



SİSTEMLER İÇİN LYAPUNOV TİPİ EŞİTSİZLİKLER

Merve ARITÜRK

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

EYLÜL 2015

Merve ARITÜRK tarafından hazırlanan “SİSTEMLER İÇİN LYAPUNOV TİPİ EŞİTSİZLİKLER” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Mustafa Fahri AKTAŞ

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Başkan: Doç. Dr. Adil MISIR

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Yrd. Doç. Dr. Murat OLGUN

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Tez Savunma Tarihi: 02/09/2015

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Şeref SAĞIROĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
 - Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
 - Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
 - Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
 - Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün ve orijinal olduğunu,
- bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

02/09/2015

Merve ARITÜRK

SİSTEMLER İÇİN LYAPUNOV TİPİ EŞİTSİZLİKLER
(Yüksek Lisans Tezi)

Merve ARITÜRK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Eylül 2015

ÖZET

Bu tezde sistemler için elde edilen Lyapunov tipi eşitsizlikler üzerine durulmuştur. Konuyla ilgili önemli tanım ve teoremlere yer verildikten sonra diferansiyel ve fark denklemlerinden oluşan sistemler için literatürdeki bazı önemli sonuçlara sistematik biçimde yer verilmiştir. Daha sonra yakın zamanda diferansiyel ve fark denklemlerinden oluşan sistemler için elde edilen yeni ve orijinal Lyapunov tipi eşitsizliklere yer verilmiştir.

Bilim Kodu : 204.1.138
Anahtar Kelimeler : Diferansiyel denklem sistemleri, fark denklem sistemleri, Lyapunov tipi eşitsizlikler
Sayfa Adedi : 81
Danışman : Doç. Dr. Mustafa Fahri AKTAŞ

LYAPUNOV TYPE INEQUALITIES FOR SYSTEMS

(M. Sc. Thesis)

Merve ARITÜRK

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

September 2015

ABSTRACT

This thesis is about Lyapunov type inequalities for systems. After important definitions and theorems have been mentioned, some important results about Lyapunov type inequalities obtained both for the systems consisting of differential and difference equations have been given systematically. Then new and original Lyapunov type inequalities obtained both for the systems consisting of differential and difference equations have been given.

Science Code : 204.1.138
Key Words : Differential equation systems, difference equation systems, Lyapunov type inequalities
Page Number : 81
Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Mustafa Fahri AKTAŞ

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca bilgi ve deneyimleri ile yol gösteren, her türlü desteği ve emeğini esirgemeyen tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Mustafa Fahri AKTAŞ a ve bana zaman ayırıp yol gösteren engin birikiminden yararlandığım Sayın Doç. Dr. Devrim ÇAKMAK a teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca manevi destekleriyle her zaman yanımda olan aileme ve bilimi ve bilim insanını destekleyen TÜBİTAK a bana sağladığı katkılardan dolayı teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. Özfonksiyon Açılımlarıyla Green Fonksiyonu Elde Etme Metodu	6
2.2. Dirac Delta Fonksiyonunun Green Fonksiyonu ile İlişkisi.....	8
2.3. Homojen Olmayan Sınır Koşulları.....	14
2.4. Dirac Delta Fonksiyonları ile Green Formülünün Elde Edilmesi	16
2.5. Fredholm Alternatifi ve Değiştirilmiş Green Fonksiyonu	17
2.6. Fredholm Alternatifi.....	19
2.7. Değiştirilmiş Green Fonksiyonu	22
3. LİTERATÜRDEKİ LYAPUNOV TİPİ EŞİTSİZLİKLER.....	27
3.1. Diferansiyel Denklemler Sistemleri için Lyapunov Tipi Eşitsizlikler	28
3.2. Fark Denklemler Sistemleri için Lyapunov Tipi Eşitsizlikler.....	47
4. SİSTEMLER İÇİN YENİ LYAPUNOV TİPİ EŞİTSİZLİKLER	55
4.1. Diferansiyel Denklemler Sistemleri için Yeni Lyapunov Tipi Eşitsizlikler	55
4.2. Fark Denklemler Sistemleri için Yeni Lyapunov Tipi Eşitsizlikler.....	68
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	75
KAYNAKLAR	77
ÖZGEÇMİŞ	81

1. GİRİŞ

Eşitsizlikler, diğer bilim sahalarında olduğu gibi matematiğinde hemen hemen tüm branşlarında önemli bir rol oynamaktadır. 1934 yılından bu yana yapılan çalışmalarla eşitsizliklerin önemini gözler önüne serilmiş, yeni eşitsizliklerin bulunması ve analizin pek çok bölümünde bu eşitsizliklerin uygulamaları adına büyük bir gayret sarf edilmiştir. Matematiksel eşitsizliklerin kullanışlı oluşu başlangıçtan beri bilinmekte ve şu an bu eşitsizlikler yaygınlıkla modern reel analizin gelişmesindeki temel itici güçlerden biri olarak görülmektedir. Eşitsizlikler teorisi sürekli gelişen bir işleyişin içindedir ve eşitsizlikler matematiğin çeşitli dallarına ait pek çok problemin çözümünde etkili ve güçlü birer araç haline gelmektedirler. Bu teori son yıllarda çok sayıda araştırmacının ilgisini çekmiş, yeni araştırma sahalarının açılmasına sebep olmuş ve matematiksel analiz ve uygulamalarının çeşitli yanlarını etkilemiştir.

Pek çok tipten eşitsizliğin arasında Lyapunov eşitsizliği derin köklere sahiptir ve matematiğin çeşitli dalları üzerinde büyük bir etki yapmıştır. Özellikle son birkaç yıl içinde Lyapunov eşitsizliği ve onun pek çok genelleştirmelerinin diferansiyel ve fark denklemlerinin teorileri içinde yer alan salınımlılık teorisi, diskonjuge, özdeğer problemleri, kararlılık, sınırlılık ve diğer pek çok uygulama için kullanışlı birer araç olması bu konuda yapılan araştırmaların sayısını bir hayli artırmıştır.

Hazırladığımız bu tezde önce amaca yönelik temel kavramlar daha sonra diferansiyel ve fark denklem sistemlere ilişkin bir dizi önemli sonuç tarihsel süreç içerisinde sistematik bir biçimde sunulacaktır. Son kısımda da sistemler için elde etmiş olduğumuz yeni ve orijinal Lyapunov tipi eşitsizlikler ayrıntılı olarak verilecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu kesimde, bazı önemli tanım, teorem ve sonuçlar üzerinde durulacaktır.

Green fonksiyonları, diferansiyel denklemlerin kantitatif incelenmesinin yanı sıra kalitatif inceleme için de önemli bir rol oynamaktadır. Örneğin; Green fonksiyonları, lineer olmayan sınır değer problemlerinin çözümlerinin varlığı için oldukça geniş bir şekilde kullanılmıştır. Şimdi Green fonksiyonları hakkında bazı temel kavramlar ve özellikler verilsin [1].

$L \equiv \frac{d}{dt} \left(p \frac{d}{dt} \right) + q$ lineer operatör için verilen bir (a, b) aralığı üzerinde $p(t)$ sürekli ve türevlenebilir, $q(t)$ sürekli ve $p(t) > 0$ olmak üzere homojen sınır şartlarına sahip homojen olmayan genel $a < t < b$ için

$$L(u) = f(t) \quad (2.1)$$

problemi ele alınsın. Homojen olmayan adi diferansiyel denklemin genel çözümü homojen kısmının iki lineer bağımsız çözümü $u_1(t)$ ve $u_2(t)$ biliniyorsa her zaman parametrelerin değişimi metodu ile bulunabilir. Aslında bir çözüm biliniyorsa ikinci çözüm, basamağın indirgenmesi yöntemiyle bulunabileceğinden tek çözümün bilinmesi homojen olmayan diferansiyel denklemin genel çözümünün bulunması için yeterlidir. Parametrelerin değişimi metoduyla Eş. 2.1 in özel çözümü, $v_1(t)$ ve $v_2(t)$ belirlenecek fonksiyonlar olmak üzere

$$u(t) = v_1(t)u_1(t) + v_2(t)u_2(t) \quad (2.2)$$

formunda aranır. Diferansiyel denklemde bilinmeyen fonksiyon sayısı bir olduğundan $v_1(t)$ ve $v_2(t)$ yi sabit kabul edip

$$\frac{du}{dt} = v_1 \frac{du_1}{dt} + v_2 \frac{du_2}{dt}$$

olması sağlanır. $v_1(t)$ ve $v_2(t)$ sabit olmadığından bu durum yalnızca $v_1(t)$ ve $v_2(t)$ nin yer aldığı

$$\frac{dv_1}{dt}u_1 + \frac{dv_2}{dt}u_2 = 0$$

teriminin sıfır olmasıyla mümkündür.

$$\frac{dv_1}{dt} \frac{du_1}{dt} + \frac{dv_2}{dt} \frac{du_2}{dt} = \frac{f(t)}{p(t)}$$

eşitliği sağlanırsa $L(u) = f(t)$ diferansiyel denklemi sağlanır. Bu aşamada $\frac{dv_1}{dt}$ ve $\frac{dv_2}{dt}$ bilinmeyenlerini içeren iki lineer denklem ortaya çıkar.

$$c = p \left(u_1 \frac{du_2}{dt} - u_2 \frac{du_1}{dt} \right) \quad (2.3)$$

olmak üzere $\frac{dv_1}{dt}$ ve $\frac{dv_2}{dt}$,

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{-fu_2}{p \left(u_1 \frac{du_2}{dt} - u_2 \frac{du_1}{dt} \right)} = \frac{-fu_2}{c} \quad (2.4)$$

ve

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{fu_1}{p \left(u_1 \frac{du_2}{dt} - u_2 \frac{du_1}{dt} \right)} = \frac{fu_1}{c} \quad (2.5)$$

şeklinde bulunur.

Wronksiyen $W = u_1 \frac{du_2}{dt} - u_2 \frac{du_1}{dt}$ şeklinde tanımlı olmak üzere diferansiyel denklemin homojen kısmının çözümleri olan u_1 ve u_2 nin $L(u_1) = 0$ ve $L(u_2) = 0$ ı sağladığının kullanılmasıyla Wronksiyen,

$$\frac{dW}{dt} = u_1 \frac{d^2 u_2}{dt^2} - u_2 \frac{d^2 u_1}{dt^2} = -\frac{1}{p} \frac{dp}{dt} \left(u_1 \frac{du_2}{dt} - u_2 \frac{du_1}{dt} \right) = -\frac{1}{p} \frac{dp}{dt} W \quad (2.6)$$

değişkenlerine ayrılabilir diferansiyel denklemini sağlar. Bu diferansiyel denklemin çözümüyle $W = \frac{c}{p}$ olarak bulunur. Buradan c sabitinin homojen çözümler olan u_1 ve u_2 seçimine bağlı olduğu görülür. $L(u) = f(t)$ nin $u(t) = v_1(t)u_1(t) + v_2(t)u_2(t)$ şeklinde aranan özel çözümü Eş. 2.4 ve Eş. 2.5 in integrallerinin alınmasıyla bulunur.

Örnek

$\frac{d^2 u}{dt^2} = f(t)$, $u(0) = 0$ ve $u(L) = 0$ problemini ele alınsın. Homojen kısmın iki çözümü 1 ve t dir. Fakat homojen kısmın çözümlerinden biri olan $u_1(t)$ sınır koşullarından biri olan $u_1(0) = 0$ ı sağlayacak şekilde ve diğer çözüm $u_2(t)$ de diğer koşul olan $u_2(L) = 0$ ı sağlayacak şekilde seçilirse $u_1(t) = t$ ve $u_2(t) = L - t$ olarak bulunur. Eş. 2.4 ve Eş. 2.5 in integrallerinin alınmasıyla

$$v_1(t) = \frac{1}{L} \int_t^L f(s)(L-s)ds + c_1$$

ve

$$v_2(t) = -\frac{1}{L} \int_0^t f(s)sds + c_2$$

olarak bulunur. Sınır koşullarının uygulanmasıyla homojen olmayan sınır değer probleminin çözümü

$$u(t) = -\frac{t}{L} \int_t^L f(s)(L-s)ds - \frac{L-t}{L} \int_0^t f(s)sds$$

olarak bulunur. Böylece

$$G(t,s) = \begin{cases} -\frac{t(L-s)}{L}, & t < s < L \\ -\frac{s(L-t)}{L}, & t > s > 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

olmak üzere

$$u(t) = \int_0^L f(s)G(t,s)ds \quad (2.8)$$

olarak bulunur. Green fonksiyonu $G(t,s)$ nin

$$G(t,s) = G(s,t)$$

şeklinde simetrik olduğu kolaylıkla görülür.

2.1. Özfonksiyon Açılımlarıyla Green Fonksiyonu Elde Etme Metodu

$$L(u) = f(t)$$

diferansiyel denkleminin aynı homojen sınır şartlarına sahip ilgili özdeğer problemini

$$L(\phi) = -\lambda \sigma \phi \quad (2.9)$$

şeklinde tanımlayalım. $L(u) = f(t)$ diferansiyel denkleminin çözümü, özfonksiyonların

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(t) \quad (2.10)$$

şeklinde genelleştirilmiş bir Fourier serisi şeklinde aranır. $n \in \mathbb{N}$ için $\phi_n(t)$ ve $u(t)$, aynı homojen sınır şartlarını sağladıklarından Eş. 2.10 ifadesine L operatörünün uygulanması ve Eş. 2.9 un kullanılmasıyla

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n L(\phi_n) = - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n \sigma \phi_n = f(t)$$

elde edilir. Özfonksiyonların σ ağırlık fonksiyonuna göre dikliğinden

$$-a_n \lambda_n = \frac{\int_a^b f(s) \phi_n(s) ds}{\int_a^b \phi_n^2(s) \sigma(s) ds} \quad (2.11)$$

elde edilir. Böylece a_n , Eş. 2.10 da yerine yazılırsa

$$u(t) = \int_a^b f(s) \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(t) \phi_n(s)}{-\lambda_n \int_a^b \phi_n^2(\tau) \sigma(\tau) d\tau} \right] ds \quad (2.12)$$

elde edilir. Buradan, Green fonksiyonu özfonksiyonlar cinsinden

$$G(t, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(t) \phi_n(s)}{-\lambda_n \int_a^b \phi_n^2(\tau) \sigma(\tau) d\tau} \quad (2.13)$$

şeklinde ifade edilir. $G(t, s)$ nin simetrik olduğu açıkça görülür. Özdeğerlerden birinin 0 (sıfır) olması halinde Green fonksiyonu yoktur. Şimdilik $\lambda_n \neq 0$ olduğu kabul edilsin.

Örnek

$\frac{d^2 u}{dt^2} = f(t)$, $u(0) = 0$ ve $u(L) = 0$ sınır değer problemine ilişkin özdeğer problemi

$\frac{d^2 \phi}{dt^2} = -\lambda \phi$, $\phi(0) = 0$ ve $\phi(L) = 0$ bilinen bir problemdir. Özdeğerleri $n = 1, 2, \dots$ için

$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ ve bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar $\sin \frac{n\pi t}{L}$ dir. $u(t)$ nin Fourier

sinüs serisi Eş. 2.10 ile verilendir. Eş. 2.13 den Green fonksiyonun Fourier sinüs serisi

$$G(t, s) = -\frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\sin n\pi t}{L}\right) \left(\frac{\sin n\pi s}{L}\right)}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$$

olmak üzere $u(t) = \int_0^L f(s) G(t, s) ds$ olarak bulunur.

