

Gerçek yaşam problemlerinin ve modellerinin çoğu dilsel ve/veya kesin olmayan değişkenler ve kısıtlamalar içerir. Buna neden olarak, karar vericilerin dil değişkenleri açısından bir sistemdeki parametreleri daha kolay ve düzgün bir şekilde belirtebilmesi gösterilebilir.

Günümüzde bulanık programlama, bulanıklık altında çok amaçlı optimizasyonun önemli bir alanı olarak kabul edilmektedir. Klasik doğrusal programlama problemlerinde kısıtlara bağlı olarak amaç fonksiyonunu optimum yapan çözüm ya da çözümler elde edilmeye çalışılır (Birden fazla optimum çözüm varsa alternatif çözüm var demektir). Gerçek yaşam problemlerinde ise kısıtlar ve hedeflenen amaç kesin değildir. Gerçek yaşam problemlerini daha çok yansıtan bulanık doğrusal programlamada amaç fonksiyonun optimum olmasından ziyade belirli bir tatmin derecesi (istek seviyesi) sağlanmaya çalışılır (Seçme, 2005).

Amaç fonksiyonu katsayıları, kısıtların katsayıları ve kaynakların sınır değerleri parametrelerinin tümünün bulanık olması söz konusudur. Bu durum tam anlamıyla bulanık karar anlamına gelir. Bulanık ortamda verilen karar, kısıtların ve hedeflerin birlikte bulanık olduğu durumları gösteren bir karar sürecini ifade etmektedir. Bu ise hedeflerin ya da

kısıtların sınırları kesin olarak tanımlanmamış alternatif gruplar içerdği anlamına gelmektedir.

Bulanık doğrusal programlamada oluşan bulanıklık, hedefler ve kısıtlarda oluşan yapısal durumlardan kaynaklanmaktadır. Söz konusu bulanıklığın model içinde tanımlanabilmesi için üyelik fonksiyonunun belirlenmesi gerekir. Bulanık doğrusal programlama modelinde, amaç fonksiyonu ve kısıtlayıcılar ile bu fonksiyonlarda yer alan teknoloji katsayısı olan a_{ij} , kaynak miktarı olan b_i ve kar ya da maliyet katsayısı olan c_i parametreleri bulanıklık içerebilir.

Klasik karar verme gibi, bulanık sistemlerde de en uygun karar, amaç fonksiyonunu ve kısıtları eş zamanlı olarak karşılayan faaliyetlerin seçilmesidir. Bulanık amaç fonksiyonları ve kısıtlar üyelik fonksiyonları tarafından tanımlanır. Çözümlerin alanı bulanık bir set olacak ve üyelik fonksiyonu tarafından tanımlanacaktır. Bulanık karar, bulanık kısıtların ve bulanık amaç fonksiyonlarının kesişimidir. Bulanık bir ortamda kısıtlar ve amaç fonksiyonu arasındaki ilişki tamamen simetriktir; kısıtlar ve amaç arasında bir fark yoktur. (Zimmermann, 1976, 1983).

Herhangi bir problemin Bulanık Doğrusal Programlama problemi olarak değerlendirilmesi için bazı varsayımların sağlanması gerekir. Bu varsayımların üçü klasik DP problemleri için de geçerli olan doğrusallık, toplanabilirlik ve bölünebilirlik iken, dördüncü varsayım kesin olmama varsayımıdır. Kesin olmama varsayımının sağlanması için modeldeki amaç fonksiyonu katsayısı, sağ taraf sabiti ve kısıtların katsayıları parametrelerinin hepsinin ya da bir kısmının kesin olarak bilinmemesi, ancak bu parametrelerin üyelik derecelerinin bilinmesi gerekir. Gerçek hayattaki problemlerin küçük bir bölümü kesinlik varsayımını sağlamaktadır. Doğrusal programlama genellikle gelecekteki faaliyetlerin seçiminde kullanılır. Bu yüzden de parametre değerleri gelecekteki koşullar dikkate alınarak belirlenir. Durum bu şekildeyse, kullanılan çözüm yöntemlerinden biri Bulanık Doğrusal Programlama olabilir. Bulanık Doğrusal Programlama probleminde en önemli kısım parametrelerin nasıl bulandırılacağıdır. Bulanık kısıtlayıcı, evrensel küme X 'de yer alan bulanık bir küme $\tilde{A}$ olarak ifade edilir. Bulanık kısıtlayıcı kümesinin üyelik fonksiyonu $\mu_{\tilde{A}}(x)$ ile gösterilir. $\mu_{\tilde{A}}(x)$ üyelik fonksiyonu, $\mu_{\tilde{A}}(x) \in [0,1]$ koşulu ile belirli bir x vektörünün bulanık kısıtlayıcıya olan üyelik derecesini gösterir (Dai ve diğerleri, 2003).

DP modelinden farklı olarak Bulanık Doğrusal Programlama modelinde en belirgin fark bulanık olan kısımlara bulanıklık simgesinin ($\sim$) eklenmesi ve bulanık olan yer için $[0,1]$ aralığında tanımlı olan üyelik fonksiyonunun belirlenmesidir.

Genel olarak bir Bulanık Doğrusal Programlama modelinin tüm katsayılarının bulanık olduğu düşünülürse modelin gösterimi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} \max (\min) Z &= \sum_{i=1}^n \tilde{c}_i x_i \\ \sum_{i=1}^n \tilde{a}_{ij} x_i &(\leq = \geq) \tilde{b}_j \\ x_i &\geq 0, i=1,2,\dots,n \end{aligned} \tag{5.2}$$

Bulanık Doğrusal Programlama problemlerinin çeşitleri aşağıdaki gibi sınıflandırılır.

- Bulanık kısıtlı DP
- Bulanık amaç fonksiyonlu ve bulanık kısıtlı DP
- Bulanık amaç katsayılı DP
- Bulanık parametrelili DP

5.2.1. Bulanık kısıtlı doğrusal programlama problemi

Bu tür problem bulanık kaynak kısıtları ve bulanık eşitsizlik kısıtları olmak üzere iki şekilde ortaya çıkar.

Bulanık kaynak kısıtları

DP modellerinde maksimum kaynak miktarını gösteren sağ taraf parametreleri açıkça tanımlanmayabilir, yani bulanık olabilir. Bu durumda oluşturulacak kaynak kısıtları bulanık kaynak kısıtları olarak tanımlanır (Lai ve Hwang,1992). Kaynak sınırı olarak adlandırılan sağ taraf sabiti bulanıklığa en çok imkan veren DP modeli parçasıdır. Aslında sabit

düşünülmesi, olayı etkileyen faktörlerin tümünü göz ardı ederek problemi basitleştirmektedir (Yılmaz, 1998).

Bulanık kaynak kısıtlı DP problemi, i kısıt sayısını göstermek üzere; Lai ve Hwang (1992) tarafından aşağıdaki gibi ifade edilmiştir.

$$\max (\min) Z = c^T x$$

Kısıtlar:

$$\begin{aligned} (AX)_i &\leq \tilde{b}_i, \quad i=1,2,\dots,k \\ x &\geq 0 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Bulanık eşitsizlik kısıtları

Bazı durumlarda karar vericinin kısıtların sağlanmasında yani “mümkün olduğu kadar iyi” olmasına izin verebileceği varsayılabilir. Lai ve Hwang (1992) tarafından kısıt kümesindeki her kısıt için bu varsayım, $(AX)_i \{\widetilde{\leq}, \widetilde{\geq}\} b_i, i=1,2,\dots,m$ ile gösterilmiştir.

b_i bulanık kaynakların p_i maksimum toleranslarını belirlemek mümkündür. O halde, her bulanık kısıt için doğrusal kabul edilen μ_i üyelik fonksiyonlarını aşağıdaki gibi oluşturabilir:

$$\mu_i = \begin{cases} 1, & (Ax)_i < b_i \\ 1 - \frac{(Ax)_i - b_i}{p_i}, & b_i \leq (Ax)_i \leq b_i + p_i \\ 0, & (Ax)_i > b_i + p_i \end{cases}$$

Bazı bakış açılarına göre bulanık kaynak kısıtları ve bulanık eşitsizlik kısıtları farklı modeller olarak düşünülse de, bulanık kaynak kısıtları ve bulanık eşitsizlik kısıtlarının üyelik fonksiyonlarının aynı olduğu varsayımı altında bu modelleri ele almak için aynı yaklaşım kullanılabilir (Lai ve Hwang, 1992).

5.2.2. Bulanık amaç fonksiyonlu ve bulanık kısıtlı doğrusal programlama problemi

$$\widetilde{\max} Z = c^T x$$

Kısıtlar:

$$(AX)_i \leq \tilde{b}_i, i=1,2,\dots,k$$

$$x \geq 0 \quad (5.4)$$

olarak ifade edilen modelde, amaç fonksiyonundaki bulanıklık, karar vericinin amaçladığı erişim düzeyinin bulanık olması ile ifade edilir. Yani, bu modellerde amaç fonksiyonundaki bulanıklık amaç fonksiyonu parametrelerinden (c_j katsayılarından) kaynaklanmaz. Ayrıca, bu modellerde teknoloji katsayıları da bulanık olmayan bir şekilde belirlenir. Bulanık amaç ve bulanık kısıtlı DP problemlerinin çözülebilmesi için bulanık amaç ve bulanık kısıtlayıcılara ilişkin erişim düzeyleri ile maksimum toleransların belirlenmesi gerekir.

5.2.3. Bulanık amaç katsayılı doğrusal programlama problemi

Karar verici ürettiği her bir ürün için, yılın satış zamanlarına, diğer markalı ürünlerle rekabet yarışı gibi durumlara bağlı olarak fiyatlarını oturtmak için bir değer aralığı kararlaştırır. Bu gibi faktörlere bağlı olarak karını maksimum tutamaz. Çünkü böyle bir rekabet ortamında ilgili ürün için pazar araştırması maliyeti o ürünün karını azaltacaktır. Bu nedenle karar verici karını maksimum yapmak için amaç fonksiyonunun katsayılarını, dolayısıyla amaç fonksiyonunu bulanık kuracaktır (Yılmaz, 1998).

$$\max Z = \tilde{c}^T x$$

Kısıtlar:

$$(AX)_i \leq \tilde{b}_i, i=1,2,\dots,k$$

$$x \geq 0 \quad (5.5)$$

şeklinde ifade edilir. Bu modelde amaç fonksiyonu katsayıları bulanık sayılarla veya bulanıklığı niteleyen tolerans aralıkları ile tanımlanır (Cadenas ve Verdegay, 2000).

5.2.4. Bulanık parametrelı doğrusal programlama problemi

$$\max Z = \sum_{j=1}^n \tilde{c}_j x_j$$

Kısıtlar:

$$\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} x_j \leq \tilde{b}_i, i = 1, 2, \dots, k$$

$$x \geq 0 \quad (5.6)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu model için parametrik programlama temeline dayanan ve parametrelerdeki bulanıklığın karar verici ile etkileşime girerek tanımlandığı bir çözüm yaklaşımı Carlsson ve Korhonen tarafından önerilmiştir.

Bir DP modelinin parametrelerinin herhangi birinde görülen belirsizliği incelemek için başvurulan yöntemlerden diğeri ise olasılık teorisidir. Olasılık teorisindeki belirsizlik rassallık kavramına dayanmaktadır. Bir nesnenin bulanık olmayan bir kümeye ait olması ya da olmaması durumundaki belirsizlik rassallık ile açıklanır. Fakat belirsizliği bir başka açıdan ele alan bulanık küme teorisi ise, üyelik fonksiyonunun devreye girmesi ile belirsizliğin ortadan kalkacağını göstermektedir.



6. HEDEF PROGRAMLAMA VE BULANIK HEDEF PROGRAMLAMA

6.1. Hedef Programlama

Hedef Programlama (HP), belirlenen kısıtlar altında, amacı doğrudan maksimum ve minimum yapmak yerine; hedeflerin kendi içinde sapmalarının minimum yapılmasını amaçlayan bir tekniktir. Hedef Programlama, çok kriterli karar problemlerinin çözümü için uygulanan bir tekniktir.

Hedef programlama ilk kez Charnes, Cooper ve Ferguson tarafından 1955 yılında kullanılmıştır. 1961’de Charnes ve Cooper tarafından geliştirilen teknik, karar vericinin amaç fonksiyonu için hedefler veya istek düzeyleri belirleyebileceğini varsaydığı çok amaçlı doğrusal programlama problemlerini çözebilmek amacıyla ortaya çıkmıştır. Daha sonra Ignizio, Lee, Tamiz ve Romero gibi önemli isimlerin de içinde bulunduğu araştırmacılar, HP kavramının gelişmesine katkıda bulunmuşlardır. Ancak günümüzde sadece Doğrusal Programlamanın genişlemesi değil, karar vericinin çoklu amaçları analiz edebilmesi, model kısıtlarından bazılarını esnetebilmesi ve çoklu amaçlar için karar vericinin tercihini ve önceliklerini modele yansıtmak gibi pek çok yeteneğe sahip bir tekniktir.

Charnes ve Cooper 1961 yılındaki çalışmalarında üç yaklaşım ileri sürmüşler ve bu yaklaşımların hepsinin temelini ulaşılmak istenen amaçların kabul edilebilir düzeylerinin belirlenmesiyle, istenilen hedeflere dönüştürülmesi oluşturmaktadır. Hedefin maksimum ya da minimum olduğuna bakılmaksızın hedeften sapmaların minimum düzeyde kalması gerekliliğini ileri sürmüşlerdir.