2.2. Dirac Delta Fonksiyonunun Green Fonksiyonu ile İlişkisi

Green fonksiyonu, kaynağın s nin her bir pozisyonunda t noktasında çözüm üzerindeki etkisini gösterir.

Dirac Delta fonksiyonu

$f(t)$ kaynağı, sisteme bütün noktalarda uygulanan kuvveti temsil eder. Her bir noktanın bireysel etkisini ayırmak için $f(t)$, Δt süresinde anlık hareketlerin bir lineer kombinasyonu şeklinde incelenebilir. Yani, $f(t) \approx \sum f(t_i)$ ($t = t_i$ de başlayan birim etki) yazılabilir. Bu ifade bir yönüyle integrali çağrıştırır. Δt ile çarpılıp bölünürse

$$f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_i f(t_i) \frac{\text{birim uzunluğundaki etki}}{\Delta t} \Delta t \quad (2.14)$$

elde edilir. $\Delta t \rightarrow 0$ bu limit $t = s_i$ noktasında ∞ iken diğer bütün noktalarda 0 (sıfır) olan $\delta(t - s_i)$ ye yaklaşır. Böylece $\delta(t - s_i)$,

$$\delta(t - s_i) = \begin{cases} 0, & t \neq s_i \\ \infty, & t = s_i \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\delta(t - s_i)$, $t = s_i$ de bir noktasal güç veya itici güç olarak düşünülebilir. Eş. 2.14 ü $f(t) = \int f(s_i) \delta(t - s_i) ds_i$ şeklinde yazılabilir. $\delta(t - s_i)$ fonksiyon olmadığından herhangi bir sürekli $f(t)$ fonksiyonu için

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s_i) \delta(t - s_i) ds_i \quad (2.15)$$

sağlayan bir operatör olarak tanımlanabilir. $\delta(t - s_i)$, Dirac Delta fonksiyonu olarak tanımlanır. Dirac Delta fonksiyonunun diğer önemli bir özelliği birim alana sahip olmasıdır. Yani,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - s_i) ds_i = 1$$

dir. Ayrıca, çift fonksiyondur. Yani,

$$\delta(t - s_i) = \delta(s_i - t)$$

dir. Heaviside birim basamak fonksiyonu

$$H(t - s_i) = \begin{cases} 0, & t < s_i \\ 1, & t > s_i \end{cases}$$

olmak üzere Dirac Delta fonksiyonu onun türevidir. Yani,

$$\delta(t-s_i) = \frac{d}{dt} H(t-s_i) \text{ ve böylece } H(t-s_i) = \int_{-\infty}^t \delta(s-s_i) ds$$

dir.

Green fonksiyonu

İki homojen sınır şartına sahip homojen olmayan $L(u) = f(t)$ probleminin özel

çözümünün $u(t) = \int_a^b f(s)G(t,s)ds$ olduğu biliniyor. Burada Green fonksiyonu, $f(t)$

kaynağı için etki fonksiyonudur. Örnek olarak, $t = t_s$ noktasında $f(t)$ itici güç olsun.

Yani, $f(t) = \delta(t-t_s)$ olsun. Böylece t noktasında bu itici güç Eş. 2.15 ten çözüm (cevap)

$u(t)$,

$$u(t) = \int_a^b \delta(s-t_s)G(t,s)ds = G(t,t_s)$$

eşitliğini sağlar. Bu ise Green fonksiyonu $G(t,t_s)$ için temel bir açıklamaya yardımcı olur.

$G(t,t_s)$ de $t = a$ ve $t = b$ de aynı şartları sağlamak üzere t_s de bir itici güç sayesinde t de çözüm (cevap) $G(t,t_s)$,

$$L[G(t,t_s)] = \delta(t-t_s) \tag{2.16}$$

yi sağlar. $u(t) = \int_a^b f(s)G(t,s)ds$ ın $L(u) = f(t)$ i sağladığı gösterilsin. L operatörü en

basit haliyle $L = \frac{d^2}{dt^2}$ ele alınsın. Eş. 2.16 dan

$$L(u) = \int_a^b f(s) L[G(t, s)] ds = \int_a^b f(s) \delta(t-s) ds = f(t) \quad (2.17)$$

elde edilir. Eş. 2.16, genellikle iki homojen sınır şartlarıyla birlikte Green fonksiyonunun bağımsız tanımı olarak düşünülür. $u(t) = \int_a^b f(s) G(t, s) ds$ yi elde etmek için kullanılan alışılmış yöntem

$$\int_a^b [uL(v) - vL(u)] ds = p \left(u \frac{dv}{dt} - v \frac{du}{dt} \right) \Big|_a^b \quad (2.18)$$

şeklinde olan Green formülünde $v = G(t, s)$ almaktır. Eş. 2.18 de sağ tarafta $u(t)$ ve $G(t, s)$ aynı homojen sınır koşullarını sağladığından 0 (sıfır) olur. $L(u) = f$ ve Eş. 2.16 dan

$$\int_a^b [u(t) \delta(t-s) - G(t, s) f(t)] dt = 0$$

elde edilir. Dirac Delta fonksiyonunun tanımından

$$u(s) = \int_a^b f(t) G(t, s) dt$$

elde edilir. Bu eşitlikte t ve s nin yerlerinin değişmesiyle Green fonksiyonunun simetrikliğinin kullanılmasıyla

$$u(t) = \int_a^b f(s) G(s, t) ds = \int_a^b f(s) G(t, s) ds \quad (2.19)$$

elde edilir.

Maxwell in karşılığı

Green fonksiyonunun simetrikliği çok önemlidir. Bunu Eş. 2.18 de Green formülünde $u = G(t, t_1)$ ve $v = G(t, t_2)$ olarak ispatlanmaya çalışılsın. u ve v nin ikisi de aynı homojen sınır şartlarını sağladığından sağ taraf 0 (sıfır) olur. $L(u) = \delta(t - s_1)$ ve $L(v) = \delta(t - s_2)$ olduğundan

$$\int_a^b [G(t, s_1)\delta(t - s_2) - G(t, s_2)\delta(t - s_1)] dt = 0$$

elde edilir. Dirac Delta fonksiyonunun özelliğinden $G(s_1, s_2) = G(s_2, s_1)$ olur ve ispat tamamlanır. Bu simetrikliğe Maxwell in Karşılığı denir.

Sıçrama şartları

Green fonksiyonu, Eş. 2.16 dan elde edilebilir. $t < t_s$ için $G(t, t_s)$, $t = a$ noktasında homojen kısmın sınır koşullarını sağlayan homojen kısmın çözümü olmalıdır. Benzer durum, $t > t_s$ için de geçerlidir. $t = t_s$ noktasındaki sıçrama koşulları Eş. 2.16 daki singülerlikten belirlenir. $G(t, t_s)$, $t = t_s$ noktasında sıçrama süreksizliğine sahip ise dG/dt , $t = t_s$ noktasında Delta fonksiyon singülerliğine sahiptir ve d^2G/dt^2 , Eş. 2.16 nın sağ tarafında daha fazla singüler olur. Böylece $G(t, t_s)$, $t = t_s$ noktasında süreklidir. Fakat dG/dt , $t = t_s$ noktasında süreksiz olup Eş. 2.16 nın $t = t_s$ de integralinin alınmasıyla elde edilen sıçrama süreksizliği vardır. Bu yöntem aşağıdaki örnekte ele alınsın.

Örnek

$$\frac{d^2u}{dt^2} = f(t), \quad u(0) = 0 \text{ ve } u(L) = 0 \quad (2.20)$$

probleminin çözümü göz önüne alınsın. Green fonksiyonu

$$\frac{d^2 G(t, s)}{dt^2} = \delta(t - s), \quad G(0, s) = 0 \text{ ve } G(L, s) = 0 \quad (2.21)$$

problemini sağlamak üzere çözüm

$$u(t) = \int_0^L f(s) G(t, s) ds \quad (2.22)$$

şeklinde ifade edilebilir. Green fonksiyonunun diferansiyel denklemler ile ifade edilmesinin bir sebebi Green fonksiyonunun hesaplanmasında kolay bir yol olmasıdır. Burada s , itici gücün yerini belirleyen bir parametredir. $t \neq s$ iken ortada kuvvetler (güçler) yoktur ve böylece kararlı hal ısı dağılımı $G(t, s)$, lineer olmalıdır ($d^2 G/dt^2 = 0$). Yani, sabitler farklı olabilme koşuluyla

$$G(t, s) = \begin{cases} a + bt, & t < s \\ c + dt, & t > s \end{cases}$$

olur. $G(0, s) = 0$ dan $a = 0$ ve $G(L, s) = 0$ dan $c + dL = 0$ elde edilir. Diğer iki sabit ise $t = s$ noktasındaki iki şarttan elde edilir. $G(t, s)$ sıcaklığı $t = s$ noktasında sürekli olmalıdır. Yani,

$$G(s^-, s) = G(s^+, s) \quad (2.23)$$

olmalıdır ve $G(t, s)$ nin türevinde bu noktada sıçrama vardır. Bu durum Eş. 2.21 in $t = s^-$ den $t = s^+$ ya integralinin alınmasıyla

$$-\left. \frac{dG}{dt} \right|_{t=s^+} + \left. \frac{dG}{dt} \right|_{t=s^-} = -1 \quad (2.24)$$

kolayca elde edilir. Eş. 2.23 ten $bs = d(s - L)$ ve Eş. 2.24 ten de $b - d = -1$ elde edilir.

Böylece $d = \frac{s}{L}$ ve $b = \frac{s-L}{L}$ olarak elde edilir ve böylece

$$G(t,s) = \begin{cases} -\frac{t}{L}(L-s), & t < s \\ -\frac{s}{L}(L-t), & t > s \end{cases}$$

olarak bulunur.

2.3. Homojen Olmayan Sınır Koşulları

$$\frac{d^2u}{dt^2} = f(t), \quad u(0) = \alpha \text{ ve } u(L) = \beta \quad (2.25)$$

homojen olmayan sınır koşullarına sahip problemi çözmek için Green fonksiyonunun nasıl kullanılacağı üzerinde durulacaktır. Green fonksiyonu her zaman ilgili homojen sınır koşullarını sağlar. Yani,

$$\frac{d^2G}{dt^2} = \delta(t-s), \quad G(0,s) = 0 \text{ ve } G(L,s) = 0 \quad (2.26)$$

dır. Eş. 2.18 Green formülünde, $v = G(t,s)$ alınırsa

$$\int_0^L \left[u(t) \frac{d^2G(t,s)}{dt^2} - G(t,s) \frac{d^2u}{dt^2} \right] dt = \left[u \frac{dG(t,s)}{dt} - G(t,s) \frac{du}{dt} \right] \Big|_0^L$$

elde edilir. $u(t)$, homojen sınır koşullarını sağlamadığından sağ taraf 0 (sıfır) olamaz.

Onun yerine Eş. 2.25 ve Eş. 2.26 dan

$$\int_0^L \left[u(t) \delta(t-s) - G(t,s) f(t) \right] dt = u(L) \frac{dG(t,s)}{dt} \Big|_{t=L} - u(0) \frac{dG(t,s)}{dt} \Big|_{t=0}$$

elde edilir. Dirac Delta fonksiyonunun özelliğinden, t ile s nin yerlerinin değiştirilmesiyle ve Green fonksiyonunun simetrikliğinden

$$u(t) = \int_0^L f(s)G(t,s)ds + \beta \left. \frac{dG(t,s)}{ds} \right|_{s=L} - \alpha \left. \frac{dG(t,s)}{ds} \right|_{s=0} \quad (2.27)$$

elde edilir. Bu ifade homojen olmayan sınır koşullarına sahip homojen olmayan problemin çözümünün standart Green fonksiyonu cinsinden ifade edilmiştir. Önceki problemde Green fonksiyonunun

$$G(t,s) = \begin{cases} -\frac{t}{L}(L-s), & t < s \\ -\frac{s}{L}(L-t), & t > s \end{cases}$$

olduğunu bilinmektedir. Green fonksiyonunun kaynağın yerine göre (s ye göre) türevi

$$\frac{dG(t,s)}{ds} = \begin{cases} \frac{t}{L}, & t < s \\ -\left(1 - \frac{t}{L}\right), & t > s \end{cases}$$

şeklindedir. Uç noktalardaki türevi de

$$\left. \frac{dG(t,s)}{ds} \right|_{s=L} = \frac{t}{L} \text{ ve } \left. \frac{dG(t,s)}{ds} \right|_{s=0} = -\left(1 - \frac{t}{L}\right)$$

dir. Sonuç olarak, çözüm

$$u(t) = \int_0^L f(s)G(t,s)ds + \beta \frac{t}{L} + \alpha \left(1 - \frac{t}{L}\right)$$

olarak bulunur. Problemin homojen sınır koşullarını sağlayan özel çözümü olan

$\int_0^L f(s)G(t,s)ds$ ve homojen kısmın homojen olmayan sınır koşullarını sağlayan çözümü

olan $\beta \frac{t}{L} + \alpha \left(1 - \frac{t}{L}\right)$ nin toplamının çözüm olduğuna dikkat edilmelidir.

2.4. Dirac Delta Fonksiyonları ile Green Formülünün Elde Edilmesi

Green fonksiyonunun elde edilişinde Green formülünün önemi büyüktür. Fakat burada

Green fonksiyonunun elde edilişinde kısmi integrasyon gereklidir. $L = \frac{d}{dt} \left(p \frac{d}{dt} \right) + q$

olmak üzere v Green fonksiyonu olsa bile (Yani, $L(v) = \delta(t-s)$) Green formülü

$$\int_a^b [uL(v) - vL(u)] ds = p \left(u \frac{dv}{dt} - v \frac{du}{dt} \right) \Big|_a^b \quad (2.28)$$

geçerlidir. Şimdi Eş. 2.28 elde edilsin. Eş. 2.28 in sol tarafı hesaplansın. $t = s$ noktasında singülerlik olduğundan Eş. 2.28 in geçerli olduğunu bilinmemektedir. Onun yerine aralık üç parçaya

$$\int_a^b = \int_a^{s^-} + \int_{s^-}^{s^+} + \int_{s^+}^b$$

ayrılır. Singülerliğin dışarıda kaldığı $a \leq t \leq s^-$ ve $s^+ \leq t \leq b$ aralıklarında Green formülü

kullanılabilir. Ek olarak, Dirac Delta fonksiyonunun özelliğinden ve $\int_{s^-}^{s^+} vL(u) dt = 0$

olduğundan

$$\int_{s^-}^{s^+} [uL(v) - vL(u)] dt = \int_{s^-}^{s^+} [u\delta(t-s) - vL(u)] dt = u(s)$$

dır. Böylece

$$\begin{aligned} \int_a^b [uL(v) - vL(u)] ds &= p \left(u \frac{dv}{dt} - v \frac{du}{dt} \right) \Big|_a^{s^-} + p \left(u \frac{dv}{dt} - v \frac{du}{dt} \right) \Big|_{s^+}^b + u(s) \\ &= p \left(u \frac{dv}{dt} - v \frac{du}{dt} \right) \Big|_a^b + p \left(u \frac{dv}{dt} - v \frac{du}{dt} \right) \Big|_{s^+}^{s^-} + u(s) \end{aligned} \quad (2.29)$$

elde edilir. u , $\frac{du}{dt}$ ve v , $t = s$ noktasında sürekli olduklarından

$$p \left(u \frac{dv}{dt} - v \frac{du}{dt} \right) \Big|_{s^+}^{s^-} = p(s) u(s) \frac{dv}{dt} \Big|_{s^+}^{s^-}$$

elde edilir. $L(v) = \delta(t-s)$ ın integrali alınırsa $p \frac{dv}{dt} \Big|_{s^-}^{s^+} = 1$ elde edilir. Böylece Eş. 2.28, Eş. 2.29 dan elde edilir.