Hedef programlama modeli, doğrusal programlama modeli gibi, kısıtlayıcı kümesi ve amaç fonksiyonu şeklinde iki bölümde incelenebilir. Doğrusal programlama modelinde yer alan kısıtlayıcılar ve amaç fonksiyonları hedef programlama modelinin sadece kısıtlayıcı kümesini oluşturur. Hedef programlama modelinde, amaç fonksiyonları için ulaşılmak istenen erişim değerlerini karar vericinin belirlemesi gerekir. Belirlenen erişim değerli amaç fonksiyonları bir eşitlik halinde kısıtlayıcı kümesine eklenir. Ancak belirlenen erişim değerli amaç fonksiyonları bir eşitlik halinde kısıtlayıcı kümesine eklenebilmesi için; her bir hedef fonksiyonu için sapma değişkenlerinin tanımlanması gerekir. Hedef fonksiyonlarının erişim

düzeylerinden ne kadar uzaklaşıldığının ölçülmesine yarayan sapma değişkenleri, negatif ve pozitif sapma olarak ikiye ayrılır. Negatif sapma değişkeninin (d_i^-) değerinin pozitif olması, ilgili hedefin belirlenen erişim düzeyinin altında bir değere ulaştığını gösterir. Pozitif sapma değişkeninin (d_i^+) sıfırdan büyük olması durumu ise; ilgili hedef için belirlenen erişim düzeyinin aşıldığını gösterir. Pozitif ve negatif sapma değişkenlerin 0'a eşit olması ilgili hedef için erişim düzeyine kesin olarak ulaşıldığını gösterir. Sapma değişkenlerinden sadece birisi pozitif değer alabilir, diğer değişken mutlaka sıfır olmalıdır. Çünkü bir hedeften hem pozitif yönlü hem de negatif yönlü sapma olması mümkün değildir. Sapmalar tek yönlüdür. Hedeften eşanlı olarak tek bir sapma söz konusu olduğu için, sapma değişkenlerinin negatif olmaması gerekir (Erdin, 2007). Amaç fonksiyonunda yer alacak sapma değişkenlerine ilişkin bilgiler Çizelge 6.1'de verilmiştir.

Çizelge 6.1. Amaç fonksiyonunda yer alacak sapma değişkenleri

Hedef Yönü	Sapma Değişkeni
$\leq$	d_i^+
$\geq$	d_i^-
$=$	$d_i^+ + d_i^-$

Her bir hedef aynı zamanda amaç fonksiyonunda da yer alan bir ya da iki sapma değişkeni içerir. Kısıtlar yalnız pozitif ya da yalnız negatif sapma içerebileceği gibi pozitif ve negatif sapmayı aynı anda da içerebilmektedirler. Kısıtta hangi tür sapma değişkeninin kullanılacağı hedeften beklentilere göre belirlenir.

Hedef Programlama, matematiksel programlama modeli türlerine göre; Doğrusal Programlama, Tam Sayılı Programlama, Doğrusal Olmayan Programlama gibi çeşitli türlere göre sınıflandırılabilirdiği gibi hedef sayısına göre de sınıflandırılabilir.

6.1.1. Tek hedefli hedef programlama

Problemde bir hedef olması durumunda kullanılan bu yöntem, modelin oluşturulması ve çözüme ulaşılması dikkate alındığında en basit HP modelidir. Tek hedefli HP için amaç fonksiyonu Eş. 6.1'deki gibi ifade edilebilir.

$$\min z = d_1^+ \quad (6.1)$$

Bu şekildeki HP, d_1^+ veya d_1^- olmak üzere pozitif ya da negatif sapma değişkeninden bir tanesi olarak ortaya çıkar. i hedef sayısı olmak üzere, eğer hedef sayısı $i > 1$ olursa, artık tek hedefli bir programlamadan söz edilemez ve bu model, aşağıda açıklanacak olan uygun türlerden birine dönüştürülür.

6.1.2. Eşit ağırlıklı hedef programlama

Hedef sayısının 1'den büyük olması koşuluyla tüm hedefler aynı öneme sahiptir. Hedeflerin yani istenmeyen sapma değişkenlerinin toplamı amaç fonksiyonunu oluşturur. Bu HP türü için amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\min z = d_1^- + d_2^+ + d_3^+ + d_4^+ \quad (6.2)$$

6.1.3. Ağırlıklı hedef programlama

Bu türdeki hedef programlama modelinde meydana gelebilecek istenmeyen her sapmaya belirli bir ağırlık verilmektedir. Ağırlıklar, her sapmanın karar alınacağı zaman göreceli önemini gösterir. Modelin amaç fonksiyonu, problemin hedeflerini temsil eden fonksiyonların ağırlıklandırılmış toplamı haline getirilir. Bir hedefin diğer hedeften ne kadar önemli olduğu, karar vericinin tercihine bağlıdır.

Ağırlıklı hedef programlama aşağıdaki gibi modellenir (Erdin, 2007):

$$\min Z = \sum_{i=1}^m (w_i^+ d_i^+ + w_i^- d_i^-)$$

Kısıtlar:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + d_i^- - d_i^+ = b_i$$

$$x_j, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \quad (6.3)$$

$$i=1,2,\dots,m$$

$$j=1,2,\dots,n$$

w_i^+ , pozitif sapmaya ait ağırlık iken; w_i^- , negatif sapmaya ait ağırlıktır.

Ağırlıklara atanan değerler karar vericilere göre farklılık gösterir. i. hedef için tanımlanmış kısıtın yönü $\geq$ şeklindeyse, Z amaç fonksiyonunda d_i^+ değişkeni, kısıtın yönü $\leq$ şeklindeyse, Z amaç fonksiyonunda d_i^- değişkeni minimum olacaktır.

6.1.4. Öncelikli hedef programlama

Öncelikli HP modeli, belirlenen hedeflerin kendi önemlerine göre bir sıralama önceliğine göre düzenlenmesidir (Aouni ve diğerleri, 2009). Bu tür HP modelinde, amaç fonksiyonunda belirlenen her bir hedef hiyerarşik olarak sıralanmalıdır. Yapılacak olan sıralama sayısal ya da sözel olarak belirtilmiş olmalıdır.

Modelde anlatılmak istenen, birinci hedef gerçekleştirilmeden ikinci hedefe geçilemeyeceği, ikinci hedef gerçekleştirilmeden üçüncü hedefe geçilemeyeceği ve (n-1). hedef gerçekleştirilmeden n. hedefin gerçekleştirilemeyeceğidir.

Genel olarak öncelikli HP Eş. 6.4'deki gibi formüle edilebilir (Erdin, 2007):

$$\min Z = \sum_{i=1}^m \rho_1 (w_{1in}d_i^- + w_{1ip}d_i^+), \dots, \sum_{i=1}^m \rho_k (w_{kin}d_i^- + w_{kip}d_i^+)$$

Kısıtlar:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + d_i^- - d_i^+ = b_i$$

$$x_j, d_i^-, d_i^+ \geq 0$$

$$i=1,2,\dots,m$$

$$j=1,2,\dots,n$$

$$\rho_1 \gg \rho_2 \gg \rho_3 \gg \dots \gg \rho_k$$

i: hedef sayısı

(6.4)

k: Öncelik sırası

m: kısıt sayısı

n: x_j karar değişkeninin sayısı

w: i. hedef sapma değişkenine atanan ağırlık katsayısı

6.2. Bulanık Hedef Programlama

Hedef programlama, pratik karar verme problemlerinde en güçlü karar verme yaklaşımlarından biri olmasına rağmen, HP'nin gerçek hayattaki problemlere uygulanmasında iki önemli zorluk ortaya çıkabilir. Bunlardan birisi bulanık hedefler ve kısıtlar; diğeri ise amaçların yani tüm hedeflerin aynı anda optimize edilmesidir (Arıkan ve Güngör, 2001).

HP problemlerinde amaç tüm hedeflere ilişkin sapma değişkenlerini minimum yapmaktır. Bunun için, hedeflerin kesin olarak belirtilmiş olması ve bu belirli hedefler için matematiksel denklemlerin eksiksiz olarak formüle edilmesi şarttır. Hedefler ve kısıtların birbirlerine uyumlu olması HP problemlerinde bir kırılma noktasıdır.

Amaç fonksiyonunun belirlenmesinde ve parametrelerin oluşturulmasında kesinlik bulunmamaktadır. Bu nedenle bulanık mantık, HP için oldukça uygundur ve literatürde sıklıkla yararlanılmıştır. HP içerisine bulanık mantık teorisinin uygulanmasıyla oluşturulan Bulanık Hedef Programlama (BHP), kesin olmayan hedeflerin ve amaçların olması durumunda kullanılan bir tekniktir.

Bulanık sayı teorisi ile HP'nin birlikte işlendiği ilk çalışmalar Narasimhan (1980) ve Hannan'ın (1981) çalışmalarıdır. Narasimhan, BHP modellerinde üyelik fonksiyonlarının kullanımını önermiştir. Narasimhan, minimum operatörünü temel alarak, bulanık mantık felsefesinde kullanılan üyelik fonksiyonu kavramı ile HP'nin birlikte kullanılabileceğini ifade etmiştir (Kumar ve diğerleri, 2004). Bu işlemde bulanık hedefleri; bulanık eşitlikler olarak kabul edip, üçgen üyelik tipli fonksiyonlar olarak formüle etmiştir. Çözüm işlemi ise m tane bulanık hedefi olan bir BHP probleminde 2^m tane alt problem oluşturulması ve her bir sonucun en sonunda kendi içerisinde karşılaştırması yapılarak optimal kararın verilmesi (en yüksek λ değerli alt problem) esasına dayanır. Daha sonra bu çözüm yaklaşımı, eşit olmayan ağırlıkların çok sayıda hedefle birleştirildiği bir boyuta getirilmiştir. Hannan

ise HP problemlerinde bulanık küme teorisini uygulayarak karar vericilerin bulanık veya kesin olmayan isteklerinin parçalı doğrusal ve sürekli üyelik fonksiyonlarının kullanımı ile nasıl belirlenebileceğini kanıtlamış ve daha sonra tercih öncelikleri, ağırlıklar ve amaca uygun üyelik fonksiyonunun maksimizasyonu ile BHP'nin kullanımı için modeller sunmuştur (Tuş Işık, 2011).

Narasimhan'ın ardından, Narasimhan ve Hannan'ın geliştirmiş olduğu eşit öncelikli HP problemleri için çözüm algoritmasına daha az zaman ve değişkenle eşdeğer sonuçlar veren çalışmalar Yang ve diğerleri (1991) tarafından elde edilmiştir. Daha sonraları, öncelikleri birbirlerinden farklı olan HP modeli için Tiwari, Dharmar, Rao (1987) daha etkin kullanım sağlayan, toplamsal modeli geliştirmişlerdir. Tiwari, Dharmar ve Rao'nun geliştirmiş olduğu bu yöntemde, işlem yükü çok fazla olup, bu yükten kurtulmak için Chen ve Tsai (2001) tarafından alternatif bir yaklaşım geliştirilmiştir. Kim ve Whang (1998), öncelikli BHP problemlerinin, Hannan yaklaşımı ile de çözülebileceğini gösteren bir çözüm geliştirmişlerdir. Bunların yanında Wang ve Fu (1997), farklı risk grubundaki karar vericilerin bulanık hedeflerine ilişkin üyelik fonksiyonlarını tanımlamışlar ve parçalı üyelik fonksiyonlarının HP modellerinde de kullanılabilmesine olanak sağlamışlardır.

Hedef Programlama ve Bulanık Programlama, çok amaçlı problemleri çözmek için iki yaklaşımdır. Her ikisinin de her hedef için bir istek seviyesine ihtiyacı vardır. Bu istek seviyeleri ya karar verici ya da karar analisti tarafından belirlenir. Hedeflerin istek düzeylerine ek olarak, Bulanık Programlama 'nın her bir hedef için kabul edilebilir uyumsuzluk sabitleri belirtmesi gerekir (Mohamed, 1997).

BHP üzerine farklı zamanlarda çalışmalar devam etmiştir. Leberling (1981), doğrusal vektör maksimum problemine bulanık yaklaşımı uygulayarak, bulanık minimum operatörünün doğrusal ve doğrusal olmayan üyelik fonksiyonlarıyla birlikte kullanılmasından elde edilen çözümlerin çok kriterli problemlerde optimal çözüm olduğunu göstermiştir.

Rubin ve Narasimhan (1984), Hedef Programlama Problemi 'nde bulanık önceliklerin formüle edilmesine dayalı önerdikleri yaklaşımın merkezi, hedefler için üyelik fonksiyonlarının oluşturulmasında yatmaktadır. Üyelik fonksiyonu bir dizi iç içe geçmiş önceliğe dayanmaktadır. Sabit hedefler hiyerarşisi yaklaşımındansa bu şekilde oluşturulan

üyelik fonksiyonunu kullanmanın, karar vericinin önceliklerini daha tutarlı şekilde yansıttığını göstermişlerdir.

Sakawa ve Yano (1988), karar vericinin çok amaçlı kesirli programlama problemlerindeki kararının kesin olmayan yapısı problemini çözebilmek için ikiye ayırma yöntemini doğrusal programlama tekniği ile birlikte kullanarak, etkileşimli bulanık bir yöntem önermişlerdir.

Kuwano (1996), klasik doğrusal programlama problemlerinde belirsizlik, iki anlamlılık ya da kararsızlık problemlerinin çözülemeyeceğinden yola çıkarak bu problemleri bulanık matematiksel programlama yöntemleri ile çözmeye çalışmıştır. Önerilen yaklaşım Hedef Programlama yöntemlerine dayanmaktadır.

Dubois, Fargier ve Prade (1996), bulanık bir ortamda karar vermede maksimum yaklaşımın iyileştirilmesi üzerine çalışma yapmışlardır. Bulanık kümelerin belirlenmesinde karar vermede en popüler yaklaşım olan çözümlerin maksimum sıralamasıdır. Bu sıralamaları çeşitli şekillerde karakterize ederek, iki basamaklı sayısal fonksiyonlarla gösterimlerini incelemişlerdir.

Mohamed (1997), Hedef Programlama ve Bulanık Programlama arasındaki benzerlikleri vurgulayarak, her birinin diğerine nasıl uygulanabileceğini göstermiştir. Ayrıca bazı yeni bulanık program formları sunarak bulanık programlamayı net bir biçime dönüştürmek için Hedef Programlama'nın sapma değişkenleri kavramını kullanmıştır. Bulanık Programlama'nın amaç fonksiyonundaki sapma değişkenlerine atanan bazı ağırlıkları olan bir Hedef Programlama olduğunu göstermiştir.

Chanas ve Kuchta (2002), üç yeni yaklaşım içeren bulanık hedef programlama yaklaşımı hakkında inceleme yaparak bulanık sayıların içlerinde oynadığı role göre çeşitli yaklaşımları sınıflandırmışlardır. Bu sınıflandırmaların karar vericinin belirli bir karar durumunda doğru modeli seçmesine yardımcı olabileceğini düşünmüşlerdir.

Hashemi, Ghatee ve Hashemi (2006), Bulanık Hedef Programlama'yı inceleyerek, klasik doğrusal programlamanın bazı sonuçları üzerinde genelleştirme yapmışlardır. Özellikle, hemen hemen her optimizasyon tekniğinin temeli olan tamamlayıcı gevşeklik (artıklık) koşulları elde edilmiştir. Ayrıca, $\leq$ 'nin iki esnek ve keskin uzantısına dayanarak,

tamamlayıcı gevşeklik koşullarını kullanarak Bulanık Hedef Programlama için iki iyimser ve kötümser çözüm elde etmişlerdir. Bu çözümlerin dışbükey (konveks) bir kombinasyonunu, Bulanık Hedef Programlama'nın tatmin edici çözümleri olarak sunmuşlardır.

Aköz ve Petrovic (2007), hedeflerin hiyerarşik düzeylerinin kesin olarak tanımlanmadığı yeni bir bulanık hedef programlama yöntemi önermişlerdir. Hedefler arasındaki kesin olmayan ilişkiler bulanık ilişkiler kullanılarak modellenmiştir. Hem hedeflerin başarı derecelerini hem de bulanık önem ilişkilerinin tatmin derecelerini dikkate alan bir ek amaç fonksiyonu tanımlanmıştır. Bulanık hedeflerin kesin olmayan önemini, bulanık ikili ilişkileri kullanarak göstermişlerdir. Yeni amaç fonksiyonunu, bulanık hedeflerin başarı derecelerinin ve hedefler arasındaki bulanık hiyerarşik ilişkilere göre elde edilen memnuniyet derecelerinin doğrusal bir kombinasyonu olarak tanımlayarak, hedefler arasındaki ilişkilerin kesin olmayan bir şekilde etkili bir şekilde ele alınabileceğini göstermişlerdir.

Chang (2007), problemin klasik Hedef Programlama yaklaşımları ile çözülemediği durumlarda ikili bulanık hedef programlama kullanılacağını öne sürerek bu modelin nasıl programlanacağı hakkında fikir sunmuştur. İkili bulanık hedef programlama modelini tamsayı programlama yöntemi kullanarak çözmüştür.

Hop (2007), amaç/ kısıt katsayıları ve hedeflerinin bulanık rassal değişkenler olduğu bulanık stokastik hedef programlama probleminin genel bir durumunu ele almıştır. Problemi standart optimizasyon paketleri tarafından kolayca çözülebilen bir doğrusal programlamaya dönüştürmek için bulanık rassal değişkenlerin kazanım değerlerini ifade etmek için önerilen yaklaşımın mevcut yaklaşımlarından daha etkili olduğunu çünkü daha az sayıda kısıt ve değişken içerdiğini belirtmiştir.

Hu, Teng ve Li (2007) , birden fazla önceliği içeren amaç fonksiyonunun üç olası durumuna göre bulanık hedef programlama için değişken alanlı optimizasyon yöntemi ve genelleştirilmesini önermişlerdir. Bu yöntem ile karar vericinin daha yüksek önceliğe sahip hedefin daha yüksek memnuniyet düzeyine sahip olabileceği beklentisiyle tutarlı sonuçlar üretebileceğini savunmuşlardır.

Yaghoobi ve Tamiz (2007), Bulanık Hedef Programlama problemlerini çözmek için hedef programlamadaki klasik MINMAX yaklaşımını uygulayarak, MA modeli olarak adlandırılan bir model önermişlerdir. Önerilen modelin, asimetrik üçgen doğrusal üyelik fonksiyonları ile ilgilenen Hannan modelinin bir uzantısı olduğunu kanıtlamışlardır.

Mashinchi ve diğerleri (2008), bulanık doğrusal programlama problemlerine global bir çözüm bulmak için tabu arama yöntemi önermişlerdir. Tabu aramanın arama performansını arttırması için iki ek faktör olarak, dağılım faktörü ve benzerlik faktörünü de göstermişlerdir. Dağılım faktörü ve benzerlik faktörü uygulaması, tabu aramanın daha geniş bir arama alanında gezinmesini sağlamış olup, ziyaret edilen alanları yeniden arama olasılığını azaltmıştır.

Gupta ve Bhattacharjee (2012), çok amaçlı hedef programlama problemini çözmek için ağırlıklı bulanık hedef programlamaya dayanan iki yöntem önermişlerdir. Burada nispi ağırlıklar, amaç fonksiyonlarının göreceli önemini temsil etmektedir. Önerilen yöntemlerde küçük sapma değişkenleri ile ek hedef kısıtlaması eklenerek mevcut yöntemlerden daha iyi sonuç verdiğini göstermişlerdir.

Veeramani ve Duraisamy (2012), doğrusal programlama modelindeki tüm parametrelerin ve değişkenlerin bulanık sayı olduğu, tamamen bulanık doğrusal programlama problemleri için beklenen aralığı koruyarak en yakın simetrik üçgen bulanık sayı yaklaşımı kavramını kullanarak bulanık doğrusal programlama problemlerini çözmek için yaklaşım önermişlerdir.

Gupta ve Bhattacharjee (2014), karar vericilerin hedeflerine uygun doğru politikayı belirlemelerine yardımcı olacak bulanık çok amaçlı kesirli hedef programlama problemlerini çözmek için bulanık hedef programlamaya dayalı bir yöntem geliştirmişlerdir.

Arıkan (2014), Hedef Programlama' nın bazı dezavantajlarının üstesinden gelmek için ağırlıklı Bulanık Hedef Programlama modeli geliştirmiştir. Model, Lai ve Hwang'ın baskın olmayan bir çözüme ulaşması garanti edilen artırılmış max-min modelinden geliştirilmiştir.

Barik (2015), bazı kısıtlarda sağ taraf parametrelerinin bilinen ortalama ve varyansla Pareto dağılımını izlediği, doğrusal olarak kısıtlanmış olasılıklı bulanık hedef programlama

problemini incelemiştir. İstek seviyelerinin bulanık olarak kabul edildiği yaklaşımda, olasılıklı bulanık hedef programlama modeli için basit, ağırlıklı toplamsal yaklaşımları tartışılmıştır. Bu toplamsal yaklaşımlar, üyelik değerlerini toplamak ve net eşdeğer deterministik modeller oluşturmak için kullanılır. Elde edilen modeller daha sonra standart doğrusal matematiksel programlama teknikleri kullanılarak çözülmüştür.

Dalman ve Bayram (2019), aralık tip 2 bulanık sayılarla çok amaçlı doğrusal olmayan programlama problemlerini çözmek için etkileşimli bir bulanık hedef programlama yaklaşımı geliştirmişlerdir. Amaç fonksiyonundaki maliyeti ve zamanı ayrıca her tür kaynağın gereksinimlerini üçgen tip 2 bulanık sayı olarak tanımlamışlardır.

Bulanık Hedef Programlama'ya ilgi sınıflandırma çalışmalarında da olmuştur. Li ve diğerleri (2006), MSD modelini temel alarak esnek kriterler ve kısıtlar ile bulanık doğrusal programlama sınıflandırma yöntemini önermişlerdir. Sonuç olarak yöntemin uygulanabilirliğini göstermişlerdir. Ayrıca bu çalışmada sınıflandırma için bulanık doğrusal programlamanın genel çerçevesi ilk kez sistematik olarak tanımlanmış ve değerlendirilmiştir.

Lotfi ve Mansouri (2008), bulanık matematiksel programlama için eşdeğer net bir model ortaya çıkaran yeni örneklenmiş gözlemlerin grup üyeliğini tanımlamak için kriter değerlendirme sorununa yaklaşım sunmuşlardır. Karşılaştırma fonksiyonunu kullanarak iki aşamalı bulanık modelleri eşdeğer iki aşamalı net bir modele aktarmışlardır. Önerdikleri model, öncelikle gözlemleri en uygun şekilde sınıflandıran parametrik olmayan fonksiyonu tanımlama ve ikinci olarak yeni örneklenmiş bulanık gözlemlerin üyeliğini tahmin etme yeteneğine sahiptir.

Youssef ve Rebai (2008), değişkenlerin kesin olmayan, nitel veya dilsel olabilmesinden yola çıkarak, bulanık küme teorisini klasik doğrusal programlamadaki yetersizliği doldurmak için uygun bir araç olarak görerek, sınıflandırma problemlerinin Bulanık Doğrusal Programlama modelleri ile çözülmesinden oluşan bir yaklaşım önermişlerdir.

Kar ve diğerleri (2011), tedarikçi sınıflandırması için bulanık doğrusal programlama teknikleri ve bulanık Analitik Hiyerarşi Süreci kullanan sezgisel bir sınıflandırma yöntemi önerilmiştir. Doğrusal programlama ve çok kriterli doğrusal programlama sınıflandırması

kullanılarak test edilen model, doğrusal ayırma analizine dayanmaktadır. Önerilen karar destek modeli, veri gereksiniminin çok büyük olduğu diğer sınıflandırıcıların aksine, sistemin eğitimi için çok az veri noktasına ihtiyaç duyulması avantajına sahiptir.

Smaoui ve Aouni (2017), doğrusal programlama modelindeki sağ taraf sabitini bulanık parametreler olarak alarak iki aşamalı MSD modelini bulanık duruma dönüştürerek sınıflandırma modeli geliştirmişlerdir.

Bununla birlikte, ayırma ve sınıflandırma analizi için matematiksel programlama kullanılarak kapsamlı çalışmalar yapılmış olsa da genel olarak iki gruplu sınıflandırma tekniklerine odaklanılmıştır. Dolayısıyla literatür taraması, çok gruplu problemlerle ilgili çalışma eksikliğini göstermektedir. Üç veya daha fazla grup için yapılan çalışmalara Gehrlein (1986), Gochet ve diğerleri (1997), Sueyoshi (2006), Örkücü ve Bal (2011), Youssef ve diğerleri (2011) örnek olarak verilebilir.



7. ÖNERİLEN SINIFLANDIRMA MODELLERİ

Bu çalışmada önerilen çok gruplu sınıflandırma modelleri bulanık sayılar kullanılarak oluşturulan, bulanık hedef programlama modeline dayanmaktadır. Smaoui ve Aouni (2017) tarafından önerilen modeller iki aşamadan oluşmaktadır. Bu da daha fazla işlem yükü anlamına gelmektedir. Önerilen modeller tek aşamadan oluşmakta bu nedenle modeller daha az değişken kullanılarak çözülmektedir. Ayırma fonksiyonundaki kesme değeri olan c ; üçgen bulanık sayı, yamuk bulanık sayı ve Gauss bulanık sayı olarak ele alınarak modeller oluşturulmuştur.

h , bulanık sayılar kavramındaki α kesimine karşılık gelmektedir. c_{1uv} ve c_{2uv} , sırasıyla c bulanık sayısının alt ve üst limitleridir. d_{iuv}^+ ve d_{iuv}^- (e_{iuv}^+ ve e_{iuv}^-) sırasıyla, G_u gözlemleri (G_v gözlemleri) ile $\tilde{c}_r$ kesme değeri arasındaki pozitif ve negatif sapmalardır.

Üçgen bulanık sayı kullanılarak oluşturulan ve MFMSDT olarak adlandırılan model Eş. 7.1'de verilmektedir.

$$\min \sum_{u=1}^{m-1} \sum_{v=u+1}^m \left(\sum_{i \in G_u} d_{iuv}^+ + \sum_{i \in G_v} e_{iuv}^- \right)$$

Kısıtlar:

$$\sum_{j=1}^p w_{juv} x_{ij} - d_{iuv}^+ + d_{iuv}^- = c_r - (1-h)\eta_{1r}, \quad i \in G_u$$

$$\sum_{j=1}^p w_{juv} x_{ij} - e_{iuv}^+ + e_{iuv}^- = c_r + (1-h)\eta_{2r}, \quad i \in G_v$$

$$\sum_{j=1}^p w_{juv} = 1$$

$$c_{2uv} - c_{1uv} \geq 1$$

$$c_r - c_{1uv} = \eta_{1r}$$

$$c_{2uv} - c_r = \eta_{2r}$$

$$c_{1uv} \leq c_r \leq c_{2uv}$$

$w_{juv}, c_{1uv}, c_{2uv}, c_r$ işaretçe serbest

$$d_{iuv}^+, d_{iuv}^-, e_{iuv}^+, e_{iuv}^- \eta_{1r}, \eta_{2r} \geq 0 \quad (7.1)$$

$$u=1,2,\dots,m-1 \quad v=u+1,\dots,m$$

Yamuk bulanık sayı kullanılarak oluşturulan ve MFMSDTR olarak adlandırılan model Eş. 7.2’de verildiği gibidir.

$$\min \sum_{u=1}^{m-1} \sum_{v=u+1}^m \left(\sum_{i \in G_u} d_{iuv}^+ + \sum_{i \in G_v} e_{iuv}^- \right)$$

Kısıtlar:

$$\sum_{j=1}^p w_{juv} x_{ij} - d_{iuv}^+ + d_{iuv}^- = h(c_r - \varepsilon) + (1-h)c_{1uv}, \quad i \in G_u$$

$$\sum_{j=1}^p w_{juv} x_{ij} - e_{iuv}^+ + e_{iuv}^- = h(c_r + \varepsilon) + (1-h)c_{2uv}, \quad i \in G_v$$

$$\sum_{j=1}^p w_{juv} = 1$$

$$c_{2uv} - c_{1uv} \geq 1$$

$$c_{1uv} \leq c_r - \varepsilon \leq c_r \leq c_r + \varepsilon \leq c_{2uv}$$

$w_{juv}, c_{1uv}, c_{2uv}, c_r$ işaretçe serbest

$$d_{iuv}^+, d_{iuv}^-, e_{iuv}^+, e_{iuv}^- \geq 0 \quad (7.2)$$

Gauss bulanık sayı kullanılarak oluşturulan ve MFMSDGA olarak adlandırılan model Eş. 7.3’de verilmektedir.

$$\min \sum_{u=1}^{m-1} \sum_{v=u+1}^m \left(\sum_{i \in G_u} d_{iuv}^+ + \sum_{i \in G_v} e_{iuv}^- \right)$$

Kısıtlar:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^p w_{juv} x_{ij} - d_{iuv}^+ + d_{iuv}^- &= c_r - \sigma_r \sqrt{-\log h}, & i \in G_u \\
\sum_{j=1}^p w_{juv} x_{ij} - e_{iuv}^+ + e_{iuv}^- &= c_r + \sigma_r \sqrt{-\log h}, & i \in G_v \\
\sum_{j=1}^p w_{juv} &= 1 \\
c_{2uv} - c_{1uv} &\geq 1 \\
\sigma_r &= \frac{c_{2uv} - c_{1uv}}{6} \\
c_{1uv} &\leq c_r \leq c_{2uv} \\
w_{juv}, c_{1uv}, c_{2uv}, c_r &\text{ işaretçe serbest} \\
d_{iuv}^+, d_{iuv}^-, e_{iuv}^+, e_{iuv}^- &\geq 0
\end{aligned} \tag{7.3}$$

Önerilen üç modeldeki ilk kısıt G_u 'daki gözlemlerin sınıflandırma skorlarından pozitif sapmayı minimum yapmaya zorlarken, ikinci kısıt G_v 'deki gözlemlerin sınıflandırma skorlarından negatif sapmayı minimum yapmaya zorlar. Üçüncü kısıt ise, ağırlıklara verilecek önemsiz değerleri engellemek için normalizasyon kısıtıdır. Böylelikle en az bir tane ağırlık değeri pozitif olarak elde edilmektedir ve gözlemler konveks küme içinde sınıflandırılmaktadır. Geriye kalan kısıtlar ise, bulanık sayılara ait üyelik fonksiyonu ile ilgili kısıtlardır.