2.5. Fredholm Alternatifi ve Değiştirilmiş Green Fonksiyonu

$\lambda = 0$ özdeğer ise Green fonksiyonu yoktur. Zorluğu anlamak için homojen sınır şartlarına sahip homojen olmayan

$$L(u) = f(t)$$

problemi ele alınsın. Özfonksiyon açılım metoduyla

$$-a_n \lambda_n = \frac{\int_a^b f(s) \phi_n(s) ds}{\int_a^b \phi_n^2(s) \sigma(s) ds} \quad (2.30)$$

olmak üzere

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(t) \quad (2.31)$$

elde edilir.

Bazı n ler için $\lambda_n = 0$ ise homojen olmayan sınır değer probleminin hiçbir çözümü olmayabilir. Özellikle, $\lambda_n = 0$ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon $\int_a^b f(s)\phi_n(s)ds \neq 0$ ise Eş. 2.30 sağlanamaz.

Örnek

$$\frac{d^2u}{dt^2} = e^t, \quad \frac{du}{dt}(0) = 0 \text{ ve } \frac{du}{dt}(L) = 0 \quad (2.32)$$

homojen olmayan sınır değer problemi ele alınsın. Eş. 2.32 nin integrali alınırsa

$$\frac{du}{dt} = e^t + c$$

elde edilir. Sınır şartları $1+c=0$ ve $e^L + c = 0$ olduğundan sağlanamaz. $\lambda = 0$ özdeğeri ilgili özdeğer problemi $\left(\frac{d^2\phi_n}{dt^2} = -\lambda_n\phi_n, \quad \frac{d\phi_n}{dt}(0) = 0 \text{ ve } \frac{d\phi_n}{dt}(L) = 0 \right)$ için bir özdeğer olduğunda homojen olmayan sınır değer probleminin herhangi bir çözümünün olduğu garantilenemez.

Sıfır özdeğer

$\lambda = 0$ bir özdeğer ise homojen sınır şartlarına sahip olan

$$L(u) = f(t) \quad (2.33)$$

probleminin çözümünün zorluğundan bahsedildi. Aynı homojen sınır şartlarına sahip ϕ_n özfonksiyonları $L(\phi_n) = -\lambda_n\phi_n$ i sağlar. Böylece $\lambda = 0$ bir özdeğer ise ona karşılık gelen $\phi_n(t)$ özfonksiyonu aynı homojen sınır koşullarıyla birlikte

$$L(\phi_n) = 0 \quad (2.34)$$

ı sağlar. Böylece $\phi_h(t)$, Eş. 2.33 ün aşık ar olmayan homojen çözümüdür. Eş. 2.33 ün aynı homojen sınır koşullarını sağlayan aşık ar olmayan homojen kısmın çözümleri, sıfır özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonlara denktir. Eğer aynı homojen sınır koşullarını sağlayan aşık ar olmayan homojen kısmın çözümleri yoksa $\lambda = 0$ bir özdeğer değildir. Eğer aşık ar olmayan homojen çözümler varsa $\lambda = 0$ bir özdeğerdir denir.

Şimdi

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \phi = e^t, \phi(0) = 0 \text{ ve } \phi(\pi) = 0 \quad (2.35)$$

problemi ele alınsın. $\phi = \sin t$ homojen kısmın çözümüdür. Fakat $\lambda = 0$ ın özdeğer olduğu söylemek her ne kadar doğru olsa da karışıklığa neden olabilir. Eş. 2.35 in özdeğerlerinin tanımı

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \phi = -\lambda\phi, \phi(0) = 0 \text{ ve } \phi(\pi) = 0$$

dır. Böylece $n = 1, 2, \dots$ için $\lambda + 1 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 = n^2$ olur ve $n = 1$ için $\lambda = 0$ ın özdeğer olduğu açıktır.

2.6. Fredholm Alternatifi

Özfonksiyonların açılımı metoduyla elde edilen Eş. 2.30 dan önemli sonuçlar elde edilebilir. Fredholm Alternatifi homojen sınır şartlarına sahip homojen olmayan

$$L(u) = f(t) \quad (2.36)$$

problemleri için elde edilen bu sonuçları özetler. Ya $u = 0$ homojen kısmın tek çözümüdür. Yani, $\lambda = 0$ özdeğer değildir. Bu durumda homojen olmayan problem tek çözüme sahiptir ya da homojen kısmın aşık ar olmayan çözümleri vardır. Yani, $\lambda = 0$

özdeğerdir. Bu durumda da homojen olmayan problemin ya hiç çözümü yoktur ya da sonsuz çözümü vardır. $\phi_h(t)$, homojen kısmın aşikar olmayan çözümü olsun. Eğer

$$\int_a^b f(s)\phi_h(s)ds = 0 \quad (2.37)$$

ise Eş. 2.30 dan karşılık gelen a_n keyfi olacağından sonsuz çözüm vardır. Bu tek olmayan çözümler homojen kısmın çözümü olan bir $\phi_h(t)$ nin keyfi bir sabitle çarpılmasına karşılık gelmektedir. Eş. 2.37 ağırlık fonksiyonu 1 olmak üzere homojen kısmın çözümüne dik olan kuvvet fonksiyonuna karşılık gelmektedir. Eğer

$$\int_a^b f(s)\phi_h(s)ds \neq 0$$

ise homojen sınır koşullarına sahip homojen olmayan problemin çözümü yoktur. Diğer bir ifadeyle Fredholm Alternatifine göre homojen sınır şartlarına sahip homojen olmayan Eş. 2.36 probleminin çözümleri, kuvvet fonksiyonu homojen kısmın bütün çözümlerine dik ise vardır. Eğer $u=0$ homojen kısmın tek çözümü ise $f(t)$ otomatik olarak çözüme dik olacağı için homojen olmayan diferansiyel denklemin çözümü vardır. Fredholm Alternatifinin bir kısmı özfonksiyon açılımı kullanılmadan gösterilebilir. Eğer homojen olmayan problemin çözümü varsa $L(u) = f(t)$ sağlanır. Homojen kısmın bütün çözümleri $\phi_h(t)$, $L(\phi_h) = 0$ ı sağlar. Green formülünde $v = \phi_h$ alınırsa u ve ϕ_h aynı homojen sınır şartlarını sağladığından

$$\int_a^b [u \cdot 0 - \phi_h(s) f(s)] ds = 0 \quad \text{veya} \quad \int_a^b f(s) \phi_h(s) ds = 0$$

sağlanır.

Örnek

Üç örnek ele alınsın. İlk olarak,

$$\frac{d^2u}{dt^2} = e^t, \quad \frac{du}{dt}(0) = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{du}{dt}(L) = 0 \quad (2.38)$$

problemi ele alınsın. $u=1$ homojen kısmın çözümüdür. Fredholm Alternatifine göre sadece e^t , bu denklemin homojen kısmın çözümüne dik ise Eş. 2.38 in çözümü vardır.

$$\int_0^L e^s \cdot 1 ds \neq 0 \text{ olduğundan Eş. 2.38 in çözümü yoktur.}$$

Diğer bir örnek olarak,

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2u = e^t, \quad u(0) = 0 \quad \text{ve} \quad u(\pi) = 0$$

problemi ele alınsın. Homojen kısmın $u=0$ dan farklı çözümü olmadığından Fredholm Alternatifine göre tek çözüm vardır. Fakat burada özel çözümü elde etmek için belirsiz katsayılar yöntemi, parametrelerin değişimi yöntemi veya özfonksiyon açılımı gibi standart yöntemler kullanılmalıdır.

Kolay olmayan bir örnek olarak,

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 u = \beta + t, \quad u(0) = 0 \quad \text{ve} \quad u(L) = 0$$

problemi ele alınsın. Homojen kısmın çözümü $u = \sin \frac{\pi t}{L}$ olduğundan sadece

$$\int_0^L (\beta + s) \sin \frac{\pi s}{L} ds = 0 \text{ sağlanır ise homojen olmayan problemin çözümü vardır. Buradan}$$

$$\text{sadece } \beta \text{ nın değeri } \beta = \frac{-\int_0^L s \sin \frac{\pi s}{L} ds}{\int_0^L \sin \frac{\pi s}{L} ds} = \frac{L}{2} \text{ olarak bulunur. Fakat Fredholm Alternatifi}$$

$u(t)$ çözümünü bulmak için kullanılamaz.

2.7. Değiştirilmiş Green Fonksiyonu

Homojen sınır koşullarına ve $\lambda = 0$ özdeğerine sahip

$$L(u) = f(t) \quad (2.39)$$

problemi ele alınsın. Eğer Eş. 2.39 un bir çözümü varsa bir değiştirilmiş Green fonksiyonunu inşa ederek Eş. 2.39 un özel çözümü bulunur.

$\lambda = 0$ bir özdeğer değil ise homojen sınır koşullarına sahip homojen olmayan sınır değer probleminin bir tek çözümünün var olduğu bilinmektedir. Ayrıca, bu çözümün, homojen sınır koşullarını ve

$$L[G(t, s)] = \delta(t - s) \quad (2.40)$$

ı sağlayan bir Green fonksiyonu kullanılarak yazılabileceği bilinmektedir. $\lambda = 0$ ın bir özdeğer olduğu durumda ise Eş. 2.39 un aşık olmayan $\phi_h(t)$ çözümleri vardır. Bu çözümler $L(\phi_h) = 0$ ı sağlar. Eş. 2.39 un çözümlerinin olduğu kabul edilsin. Yani,

$$\int_a^b f(s) \phi_h(s) ds = 0 \quad (2.41)$$

sağlansın. Fakat Eş. 2.40 ta tanımlanan Green fonksiyonu bütün s ler için yoktur. Çünkü, $\delta(t - s)$ bütün s ler için homojen kısmın çözümlerine dik değildir. Yani,

$$\int_a^b \delta(t - s) \phi_h(t) dt = \phi_h(s) \neq 0$$

dır. $\delta(t - s)$ nin $\phi_h(t)$ doğrultusunda bileşeni olduğundan $\phi_h(t)$ ye dik değildir. Fakat $\delta(t - s) + c\phi_h(t)$ şeklinde kuvvet fonksiyonu $\phi_h(t)$ fonksiyonuna dik olacak şekilde yani,

$$\int_a^b \phi_h(t) [\delta(t-s) + c\phi_h(t)] dt = \phi_h(s) + c \int_a^b \phi_h^2(t) dt = 0 \quad \text{olacak şekilde } c \text{ seçilirse}$$

$\delta(t-s) + c\phi_h(t)$ kuvvet fonksiyonu için bir çözüm vardır. Böylece aynı homojen sınır koşullarını ve

$$L[G_d(t,s)] = \delta(t-s) - \frac{\phi_h(t)\phi_h(s)}{\int_a^b \phi_h^2(s) ds} \quad (2.42)$$

ı sağlayan değiştirilmiş Green fonksiyonu $G_d(t,s)$ tanımlanır. Eş. 2.42 nin sağ tarafı $\phi_h(t)$ ye dik olduğundan sonsuz çözüm vardır. Değiştirilmiş bir Green fonksiyonunun simetrik seçilebileceği gösterilebilir. Eğer $g_d(t,s)$ bir simetrik değiştirilmiş Green fonksiyonu ise t ve s den bağımsız keyfi β sabiti için $G_d(t,s) = g_d(t,s) + \beta\phi_h(s)\phi_h(t)$ de bir simetrik değiştirilmiş Green fonksiyonudur. Dolayısıyla, sonsuz simetrik değiştirilmiş Green fonksiyonu vardır ve bunlardan herhangi biri kullanılabilir. Eş. 2.18 de Green formülünde $u = u(t)$ ve $v = G_d(t,s)$ alınırsa $u(t)$ ve $G_d(t,s)$ aynı homojen sınır koşullarını sağladığından

$$\int_a^b \{u(t)L[G_d(t,s)] - G_d(t,s)L[u(t)]\} dt = 0$$

elde edilir. Eş. 2.39 ve Eş. 2.42 den

$$\int_a^b \left\{ u(t) \left[\delta(t-s) - \frac{\phi_h(t)\phi_h(s)}{\int_a^b \phi_h^2(\tau) d\tau} \right] - G_d(t,s) f(t) \right\} dt = 0$$

elde edilir. Dirac Delta fonksiyonunun özelliğinden ve t ve s nin rollerinin (yerlerinin) değiştirilmesiyle

$$u(t) = \int_a^b f(s) G_d(t, s) ds + \frac{\phi_h(t)}{\int_a^b \phi_h^2(\tau) d\tau} \int_a^b u(s) \phi_h(s) ds$$

elde edilir. Son ifade homojen kısmın çözümünün katıdır ve böylece Eş. 2.39 un bir özel çözümü, $\lambda = 0$ in özdeğer olmadığı durumda olduğu gibi

$$u(t) = \int_a^b f(s) G_d(t, s) ds \quad (2.43)$$

dir.

Örnek

Homojen kısmı aşikar olmayan çözüme sahip olan en basit problem

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = f(t), \quad \frac{du}{dt}(0) = 0 \text{ ve } \frac{du}{dt}(L) = 0 \quad (2.44)$$

dir. Homojen kısmın çözümü olan sabit bir sayı, sıfır özdeğerine karşılık gelen özfonksiyondur. Çözümün var olabilmesi için Fredholm Alternatifinden $\int_0^L f(s) ds = 0$

olmalıdır. $f(t)$ nin bu eşitliği sağladığı varsayalım. Yani, $f(t) = t - \frac{1}{2}$ olsun.

Özfonksiyon sabit bir sayı olacağından değiştirilmiş Green fonksiyonu $G_d(t, s)$,

$$\frac{d^2 G_d}{dt^2} = \delta(t-s) + c, \quad \frac{dG_d}{dt}(0) = 0 \text{ ve } \frac{dG_d}{dt}(L) = 0 \quad (2.45)$$

ı sağlar. Böyle bir değiştirilmiş Green fonksiyonunun var olması için sağ taraf homojen kısmın çözümüne dik olmalıdır. Yani,

$$\int_0^L [\delta(t-s) + c] dt = 0 \text{ veya } c = -\frac{1}{L}$$

dir. Eş. 2.45 i çözmek için Dirac Delta fonksiyonunun özelliğinden yararlanılır. $t \neq s$ için

$$\frac{d^2 G_d}{dt^2} = -\frac{1}{L}$$

dır. İntegral sabitleri $t=0$ ve $t=L$ noktalarındaki sınır koşullarını sağlayacak şekilde seçilerek integral alınırsa

$$\frac{dG_d}{dt} = \begin{cases} -\frac{t}{L} & , \quad t < s \\ -\frac{t}{L} + 1, & t > s \end{cases} \quad (2.46)$$

elde edilir. Türevdeki sıçrama şartı Eş. 2.46 da sağlanmaktadır. Tekrar $G_d(t, s)$ ı elde etmek için integral alınır. $c(s)$, s ye bağlı keyfi sabit ve homojen kısmın çözümünün keyfi katı olmak üzere $G_d(t, s)$ nin $t = s$ da sürekli olduğu varsayılırsa

$$G_d(t, s) = \begin{cases} -\frac{1}{L} \frac{t^2}{2} + s + c(s) & , \quad t < s \\ -\frac{1}{L} \frac{t^2}{2} + t + c(s) & , \quad t > s \end{cases}$$

elde edilir. Bu ifade olası bütün değiştirilmiş Green fonksiyonlarının ifadesidir. Genellikle $G_d(t, s)$ ın simetrik olması tercih edilir. Örneğin, $t < s$ için $G_d(t, s) = G_d(s, t)$ olması β keyfi sabit olmak üzere

$$-\frac{1}{L} \frac{s^2}{2} + s + c(t) = -\frac{1}{L} \frac{t^2}{2} + s + c(s)$$

veya

$$c(s) = -\frac{1}{L} \frac{s^2}{2} + \beta$$

elde edilir. Sonuç olarak, değiştirilmiş Green fonksiyonu

$$G_d(t, s) = \begin{cases} -\frac{1}{L} \frac{(t^2 + s^2)}{2} + s + \beta, & t < s \\ -\frac{1}{L} \frac{(t^2 + s^2)}{2} + t + \beta, & t > s \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir. $G_d(t, s)$ yukarıdaki gibi olmak üzere Eş. 2.44 ün çözümü Eş. 2.43 ile verilir.