Eş. 7.1, Eş. 7.2 ve Eş. 7.3 yardımıyla her (u,v) grup çifti için kesme değeri olan c_r ve değişkenlerin ağırlık katsayıları olan w_{juv} değerleri elde edilir. Yani modellerde hem ağırlıklar hem kesme değeri aynı anda hesaplanmaktadır. Bu değerlerin yardımıyla, m grubunun i . birimi için j ($j=1,2,\dots,p$) değişkeninin değeri x_{ij} olmak üzere, G_u ve G_v 'deki birimlerin S_{iuv} ($S_{iuv} = \sum_{j=1}^p w_{juv} x_{ij}$) sınıflandırma puanları değerleri bulunur. Sonrasında i ve ii şartlarından hangisi sağlanırsa gözlemin o gruba ataması gerçekleştirilir.

- i) $\sum_{j=1}^p w_{juv}^* x_{ij} \leq c_r^*$ $u=1,2,\dots,m-1$ $v=u+1,\dots,m$ ise, $i \in G_u$
- ii) $\sum_{j=1}^p w_{juv}^* x_{ij} > c_r^*$ $u=1,2,\dots,m-1$ $v=u+1,\dots,m$ ise, $i \in G_v$

Son olarak her (u,v) grup çifti için, gözlemin gerçekte olması gereken grupla atamasının yapıldığı grup karşılaştırılarak; doğru sınıflandırılan gözlem sayısı, karşılaştırılan gruplardaki gözlem sayısına bölünerek doğru sınıflandırma oranı elde edilir. Lam ve Moy (1996) ve Izadi ve diğerleri (2013), çok gruplu sınıflandırma problemleri için her bir grup çiftinden elde edilen doğru sınıflandırma oranlarının ortalamasının alınmasını önermişlerdir. Burada da aynı yol izlenerek, grup çiftlerinden elde edilen doğru sınıflandırma oranlarının ortalaması alınarak genel bir doğru sınıflandırma oranı elde edilmiştir.

Sınıflandırma yöntemlerinin performanslarını karşılaştırmak için çapraz geçerlilik yaklaşımları kullanılmaktadır. Literatürde en çok kullanılan çapraz geçerlilik yaklaşımları; doğrulama örneği çapraz geçerlilik, bir birimi dışarıda tutma çapraz geçerlilik ve k-kat çapraz geçerlilik yöntemleridir.

"k-kat çapraz doğrulama" yönteminde; tüm veri seti k eşit veri setine ayrılmakta ve ayırma fonksiyonunun eğitim işlemi için bu k setten k-1 tanesi kullanılırken, geriye kalan 1 set ile model test edilmektedir. Test işlemi bittiğinde bu kez testte kullanılan set eğitim kümesine dâhil edilirken eğitim kümesinden bir set de test kümesine alınmaktadır. Bu işlem k kez tekrarlandığında veri setinde bulunan tüm veriler ile modelin hem eğitilmesi hem de test edilmesi sağlanmaktadır. Her kümeden elde edilen doğru sınıflandırma oranının ortalaması, k-kat çapraz doğrulama yaklaşımı için doğru sınıflandırma performansı olarak alınır. Literatürdeki çalışmalarda k sayısı genellikle 10 alınmakta yani veri seti 10 alt kümeye ayrılmaktadır. Yöntemin çalışması Şekil 7.1'de verilmiştir.



Şekil 7.1. 10- kat çapraz doğrulama yönteminin gösterimi

$S_1, S_2, \dots, S_{10}$ elde edildikten sonra test verisine ait 10-kat çapraz geçerlilik doğru sınıflandırma oranı olan S , $S = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} S_i$ formülü ile bulunur.

“Doğrulama örneği çapraz geçerlilik” yaklaşımında; veri seti rasgele olarak iki sete ayrılır. Ayırma işleminde veri setinin %5- %30’luk kısmı test verisi olarak ayrılır ve modelin öğrenme aşamasında bu kısım kullanılmaz. Geriye kalan kısım eğitim seti olarak adlandırılır ve ayırma fonksiyonunun bulunmasında kullanılır. Test seti ise eğitim setinden elde edilen ayırma fonksiyonunun kullanılmasıyla doğru sınıflandırma performansının değerlendirilmesinde kullanılır. Bu çalışmada, veri setinin %30’u test verisi olarak ayrılmıştır.

Bu çalışmada, çok gruplu durum için incelenen gerçek veri setlerinin sınıflandırma performansları 10- kat çapraz geçerlilik yaklaşımları ile karşılaştırılmış, simülasyon

çalışması ile üretilen veri setlerinin karşılaştırılmasında doğrulama örneği çapraz geçerlilik yaklaşımı kullanılmıştır.

7.1. Gerçek Veri Uygulaması

Fisher'in doğrusal ayırma fonksiyonu (FLDF), Gehrlein'in çok fonksiyonlu sınıflandırma modeli (GMFC), Lam ve Moy'un çok gruplu sınıflandırma modeli (MLM), Smaoui ve Aouni tarafından önerilen modeller (MF2MSD) ve yeni önerilen çok gruplu sınıflandırma modelleri (MFMSD) yaklaşımlarının performansını değerlendirmek için 5 farklı veri seti dikkate alınmıştır. Veri setleri, University of California-Irvine (UCI) internet veri tabanından alınmıştır. Matematiksel programlama modellerinin çözümleri, MATLAB 2018b programı kullanılarak elde edilmiştir. Veri setlerine ilişkin açıklamalar aşağıda verilmiştir.

Iris Veri Seti (Set 1): Bu veri setinde setosa, versicolor, virginica olmak üzere 3 farklı süs çiçeği türü yani 3 farklı grup vardır. Veri seti üç grubun her birinde 50 çiçek olmak üzere toplam 150 çiçekten oluşmaktadır. Her bir çiçekten sepal uzunluğu, sepal genişliği, petal uzunluğu ve petal genişliği olmak üzere 4 farklı değişken gözlenmiştir.

Wine (Şarap Tanıma) Veri Seti (Set 2): İtalya'da üretilen ve belirli bir bölgedeki farklı kişiler tarafından yetiştirilen üzüm şaraplarından üretilen üç şarap türünde gerçekleştirilen kimyasal analizlerden elde edilen veri kümesidir. Veri seti, birinci grupta 59, ikinci grupta 71, üçüncü grupta 48 gözlem olmak üzere, toplam 178 gözlemden oluşmaktadır.

Cam Tanımlama Veri Seti (Set 3): Cam veri seti, bir cam örnekleminin öz yapısını belirlemek için kullanılmaktadır. Cam türlerinin sınıflandırıldığı bu çalışma kriminolojik araştırma ile desteklenmiştir. Toplam 214 tane camdan 10 farklı kimyasal ölçüm yapılmıştır ve 6 farklı türü vardır. Gruplardaki cam sayıları sırasıyla 70, 17, 76, 13, 9 ve 29'dur.

Yeast Protein Tanımlama Veri Seti (Set 4): Yeast proteinlerinin hücresel konumlarının tahmin edilmesinde kullanılan veri seti toplam 1481 tane ecoli proteini olmak üzere 9 farklı ecoli protein türü yani 9 farklı grup vardır. Proteinlerle ilgili 8 farklı kimyasal ölçüm yapılmıştır. Veri tabanında toplam 10 farklı grup olmasına rağmen 1 gruptaki birim sayısı 2 birim olduğundan 9 grup dikkate alınmıştır.

Statlog Mekik Veri Seti (Set 5): Bu veri uzay mekiğinde radyatörlerin konumlandırılması ile ilgilidir. 7 gruplu veri setinde 9 farklı özellik gözlenmiş olup, toplamda 57700 örnekten oluşmaktadır.

5 farklı veri seti için de gruplardaki birim sayıları yaklaşık olarak eşit olacak şekilde eğitim ve doğrulama seti olarak ayrılmışlardır. Yöntemlerin eğitim ve doğrulama setindeki doğru sınıflandırma performansları Çizelge 7.1’de verilmektedir.

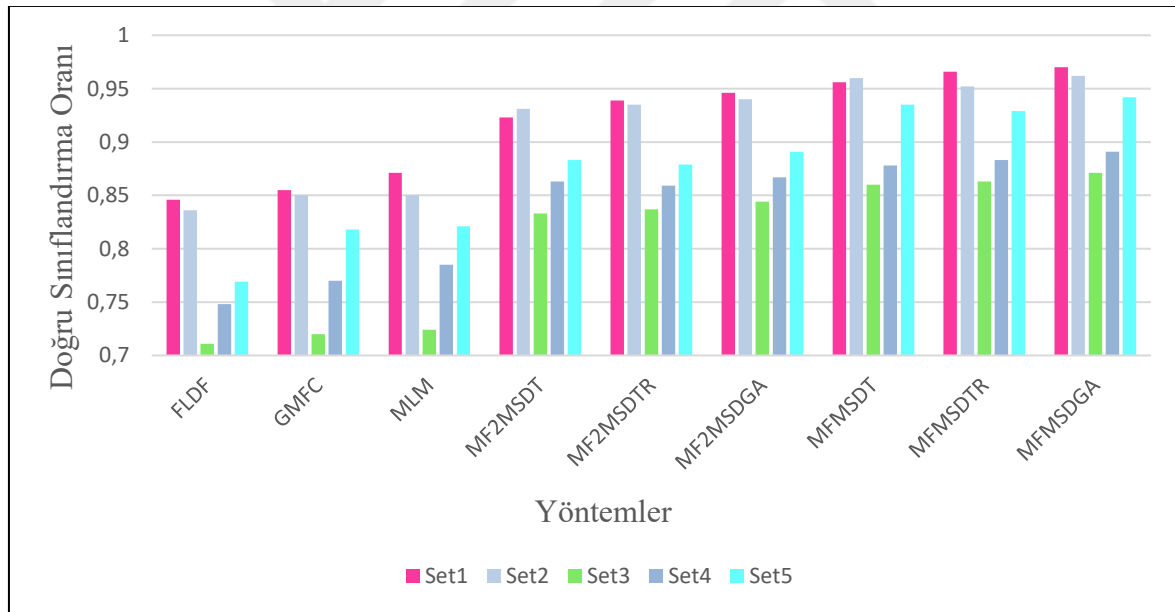
Önerilen MF2MSDT, MF2MSDTR, MF2MSDGA modelleri, IRIS verisi için eğitim setlerinde %100, test veri setlerinde ortalama olarak %96,4 oranında doğru sınıflandırma yaparak karşılaştırılan yöntemler içinde en yüksek doğru sınıflandırma oranlarına sahip olmuşlardır. Benzer şekilde şarap tanıma veri seti için eğitim setlerinde %100, test setlerinde ortalama %95,8; cam tanımlama veri setinin eğitim setlerinde % 96,1, test setlerinde ortalama %86,4; yeast proteini tanımlama veri setinin eğitim setlerinde % 92,3, test setlerinde ortalama %88,4; statlog mekik veri setinin eğitim setlerinde %99,8, test setlerinde ortalama %93,5 oranında doğru sınıflandırma yaparak Fisher’in doğrusal diskriminant fonksiyonu ve diğer matematiksel programlama yöntemlerine göre daha yüksek sınıflandırma performansına sahip olduğu gözlenmektedir. Burada dikkati çeken nokta bulanık sayıların türünün doğru sınıflandırma oranı üzerine büyük bir etkisi olmadığıdır. Bunun da bulanık sayı seçimindeki esneklikten kaynaklandığı söylenebilir.

Çizelge 7.1. Gerçek veri setleri için yöntemlerin doğru sınıflandırma oranları

YÖNTEM	Eğitim/Test	Set 1	Set 2	Set 3	Set 4	Set 5
FLDF	Eğitim	0,940	0,950	0,885	0,900	0,901
	Test	0,856	0,839	0,711	0,748	0,769
GMFC	Eğitim	0,950	0,950	0,875	0,900	0,928
	Test	0,855	0,850	0,720	0,770	0,818
MLM	Eğitim	0,955	0,935	0,885	0,908	0,959
	Test	0,871	0,850	0,724	0,785	0,821
MF2MSDT	Eğitim	0,973	1,000	0,940	0,905	0,977
	Test	0,923	0,931	0,833	0,863	0,883
MF2MSDTR	Eğitim	0,973	1,000	0,942	0,903	0,989
	Test	0,939	0,935	0,837	0,859	0,879
MF2MSDGA	Eğitim	0,986	1,000	0,953	0,912	0,989
	Test	0,946	0,940	0,844	0,867	0,891
MFMSDT (Önerilen)	Eğitim	1,000	1,000	0,961	0,923	0,998
	Test	0,956	0,960	0,860	0,878	0,935
MFMSDTR (Önerilen)	Eğitim	1,000	1,000	0,961	0,923	0,998
	Test	0,966	0,952	0,863	0,883	0,929
MFMSDGA (Önerilen)	Eğitim	1,000	1,000	0,961	0,923	0,998
	Test	0,970	0,962	0,871	0,891	0,942

Smaoui ve Aouni'ye ait modeller (MF2MSD) için sonuçlar incelendiğinde, önerilen modellerle arasında çok büyük fark olmadığı gözlenmektedir. Ancak uygulamaların çoğunda modellerin ilk aşamasındaki doğru sınıflandırma oranı ile ikinci aşamadaki doğru sınıflandırma oranının neredeyse aynı olduğu gözlenmiştir. Bu da gereksiz işlem yüküne ve çözüm zamanına neden olmaktadır. Bu problemi aşmak için önerilen tek aşamalı modeller daha az değişkenle daha kısa sürede daha yüksek doğru sınıflandırma oranı vermektedir.

Şekil 7.2'de gerçek veri setlerinin yöntemlere göre doğru sınıflandırma oranlarının karşılaştırması verilmiştir. Karşılaştırılan yöntemler içerisinde en yüksek doğru sınıflandırma oranına IRIS (Set 1) veri setinin sahip olduğu dikkat çekmektedir. Bir diğer dikkat çeken nokta ise; önerilen modellerin bütün veri setlerinde en yüksek doğru sınıflandırma oranına sahip olmasıdır. Sonuç olarak, matematiksel programlamaya dayanan modeller istatistiksel yaklaşımdan daha iyi performans sergilemektedir.



Şekil 7.2. Veri setlerine göre yöntemlerin karşılaştırılması

7.2. Simülasyon Çalışması

Simülasyon çalışmasında iki ve üç gruplu durumlar dikkate alınmıştır. İki gruplu ve üç gruplu durum için iki farklı veri tipinde veri üretilmiştir. İki gruplu durum için aykırı değer tarafından bozulan farklı parametre değerlerine sahip Düzgün (Uniform) dağılımdan veri üretilmiştir.

Üç gruplu durum için ise iki farklı dağılımdan veri üretilmiştir. Birinci durumda üç bağımsız değişkenli Düzgün (Uniform) dağılımdan veri üretilmişken, ikinci durumda üç değişkene sahip çok değişkenli Normal dağılımdan veri üretilmiştir. Veri üretilirken veri yapısında varyanslara bağlı olarak değişkenliklerin oluşması amaçlanmıştır. Simülasyon çalışması aşamasında, veri tipi ve parametrelerin seçiminde Doğan ve diğerleri (2019)'dan yararlanılmıştır. Ayrıca veri üretilirken gruptaki birim sayılarının eşit ve farklı olması durumları dikkate alınmıştır.

Matematiksel programlama modellerinin çözümlerinde her durum için, model yapılarına uygun şekilde amaç fonksiyonu ve kısıt fonksiyonları ayrı ayrı tanımlanarak, doğrusal programlama fonksiyonu yardımıyla çözümler elde edilmiştir. Üç gruplu durum için tasarlanan simülasyon çalışmasında, gruptaki birim sayılarının eşit ve farklı olduğu durumlarda, Fisher'in doğrusal ayırma fonksiyonu (FLDF), Gehrlein'in çok fonksiyonlu sınıflandırma modeli (GMFC), Lam ve Moy'un çok gruplu sınıflandırma modeli (MLM), Smaoui ve Aouni tarafından önerilen modeller (MF2MSD) ve yeni önerilen çok gruplu sınıflandırma modelleri (MFMSD) yaklaşımlarının performansı değerlendirilmiştir.

Çalışmada kullanılan veri tipleri Çizelge 7.2'de verilmiştir.

Çizelge 7.2. Simülasyon çalışmasında kullanılan veri tipleri

	Grup 1	Grup 2	Grup 3
Durum 1	U[0,35]	U[25,85]	U[75,100]
Durum 2	$\mu_3 = [40 \ 40 \ 40]$ $\Sigma = \begin{bmatrix} 30 & 5 & 1 \\ 5 & 20 & 10 \\ 1 & 10 & 10 \end{bmatrix}$	$\mu_2 = [50 \ 50 \ 50]$ $\Sigma = \begin{bmatrix} 30 & 10 & 1 \\ 10 & 20 & 3 \\ 1 & 3 & 10 \end{bmatrix}$	$\mu_1 = [75 \ 75 \ 75]$ $\Sigma = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 10 \\ 1 & 30 & 5 \\ 10 & 5 & 20 \end{bmatrix}$

Çizelge 7.3'de sınıflandırma yöntemlerinin 100 tekrardan elde edilen doğrulama örneği çapraz geçerlilik yaklaşımından elde edilen doğru sınıflandırma oranları yer almaktadır. Çizelge 7.3, önerilen modellerin hemen hemen her durumda FLDF yaklaşımından ve diğer matematiksel programlamaya dayanan yaklaşımlardan daha yüksek doğru sınıflandırma oranı elde ettiğini göstermektedir. Genel olarak tüm sınıflandırma modellerinde, gruptaki

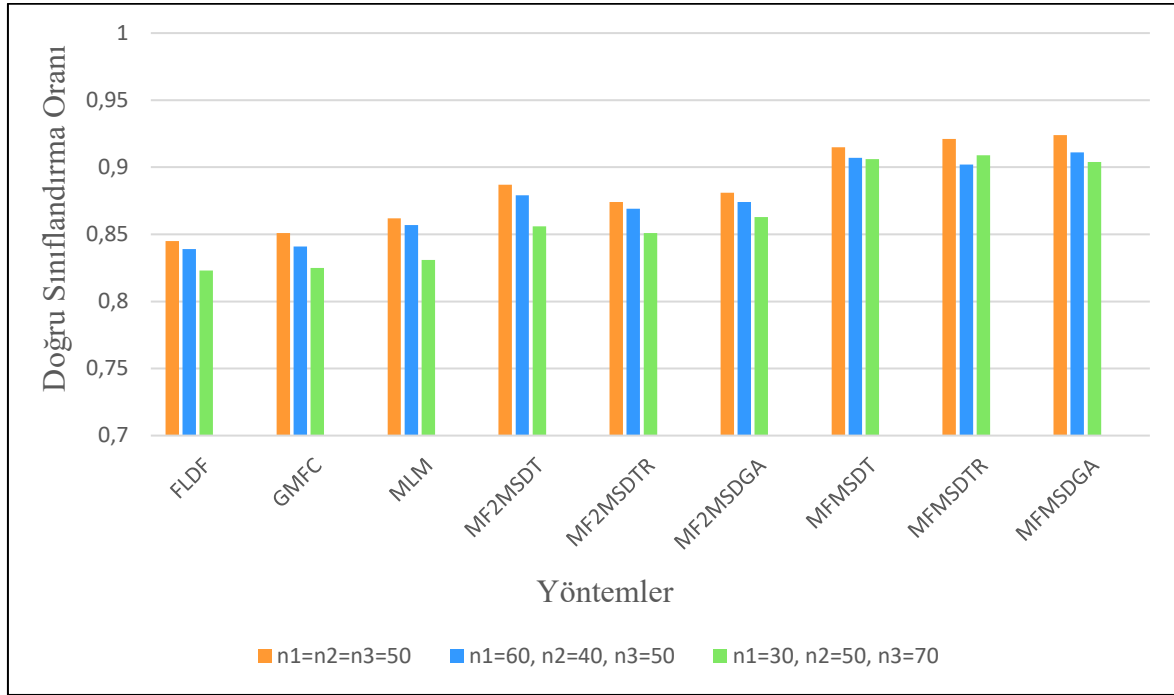
verilerin normal dağılımlı yığınlardan geldiği durumda Uniform dağılımdan geldiği duruma göre daha yüksek sınıflandırma oranı elde edilmiştir.



Çizelge 7.3. Simülasyon çalışmasına ait doğru sınıflandırma oranları

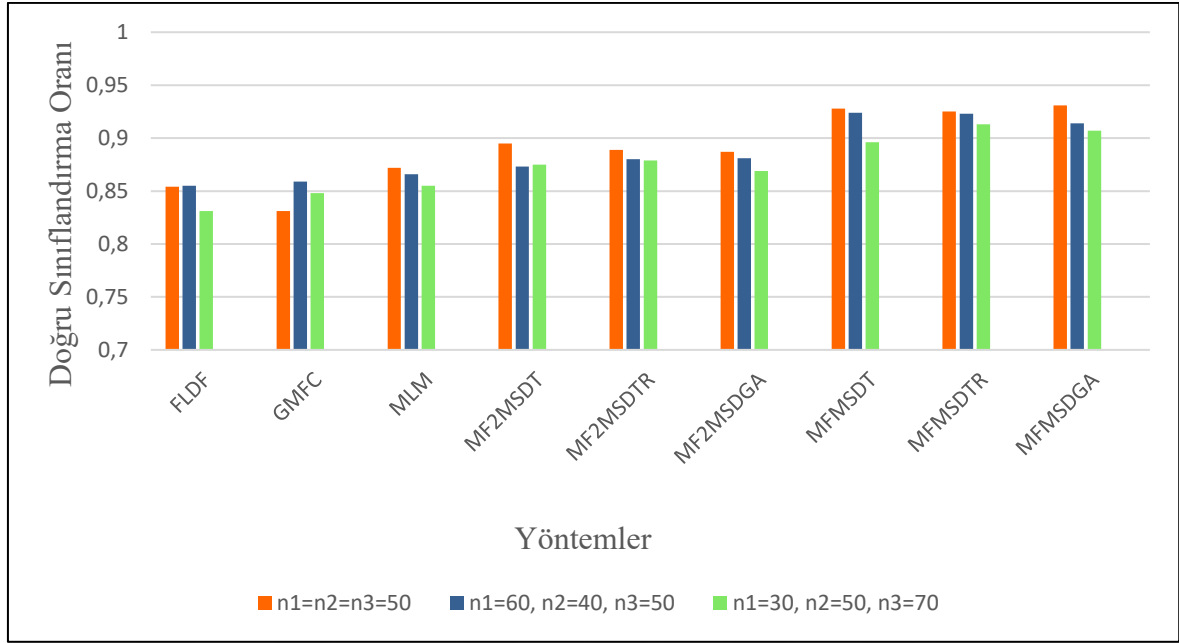
YÖNTEM	Örnek Çapı Durumu	Durum 1	Durum 2
FLDF	$n_1=n_2=n_3=50$	0,845	0,854
	$n_1=60, n_2=40, n_3=50$	0,839	0,855
	$n_1=30, n_2=50, n_3=70$	0,823	0,831
GMFC	$n_1=n_2=n_3=50$	0,851	0,859
	$n_1=60, n_2=40, n_3=50$	0,841	0,848
	$n_1=30, n_2=50, n_3=70$	0,825	0,833
MLM	$n_1=n_2=n_3=50$	0,862	0,872
	$n_1=60, n_2=40, n_3=50$	0,857	0,866
	$n_1=30, n_2=50, n_3=70$	0,831	0,855
MF2MSDT	$n_1=n_2=n_3=50$	0,887	0,895
	$n_1=60, n_2=40, n_3=50$	0,879	0,873
	$n_1=30, n_2=50, n_3=70$	0,859	0,875
MF2MSDTR	$n_1=n_2=n_3=50$	0,874	0,889
	$n_1=60, n_2=40, n_3=50$	0,869	0,880
	$n_1=30, n_2=50, n_3=70$	0,851	0,879
MF2MSDGA	$n_1=n_2=n_3=50$	0,881	0,887
	$n_1=60, n_2=40, n_3=50$	0,874	0,881
	$n_1=30, n_2=50, n_3=70$	0,863	0,869
MFMSDT (Önerilen)	$n_1=n_2=n_3=50$	0,915	0,928
	$n_1=60, n_2=40, n_3=50$	0,907	0,924
	$n_1=30, n_2=50, n_3=70$	0,906	0,896
MFMSDTR (Önerilen)	$n_1=n_2=n_3=50$	0,921	0,925
	$n_1=60, n_2=40, n_3=50$	0,902	0,923
	$n_1=30, n_2=50, n_3=70$	0,909	0,913
MFMSDGA (Önerilen)	$n_1=n_2=n_3=50$	0,924	0,931
	$n_1=60, n_2=40, n_3=50$	0,911	0,914
	$n_1=30, n_2=50, n_3=70$	0,904	0,907

Uniform dağılımdan üretilen veri kullanılması durumunda farklı örnek çaplarındaki sonuçlara ilişkin yöntemlerin karşılaştırılmasının grafiksel olarak gösterimi Şekil 7.3'te verilmiştir.



Şekil 7.3. Uniform dağılım kullanılması durumunda yöntemlerin karşılaştırılması

Normal dağılımdan üretilen veri kullanılması durumunda farklı örnek çaplarındaki sonuçlara ilişkin yöntemlerin karşılaştırılmasının grafiksel olarak gösterimi Şekil 7.4'te verilmiştir.



Şekil 7.4. Normal dağılım kullanılması durumunda yöntemlerin karşılaştırılması

Genel olarak, tüm sınıflandırma modelleri gruplardaki verilerin normal dağılımlı kitlelerden geldiği durumda düzgün dağılımlı duruma göre daha yüksek sınıflandırma performansı göstermektedir. Ayrıca tüm modeller gruplardaki birimlerin eşit sayıda olduğu durumda gruplardaki birim sayılarının farklı olduğu duruma göre daha yüksek sınıflandırma başarısına sahiptirler.

Gerçek veri uygulamasında MF2MSD modelleri ile önerilen modeller arasında doğru sınıflandırma oranları arasında büyük farklılık gözlenmezken, simülasyon çalışmasında önemli sayılabilecek farklılıklar gözlenmiştir. Buna neden olarak, MF2MSD modellerinin ikinci aşamasında ağırlıkla ilgili herhangi bir kısıt olmadığı için değişkenlere önemsiz ağırlıklar verilmesi gösterilebilir. Bu nedenle de daha düşük doğru sınıflandırma oranı elde edildiği sonucuna varılabilir.