3. LİTERATÜRDEKİ LYAPUNOV TİPİ EŞİTSİZLİKLER

Rus matematikçi Lyapunov [2], $f(t) \in C([a, b], [0, \infty))$ olmak üzere $x(t)$,

$$x'' + f(t)x = 0 \quad (3.1)$$

denkleminin aşıkâr olmayan çözümü olmak üzere $a < b$ için $a, b \in \mathbb{R}$, $x(t)$ nin $x(a) = 0 = x(b)$ olacak şekilde ardışık sıfırları olduğunda klasik Lyapunov eşitsizliği olarak bilinen

$$\int_a^b f(s) ds \geq \frac{4}{b-a} \quad (3.2)$$

eşitsizliğinin gerçekleştiğini ispatlamıştır. Bu eşitsizlikte 4 sayısının en iyi sayı olduğu Hartman [3, Syf. 345] tarafından gösterilmiştir.

Bu sonuç, Eş. 3.1 denkleminin çözümlerinin salınımlılık, diskonjuge, kararlılık, sınırlılık ve özdeğer problemleri gibi çeşitli özellikleri üzerine yapılan çalışmalarda oldukça fazla uygulama alanı bulmuştur.

Tez boyunca kolaylık sağlaması açısından $f^+(t) = \max\{f(t), 0\}$ şeklinde gösterilecektir.

Bu sonucun ardından Eş. 3.1 lineer diferansiyel denklemi bir çok yönde genelleştirilmiştir. Örneğin; Hartman [3], ikinci bölümde bahsedilen Green fonksiyonunu kullanarak $f \in C([t_0, \infty), \mathbb{R})$ ve $x(t)$, $x(a) = 0 = x(b)$ sınır şartını sağlayan Eş. 3.1 in $[a, b]$ aralığında aşıkâr olmayan bir çözümü ise

$$\int_a^b f^+(s) \frac{(s-a)(b-s)}{b-a} ds \geq 1$$

eşitsizliğini elde etmiştir.

Bu eşitsizlikte yer alan $M(t) = (t-a)(b-t)$ fonksiyonunun maksimum değerini $\frac{a+b}{2}$ de aldığı kolaylıkla görülür. Yani,

$$M(t) \leq \max_{a \leq t \leq b} M(t) = M\left(\frac{a+b}{2}\right) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

dir. Bu değer yerine yazıldığında Hartman [3] tarafından Green fonksiyonu kullanılarak elde edilen eşitsizliğin Eş. 3.2 eşitsizliğinin bir genellemesi olduğu görülür.

Bu bölümde Lyapunov tipi eşitsizliklerin diferansiyel denklem sistemleri ve fark denklem sistemleri için en temel sonuçları ve uygulamaları tarihsel süreç içinde sistematik bir biçimde sunulacaktır. Tezde sistemlerin çözümlerinin varlığı kabul edilmiştir.

3.1. Diferansiyel Denklem Sistemleri için Lyapunov Tipi Eşitsizlikler

Lyapunov [2] nin çalışması ortaya çıktığından günümüze kadar literatürde Lyapunov eşitsizliğinin pek çok genellemesi ve ispatı verilmiştir. Lyapunov tipi eşitsizliklere katkıda bulunan bazı yazarlar için Afrouzi ve Heidarkhani [4], Aktaş [5], Aktaş ve diğerleri [6], Atkinson [7], Borg [8], Çakmak [9-12], Das ve Vatsala [13], He ve Tang [14], Kwong [15], Lin ve Yang [16], Pinasco [17], Sim ve Lee [18], Tiryaki [19], Ünal ve diğerleri [20], Wang ve Shi [21], Yang ve diğerleri [22-23], ve Zhang ve Tang [24] referans olarak gösterilebilir.

Diferansiyel denklemlerin farklı sınıfları için Lyapunov tipi eşitsizlikler üzerine geniş bir literatür bulunmasına rağmen lineer ve lineer olmayan sistemler için yapılan çalışmalar çok daha az sayıdadır.

2003 yılında Guseinov ve Kaymakçalan [25], $\alpha_1, \beta_1, \beta_2 : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$\begin{cases} x_1'(t) = \alpha_1(t)x_1(t) + \beta_1(t)x_2(t) \\ x_2'(t) = -\beta_2(t)x_1(t) - \alpha_1(t)x_2(t) \end{cases} \quad (3.3)$$

lineer Hamiltonian sistemine ilişkin Lyapunov tipi eşitsizlik elde etmişlerdir. Eş. 3.3 sisteminde $\alpha_1(t)=0$ ve $\beta_1(t)=1$ alınırsa Eş. 3.1 denklemi elde edilir. Sonuçlarından biri aşağıdaki gibidir.

3.1.1. Teorem [25, Teorem 1.1]

Her $t \in \mathbb{R}$ için $\beta_1(t) \geq 0$ olsun. $a < b$ için $a, b \in \mathbb{R}$, $x_1(t)$ nin $x_1(a)=0=x_1(b)$ olacak şekilde ardışık sıfırları olmak üzere Eş. 3.3 sistemi aşıkak olmayan bir $(x_1(t), x_2(t))$ çözümüne sahip ise

$$\int_a^b |\alpha_1(s)| ds + \left(\int_a^b \beta_1(s) ds \int_a^b \beta_2^+(s) ds \right)^{1/2} \geq 2 \quad (3.4)$$

eşitsizliği sağlanır.

2007 yılında Tiryaki ve diğerleri [26], $\mu, \nu > 1$ reel sabitler, $\alpha_1, \beta_1, \beta_2 : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$\begin{cases} x_1'(t) = \alpha_1(t)x_1(t) + \beta_1(t)|x_2(t)|^{\mu-2}x_2(t) \\ x_2'(t) = -\beta_2(t)|x_1(t)|^{\nu-2}x_1(t) - \alpha_1(t)x_2(t) \end{cases} \quad (3.5)$$

lineer olmayan sistemi için aşağıdaki Lyapunov tipi eşitsizlikleri elde etmişlerdir. Elde ettikleri sonuçlar aşağıdaki gibidir. Eş. 3.5 sisteminde $\nu=2$ ve $\mu=2$ alınırsa Eş. 3.3 sistemi, ilaveten $\alpha_1(t)=0$ ve $\beta_1(t)=1$ alınırsa Eş. 3.1 denklemi elde edilir.

3.1.2. Teorem [26, Teorem 1]

$t \in [t_0, \infty)$ için $\beta_1(t) > 0$ olsun. $a < b$ için $a, b \in \mathbb{R}$, $x_1(t)$ nin $x_1(a)=0=x_1(b)$ olacak şekilde ardışık sıfırları olmak üzere Eş. 3.5 sistemi aşıkak olmayan bir $(x_1(t), x_2(t))$

çözümüne sahip olsun. Böylece $M = |x_1(c)| = \max\{|x_1(t)| : a < t < b\}$ ve $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\mu} = 1$ olmak üzere

$$\int_a^b |\alpha_1(s)| ds + M^{\frac{\nu}{\alpha}-1} \left(\int_a^b \beta_1(s) ds \right)^{\frac{1}{\mu}} \left(\int_a^b \beta_2^+(s) ds \right)^{\frac{1}{\alpha}} \geq 2 \quad (3.6)$$

eşitsizliği sağlanır.

3.1.3. Teorem [26, Teorem 3]

$t \in [t_0, \infty)$ için $\beta_1(t) > 0$ olsun. $a < b$ için $a, b \in \mathbb{R}$, $x_1(t)$ nin $x_1(a) = 0 = x_1(b)$ olacak şekilde ardışık sıfırları olmak üzere $\alpha_1(t) \equiv 0$ iken Eş. 3.5 sistemi aşikar olmayan bir

$(x_1(t), x_2(t))$ çözümüne sahip olsun. Böylece $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\mu} = 1$ ve

$M = |x_1(c)| = \max\{|x_1(t)| : a < t < b\}$ olmak üzere

$$M^{\nu-\alpha} \left(\int_a^\tau \beta_1(s) ds \right)^{\alpha-1} \left(\int_a^\tau \beta_2^+(s) ds \right) \geq 1, \quad (3.7)$$

$$M^{\nu-\alpha} \left(\int_\tau^b \beta_1(s) ds \right)^{\alpha-1} \left(\int_\tau^b \beta_2^+(s) ds \right) \geq 1 \quad (3.8)$$

ve

$$M^{\nu-\alpha} \left(\int_a^b \beta_1(s) ds \right)^{\alpha-1} \left(\int_a^b \beta_2^+(s) ds \right) \geq 2^\alpha \quad (3.9)$$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde bir $\tau \in (a, b)$ vardır.

2010 yılında Wang [27], Eş. 3.3 lineer Hamiltonian sistemi için Guseinov ve Zafer [28] in bulduğu kararlılık kriterini geliştirip elde ettiği yeni kararlılık kriteriyle yakından ilgili olan bir Lyapunov tipi eşitsizlik elde etmiştir. Wang [27] nin sonucu aşağıdaki gibidir.

3.1.4. Teorem [27, Teorem 3.1]

$t \in [t_0, \infty)$ için $\beta_1(t) \geq 0$ olsun. $a < b$ için $a, b \in \mathbb{R}$, $x_1(t)$ nin $x_1(a) = 0 = x_1(b)$ olacak şekilde ardışık sıfırları olmak üzere Eş. 3.3 sistemi aşıkâr olmayan bir $(x_1(t), x_2(t))$ çözümüne sahip olsun. Böylece bazı $\tau \in (t_1, t_2)$ için

$$\left[\int_a^b \beta_1(t) \exp \left(-2 \int_{\tau}^t \alpha_1(s) ds \right) dt \right] \int_a^b \beta_2^+(s) ds \geq 4 \quad (3.10)$$

eşitsizliği sağlanır.

2011 yılında Tang ve diğerleri [29], Eş. 3.5 lineer olmayan sistemi için aşağıdaki Lyapunov tipi eşitsizliği elde etmişlerdir.

Şimdi kolaylık olması açısından her $t \in \mathbb{R}$ için

$$D_*(t) = \left[\frac{1}{\int_a^t \beta_1(\tau) \exp \left(-\mu \int_t^{\tau} \alpha_1(s) ds \right) d\tau} \right]^{\nu-1} + \left[\frac{1}{\int_t^b \beta_1(\tau) \exp \left(-\mu \int_t^{\tau} \alpha_1(s) ds \right) d\tau} \right]^{\nu-1}$$

ve

$$E_*(t) = 2^{\nu-2} \left[\frac{1}{\int_a^t \beta_1(\tau) \exp \left(-\mu \int_t^{\tau} \alpha_1(s) ds \right) d\tau} + \frac{1}{\int_t^b \beta_1(\tau) \exp \left(-\mu \int_t^{\tau} \alpha_1(s) ds \right) d\tau} \right]^{1-\nu}$$

şeklinde tanımlansın.

3.1.5. Teorem [29, Teorem 2.1]

$t \in [t_0, \infty)$ için $\beta_1(t) \geq 0$ olsun. $a < b$ için $a, b \in \mathbb{R}$, $x_1(t)$ nin $x_1(a) = 0 = x_1(b)$ olacak şekilde ardışık sıfırları olmak üzere Eş. 3.5 sistemi aşıkâr olmayan bir $(x_1(t), x_2(t))$ çözümüne sahip olsun. Böylece $\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\mu} = 1$ olmak üzere

$$\int_a^b \beta_2^+(s) D_*(s) ds \geq 1 \quad (3.11)$$

eşitsizliği sağlanır.

2012 yılında Tiryaki ve diğerleri [30], Eş. 3.5 lineer olmayan sistemi için aşağıdaki Lyapunov tipi eşitsizlikleri elde etmişlerdir.

3.1.6. Teorem [30, Teorem 2.1]

$t \in [t_0, \infty)$ için $\beta_1(t) > 0$ olsun. $a < b$ için $a, b \in \mathbb{R}$, $x_1(t)$ nin $x_1(a) = 0 = x_1(b)$ olacak şekilde ardışık sıfırları olmak üzere Eş. 3.5 sistemi $\nu = \alpha$ için aşıkâr olmayan bir $(x_1(t), x_2(t))$ çözümüne sahip olsun. Böylece $\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\mu} = 1$ olmak üzere

$$\int_a^b \beta_2^+(s) D_*(s) ds \geq 1 \quad (3.12)$$

eşitsizliği sağlanır.

3.1.7. Teorem [30, Teorem 2.2]

$t \in [t_0, \infty)$ için $\beta_1(t) > 0$ olsun. $a < b$ için $a, b \in \mathbb{R}$, $x_1(t)$ nin $x_1(a) = 0 = x_1(b)$ olacak şekilde ardışık sıfırları olmak üzere Eş. 3.5 sistemi $\nu = \alpha$ için aşıkâr olmayan bir $(x_1(t), x_2(t))$ çözümüne sahip olsun. Böylece $\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\mu} = 1$ olmak üzere

$$\int_a^b \beta_2^+(s) E_*(s) ds \geq 1 \quad (3.13)$$

eşitsizliği sağlanır.

Tang ve diğerleri [29] un Teorem 3.1.5 i ile Tiryaki ve diğerleri [30] un Teorem 3.1.6 sının ispatları farklıdır.

Şimdi Teorem 3.1.6 ve Teorem 3.1.7 yi karşılaştırabilmek için Jensen eşitsizliği verilsin.

$t > 0$ ve $1 < \alpha < 2$ için $h(t) = t^{\alpha-1}$ fonksiyonu konkav olduğundan

$$w = \frac{1}{\int_a^t \beta_1(\tau) \exp\left(-\mu \int_t^\tau \alpha_1(s) ds\right) d\tau} \quad \text{ve} \quad v = \frac{1}{\int_t^b \beta_1(\tau) \exp\left(-\mu \int_t^\tau \alpha_1(s) ds\right) d\tau} \quad \text{olarak}$$

alındığında Jensen eşitsizliğinden $h\left(\frac{w+v}{2}\right) \geq \frac{1}{2}(h(w) + h(v))$ sağlanır. Yani,

$$E_*(t) \geq D_*(t) \quad (3.14)$$

eşitsizliği sağlanır.

$\alpha > 2$ ise $h(t)$ fonksiyonu $t > 0$ için konveks olduğundan Eş. 3.14 eşitsizliği yön değiştirir. Yani,

$$E_*(t) \leq D_*(t) \quad (3.15)$$

eşitsizliği sağlanır.

3.1.1. Uyarı

$1 < \alpha < 2$ için Eş. 3.14 eşitsizliği gerçekleşeceğinden Eş. 3.12 eşitsizliği Eş. 3.13 eşitsizliğinden daha iyidir. Yani, Eş. 3.13 eşitsizliği Eş. 3.12 eşitsizliğinden elde edilir. Ancak, tersi her zaman doğru değildir. Benzer şekilde $\alpha > 2$ olduğunda Eş. 3.15 eşitsizliği gerçekleşeceğinden Eş. 3.13 eşitsizliği Eş. 3.12 eşitsizliğinden daha iyidir. Yani, Eş. 3.12 eşitsizliği Eş. 3.13 eşitsizliğinden elde edilir Ancak, tersi her zaman doğru değildir.