Ayrıca; iki gruplu durum için iki farklı veri tipinde üç bağımsız değişkenli Düzgün (Uniform) dağılıma sahip aykırı değerler tarafından bozulmuş veri tipleri kullanılarak da simülasyon çalışması tasarlanmıştır. %10 aykırı birim içeren veri tipleri Çizelge 7.4’de verilmiştir.

Çizelge 7.4. Aykırı değerler tarafından bozulan veri tipleri

Veri Tipi	Grup 1	Grup 2
Durum 1	$\%90\{U[0,35]\}$ $\%10\{U[35,40]\}$	$\%90\{U[25,85]\}$ $\%10\{U[85,100]\}$
Durum 2	$\%90\{U[25,85]\}$ $\%10\{U[85,100]\}$	$\%90\{U[75,100]\}$ $\%10\{U[55,90]\}$

Bu tasarımlara göre elde edilen veri kümeleri üzerinden yapılan çalışmada; Fisher'in doğrusal ayırma fonksiyonunun (FLDF), Freed ve Glover'in MSD modelinin, Lam ve diğerleri tarafından önerilen LCM modelinin, Smaoui ve Aouni'nin MF2MSD modellerinin ve önerilen modellerin (MFMSD) karşılaştırması yapılmıştır. Burada gruplardaki birim sayılarının eşit ve farklı olduğu üç durum dikkate alınmıştır.

Toplam olarak $n=200$ birim ve gruplarda da 100'er birim olduğu varsayılmıştır. İki grup için 100'lük birimlere ilişkin özellikler Çizelge 7.4'deki veri tiplerinden rasgele olarak üretilmiştir. Toplam 200 birimin 100 birimi eğitim örneği, geriye kalan 100 birimi de doğrulama örneği olarak kullanılmıştır.

$n_1=n_2=50$ durumunda, ilgili veri tipinden birinci gruba 100 ve ikinci gruba 100 olmak üzere 200 birim alınmış, birinci ve ikinci gruptaki 100'er birimin 50 birimi eğitim, 50 birimi de test örneği olarak kullanılmıştır.

$n_1=30, n_2=70$ durumunda, ilgili veri tipinden birinci gruba 100 ve ikinci gruba 100 olmak üzere yine 200 birim alınmış, fakat birinci gruptaki 100 birimden 70 birim eğitim örneği geriye kalan 30 birim de test örneği olarak kullanılmıştır. Aynı şekilde ikinci gruptaki 100 birimden 30 birim eğitim örneği, geriye kalan 70 birim de test örneği olarak kullanılmıştır.

$n_1=70, n_2=30$ durumunda ise, ilgili veri tipinden birinci gruba 100 ve ikinci gruba 100 olmak üzere yine 200 birim alınmış, fakat birinci gruptaki 100 birimden 30 birim eğitim örneği geriye kalan 70 birim de test örneği olarak kullanılmıştır. Aynı şekilde ikinci gruptaki 100 birimden 70 birim eğitim örneği, geriye kalan 30 birim de test örneği olarak kullanılmıştır.

Çizelge 7.5. Aykırı veri setine ilişkin simülasyon çalışmasına ait doğru sınıflandırma oranları

YÖNTEM	Örnek Çapı Durumu	Durum 1	Durum 2
FLDF	$n_1=n_2=50$	0,827	0,819
	$n_1=30, n_2=70$	0,811	0,795
	$n_1=70, n_2=30$	0,796	0,787
MSD	$n_1=n_2=50$	0,823	0,811
	$n_1=30, n_2=70$	0,801	0,793
	$n_1=70, n_2=30$	0,786	0,778
LCM	$n_1=n_2=50$	0,842	0,826
	$n_1=30, n_2=70$	0,814	0,801
	$n_1=70, n_2=30$	0,801	0,786
MF2MSDT	$n_1=n_2=50$	0,851	0,834
	$n_1=30, n_2=70$	0,823	0,812
	$n_1=70, n_2=30$	0,791	0,778
MF2MSDTR	$n_1=n_2=50$	0,842	0,838
	$n_1=30, n_2=70$	0,811	0,806
	$n_1=70, n_2=30$	0,795	0,791
MF2MSDGA	$n_1=n_2=50$	0,848	0,824
	$n_1=30, n_2=70$	0,801	0,798
	$n_1=70, n_2=30$	0,784	0,781
MFMSDT (Önerilen)	$n_1=n_2=50$	0,889	0,849
	$n_1=30, n_2=70$	0,853	0,827
	$n_1=70, n_2=30$	0,827	0,807
MFMSDTR (Önerilen)	$n_1=n_2=50$	0,876	0,863
	$n_1=30, n_2=70$	0,844	0,827
	$n_1=70, n_2=30$	0,828	0,811
MFMSDGA (Önerilen)	$n_1=n_2=50$	0,879	0,867
	$n_1=30, n_2=70$	0,849	0,818
	$n_1=70, n_2=30$	0,821	0,796

Aykırı değer içeren veri setlerine ilişkin doğru sınıflandırma oranları izelge 7.5’te verildiği gibidir. Çizelge 7.3’e göre daha düşük doğru sınıflandırma oranları elde edilmiştir ki bu beklenen bir durumdur. Önerilen modellerde her iki durumda da FLDF ve diğer matematiksel programlama yaklaşımlarına göre daha yüksek doğru sınıflandırma oranı elde edilmiştir. Her yaklaşım için gruptaki birim sayıları eşitken en yüksek doğru sınıflandırma oranına ulaşılmıştır. Gruptaki birim sayılarının farklı olduğu durumda ise birinci gruptaki birim sayısı ikinci gruptaki birim sayısından fazla iken en düşük doğru sınıflandırma oranları elde edilmiştir. FLDF yaklaşımının, matematiksel programlamaya dayanan temel yaklaşım olan MSD yaklaşımı ile yakın sonuçlar verdiği dikkat çekmektedir. Önerilen modellerden, MF2MSD modellerine göre daha iyi doğru sınıflandırma oranı elde edilmiştir.



8. SONUÇ VE ÖNERİLER

Sınıflandırma problemi için uygulamalar çeşitlidir. İş dünyasında rapor edilen uygulamalar arasında finansal yönetim, insan kaynakları yönetimi ve pazarlama; biyoloji ve tıptaki uygulamalar arasında hasta sınıflandırması, hastalık teşhisi ve hastalık türünün sınıflandırması; çevre ve coğrafyadaki uygulamalar arasında uzaktan algılama görüntü sınıflandırması ve kirlilik kontrolü gibi çok çeşitli alanlarda başarı ile kullanılan bir tekniktir.

Sınıflandırma problemine ait modellerin geliştirilmesi, bu alanlarda önemli etkilere sahiptir. Mevcut çok sayıdaki sınıflandırma modeline rağmen, bu modellerin etkinliğini artırma araştırmalarının hiç durmamasının nedeni budur. Sınıflandırma problemine matematiksel programlama yaklaşımları, 1980'lerin başından beri önemli sayıda araştırmacının ilgisini çekmiştir. Freed ve Glover'ın çalıştıkları makaleler, Fisher'in doğrusal ayırma fonksiyonuna alternatif olarak uygulanabilirliğini değerlendiren sınıflandırma problemine matematiksel programlama yaklaşımları üzerinde araştırma katkısına neden olmuştur.

Optimizasyon teorisi ve araçları, sınıflandırmada her zaman önemli rol oynamıştır. Sınıflandırma probleminin kendisi, gelecekteki bilinmeyen gözlemler için yanlış sınıflandırmaların gerçek olasılıkları gibi gözlenemeyen miktarlar üzerinden tanımlanmış olsa da, bir optimizasyon problemi olarak kavramsal olarak formüle edilebilir. Sınıflandırmaya matematiksel programlama yaklaşımı, bu teorik formülasyona dayanır. Matematiksel programlamaya dayanan sınıflandırma modelleri, sapmaların toplamını en aza indirmek, minimum sapmayı maksimum yapmak (MINMAX yaklaşımı) veya yanlış sınıflandırma oranını parametrik diskriminant analiz yöntemlerine alternatif olarak en aza indirmek gibi amaçları kullanmaktadır.

Matematiksel programlamaya dayanan modellerin çoğunda, yeni matematiksel programlama modelleri öneren ya da önerilen modellerin sınıflandırma performansını standart parametrik sınıflandırma prosedürlerine göre değerlendiren çalışmalar içeren iki grup problemine odaklanılmıştır. $m > 2$ olan genel m gruplu sınıflandırma problemi, iki grup problemi gibi matematiksel programlama literatüründe aynı öneme sahip olamamıştır. Bunun olası nedenleri, yanlış sınıflandırma sayılarına dayalı m gruplu modelleri çözmek için

gereken artan hesaplamalar ve farklı m gruba ayrılması gereken çoklu sınıflandırma sınırlarından uygun mesafeleri ve sapma değişkenlerini tanımlamaktaki zorluklar olabilir.

Bu çalışmada önerilen yeni doğrusal programlama yaklaşımları, endüstriden akademiye birçok alanda kullanılan bulanık mantığın güçlü yanı ile Hedef Programlamanın birleştirilmesiyle oluşturulan çok gruplu sınıflandırma analizi için parametrik olmayan yöntemlerdir. Ayırma fonksiyonları oluşturmak için sınıflandırma hatalarının toplamını en aza indiren yeni bir MSD modeli formüle edilmiştir. Önerilen model, birimleri konveks bir küme içerisine alarak sınıflandırmaktadır. Gerçek veri ve rastgele oluşturulmuş test veri kümeleri üzerindeki sonuçlar, önerilen modellerin güçlü ayırma fonksiyonu üretmede etkili olduğunu göstermektedir.

Tez çalışmasında önerilen matematiksel programlama modellerinin, istatistiksel ve diğer matematiksel programlama modellerinin performanslarını karşılaştırmak için; gerçek sınıflandırma problemlerinde yöntemlerin performansları 10-kat çapraz geçerlilik yaklaşımı ile, simülasyon çalışmasında ise doğrulama örneği çapraz geçerlilik yaklaşımı kullanılmıştır.

Çok gruplu durum için kullanılan gerçek sınıflandırma problemleri; IRIS, wine (şarap tanıma), cam tanımlama, yeast protein tanımlama ve statlog mekik veri seti gibi gerçek hayat veri setlerini içermektedir. Elde edilen sonuçlar incelendiğinde, önerilen modellerin beş veri setinde de yüksek oranlarda doğru sınıflandırma oranlarına sahip oldukları gözlenmektedir.

Önerilen yöntemlerden ortalama olarak; IRIS verisi için eğitim setinde %100, 10-kat çapraz geçerlilik yönteminde %96,4 doğru sınıflandırma oranı elde edilmiştir. Şarap tanıma verisi için eğitim setinde %100, 10-kat çapraz geçerlilik yönteminde %95,8 doğru sınıflandırma oranı elde edilmiştir. Cam tanımlama verisi için eğitim setinde %96,1, 10-kat çapraz geçerlilik yönteminde %86,4 doğru sınıflandırma oranı elde edilmiştir. Yeast protein tanımlama verisi için eğitim setinde %92,3, 10-kat çapraz geçerlilik yönteminde %88,4 doğru sınıflandırma oranı elde edilmiştir. Son olarak ise; statlog mekik verisi için eğitim setinde %99,8, 10-kat çapraz geçerlilik yönteminde %93,5 doğru sınıflandırma oranı elde edilmiştir.

İki gruplu simülasyon çalışmasında verilerin aykırı değer içerecek şekilde Uniform dağılımdan gelmesi durumunda performans karşılaştırması yapılmıştır. Önerilen modellerden her durumda en yüksek doğru sınıflandırma oranları elde edilmiştir.

Üç gruplu simülasyon çalışmasında verilerin hem normal dağılımdan hem de Uniform dağılımdan gelmesi durumları incelenmiş olup, önerilen modellerden en yüksek doğru sınıflandırma oranları elde edilmiştir. Verinin normal dağılımdan gelmesi durumunda, Uniform dağılımdan geldiği duruma göre daha yüksek doğru sınıflandırma oranı elde edilmiştir. Ayrıca her iki dağılım türünde de gruplardaki birim sayıları eşitken en yüksek doğru sınıflandırma oranları elde edilmiştir.

Çeşitli veri türlerinde iyi performans gösterebilmek matematiksel programlama yaklaşımlarının bir avantajıdır. Matematiksel programlama yaklaşımlarının geleneksel istatistiksel tekniklere göre bir diğer avantajı, uygun modelin daha uç değerli gözlemlerden daha az etkilenmesidir.

Sonuç olarak bu çalışmada; teknolojinin hızlı gelişmesiyle bilimin hemen hemen her alanında kullanılarak büyük kolaylık sağlayan bulanık mantığın matematiksel programlamaya dayanan bir yaklaşıma entegre edilmesiyle yeni modeller önerilmiştir. Önerilen yeni modeller, literatürde önerilen matematiksel programlama yaklaşımlarına göre uzun ve karmaşık işlemlere gerek duyulmadan daha kolay uygulanabileceğinden, sınıflandırma problemlerinde başarı ile kullanılabilir.

Tez çalışmasını izleyecek yeni çalışmalar konusunda araştırmacılara bugüne kadar literatürde önerilen farklı yaklaşımlara bulanık mantığın entegre edilmesi önerilebilir. Araştırmacılar bulanık mantıkta kullanılan farklı üyelik fonksiyonları üzerinde çalışarak literatüre katkı sağlayabilir.