2006 yılında Napoli ve Pinasco [31], her $t \in \mathbb{R}$ ve $k = 1, 2$ için $f_k(t)$ reel değerli, pozitif ve sürekli fonksiyonlar olmak üzere $1 < p_k < +\infty$ şartını sağlayan p_k ile negatif olmayan α_{kk} parametreleri

$$\sum_{k=1}^2 \frac{\alpha_{kk}}{p_k} = 1 \quad (3.16)$$

şartını sağladığında

$$\begin{cases} -\left(\left|x_1'\right|^{p_1-2} x_1'\right)' = f_1(t) |x_1|^{\alpha_{11}-2} |x_2|^{\alpha_{22}} \\ -\left(\left|x_2'\right|^{p_2-2} x_2'\right)' = f_2(t) |x_1|^{\alpha_{11}} |x_2|^{\alpha_{22}-2} x_2 \end{cases} \quad (3.17)$$

yarı-lineer sistemi için bir Lyapunov tipi eşitsizlik elde etmişlerdir.

Burada $k = 1, 2$ için $\alpha_{kk} = p_k = \alpha$ ve $i = 1, 2$, $i \neq k$ için $\alpha_{ii} = 0$ olarak alındığında Eş. 3.17 sisteminin

$$-\left(\left|x_k'\right|^{\alpha-2} x_k'\right)' = f_k(t) |x_k|^{\alpha-2} x_k \quad (3.18)$$

yarı-linear denklemine indirgendiğine dikkat edilmelidir.

Elde ettikleri sonuçlar aşağıdaki gibidir.

3.1.8. Teorem [31, Teorem 1.5]

$a < b$ için $a, b \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2$ için $x_k(t)$ nin $x_k(a) = 0 = x_k(b)$ olacak şekilde ardışık sıfırları olmak üzere Eş. 3.17 sistemi aşikar olmayan bir $(x_1(t), x_2(t))$ çözümüne sahip ise

$$\prod_{k=1}^2 \left[\int_a^b f_k(s) ds \right]^{p_k} \geq 2^{\sum_{k=1}^2 \alpha_{kk}} (b-a)^{1-\sum_{k=1}^2 \alpha_{kk}} \quad (3.19)$$

eşitsizliği sağlanır.

Ayrıca, Napoli ve Pinasco [31], $k = 1, 2$ için $x_k(t)$, $x_k(a) = 0 = x_k(b)$ şartını sağlayan aşikar olmayan çözüm ve $q(t)$, $\mathbb{R}$ üzerinde reel değerli, pozitif ve sürekli bir fonksiyon olmak üzere $1 < p_k < +\infty$ şartını sağlayan p_k ile negatif olmayan α_{kk} parametreleri Eş. 3.16 şartını sağladığında

$$\begin{cases} -\left(|x_1'|^{p_1-2} x_1' \right)' = \lambda_1 \alpha_{11} q(t) |x_1|^{\alpha_{11}-2} |x_2|^{\alpha_{22}} \\ -\left(|x_2'|^{p_2-2} x_2' \right)' = \lambda_2 \alpha_{22} q(t) |x_1|^{\alpha_{11}} |x_2|^{\alpha_{22}-2} x_2 \end{cases} \quad (3.20)$$

özdeğer problemi için aşağıdaki sonucu elde etmişlerdir.

3.1.9. Teorem [31, Teorem 1.4]

Eş. 3.20 probleminin her genelleştirilmiş (λ_1, λ_2) özdeğeri için

$$\lambda_2 \geq h(\lambda_1) = \frac{1}{\alpha_{22}} \left(\frac{2^{\alpha_{11} + \alpha_{22}}}{(\lambda_1 \alpha_{11})^{\frac{\alpha_{11}}{p_1}} (b-a)^{\alpha_{11} + \alpha_{22} - 1} \int_a^b q(s) ds} \right)^{\frac{p_2}{\alpha_{22}}} \quad (3.21)$$

eşitsizliği sağlanır.

2010 yılında Çakmak ve Tiryaki [32], her $t \in \mathbb{R}$ ve $k=1,2$ için $r_k(t) > 0$ olmak üzere $r_k(t)$ ve $f_k(t)$ reel değerli, sürekli fonksiyonlar, $1 < p_k < +\infty$ şartını sağlayan p_k ile negatif olmayan $i, k=1,2$ için α_{ik} parametreleri $i=1,2$ için $\sum_{k=1}^2 \frac{\alpha_{ik}}{p_k} = 1$ şartını sağladığında

$$\begin{cases} -\left(r_1(t) |x_1'|^{p_1-2} x_1' \right)' = f_1(t) |x_1|^{\alpha_{11}-2} x_1 |x_2|^{\alpha_{12}} \\ -\left(r_2(t) |x_2'|^{p_2-2} x_2' \right)' = f_2(t) |x_1|^{\alpha_{21}} |x_2|^{\alpha_{22}-2} x_2 \end{cases} \quad (3.22)$$

şeklindeki lineer olmayan sistemler için Lyapunov tipi eşitsizlik elde etmişlerdir.

Eş. 3.22 sisteminde $\alpha_{21} = \alpha_{11}$, $\alpha_{22} = \alpha_{12}$ ve $k=1,2$ için $r_k(t)=1$ alınırsa Eş. 3.22 sisteminin Eş. 3.17 sistemine indirgendiğine dikkat edilmelidir. Ayrıca, Eş. 3.22 sistemi için Eş. 3.17 sisteminde $k=1,2$ için $f_k(t)$ fonksiyonları üzerinde var olan pozitiflik şartı kaldırılmıştır. Bu yönleriyle Eş. 3.22 sistemi Eş. 3.17 sisteminin hem genellemesi hem de geliştirilmiştir.

Yine Eş. 3.22 sisteminde $i, k=1,2$ için $\alpha_{kk} = p_k = \alpha$, $i \neq k$ için $\alpha_{ik} = 0$ ve $r_k(t) = r(t)$ olarak alındığında sistemin

$$-\left(r(t) |x_k'|^{\alpha-2} x_k' \right)' = f_k(t) |x_k|^{\alpha-2} x_k \quad (3.23)$$

denklemine buna ek olarak $r(t)=1$ alınırsa Eş. 3.18 yarı-lineer denklemine indirgendiği görülmektedir.

Çakmak ve Tiryaki [32] nin, Napoli ve Pinasco [31] in sonucunu genelleştirdikleri sonuçları aşağıdaki gibidir.

Kolaylık sağlaması açısından her $t \in \mathbb{R}$ için $w(t) > 0$ olacak şekilde reel değerli, sürekli bir fonksiyon, $t \in (a, b)$, $\mu \in (1, +\infty)$, $\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu'} = 1$ olmak üzere

$$M(t, w, \mu) = \left(\int_a^t (w(s))^{-\frac{\mu'}{\mu}} ds \right)^{1-\mu} + \left(\int_t^b (w(s))^{-\frac{\mu'}{\mu}} ds \right)^{1-\mu} \quad (3.24)$$

integral operatörü tanımlansın.

3.1.10. Teorem [32, Teorem 1]

$a < b$ için $a, b \in \mathbb{R}$, $k=1, 2$ için $x_k(t)$ nin $x_k(a)=0=x_k(b)$ olacak şekilde ardışık sıfırları, $M(c_k, r_k, p_k)$ var olacak şekilde $|x_k(c_k)| = \max_{a < t < b} |x_k(t)|$ olmak üzere Eş. 3.22 sistemi aşıkâr olmayan bir $(x_1(t), x_2(t))$ çözümüne sahip ise

$$\prod_{k=1}^2 \left(\int_a^b f_k^+(s) ds \right)^{\sum_{i=1, i \neq k}^2 \frac{\alpha_{ik}}{p_k}} \geq \prod_{k=1}^2 M^{\sum_{i=1, i \neq k}^2 \frac{\alpha_{ik}}{p_k}}(c_k, r_k, p_k) \quad (3.25)$$

eşitsizliği sağlanır.

2010 yılında Çakmak ve Tiryaki [33], $n \in \mathbb{N}$ ve her $t \in \mathbb{R}$, $k=1, 2, \dots, n$ için $f_k(t)$ fonksiyonları reel değerli, sürekli fonksiyonlar olmak üzere $1 < p_k < +\infty$ şartını sağlayan p_k ile negatif olmayan $i, k=1, 2, \dots, n$ için α_{ik} parametreleri $i=1, 2, \dots, n$ için

$$\sum_{k=1}^n \frac{\alpha_{ik}}{p_k} = 1 \quad (3.26)$$

şartı sağlandığında

$$\begin{cases} -\left(\left|x_1'\right|^{p_1-2} x_1'\right)' = f_1(t) |x_1|^{\alpha_{11}-2} |x_2|^{\alpha_{22}} \dots |x_n|^{\alpha_{nn}} \\ -\left(\left|x_2'\right|^{p_2-2} x_2'\right)' = f_2(t) |x_1|^{\alpha_{11}} |x_2|^{\alpha_{22}-2} \dots |x_n|^{\alpha_{nn}} \\ \dots \\ -\left(\left|x_n'\right|^{p_n-2} x_n'\right)' = f_n(t) |x_1|^{\alpha_{11}} |x_2|^{\alpha_{22}} \dots |x_n|^{\alpha_{nn}-2} x_n \end{cases} \quad (3.27)$$

sistemi için Lyapunov tipi eşitsizlik elde etmişlerdir. $k=1,2,\dots,n$ için Eş. 3.27 sistemi aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir.

$$-\left(\left|x_k'\right|^{p_k-2} x_k'\right)' = f_k(t) |x_k|^{\alpha_{kk}-2} x_k \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n |x_i|^{\alpha_{ii}}. \quad (3.28)$$

Eş. 3.27 sisteminin Eş. 3.17 sisteminin n boyuta bir genellemesi olduğuna dikkat edilmelidir. Yine, $i,k=1,2,\dots,n$ için $\alpha_{kk} = p_k$ ve $i \neq k$ için $\alpha_{ii} = 0$ olarak alındığında Eş. 3.27 sisteminin Eş. 3.18 yarı-lineer diferansiyel denkleminde indirgendiği görülür.

Elde ettikleri sonuç aşağıdaki gibidir.

3.1.11. Teorem [33, Teorem 1]

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $a < b$ için $a, b \in \mathbb{R}$, $k=1,2,\dots,n$ için $x_k(t)$ nin $x_k(a) = 0 = x_k(b)$ olacak şekilde ardışık sıfırları ve $|x_k(c_k)| = \max_{a < t < b} |x_k(t)|$ olmak üzere Eş. 3.27 sistemi aşikar olmayan bir $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ çözümüne sahip ise

$$\prod_{k=1}^n \left(\int_a^b f_k^+(s) ds \right)^{\frac{\alpha_{kk}}{p_k}} \geq \prod_{k=1}^n \left[\frac{1}{(c_k - a)^{p_k - 1}} + \frac{1}{(b - c_k)^{p_k - 1}} \right]^{\frac{\alpha_{kk}}{p_k}} \quad (3.29)$$

eşitsizliği sağlanır.

2012 yılında Tang ve He [34],

(H1) $k=1,2$ için $r_k(t)$ ve $f_k(t)$ fonksiyonları $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı reel değerli, sürekli fonksiyonlar, $r_k(t) > 0$ olsun ve $1 < p_k < \infty$, $i, k=1,2$ için $\alpha_{ik} > 0$ olmak üzere $i=1,2$ için $\sum_{k=1}^2 \frac{\alpha_{ik}}{p_k} = 1$ eşitliği sağlansın.

ve

(H2) $k=1,2,...,n$ için $r_k(t)$ ve $f_k(t)$ fonksiyonları $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı reel değerli, sürekli fonksiyonlar, $r_k(t) > 0$ olsun ve $1 < p_k < \infty$, $\alpha_{kk} > 0$ olmak üzere $\sum_{k=1}^n \frac{\alpha_{kk}}{p_k} = 1$ eşitliği sağlansın.

hipotezleri altında Eş. 3.22 ve

$$\begin{cases} -\left(r_1(t) |x_1'|^{p_1-2} x_1' \right)' = f_1(t) |x_1|^{\alpha_{11}-2} |x_2|^{\alpha_{22}} \dots |x_n|^{\alpha_{nn}} \\ -\left(r_2(t) |x_2'|^{p_2-2} x_2' \right)' = f_2(t) |x_1|^{\alpha_{11}} |x_2|^{\alpha_{22}-2} |x_3|^{\alpha_{33}} \dots |x_n|^{\alpha_{nn}} \\ \dots \\ -\left(r_n(t) |x_n'|^{p_n-2} x_n' \right)' = f_n(t) |x_1|^{\alpha_{11}} |x_2|^{\alpha_{22}} \dots |x_n|^{\alpha_{nn}-2} x_n \end{cases} \quad (3.30)$$

sistemleri için Lyapunov tipi eşitsizlikler elde etmişlerdir.

Bu bölüm boyunca, $k = 1, 2, \dots, n$ için $\xi_k(t)$ ve $\mu_k(t)$ fonksiyonları

$$\xi_k(t) = \int_a^t r_k^{\frac{1}{1-p_k}}(s) ds \text{ ve } \mu_k(t) = \int_t^b r_k^{\frac{1}{1-p_k}}(s) ds \quad (3.31)$$

ve $t > 0$ ve $k = 1, 2, \dots, n$ için

$$D_k(t) = \frac{[\xi_k(t)\mu_k(t)]^{p_k-1}}{\xi_k^{p_k-1}(t) + \mu_k^{p_k-1}(t)}, \quad (3.32)$$

$$E_k(t) = 2^{p_k-2} \left(\frac{\xi_k(t)\mu_k(t)}{\xi_k(t) + \mu_k(t)} \right)^{p_k-1} \quad (3.33)$$

ve

$$F_k = 2^{-p_k} (\xi_k(t) + \mu_k(t))^{p_k-1} = 2^{-p_k} \left(\int_a^b r_k^{\frac{1}{1-p_k}}(s) ds \right)^{p_k-1} \quad (3.34)$$

olsun.

Eş. 3.14 ve Eş. 3.15 dekine benzer bir düşünceyle $k = 1, 2, \dots, n$ için $1 < p_k < 2$ iken Jensen eşitsizliğinden

$$D_k(t) \geq E_k(t) \quad (3.35)$$

eşitsizliğinin ve $p_k > 2$ iken ise

$$D_k(t) \leq E_k(t) \quad (3.36)$$

eşitsizliğinin sağlandığı kolaylıkla görülür.

$k=1,2,\dots,n$ için $p_k > 1$ ve $t > 0$ için $l(t) = t^{1-p_k}$ fonksiyonu konveks olduğundan

$l\left(\frac{w+v}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[l(w)+l(v)]$ Jensen eşitsizliğinde $w = \xi_k(t)$ ve $v = \mu_k(t)$ olarak alınırsa

$$D_k(t) \leq F_k \quad (3.37)$$

eşitsizliği sağlanır.

$4AB \leq (A+B)^2$ eşitsizliğinde $k=1,2,\dots,n$ için $A = \xi_k(t) > 0$ ve $B = \mu_k(t) > 0$ alınırsa

$$E_k(t) \leq F_k \quad (3.38)$$

eşitsizliği sağlanır.

Tang ve He [34] ün elde ettiği Lyapunov tipi eşitsizlikler aşağıdaki gibidir.

3.1.12. Teorem [34, Teorem 2.1]

(H1) hipotezi sağlansın. $a < b$ için $a, b \in \mathbb{R}$, $k=1,2$ için $x_k(t)$ nin $x_k(a) = 0 = x_k(b)$ olacak şekilde ardışık sıfırları olmak üzere Eş. 3.22 sistemi aşıkâr olmayan bir $(x_1(t), x_2(t))$ çözümüne sahip ise

$$\prod_{k=1}^2 \prod_{i=1}^2 \left(\int_a^b f_k^+(s) D_i(s) ds \right)^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^2 \frac{\alpha_{jk}}{p_k}} > 1 \quad (3.39)$$

eşitsizliği sağlanır.

3.1.13. Teorem [34, Teorem 3.1]

(H2) hipotezi sağlansın. $a < b$ için $a, b \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots, n$ için $x_k(t)$ nin $x_k(a) = 0 = x_k(b)$ olacak şekilde ardışık sıfırları olmak üzere Eş. 3.30 sistemi aşıkâr olmayan bir $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ çözümüne sahip ise

$$\prod_{k=1}^n \prod_{i=1}^n \left(\int_a^b f_k^+(s) D_i(s) ds \right)^{\frac{\alpha_{kk} \alpha_{ii}}{p_k p_i}} > 1 \quad (3.40)$$

eşitsizliği sağlanır.

2012 yılında Aktaş ve diğerleri [35] in Eş. 3.22 ve Eş. 3.30 sistemleri için elde ettikleri Lyapunov tipi eşitsizlikler aşağıdaki gibidir.

3.1.14. Teorem [35, Teorem 2.1]

(H1) hipotezi sağlansın. $a < b$ için $a, b \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2$ için $x_k(t)$ nin $x_k(a) = 0 = x_k(b)$ olacak şekilde ardışık sıfırları olmak üzere Eş. 3.22 sistemi aşıkâr olmayan bir $(x_1(t), x_2(t))$ çözümüne sahip ise

$$\prod_{k=1}^2 \prod_{i=1}^2 \left(\int_a^b f_k^+(s) E_i(s) ds \right)^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \frac{\alpha_{jk}}{p_k}} \quad (3.41)$$

eşitsizliği sağlanır.

3.1.15. Teorem [35, Teorem 2.2]

(H2) hipotezi sağlansın. $a < b$ için $a, b \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots, n$ için $x_k(t)$ nin $x_k(a) = 0 = x_k(b)$ olacak şekilde ardışık sıfırları olmak üzere Eş. 3.30 sistemi aşıkâr olmayan bir $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ çözümüne sahip ise

$$\prod_{k=1}^n \prod_{i=1}^n \left(\int_a^b f_k^+(s) E_i(s) ds \right)^{\frac{\alpha_{kk} \alpha_{ii}}{p_k p_i}} > 1 \quad (3.42)$$

eşitsizliği sağlanır.

3.1.2. Uyarı

$k = 1, 2, \dots, n$ için $1 < p_k < 2$ olsun. Eş. 3.35 eşitsizliği gerçekleşeceğinden Eş. 3.41 ve Eş. 3.42 eşitsizlikleri sırasıyla Eş. 3.39 ve Eş. 3.40 eşitsizliklerinden daha iyidir. Yani, Teorem 3.1.14 ve Teorem 3.1.15 sırasıyla Teorem 3.1.12 ve Teorem 3.1.13 ten daha iyidir. Benzer şekilde, $k = 1, 2, \dots, n$ için $p_k > 2$ olduğunda Eş. 3.36 eşitsizliği gerçekleşeceğinden Teorem 3.1.12 ve Teorem 3.1.13 sırasıyla Teorem 3.1.14 ve Teorem 3.1.15 den daha iyidir. Ayrıca, $k = 1, 2, \dots, n$ için $p_k = 2$ alındığında Teorem 3.1.14 ve Teorem 3.1.15 sırasıyla Teorem 3.1.12 ve Teorem 3.1.13 ile çakışır.

2013 yılında Yang ve diğerleri [36], Eş. 3.30 sisteminin en genel hali olan

$$\begin{cases} -\left(r_1(t) |x_1'|^{p_1-2} x_1' \right)' = f_1(t) |x_1|^{\alpha_{11}-2} |x_2|^{\alpha_{12}} \dots |x_n|^{\alpha_{1n}} \\ -\left(r_2(t) |x_2'|^{p_2-2} x_2' \right)' = f_2(t) |x_1|^{\alpha_{21}} |x_2|^{\alpha_{22}-2} |x_3|^{\alpha_{23}} \dots |x_n|^{\alpha_{2n}} \\ \dots \\ -\left(r_n(t) |x_n'|^{p_n-2} x_n' \right)' = f_n(t) |x_1|^{\alpha_{n1}} |x_2|^{\alpha_{n2}} \dots |x_n|^{\alpha_{nn}-2} x_n \end{cases} \quad (3.43)$$

sistemini ilk ele alanlardır ve elde ettikleri Lyapunov tipi eşitsizlik aşağıdaki gibidir.

3.1.16. Teorem [36]

$k = 1, 2, \dots, n$ için $e_k \geq 0$ ve

$$e_k \left(1 - \frac{\alpha_{kk}}{p_k} \right) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{\alpha_{ik}}{p_k} e_i = 0 \quad (3.44)$$

lineer homojen sisteminin aşikar olmayan bir çözümü $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ var olsun. $k = 1, 2, \dots, n$ için $r_k(t) > 0$, $1 < p_k < \infty$ ve $k, i = 1, 2, \dots, n$ için α_{ki} negatif olmayan sabitler ve $a < b$ reel sabitler $k = 1, 2, \dots, n$ için $x_k(t)$ nin $x_k(a) = 0 = x_k(b)$ şartlarını sağlayan ardışık sıfırları olmak üzere Eş. 3.43 sistemi aşikar olmayan bir $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ çözümüne sahip ise

$$\prod_{k=1}^n \left[F_k \int_a^b f_k^+(s) ds \right]^{e_k} > 1 \quad (3.45)$$

eşitsizliği sağlanır.

2013 yılında Aktaş [37], Eş. 3.43 sistemi için aşağıdaki sonuçları elde etmiştir.

3.1.17. Teorem [37, Teorem 2.1]

$k = 1, 2, \dots, n$ için $e_k \geq 0$ ve Eş. 3.44 lineer homojen sisteminin aşikar olmayan bir çözümü $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ var olsun. $k = 1, 2, \dots, n$ için $r_k(t) > 0$, $1 < p_k < \infty$ ve $k, i = 1, 2, \dots, n$ için α_{ki} negatif olmayan sabitler $\alpha_{ki} = \alpha_{ik}$ olmak üzere $a < b$ reel sabitler $k = 1, 2, \dots, n$ için $x_k(t)$

nin $x_k(a) = 0 = x_k(b)$ şartlarını sağlayan ardışık sıfırları olmak üzere Eş. 3.43 sistemi aşikar olmayan $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ çözümüne sahip ise

$$\prod_{k=1}^n \left(\int_a^b f_k^+(s) \prod_{i=1}^n D_i^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i}}(s) ds \right)^{e_k} > 1 \quad (3.46)$$

eşitsizliği sağlanır.

3.1.18. Teorem [37, Teorem 2.2]

$k = 1, 2, \dots, n$ için $e_k \geq 0$ ve Eş. 3.44 lineer homojen sisteminin aşikar olmayan bir çözümü $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ var olsun. $k = 1, 2, \dots, n$ için $r_k(t) > 0$, $1 < p_k < \infty$ ve $k, i = 1, 2, \dots, n$ için α_{ki} negatif olmayan sabitler $\alpha_{ki} = \alpha_{ik}$ olmak üzere $a < b$ reel sabitler $k = 1, 2, \dots, n$ için $x_k(t)$ nin $x_k(a) = 0 = x_k(b)$ şartlarını sağlayan ardışık sıfırları olmak üzere Eş. 3.43 sistemi aşikar olmayan bir $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ çözümüne sahip ise

$$\prod_{k=1}^n \left(\int_a^b f_k^+(s) \prod_{i=1}^n E_i^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i}}(s) ds \right)^{e_k} > 1 \quad (3.47)$$

eşitsizliği sağlanır.

2014 yılında Tiryaki ve diğerleri [38], Eş. 3.22 ve Eş. 3.30 sistemleri için aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir.

3.1.19. Teorem [38, Teorem 2.1]

(H1) sağlansın. $a < b$ reel sabitler $k = 1, 2$ için $x_k(t)$ nin $x_k(a) = 0 = x_k(b)$ şartlarını sağlayan ardışık sıfırları olmak üzere Eş. 3.22 sistemi aşıkâr olmayan $(x_1(t), x_2(t))$ çözümüne sahip ise

$$\prod_{k=1}^2 \left(\int_a^b f_k^+(s) \prod_{i=1}^2 D_i^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i}}(s) ds \right)^{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^2 \frac{\alpha_{jk}}{p_k}} > 1 \quad (3.48)$$

eşitsizliği sağlanır.

3.1.20. Teorem [38, Teorem 2.2]

(H1) sağlansın. $a < b$ reel sabitler $k = 1, 2$ için $x_k(t)$ nin $x_k(a) = 0 = x_k(b)$ şartlarını sağlayan ardışık sıfırları olmak üzere Eş. 3.22 sistemi aşıkâr olmayan bir $(x_1(t), x_2(t))$ çözümüne sahip ise

$$\prod_{k=1}^2 \left(\int_a^b f_k^+(s) \prod_{i=1}^2 E_i^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i}}(s) ds \right)^{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^2 \frac{\alpha_{jk}}{p_k}} > 1 \quad (3.49)$$

eşitsizliği sağlanır.

3.1.21. Teorem [38, Teorem 3.1]

(H2) sağlansın. $a < b$ reel sabitler $k = 1, 2, \dots, n$ için $x_k(t)$ nin $x_k(a) = 0 = x_k(b)$ şartlarını sağlayan ardışık sıfırları olmak üzere Eş. 3.30 sistemi aşıkâr olmayan $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ çözümüne sahip ise

$$\prod_{k=1}^n \left(\int_a^b f_k^+(s) \prod_{i=1}^n D_i^{\frac{\alpha_{ii}}{p_i}}(s) ds \right)^{\frac{\alpha_{kk}}{p_k}} > 1 \quad (3.50)$$

eşitsizliği sağlanır.

3.1.22. Teorem [38, Teorem 3.2]

(H2) sağlansın. $a < b$ reel sabitler $k = 1, 2, \dots, n$ için $x_k(t)$ nin $x_k(a) = 0 = x_k(b)$ şartlarını sağlayan ardışık sıfırları olmak üzere Eş. 3.30 sistemi aşıkâr olmayan $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ çözümüne sahip ise

$$\prod_{k=1}^n \left(\int_a^b f_k^+(s) \prod_{i=1}^n E_i^{\frac{\alpha_{ii}}{p_i}}(s) ds \right)^{\frac{\alpha_{kk}}{p_k}} > 1 \quad (3.51)$$

eşitsizliği sağlanır.

3.1.3. Uyarı

Tiryaki ve diğerleri [38] tarafından elde edilen Teorem 3.1.19 ve Teorem 3.1.21 deki Eş. 3.48 ve Eş. 3.50 eşitsizliklerine Hölder eşitsizliği uygulanırsa sırasıyla Tang ve He [34] tarafından elde edilen Teorem 3.1.12 ve Teorem 3.1.13 deki Eş. 3.39 ve Eş. 3.40 eşitsizlikleri elde edilir. Böylece, Tiryaki ve diğerleri [38] in sonuçları Tang ve He [34] ün sonuçlarından daha iyidir.

3.2. Fark Denklem Sistemleri için Lyapunov Tipi Eşitsizlikler

1983 yılında Cheng [39], ikinci basamaktan

$$-\Delta^2 x(n) = f(n)x(n+1) \quad (3.52)$$

fark denklemi için aşağıdaki Lyapunov tipi eşitsizliği elde etmiştir.

3.2.1. Teorem [39, Önerme 1]

$a, b \in \mathbb{Z}$ $a \leq b-2$, $\mathbb{Z}[a, b] = \{a, a+1, \dots, b-1, b\}$, f , $\mathbb{Z}$ üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyon olmak üzere $n \in \mathbb{Z}$ için $f(n) \geq 0$ ve $\mathfrak{I}(z) = \begin{cases} \frac{z^2-1}{z}, & z-1 \text{ çift} \\ z, & z-1 \text{ tek} \end{cases}$ olmak üzere ikinci basamaktan Eş. 3.52 fark denklemi, $x(a) = 0 = x(b)$ Dirichlet sınır şartını sağlayan $n \in \mathbb{Z}[a, b]$ için aşıkâr olmayan bir $x(n)$ çözüme sahip ise

$$\mathfrak{I}(b-a) \sum_{\tau=a}^{b-2} f(\tau) \geq 4 \quad (3.53)$$

eşitsizliği sağlanır.

Eş. 3.53 eşitsizliği Eş. 3.2 Lyapunov eşitsizliğinin fark benzeridir.

Fark denklem sistemleri için elde edilen Lyapunov tipi eşitsizlikler şu şekildedir.

Kolaylık olması açısından bu bölümde $i = 1, 2, \dots, m$ için $B_i(n)$

$$B_i(n) = \frac{\left[\sum_{\tau=a}^n r_i^{\frac{1}{1-p_i}}(\tau) \sum_{\tau=n+1}^{b-1} r_i^{\frac{1}{1-p_i}}(\tau) \right]^{p_i-1}}{\left(\sum_{\tau=a}^n r_i^{\frac{1}{1-p_i}}(\tau) \right)^{p_i-1} + \left(\sum_{\tau=n+1}^{b-1} r_i^{\frac{1}{1-p_i}}(\tau) \right)^{p_i-1}} \quad (3.54)$$

şeklinde tanımlansın.

2003 yılında Guseinov ve Kaymakçalan [25], $\alpha_1(n)$, $\beta_1(n)$ ve $\beta_2(n)$ reel değerli fonksiyonlar ve $n \in \mathbb{Z}$ için $1 - \alpha_1(n) \neq 0$ olmak üzere

$$\begin{cases} \Delta x_1(n) = \alpha_1(n)x_1(n+1) + \beta_1(n)x_2(n) \\ \Delta x_2(n) = -\beta_2(n)x_1(n+1) - \alpha_1(n)x_2(n) \end{cases} \quad (3.55)$$

sistemi için aşağıdaki Lyapunov tipi eşitsizliği elde etmişlerdir.

3.2.2. Teorem [25, Teorem 1.2]

Eş. 3.55 sistemi $a \leq b-2$ reel sabitler için $x_1(a) = 0 = x_1(b)$ sınır şartını sağlayan aşıkır olmayan bir $(x_1(t), x_2(t))$ çözümüne sahip ise

$$\sum_{\tau=a}^{b-2} |\alpha_1(\tau)| + \left(\sum_{\tau=a}^{b-1} \beta_1(\tau) \sum_{\tau=a}^{b-2} \beta_2^+(\tau) \right)^{\frac{1}{2}} \geq 2 \quad (3.56)$$

eşitsizliği sağlanır.

2011 yılında He ve Zhang [40], $\mu, \nu > 1$ için $\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} = 1$ ve $\alpha_1(n), \beta_1(n)$ ve $\beta_2(n), \mathbb{Z}$ üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlar olmak üzere

$$\begin{cases} \Delta x_1(n) = \alpha_1(n)x_1(n+1) + \beta_1(n)|x_2(n)|^{\mu-2}x_2(n) \\ \Delta x_2(n) = -\beta_2(n)|x_1(n+1)|^{\nu-2}x_1(n+1) - \alpha_1(n)x_2(n) \end{cases} \quad (3.57)$$

sistemi için aşağıdaki Lyapunov tipi eşitsizliği elde etmişlerdir.