KAYNAKLAR

- Aköz, O., and Petrovic, D. (2007). A Fuzzy Goal Programming Method with Imprecise Goal Hierarchy. *European Journal of Operational Research*, 181(3), 1427-1433.
- Anderson, T. W. (1984). *An introduction to multivariate analysis*. New York: Wiley, 10-25.
- Arıkan, F., and Göngör, Z. (2001). An application of fuzzy goal programming to a multi objective project network problem. *Fuzzy Sets and Systems*, 119, 49-58.
- Arıkan, F. (2014). A modified augmented max min model for weighted fuzzy goal programming. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 27(1), 339-350.
- Atakan, C. (1997). *Diskriminasyon ve hata oranları tahmini*, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 4.
- Aouni, B. A., Martel, J. M. and Hassaine, A. (2009). Fuzzy goal programming model: An overview of the current state of the art. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 16, 149-161.
- Bajgier, S. M., and Hill, A. V. (1982). An experimental comparison of statistical and linear programming approaches to the discriminant problem. *Decision Sciences*, 13, 604-618.
- Bal, H. (1999). Çok gruplu ayırma analizi problemine doğrusal ve tamsayılı programlama yaklaşımı ve yeni bir model, *Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 12 (4), 957-962.
- Bal, H., Örkücü, H. H. and Çelebioğlu S. (2006a). An alternative model to Fisher and linear programming approaches in two-group classification problem: minimizing deviations from the group median. *Gazi University Journal of Science*, 19(1), 49-55.
- Bal, H., Örkücü, H. H., and Çelebioğlu S. (2006b). An experimental comparison of the new goal programming and linear programming approaches in the two-group discriminant problems. *Computers&Industrial Engineering*, 50(3), 296-311.
- Bal, H., and Örkücü, H. H. (2007). Data envelopment analysis approach to two-group classification problems and an experimental comparison with some classification models. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 36(2), 169-180.
- Bal, H., and Örkücü, H. H. (2011). A new mathematical programming approach to multi-group classification problems. *Computers & Operations Research*, 38(1), 105-111.
- Barik, S. K. (2015). Probabilistic fuzzy goal programming problems involving pareto distribution: some additive approaches. *Fuzzy Information and Engineering*, 7(2), 227-244.
- Bellman, R. E., and Zadeh, L. A. (1970). Decision-making in a fuzzy environment. *Management Science*, 17, B141-B164.

- Brown, J. G. (1971). A note on fuzzy sets. *Information and control*, 18(1), 32-39.
- Cadenas, J. M., and Verdegay, J. L. (2000). Using ranking functions in multiobjective fuzzy linear programming. *Fuzzy sets and systems*, 111(1), 47-53.
- Carlsson, C., and Korhonen, P. (1986). A parametric approach to fuzzy linear programming. *Fuzzy sets and systems*, 20(1), 17-30.
- Chanas, S., and Kuchta, D. (2002). Fuzzy Goal Programming - One Notation, Many Meanings. *Control and Cybernetics*, 31(4), 871-890.
- Chang, C. T. (2007). Binary Fuzzy Goal Programming. *European Journal of Operational Research*, 180(1), 29-37.
- Charnes, A., Cooper, W. W., and Ferguson, R. O. (1955). Optimal estimation of executive compensation by linear programming. *Management science*, 1(2), 138-151.
- Charnes, A., and Cooper, W. W. (1957). Management models and industrial applications of linear programming. *Management science*, 4(1), 38-91.
- Chen, L. H. and Tsai F. C. (2001). Fuzzy Goal Programming With Different Importance and Priorities. *European Journal of Operational Research*, 133, 548-556.
- Choo, E.U., and Wedley, W.C. (1985). Optimal criterion weights in repetitive multicriteria decision making”, *Journal of Operational Research Society*, 36, 983-992.
- Czekalski P. (2006). Evolution-fuzzy rule based system with parameterized consequences. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 16(3), 373-385.
- Dalman, H., and Bayram, M. (2019). Interactive goal programming algorithm with Taylor series and interval type 2 fuzzy numbers. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 10(6), 1563-1579.
- Dantzig, G. B. (1998). *Linear programming and extensions*. United States of America: Princeton University Press, 48.
- Doğan, M. I., Orman, A., Örkücü, M., and Örkücü, H. H. (2019). A new approach based on regression analysis and mathematical programming to multi-group classification problems. *Journal Of The Faculty Of Engineering And Architecture Of Gazi University*, 34(4), 1939-1955.
- Dubois, D., Fargier, H. and Prade, H. (1996). Refinements of the Maximin Approach to Decision-Making in a Fuzzy Environment. *Fuzzy Sets and Systems*, 81(1), 103-122.
- Erdin, C. (2007). *Bulanık Hedef Programlama ve İşletme Yönetiminde Bir Uygulama*, Yayınlanmış Doktora Tezi, İstanbul Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, İstanbul, 98.
- Fisher, R. A. (1936). The use of multiple measurements in taxonomy problems. *Annals of Eugenics*, 7, 179-188.

- Freed, N. and Glover, N (1981). A linear programming approach to the discriminant problem, *Decision Sciences*, 12, 68-74.
- Freed, N. and Glover, F. (1986). Evaluating alternative linear programming models to solve the two-group discriminant problem. *Decision Sciences*, 17(2), 151-162.
- Gehrlein, W. V. (1986). General mathematical programming formulations for the statistical classification problem, *Operations Research Letters*, 5, 299-304.
- Glen, J. J. (1999). Integer programming methods for normalisation and variable selection in mathematical programming discriminant analysis models. *Journal of Operational Research Society*, 50, 1043–1053.
- Gochet, W., Stam, A., Srinivisan, V., and Chen, Shaoxiang C. (1997). Multigroup discriminant analysis using linear programming. *Operations Research*, 45(2), 213–225.
- Grinold, R. C. (1972). Mathematical programming methods for pattern classification, *Management Sciences*, 19, 272-289.
- Gupta, M., and Bhattacharjee, D. (2012). Two weighted fuzzy goal programming methods to solve multiobjective goal programming problem. *Journal of applied mathematics*, 796028, 1-20.
- Gupta, M., and Bhattacharjee, D. (2014). Study of Existing Fuzzy Goal Programming Method: New Idea. *International Journal of Innovation and Scientific Research*, 7(2), 155-162.
- Güneş, T. (2006). *Bulanık Veri Zarflama Analizi*, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 41-42.
- Hannan, E. L. (1981). On Fuzzy Goal Programming. *Decision Science*, 12(3), 522-531.
- Hanss, M. (2005). *Applied fuzzy arithmetic*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 9.
- Hashemi, S. M., Ghatee, M. and Hashemi, B. (2006). Fuzzy Goal Programming: Complementary Slackness Conditions and Computational Schemes. *Applied Mathematics and Computation*, 179(2), 506-522.
- Hop, N. V. (2007). Fuzzy Stochastic Goal Programming Problems. *European Journal of Operational Research*, 176(1), 77-86.
- Hu, C. F., Teng, C. J. and Li, S. Y. (2007). A Fuzzy Goal Programming Approach to Multi-Objective Optimization Problem with Priorities. *European Journal of Operational Research*, 176(3), 1319-1333.
- İçen, D. (2015). *Bulanık Regresyon Analizinde Monte Carlo Yöntemi ve Uzman Sistemler*, Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 12.

- Izadi, B., Ranjbarian, B., Ketabi, S., and Nassiri, M. F. (2013). Multi-Group Classification Using Interval Linear Programming. *Iranian Journal of Operations Research*, 4(1), 55-74.
- Johnson, R. A., and Wichern, D. W. (2007). *Applied Multivariate Statistical Analysis*, 6nd ed., New Jersey: Pearson Prentice-Hall, 590.
- Kar, A. K., Pani, A. K., Mangaraj, B. K., and De Supriya, K. (2011). A soft classification model for vendor selection. *International Journal of Information and Education Technology*, 1(4), 268.
- Kaufmann, A. (1988). Theory of expertons and fuzzy logic. *Fuzzy Sets and Systems*, 28(3), 295-304.
- Kaya, Ö. O. (2010). *Bulanık Hedef Programlama Yaklaşımı ile Tedarik Seçimi*, Yüksek Lisans Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, 39.
- Kim, J. S., and Whang, K. S. (1998). A tolerance approach to the fuzzy goal programming problems with unbalanced triangular membership function. *European Journal of Operational Research*, 107(3), 614-624.
- Kumar, M., Prem V. and Shankar, R. (2004). A Fuzzy Goal Programming Approach for Vendor Selection Problem in a Supply Chain, *Computers & Industrial Engineering*, 46, 69-85.
- Kuwano, H. L. (1996). On the Fuzzy Multi-Objective Linear Programming Problem: Goal Programming Approach. *Fuzzy Sets and Systems*, 82(1), 57-64.
- Lai Y. J., and Hwang, C. L. (1992). Intereactive Fuzzy Linear Programming, *Fuzzy Sets and Systems*, 45(2), 169-183.
- Lam, K. F., Choo, E. U., and Moy, J. W. (1996). Minimizing deviations from the group mean: A new linear programming approach for the two-group classification problem. *European Journal of Operational Research*, 88, 358-367.
- Lam, F. K., and Moy, J. W. (1996). Improved linear programming formulations for the multi-group discriminant problem. *Journal of the Operational Research Society*, 47(12), 1526-1529.
- Leberling, H. (1981). On Finding Compromise Solutions in Multi Criteria Problems Using the Fuzzy Min-Operator. *Fuzzy Sets and Systems*, 6(2), 105-118.
- Li, A., Shi, Y., and He, J. (2006). *A data classification method based on fuzzy linear programming*. Greece: Chania, 19-23.
- Lodwick, W. A., and Jamison, K. D. (2007). Theoretical and semantic distinctions of fuzzy, possibilistic, and mixed fuzzy/possibilistic optimization. *Fuzzy Sets and Systems*, 158, 1861-1872.

- Lotfi, F. H., and Mansouri, B. (2008). The extended data envelopment analysis/discriminant analysis approach of fuzzy models. *Applied Mathematical Sciences*, 2(30), 1465-1477.
- Luhandjula, M. K. (1982). Compensatory Operations in Fuzzy Linear Programming with Multiple Objectives. *Fuzzy Sets and Systems*, 8(3), 245-252.
- Mahdavi-Amiri, N., and Nasseri, S. H. (2006). Duality in fuzzy number linear programming by use of a certain linear ranking function. *Applied Mathematics and Computation*, 180(1), 206-216.
- Mahdavi-Amiri, N., and Nasseri, S. H. (2007). Duality results and a dual simplex method for linear programming problems with trapezoidal fuzzy variables. *Fuzzy Sets and Systems*, 158(17), 1961-1978.
- Mahdavi, A. N., Naseri, S., and Yazdani, A. (2009). Fuzzy primal simplex algorithms for solving fuzzy linear programming problems. *Iranian Journal of Operations Research*, 1(2), 68-84.
- Maleki, H. R., Tata, M., and Mashinchi, M. (2000). Linear programming with fuzzy variables. *Fuzzy Sets and Systems*, 109(1), 21-33.
- Mangasarian O. (1965). Linear and Nonlinear Separation of patterns by Linear Programming. *Operations Research*, 13, 444-452.
- Mashinchi, M. H., Mashinchi, M. R., and Mashinchi, M. (2008). Tabu search solution for fuzzy linear programming. In *Seventh IEEE/ACIS International Conference on Computer and Information Science*, 82-87.
- Mizumoto, M., and Tanaka, K. (1981). Fuzzy sets and their operations. *Information and Control*, 48(1), 30-48.
- Mohamed, R. H. (1997). The Relationship Between Goal Programming and Fuzzy Programming. *Fuzzy Sets and Systems*, 89(2), 215-222.
- Narasimhan, R. (1980). Goal programming in a fuzzy environment. *Decision sciences*, 11(2), 325-336.
- Örkcü, H. H., and Bal, H. (2011). A combining mathematical programming method for multi-group data classification. *Gazi University Journal of Science*, 24(1), 77-84.
- Rosen, J. B. (1965). Pattern separation by convex programming. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 10, 123-134.
- Rubin, P. A., and Narasimhan, R. (1984). Fuzzy Goal Programming with Nested Priorities. *Fuzzy Sets and Systems*, 14(2), 115-129.
- Sakawa, M., and Yano, H. (1988). An Interactive Fuzzy Satisficing Method for Multiobjective Linear Fractional Programming Problems, *Fuzzy Sets and Systems*, 28(2), 129-144.

- Sakawa, M. (1993). *Fuzzy Sets and Interactive Multiobjective Optimization*. New York: Plenum Press, 23.
- Seçme, Y. N. (2005). *Klasik Doğrusal Programlama ve Bulanık Doğrusal Programlamanın Karşılaştırmalı Bir Analizi: Üretim Planlama Örneği*, Yüksek Lisans Tezi, Erciyes Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Kayseri, 25.
- Smaoui, S. and Aouni, B. (2017). Fuzzy goal programming model for classification problems. *Annals of Operations Research*, 251, 141–160.
- Smith, F. W. (1968). Pattern classifier design by linear programming, *IEEE Transactions on Computers*, 17(4), 367-372.
- Stam, A. and Ragsdale, C.T. (1992). On the classification gap in mathematical programming-based approaches to the discriminant problem. *Naval Research Logistics*, 39, 545-559.
- Sueyoshi, T. (1999). DEA-Discriminant analysis in the view of goal programming, *European Journal of Operational Research*, 115, 564-582.
- Sueyoshi, T. (2006). DEA-discriminant analysis methodological comparison among eight discriminant analysis approaches. *European Journal of Operational Research*, 169, 247–272.
- Şen, Z. (2009). *Bulanık mantık ilkeleri ve modelleme: (Mühendislik ve sosyal bilimler)*. Su Vakfı.
- Tanaka, H., Okuda, T. and Asai, K. (1974). On fuzzy mathematical programming. *The International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 3, 37-46.
- Tiwari, R. N., Dharmar, S., and Rao, J. R. (1987). Fuzzy goal programming—an additive model. *Fuzzy Sets and Systems*, 24(1), 27-34.
- Tomsovic, K. (1992). A fuzzy linear programming approach to the reactive power/voltage control problem. *IEEE Transactions on Power Systems*, 7(1), 287-293.
- Tuş Işık, A. (2011). *Bütünleşik üretim plânlamasında bulanık mantık yaklaşımı ve bir uygulama*, Doktora Tezi, Adnan Menderes Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Aydın, 70.
- Turksen, I. B. (1985). Fuzzy sets and systems and its applications in production research. In *Toward the Factory of the Future* (pp. 649-656). Berlin, Heidelberg: Springer.
- Veeramani, C., and Duraisamy, C. (2012). Solving fuzzy linear programming problem using symmetric fuzzy number approximation. *International Journal of Operational Research*, 15(3), 321-336.
- Wang, H. F., and Fu, C. C. (1997). A generalization of fuzzy goal programming with preemptive structure. *Computers & Operations Research*, 24(9), 819-828.