3.2.3. Teorem [40, Teorem 2.1]

$a \leq b-1$ olmak üzere $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $1 - \alpha_1(n) > 0$ olsun. Eş. 3.57 sistemi a ve b noktalarında genelleştirilmiş sifıra sahip yani,

$$x_1(a) = 0 \text{ veya } x_1(a)x_1(a+1) < 0$$

$$\text{ve} \tag{3.58}$$

$$x_1(b) = 0 \text{ veya } x_1(b)x_1(b+1) < 0$$

koşulunu sağlayan aşikar olmayan bir $(x_1(n), x_2(n))$ çözümüne sahip ise,

$$\sum_{\tau=a}^{b-1} |\alpha_1(\tau)| + \left(\sum_{\tau=a}^b \beta_1(\tau) \right)^\mu \left(\sum_{\tau=a}^{b-1} \beta_2^+(\tau) \right)^{\frac{1}{\nu}} \geq 2 \tag{3.59}$$

eşitsizliği sağlanır.

2013 yılında Zhang ve diğerleri [41], Eş. 3.57 sistemi için

$$D^*(n) = \frac{\left(\sum_{\tau=a}^n \beta_1(\tau) \prod_{i=1}^n [1 - \alpha_1(i)]^{-\mu} \right)^{\frac{\nu}{\mu}} \left(\sum_{\tau=n+1}^b \beta_1(\tau) \prod_{i=n+1}^{\tau-1} [1 - \alpha_1(i)]^\mu \right)^{\frac{\nu}{\mu}}}{\left(\sum_{\tau=a}^n \beta_1(\tau) \prod_{i=1}^n [1 - \alpha_1(i)]^{-\mu} \right)^{\frac{\nu}{\mu}} + \left(\sum_{\tau=n+1}^b \beta_1(\tau) \prod_{i=n+1}^{\tau-1} [1 - \alpha_1(i)]^\mu \right)^{\frac{\nu}{\mu}}}$$

olmak üzere aşağıdaki sonucu elde etmişlerdir.

3.2.4. Teorem [41, Teorem 2.1]

$a \leq b-1$ olmak üzere $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $1 - \alpha_1(n) > 0$ ve $\beta_1(n) \geq 0$ olsun. Eş. 3.57 sistemi Eş.

3.58 şartını sağlayan aşikar olmayan bir $(x_1(n), x_2(n))$ çözümüne sahip ise

$$\sum_{\tau=a}^{b-1} \beta_2^+(\tau) D^*(\tau) \geq 1 \tag{3.60}$$

eşitsizliği sağlanır.

2012 yılında Zhang ve Tang [42],

$$\begin{cases} -\Delta \left(r_1(n) |\Delta x_1(n)|^{p_1-2} \Delta x_1(n) \right) = f_1(n) |x_1(n+1)|^{\alpha_{11}-2} x_1(n+1) |x_2(n+1)|^{\alpha_{12}} \\ -\Delta \left(r_2(n) |\Delta x_2(n)|^{p_2-2} \Delta x_2(n) \right) = f_2(n) |x_1(n+1)|^{\alpha_{21}} |x_2(n+1)|^{\alpha_{22}-2} x_2(n+1) \end{cases} \quad (3.61)$$

ve

$$\begin{cases} -\Delta \left(r_1(n) |\Delta x_1(n)|^{p_1-2} \Delta x_1(n) \right) = f_1(n) |x_1(n+1)|^{\alpha_{11}-2} x_1(n+1) |x_2(n+1)|^{\alpha_{22}} \dots |x_m(n+1)|^{\alpha_{mm}} \\ -\Delta \left(r_2(n) |\Delta x_2(n)|^{p_2-2} \Delta x_2(n) \right) = f_2(n) |x_1(n+1)|^{\alpha_{11}} |x_2(n+1)|^{\alpha_{22}-2} x_2(n+1) \dots |x_m(n+1)|^{\alpha_{mm}} \\ \dots \\ -\Delta \left(r_m(n) |\Delta x_m(n)|^{p_m-2} \Delta x_m(n) \right) = f_m(n) |x_1(n+1)|^{\alpha_{11}} |x_2(n+1)|^{\alpha_{22}} \dots |x_m(n+1)|^{\alpha_{mm}-2} x_m(n+1) \end{cases} \quad (3.62)$$

sistemleri için

(H₁) $\forall n \in \mathbb{Z}$ ve $i = 1, 2, \dots, m$ için $r_i(n)$ ve $f_i(n)$ reel değerli fonksiyonlar ve $r_i(n) > 0$,

(H₂) $1 < p_1, p_2, \alpha_{11}, \alpha_{22} < \infty$, $\alpha_{12}, \alpha_{21} \geq 0$ olmak üzere $k = 1, 2$ için $\sum_{i=1}^2 \frac{\alpha_{ki}}{p_i} = 1$

ve

(H₃) $k = 1, 2, \dots, m$ için $1 < p_k < \infty$, $\alpha_{kk} \geq 0$ ve $\sum_{i=1}^m \frac{\alpha_{ii}}{p_i} = 1$

hipotezleri altında, Lyapunov tipi eşitsizlikler elde etmişlerdir. Sonuçları aşağıdaki gibidir.

3.2.5. Teorem [42, Teorem 2.1]

$a, b \in \mathbb{Z}$ için $a \leq b-2$ olsun. $i = 1, 2$ için (H1) ve (H2) hipotezleri sağlansın. Eş. 3.61 sistemi $i = 1, 2$ için

$$x_i(a) = 0 = x_i(b) \quad (3.63)$$

Dirichlet sınır şartlarını sağlayan aşikar olmayan bir $(x_1(n), x_2(n))$ çözümüne sahip ise

$$\prod_{i=1}^2 \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{\tau=a}^{b-2} f_i^+(\tau) B_j(\tau) \right)^{\frac{\alpha_{ij}}{p_j} \sum_{l=1}^2 \frac{\alpha_{li}}{p_l}} \geq 1 \quad (3.64)$$

eşitsizliği sağlanır.

3.2.6. Teorem [42, Teorem 3.1]

$a, b \in \mathbb{Z}$ için $a \leq b-2$ olsun. (H1) ve (H3) hipotezleri sağlansın. Eş. 3.62 sistemi $i = 1, 2, \dots, m$ için Eş. 3.63 Dirichlet sınır şartlarını sağlayan aşikar olmayan bir $(x_1(n), x_2(n), \dots, x_m(n))$ çözümüne sahip ise

$$\prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^m \left(\sum_{\tau=a}^{b-2} f_i^+(\tau) B_j(\tau) \right)^{\frac{\alpha_{ji}}{p_j} \frac{\alpha_{ii}}{p_i}} \geq 1 \quad (3.65)$$

eşitsizliği sağlanır.

2015 yılında Aktaş ve diğerleri [43], Zhang ve Tang [42] nin çalıştığı Eş. 3.61 ve Eş. 3.62 sistemleri için daha iyi sonuçlar elde etmişlerdir.

3.2.7. Teorem [43, Teorem 2.1]

$a, b \in \mathbb{Z}$ için $a \leq b-2$ olsun. $i=1, 2$ için (H1) ve (H2) hipotezleri sağlansın. Eş. 3.61 sistemi $i=1, 2$ için Eş. 3.63 Dirichlet sınır şartlarını sağlayan aşıkak olmayan bir $(x_1(n), x_2(n))$ çözüme sahip ise

$$\prod_{i=1}^2 \left(\sum_{\tau=a}^{b-2} f_i^+(\tau) \prod_{j=1}^2 B_j^{\frac{\alpha_{ij}}{p_j}}(\tau) \right)^{\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^2 \frac{\alpha_{li}}{p_l}} \geq 1 \quad (3.66)$$

eşitsizliği sağlanır.

3.2.8. Teorem [43, Teorem 3.1]

$a, b \in \mathbb{Z}$ için $a \leq b-2$ olsun. (H1) ve (H2) hipotezleri sağlansın. Eş. 3.62 sistemi $i=1, 2, \dots, m$ için Eş. 3.63 Dirichlet sınır şartlarını sağlayan aşıkak olmayan bir $(x_1(n), x_2(n), \dots, x_m(n))$ çözüme sahip ise

$$\prod_{i=1}^m \left(\sum_{\tau=a}^{b-2} f_i^+(\tau) \prod_{j=1}^m B_j^{\frac{\alpha_{ji}}{p_j}}(\tau) \right)^{\frac{\alpha_{ii}}{p_i}} \geq 1 \quad (3.67)$$

eşitsizliği sağlanır.

3.2.1. Uyarı

Aktaş ve diğerleri [43] ün Teorem 3.2.7 ve Teorem 3.2.8 de elde ettikleri Eş. 3.66 ve Eş. 3.67 eşitsizliklerine Hölder eşitsizliği uygulanırsa sırasıyla Zhang ve Tang [42] nin Teorem 3.2.5 ve Teorem 3.2.6 daki Eş. 3.64 ve Eş. 3.65 eşitsizlikleri elde edilir. Böylece, Eş. 3.66 ve Eş. 3.67 sırasıyla Eş. 3.64 ve Eş. 3.65 den daha iyi sonuçlardır.

4. SİSTEMLER İÇİN YENİ LYAPUNOV TİPİ EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde sistemler için elde ettiğimiz yeni ve orijinal Lyapunov tipi eşitsizlikler verilsin.

4.1. Diferansiyel Denklem Sistemleri için Yeni Lyapunov tipi Eşitsizlikler

$t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{R}$ için $a < b$ olmak üzere $k = 1, 2, \dots, n$ için $r_k > 0$ ve $r_k, f_k \in C([a, b], \mathbb{R})$ olsun. $k = 1, 2, \dots, n$ için $1 < p_k < \infty$ ve $i, k = 1, 2, \dots, n$ için α_{ki} ler negatif olmayan sabitler olmak üzere $k = 1, 2, \dots, n$ için

$$-\left(r_k(t) \left|x_k'\right|^{p_k-2} x_k'\right)' = f_k(t) \left|x_k\right|^{\alpha_{kk}-2} x_k \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \left|x_i\right|^{\alpha_{ki}} \quad (4.1)$$

sistemi için elde ettiğimiz sonuçlar aşağıdaki gibidir.

Bu bölüm boyunca, $k = 1, 2, \dots, n$ için $\xi_k(t)$ ve $\mu_k(t)$, Eş. 3.31 de $D_k(t)$ ve $E_k(t)$ de sırasıyla Eş. 3.32 ve Eş. 3.33 de belirtildiği gibi olsun.

4.1.1. Teorem

$k = 1, 2, \dots, n$ için $e_k \geq 0$ olmak üzere $k = 1, 2, \dots, n$ için

$$e_k \left(1 - \frac{\alpha_{kk}}{p_k}\right) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{\alpha_{ik}}{p_k} e_i = 0 \quad (4.2)$$

lineer homojen sisteminin aşikar olmayan bir çözümü $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ olsun. Her $t \in (a, b)$ için $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, Eş. 4.1 sisteminin $k = 1, 2, \dots, n$ için

$$x_k(a) = 0 = x_k(b) \quad (4.3)$$

şartlarını sağlayan aşık ar olmayan bir çözümlü ise

$$\prod_{k=1}^n \left(\int_a^b f_k^+(s) \prod_{i=1}^n D_i^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i}}(s) ds \right)^{e_k} > 1 \quad (4.4)$$

eşitsizliğı sağılanır.

İspat

$n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$ ve $k = 1, 2, \dots, n$ için $x_k(t)$, $[a, b]$ üzerinde özdeş olarak sıfırdan farklı ve $a < b$ ardışık iki sıfırı olmak üzere $x_k(a) = 0 = x_k(b)$ olsun. $k = 1, 2, \dots, n$ ve $t \in [a, b]$ olmak üzere $x_k(a) = 0$ ve Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} |x_k(t)| &\leq \int_a^t |x'_k(s)| ds \leq \left(\int_a^t r_k^{\frac{1}{1-p_k}}(s) ds \right)^{\frac{p_k-1}{p_k}} \left(\int_a^t r_k(s) |x'_k(s)|^{p_k} ds \right)^{\frac{1}{p_k}} \\ &= \xi_k^{\frac{p_k-1}{p_k}}(t) \left(\int_a^t r_k(s) |x'_k(s)|^{p_k} ds \right)^{\frac{1}{p_k}} \end{aligned} \quad (4.5)$$

eşitsizliğı elde edilir. Böylece $k = 1, 2, \dots, n$ ve $t \in [a, b]$ olmak üzere

$$|x_k(t)|^{p_k} \xi_k^{1-p_k}(t) \leq \int_a^t r_k(s) |x'_k(s)|^{p_k} ds \quad (4.6)$$

eşitsizliğı elde edilir. Benzer şekilde $k = 1, 2, \dots, n$ ve $t \in [a, b]$ olmak üzere $x_k(b) = 0$ ve Hölder eşitsizliğinden

$$|x_k(t)|^{p_k} \mu_k^{1-p_k}(t) \leq \int_t^b r_k(s) |x'_k(s)|^{p_k} ds \quad (4.7)$$

eşitsizliği elde edilir. $k=1,2,...,n$ ve $t \in [a,b]$ olmak üzere Eş. 4.6 ve Eş. 4.7 nin toplanmasıyla

$$\left| x_k(t) \right|^{p_k} \leq D_k(t) \int_a^b r_k(s) \left| x_k'(s) \right|^{p_k} ds \quad (4.8)$$

eşitsizliği elde edilir. [34, Teorem 3.1] dekine benzer bir yöntemle Eş. 4.8 deki eşitlik durumunun gerçekleşmediği gösterilebilir. Böylece $k=1,2,...,n$ için

$$A_k = \int_a^b r_k(s) \left| x_k'(s) \right|^{p_k} ds \text{ ve } t \in (a,b) \text{ olmak üzere}$$

$$\left| x_k(t) \right|^{p_k} < A_k D_k(t) \quad (4.9)$$

eşitsizliği elde edilir. $i,k=1,2,...,n$ için Eş. 4.9 un her iki tarafının $\frac{\alpha_{ik}}{p_k}$ -yüncü kuvveti alınırsa

$$\left| x_k(t) \right|^{\alpha_{ik}} < A_k^{\frac{\alpha_{ik}}{p_k}} D_k^{\frac{\alpha_{ik}}{p_k}}(t) \quad (4.10)$$

eşitsizliği elde edilir. $i=k$ için Eş. 4.10 un her iki tarafını $k=1,2,...,n$ için

$$f_k^+(t) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \left| x_i(t) \right|^{\alpha_{ki}} \text{ ile çarpıp } a \text{ dan } b \text{ ye integrali alınırsa } k=1,2,...,n \text{ için}$$

$$\int_a^b f_k(s) \prod_{i=1}^n \left| x_i(s) \right|^{\alpha_{ki}} ds < A_k^{\frac{\alpha_{kk}}{p_k}} \int_a^b f_k^+(s) D_k^{\frac{\alpha_{kk}}{p_k}}(s) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \left| x_i(s) \right|^{\alpha_{ki}} ds \quad (4.11)$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer yandan, Eş. 4.1 sisteminin k -yüncü denklemini x_k ile çarpıp a dan b ye integrali alınırsa $k=1,2,...,n$ için

$$A_k = \int_a^b r_k(s) \left| x_k'(s) \right|^{p_k} ds = \int_a^b f_k(s) \prod_{i=1}^n |x_i(s)|^{\alpha_{ki}} ds \quad (4.12)$$