- Yaghoobi, M. A., and Tamiz, M. (2007). A Method for Solving Fuzzy Goal Programming Problems Based on MINMAX Approach. *European Journal of Operational Research*, 177(3), 1580-1590.
- Yang, T., Ignizio, J. P., and Kim, H. J. (1991). Fuzzy programming with nonlinear membership functions: piecewise linear approximation. *Fuzzy Sets and Systems*, 41(1), 39-53.
- Yapıcı, N. (2000). *Bulanık Doğrusal Programlamaya Sinir Ağları Yaklaşımı*, Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya, 1.
- Yılmaz, Ö. F. (1998). *Bulanık Doğrusal Programlama ile Asgari Ücretin Belirlenmesi*, Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Youssef, S. B., and Rebai, A. (2008). Discriminant analysis using fuzzy linear programming models. *International Journal of Knowledge Management Studies*, 2(4), 445-459.
- Youssef, S. B., Jbir, R. and Rebai, A. (2011). A three-group discrimination using new linear programming model. *International Journal of Operational Research*, 12(3), 279-293.
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy Sets, *Information and Control*, 8(3), 338-353.
- Zimmermann, H. J. (1976). Description and optimization of fuzzy systems. *International Journal of General Systems*, 2, 209-215.
- Zimmermann, H. J. (1978). Fuzzy programming and linear programming with several objective functions. *Fuzzy Sets and Systems*, 1, 45-55.
- Zimmermann, H. J. (1983). Fuzzy mathematical programming. *Computers & Operations Research*, 10, 291-298.
- Zimmermann, H. J. (2001). *Fuzzy Sets Theory and its Applications*, Massachusetts: Kluwer Academic Publisher, 13.





EK-1. Önerilen üçgen bulanık sayılı modele ait MATLAB kodları

```

clc
clear
veri=xlsread('cam12');
n=size(veri,1);
p=size(veri,2)-1;
n1=70;
n2=76;
options = optimoptions('linprog','Algorithm','interior-point');
f=[zeros(1,p) ones(1,n1) zeros(1,n1) zeros(1,n2) ones(1,n2) zeros(1,5)];
h=0.5;
z=1-h;
Aeq=[veri(1:n1,1:p) -eye(n1,n1) eye(n1,n1) zeros(n1,n2) zeros(n1,n2) -
ones(n1,1) zeros(n1,1) zeros(n1,1) z*ones(n1,1) zeros(n1,1);
      veri((n1+1):(n1+n2),1:p) zeros(n2,n1) zeros(n2,n1) -eye(n2,n2)
eye(n2,n2) -ones(n2,1) zeros(n2,1) zeros(n2,1) zeros(n2,1) -z*ones(n2,1);
      zeros(1,p) zeros(1,2*n1) zeros(1,2*n2) 1 -1 0 -1 0;
      zeros(1,p) zeros(1,2*n1) zeros(1,2*n2) -1 0 1 0 -1;
      ones(1,p) zeros(1,2*n1) zeros(1,2*n2) zeros(1,5);
    ];
beq=[zeros(size(Aeq,1)-1,1);1];

A=[zeros(1,p) zeros(1,2*(n1+n2)) -1 1 0 0 0;
   zeros(1,p) zeros(1,2*(n1+n2)) 1 0 -1 0 0;
   zeros(1,p) zeros(1,2*(n1+n2)) 0 1 -1 0 0];
b=[0;0;-1];
lb=[repmat(-Inf,1,p) zeros(1,2*(n1+n2)) repmat(-Inf,1,3) 0 0];
[x,fval,exitflag,output]=linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,[],options);
x;
fval;
w=x(1:p,1); %agirliklar
c=x(p+(2*n1)+(2*n2)+1);
c1=x(p+(2*n1)+(2*n2)+2);
c2=x(p+(2*n1)+(2*n2)+3);
eta1=x(p+(2*n1)+(2*n2)+4);
eta2=x(p+(2*n1)+(2*n2)+5);
s=w'.*veri(:,1:p);
s_toplam=sum(s,2);
kume=[];
for i=1:n
    if s_toplam(i)<=c
        kume(i,1)=1;
    elseif s_toplam(i)>c
        kume(i,1)=2;
    end
end
dogruluk=[veri(:,p+1) kume];
dogru_oran=sum(dogruluk(:,1)==dogruluk(:,2))/n

```

EK-2. Önerilen yamuk bulanık sayılı modele ait MATLAB kodları

```

clc
clear
veri=xlsread('cam12');
n=size(veri,1);
p=size(veri,2)-1;
n1=70;
n2=76;
options = optimoptions('linprog','Algorithm','interior-point');
f=[zeros(1,p) ones(1,n1) zeros(1,n1) zeros(1,n2) ones(1,n2) zeros(1,3)];
h=0.5;
z=1-h;
Aeq=[veri(1:n1,1:p) -eye(n1,n1) eye(n1,n1) zeros(n1,n2) zeros(n1,n2) -
h*ones(n1,1) -z*ones(n1,1) zeros(n1,1);
      veri((n1+1):(n1+n2),1:p) zeros(n2,n1) zeros(n2,n1) -eye(n2,n2)
eye(n2,n2) -h*ones(n2,1) zeros(n2,1) -z*ones(n2,1);
      ones(1,p) zeros(1,2*n1) zeros(1,2*n2) zeros(1,3)
      ];
beq=[-h*eps*ones(n1,1);h*eps*ones(n2,1);1];

A=[zeros(1,p) zeros(1,2*(n1+n2)) 0 1 -1;
   zeros(1,p) zeros(1,2*(n1+n2)) -1 1 0;
   zeros(1,p) zeros(1,2*(n1+n2)) 1 0 -1;];
b=[-1;-eps;-eps];

lb=[repmat(-Inf,1,p) zeros(1,2*(n1+n2)) repmat(-Inf,1,3)];
[x,fval,exitflag,output]=linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,[],options);
x;
fval;
w=x(1:p,1); %agirliklar
c=x(p+(2*n1)+(2*n2)+1);
c1=x(p+(2*n1)+(2*n2)+2);
c2=x(p+(2*n1)+(2*n2)+3);
s=w'.*veri(:,1:p);
s_toplam=sum(s,2);
kume=[];

for i=1:n
    if s_toplam(i)<=c
        kume(i,1)=1;
    elseif s_toplam(i)>c
        kume(i,1)=2;
    end
end
dogruluk=[veri(:,p+1) kume];

dogru_oran=sum(dogruluk(:,1)==dogruluk(:,2))/n

```

EK-3. Önerilen gauss bulanık sayılı modele ait MATLAB kodları

```

clc
clear
veri=xlsread('cam12');
n=size(veri,1);
p=size(veri,2)-1;
n1=70;
n2=76;
options = optimoptions('linprog','Algorithm','interior-point');

f=[zeros(1,p) ones(1,n1) zeros(1,n1) zeros(1,n2) ones(1,n2) zeros(1,3)];

h=0.5;
z1=-log(h)/log(10);
z=sqrt(z1)/6;

Aeq=[veri(1:n1,1:p) -eye(n1,n1) eye(n1,n1) zeros(n1,n2) zeros(n1,n2) -
ones(n1,1) -z*ones(n1,1) z*ones(n1,1);
      veri((n1+1):(n1+n2),1:p) zeros(n2,n1) zeros(n2,n1) -eye(n2,n2)
      eye(n2,n2) -ones(n2,1) z*ones(n2,1) -z*ones(n2,1);
      ones(1,p) zeros(1,2*n1) zeros(1,2*n2) zeros(1,3)
      ];
beq=[zeros(size(Aeq,1)-1,1);1];

A=[zeros(1,p) zeros(1,2*(n1+n2)) 0 1 -1;
   zeros(1,p) zeros(1,2*(n1+n2)) -1 1 0;
   zeros(1,p) zeros(1,2*(n1+n2)) 1 0 -1;];
b=[-1;0;0];

lb=[repmat(-Inf,1,p) zeros(1,2*(n1+n2)) repmat(-Inf,1,3)];

[x,fval,exitflag,output]=linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,[],options);
x;
fval;

w=x(1:p,1); %agirliklar
c=x(p+(2*n1)+(2*n2)+1);
c1=x(p+(2*n1)+(2*n2)+2);
c2=x(p+(2*n1)+(2*n2)+3);

s=w'.*veri(:,1:p);
s_toplam=sum(s,2);

kume=[];

for i=1:n
    if s_toplam(i)<=c
        kume(i,1)=1;
    elseif s_toplam(i)>c
        kume(i,1)=2;
    end
end

dogruluk=[veri(:,p+1) kume];

dogru_oran=sum(dogruluk(:,1)==dogruluk(:,2))/n

```

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : Tüzüner, Zülal
 Uyruğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 30.04.1987, Elazığ
 Medeni hali : Evli
 Telefon : 0 (312) 202 15 49
 e-mail : zulalturkoglu@gazi.edu.tr



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Doktora	Gazi Üniversitesi /İstatistik ABD	Devam ediyor
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi /İstatistik ABD	2014
Lisans	Fırat Üniversitesi/ İstatistik Bölümü	2010
Lise	Elazığ Özel Harput Lisesi	2004

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2012 - Halen	Gazi Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2011-2012	Bingöl Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

- Ertugay, N., Tüzüner, Z., and Bal, H. (2019). Health Efficiency Measurement In Turkey By Using Data Envelopment Analysis. *In Conference Proceedings of Science and Technology*, 2(1), 1-8.
- Karaca, E. E., Özmen, M. C., Ekici, F., Yüksel, E., and Türkoğlu, Z. (2014). Neutrophil-to-lymphocyte ratio may predict progression in patients with keratoconus. *Cornea*, 33(11), 1168-1173.

- Koçak, E., and Tüzüner, Z. (2017). *Sorting of Decision Making Units Using MCDM Through The Weights Obtained With Dea*, 10th International Statistics Congress (ISC2017), Ankara.
- Türkoğlu, Z. (2014). *Avrupa Birliği Ülkelerinin Çevresel Performansının Veri Zarflama Analizi ile İncelenmesi*, 15. Uluslararası Ekonometri Yöneylem Araştırmaları ve İstatistik Sempozyumu, Isparta.
- Türkoğlu, Z., ve Alp, İ. (2013). *AB Ülkelerinin Çevresel Performanslarının Ölçülmesi*, 11. Veri Zarflama Analizi Sempozyumu, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Samsun.
- Tüzüner, Z., and Alp, İ. (2018). Comparison of Solid Waste Management Performances of Turkey and EU countries associated with Malmquist Index. *Politeknik Dergisi*, 21(1), 75-81.
- Tüzüner, Z., and Bal, H. (2017). *Comparison of Environmental Performance of Turkey and EU countries associated with Malmquist Index*, 3rd International Researchers, Statisticians and Young Statisticians Congress, Konya.
- Tüzüner, Z., and Bal, H. (2017). *Examination of the Efficiencies Of World Countries In Terms Of Social Development Index Through Data Envelopment Analysis and Graphical Representation of the Results Of Data Envelopment Analysis*, International Conference on Advances in Natural and Applied Sciences, Antalya.
- Tüzüner, Z., and Bal, H. (2017). *Graphical View Of Results Data Envelopment Analysis*, International Conference On Computational and Statistical Methods in Applied Sciences, Samsun.
- Tüzüner, Z., and Bal, H. (2020). Three Group Classification Problem Approach Based on Fuzzy Goal Programming. *Politeknik Dergisi*, 23(4), 1089-1095.
- Tüzüner, Z., and Koçak, E. (2017). *Efficiency And Spatial Regression Analysis Related To Illiteracy Rate*, 10th International Statistics Congress (ISC2017), Ankara.
- Tüzüner, Z., and Koçak, E. (2017). *Spatial Interaction Analysis Related To Institutional Literacy Rate Performance*, International Conference On Computational and Statistical Methods in Applied Sciences, Samsun.
- Tüzüner, Z., Bal, H. ve Örkücü H. H. (2018). *İki Gruplu Sınıflandırma Problemi İçin Bulanık Programlama Yaklaşımı*, 19. Uluslararası Ekonometri, Yöneylem Araştırması ve İstatistik Sempozyumu, Antalya.
- Tüzüner, Z., Bal, H. ve Özsoy, V. S. (2016). *Avrupa Birliği Ülkelerinin Ulaşım Performanslarının Stokastik Sınır Analizi ile Değerlendirilmesi*, 2. Uluslararası Araştırmacılar-İstatistikçiler ve Genç İstatistikçiler Kongresi (2.UAİGİK-2016), Hacettepe Üniversitesi.
- Tüzüner, Z., Koçak, E. ve Bal, H. (2019). *Havalimanları Performanslarının Malmquist Endeksi ile İncelenmesi*, 3.Uluslararası Akademik Öğrenci Çalışmaları Kongresi, Ankara.

- Tüzüner, Z., Örkücü H. H., Bal, H., Özsoy, V. S. and Koçak, E. (2017). *The Health Performances of the Turkey Cities by the Mixed Integer DEA Models*, 10th International Statistics Congress (ISC2017), Ankara.
- Tüzüner, Z., ve Alp, İ. (2015). *Türkiye ile Avrupa Birliği Ülkelerinin Katı Atık Yönetimi Performansının İncelenmesi*, 16. Uluslararası Ekonometri Yöneylem Araştırmaları ve İstatistik Sempozyumu, Trakya Üniversitesi, Edirne.
- Tüzüner, Z., ve Bal, H. (2016). *AB Ülkelerinin Karayolu Ulaşım Performanslarının İncelenmesi*, 17. Uluslararası Ekonometri, İstatistik ve Yöneylem Araştırması Sempozyumu, Cumhuriyet Üniversitesi, Sivas.
- Tüzüner, Z., ve Bal, H. (2019). *Üç Gruplu Sınıflandırma Problemi İçin Bulanık Programlama Yaklaşımı*, Çukurova II. Uluslararası Multidisipliner Çalışmalar Kongresi, Adana.
- Tüzüner, Z., ve Bal, H. (2020). *Sınıflandırma Problemine Bulanık Doğrusal Programlama Yaklaşımı*, 20. Uluslararası Ekonometri, Yöneylem Araştırması ve İstatistik Sempozyumu (EYİ), Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi, Ankara.



GAZİ GELECEKTİR..