eşitsizliği elde edilir. Eş. 4.12 nin Eş. 4.11 de kullanılmasıyla $k = 1, 2, \dots, n$ için

$$A_k < A_k^{\frac{\alpha_{kk}}{p_k}} \int_a^b f_k^+(s) D_k^{\frac{\alpha_{kk}}{p_k}}(s) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n |x_i(s)|^{\alpha_{ki}} ds \quad (4.13)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece Eş. 4.10 un Eş. 4.13 te kullanılmasıyla $k = 1, 2, \dots, n$ için

$$A_k^{1-\frac{\alpha_{kk}}{p_k}} < \int_a^b f_k^+(s) D_k^{\frac{\alpha_{kk}}{p_k}}(s) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n A_i^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i}} D_i^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i}}(s) ds \quad (4.14)$$

ve böylece $k = 1, 2, \dots, n$ için

$$A_k^{1-\frac{\alpha_{kk}}{p_k}} < \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n A_i^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i}} \int_a^b f_k^+(s) \prod_{i=1}^n D_i^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i}}(s) ds \quad (4.15)$$

eşitsizliği elde edilir. Eş. 4.15 in her iki tarafının sırasıyla $k = 1, 2, \dots, n$ için e_k -yıncı kuvveti alınıp elde edilen eşitsizlikler taraf tarafa çarpılırsa

$$\prod_{k=1}^n A_k^{e_k \left(1-\frac{\alpha_{kk}}{p_k}\right)} < \prod_{k=1}^n \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n A_i^{\frac{\alpha_{ik}}{p_i}} \right)^{e_k} \prod_{k=1}^n \left(\int_a^b f_k^+(s) \prod_{i=1}^n D_i^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i}}(s) ds \right)^{e_k} \quad (4.16)$$

eşitsizliği ve böylece

$$\prod_{k=1}^n A_k^{e_k \left(1-\frac{\alpha_{kk}}{p_k}\right)} < \left(\prod_{k=1}^n A_k^{\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{\alpha_{ik}}{p_i} e_i} \right) \prod_{k=1}^n \left(\int_a^b f_k^+(s) \prod_{i=1}^n D_i^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i}}(s) ds \right)^{e_k} \quad (4.17)$$

eşitsizliği elde edilir. [34, Teorem 3.1] dekine benzer bir yöntemle $k=1,2,...,n$ için $A_k > 0$ olduğu kolaylıkla görülür. Böylece $k=1,2,...,n$ için $\theta_k = e_k \left(1 - \frac{\alpha_{kk}}{p_k} \right) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{\alpha_{ik}}{p_k} e_i$ olmak üzere

$$\prod_{k=1}^n A_k^{\theta_k} < \prod_{k=1}^n \left(\int_a^b f_k^+(s) \prod_{i=1}^n D_i^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i}}(s) ds \right)^{e_k} \quad (4.18)$$

eşitsizliği elde edilir. Hipotez gereği Eş. 4.2 sisteminin $k=1,2,...,n$ için $\theta_k = 0$ olacak şekilde $e_k \geq 0$ ve $i = \{1,2,...,n\}$ için en az bir $e_i > 0$ olmak üzere sıfırdan farklı bir $(e_1, e_2, ..., e_n)$ çözümüne sahiptir. $(e_1, e_2, ..., e_n)$ çözümlerinden birinin seçilmesiyle Eş. 4.18 den Eş. 4.4 elde edilir. İspat tamamlanır.

Elde edilen diğer sonuç aşağıdaki gibidir.

4.1.2. Teorem

Eş. 4.2 sisteminin aşıkâr olmayan bir $(e_1, e_2, ..., e_n)$ çözümü olsun. $(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$, Eş. 4.1 ile Eş. 4.3 probleminin $[a, b]$ aralığında aşıkâr olmayan bir çözümü ise

$$\prod_{k=1}^n \left(\int_a^b f_k^+(s) \prod_{i=1}^n E_i^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i}}(s) ds \right)^{e_k} > 1 \quad (4.19)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat

$n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$ ve $k=1,2,...,n$ için $x_k(t)$, $[a, b]$ üzerinde özdeş olarak sıfırdan farklı ve $a < b$ ardışık iki sıfırı olmak üzere $k=1,2,...,n$ için $x_k(a) = 0 = x_k(b)$ olsun. Teorem

4.1.1 in ispatındaki işlemlere benzer şekilde devam edilirse Eş. 4.6 ve Eş. 4.7 elde edilir. Eş. 4.6 ve Eş. 4.7 nin $k=1,2,...,n$ için sırasıyla $\mu_k^{p_k-1}(t)$ ve $\xi_k^{p_k-1}(t)$ ile çarpılırsa $k=1,2,...,n$ ve $t \in [a,b]$ için

$$\mu_k(t)^{p_k-1} |x_k(t)|^{p_k} \leq \mu_k^{p_k-1}(t) \xi_k^{p_k-1}(t) \int_a^t r_k(s) |x_k'(s)|^{p_k} ds \quad (4.20)$$

ve

$$\xi_k^{p_k-1}(t) |x_k(t)|^{p_k} \leq \xi_k^{p_k-1}(t) \mu_k^{p_k-1}(t) \int_t^b r_k(s) |x_k'(s)|^{p_k} ds \quad (4.21)$$

eşitsizlikleri elde edilir. Eş. 4.20 ve Eş. 4.21 in toplanmasıyla $k=1,2,...,n$ ve $t \in [a,b]$ için

$$|x_k(t)|^{p_k} (\xi_k^{p_k-1}(t) + \mu_k^{p_k-1}(t)) \leq (\xi_k(t) \mu_k(t))^{p_k-1} \int_a^b r_k(s) |x_k'(s)|^{p_k} ds \quad (4.22)$$

eşitsizliği elde edilir. $k=1,2,...,n$ için $\xi_k(c_k) = \mu_k(c_k)$ olacak şekilde $c_k \in (a,b)$ noktasında $\xi_k^{p_k-1}(t) + \mu_k^{p_k-1}(t)$ fonksiyonlarının minimum değerini aldığı kolaylıkla görülür. Böylece $k=1,2,...,n$ için

$$|x_k(t)|^{p_k} (\xi_k^{p_k-1}(c_k) + \mu_k^{p_k-1}(c_k)) \leq (\xi_k(t) \mu_k(t))^{p_k-1} \int_a^b r_k(s) |x_k'(s)|^{p_k} ds \quad (4.23)$$

eşitsizliği elde edilir. $k=1,2,...,n$ ve $t \in [a,b]$ olmak üzere $\forall t, c_k \in (a,b)$ için

$$\xi_k(c_k) + \mu_k(c_k) = \xi_k(t) + \mu_k(t) \text{ ve}$$

$$\xi_k(c_k) = \frac{\xi_k(t) + \mu_k(t)}{2} = \frac{1}{2} \int_a^b r_k^{\frac{1}{1-p_k}}(s) ds \quad (4.24)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} |x_k(t)|^{p_k} \left[2^{2-p_k} (\xi_k(t) + \mu_k(t))^{p_k-1} \right] &= |x_k(t)|^{p_k} \left[2 \xi_k^{p_k-1}(c_k) \right] \leq \\ &(\xi_k(t) \mu_k(t))^{p_k-1} \int_a^b r_k(s) |x'_k(s)|^{p_k} ds \end{aligned} \quad (4.25)$$

ve böylece

$$|x_k(t)|^{p_k} \leq E_k(t) \int_a^b r_k(s) |x'_k(s)|^{p_k} ds \quad (4.26)$$

eşitsizliği elde edilir. [34] dekine benzer bir yöntemin kullanılmasıyla Eş. 4.26 daki eşitlik halinin gerçekleşmediği görülür. Böylece $k=1,2,\dots,n$ için $A_k = \int_a^b r_k(s) |x'_k(s)|^{p_k} ds$ olmak üzere $t \in (a,b)$ için

$$|x_k(t)|^{p_k} < A_k E_k(t) \quad (4.27)$$

eşitsizliği elde edilir. İspatın devamı Teorem 4.1.1 in ispatına benzer olduğundan verilmemiştir.

4.1.1. Uyarı

$k=1,2,\dots,n$ için $1 < p_k < 2$ ise Eş. 4.19 un Eş. 4.4 den elde edilemeyip Eş. 4.4 ün Eş. 4.19 dan elde edilebildiğinden Eş. 4.19, Eş. 4.4 den daha iyi bir eşitsizlik olduğu Eş. 3.35 ten kolaylıkla görülür. Benzer şekilde $k=1,2,\dots,n$ için $p_k > 2$ ise Eş. 4.4 ün Eş. 4.19 dan elde edilemediği Eş. 4.19 un Eş. 4.4 den elde edildiği ve böylece Eş. 4.4, Eş. 4.19 dan daha iyi bir eşitsizlik olduğu Eş. 3.36 dan kolaylıkla görülür. $p_k = 2$ ise Eş. 4.4 ve Eş. 4.19 birbirlerine eşit olur.

4.1.2. Uyarı

Teorem 4.1.1 ve Teorem 4.1.2 de Aktaş [37] nin Teorem 3.1.17 ve Teorem 3.1.18 de yer alan $i, k = 1, 2, \dots, n$ için $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ şartına bağlı kalınmaksızın yeni Lyapunov tipi eşitsizlikler elde edilmiştir. Böylece Teorem 4.1.1 ve Teorem 4.1.2 sırasıyla Teorem 3.1.17 ve Teorem 3.1.18 i genelleştirir.

Eş. 3.37 nin Teorem 4.1.1 veya Eş. 3.38 in Teorem 4.1.2 de kullanılmasıyla aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.1.1. Sonuç

Eş. 4.2 sisteminin aşikar olmayan bir $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ çözümünün var olduğu kabul edilsin. $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, Eş. 4.1 ile Eş. 4.3 probleminin $[a, b]$ aralığında aşikar olmayan bir çözümü ise

$$\prod_{k=1}^n \left(\prod_{i=1}^n F_i^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i}} \int_a^b f_k^+(s) ds \right)^{e_k} > 1 \quad (4.28)$$

eşitsizliği elde edilir.

$i = 1, 2, \dots, n$ için

$$\sum_{k=1}^n \frac{\alpha_{ik}}{p_k} = 1 \quad (4.29)$$

şartı gerçekleşirse Teorem 4.1.1, Teorem 4.1.2 ve Sonuç 4.1.1 den sırasıyla aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.1.2. Sonuç

Eş. 4.29 şartı altında $k=1,2,...,n$ için $f_k \in C([a,b],\mathbb{R})$ ve $(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$, Eş. 4.1 ile Eş. 4.3 probleminin $[a,b]$ aralığında aşikar olmayan bir çözümü ise

$$\prod_{k=1}^n \left(\int_a^b f_k^+(s) \prod_{i=1}^n D_i^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i}}(s) ds \right)^{\sum_{j=1, j \neq k}^n \frac{\alpha_{jk}}{p_k}} > 1, \quad (4.30)$$

$$\prod_{k=1}^n \left(\int_a^b f_k^+(s) \prod_{i=1}^n E_i^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i}}(s) ds \right)^{\sum_{j=1, j \neq k}^n \frac{\alpha_{jk}}{p_k}} > 1 \quad (4.31)$$

veya

$$\prod_{k=1}^n \left(\prod_{i=1}^n E_i^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i}} \int_a^b f_k^+(s) ds \right)^{\sum_{j=1, j \neq k}^n \frac{\alpha_{jk}}{p_k}} > 1 \quad (4.32)$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat

Teorem 4.1.1 in ispatındaki işlemlere benzer şekilde devam edilirse $k=1,2,...,n$ için

$$\theta_k = e_k \left(1 - \frac{\alpha_{kk}}{p_k} \right) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{\alpha_{ik}}{p_k} e_i \quad \text{olmak üzere Eş. 4.18 elde edilir. Teorem 4.1.1 deki hipotez}$$

gereği Eş. 4.2 sisteminin $k=1,2,...,n$ için $\theta_k = 0$ olacak şekilde $k=1,2,...,n$ için $e_k \geq 0$ ve

$i = \{1,2,...,n\}$ için en az bir $e_i > 0$ olmak üzere sıfırdan farklı bir $(e_1, e_2, ..., e_n)$ çözümüne

sahiptir. Eş. 4.29 şartı Eş. 4.2 sisteminde kullanılırsa $k=1,2,...,n$ için

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n e_k \frac{\alpha_{ki}}{p_i} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{\alpha_{ik}}{p_k} e_i \quad (4.33)$$

eşitliği elde edilir. Buradan $j, k = 1, 2, \dots, n$, $j \neq k$ için $e_k = \frac{\alpha_{jk}}{p_k}$ elde edilir ve Eş. 4.18 den

$j = 1, 2, \dots, n$ ve $j \neq k$ için

$$\prod_{k=1}^n \left(\int_a^b f_k^+(s) \prod_{i=1}^n D_i^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i}}(s) ds \right)^{\frac{\alpha_{jk}}{p_k}} > 1 \quad (4.34)$$

eşitsizliği elde edilir. Elde edilen eşitsizlikler $j = 1, 2, \dots, n$ ve $j \neq k$ için çarpılırsa istenilen sonuç elde edilir. Benzer yöntemle Eş. 4.31, Teorem 4.1.2 den, Eş. 4.32 de Sonuç 4.1.1 den elde edilir.

4.1.3. Uyarı

Eş. 4.1 de $i, k = 1, 2, \dots, n$ için $\alpha_{ik} = \alpha_{kk}$ alınırsa Eş. 3.30 elde edilir. Buradan Tiryaki ve diğerleri [38] in $i, k = 1, 2, \dots, n$ için $\alpha_{ik} = \alpha_{kk}$ şartı altında sonuçlar elde ettiği görülmektedir. Bu durumda, Eş. 4.30 ve Eş. 4.31, Eş 4.29 şartı altında Tiryaki ve diğerleri [38] in Teorem 3.1.21 ve Teorem 3.1.22 de kullandıkları $i, k = 1, 2, \dots, n$ için $\alpha_{ik} = \alpha_{kk}$ şartına bağlı kalmaksızın Eş. 4.1 ile Eş. 4.3 problemi için elde edilen yeni Lyapunov tipi eşitsizliklerdir. Dolayısıyla, Sonuç 4.1.2, Teorem 3.1.21 ve Teorem 3.1.22 yi genelleştirir. Ek olarak, Eş. 4.1 sisteminde $n = 2$ alınırsa Eş. 4.30 ve Eş. 4.31 sırasıyla Tiryaki ve diğerleri [38] in Teorem 3.1.19 ve Teorem 3.1.20 deki Eş. 3.48 ve Eş. 3.49 eşitsizliklerine iner.

Eş. 4.30, Eş. 4.31 ve Eş. 4.32 ye Hölder eşitsizliği uygulanırsa aşağıdaki sonucun elde edileceği kolaylıkla görülür.

4.1.3. Sonuç

$(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, Eş. 4.1 ile Eş. 4.3 probleminin $[a, b]$ aralığında aşikar olmayan bir çözümü ise Eş. 4.29 şartı altında

$$\prod_{k=1}^n \prod_{i=1}^n \left(\int_a^b f_k^+(s) D_i(s) ds \right)^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i} \sum_{j=1, j \neq k}^n \frac{\alpha_{jk}}{p_k}} > 1, \quad (4.35)$$

$$\prod_{k=1}^n \prod_{i=1}^n \left(\int_a^b f_k^+(s) E_i(s) ds \right)^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i} \sum_{j=1, j \neq k}^n \frac{\alpha_{jk}}{p_k}} > 1 \quad (4.36)$$

veya

$$\prod_{k=1}^n \prod_{i=1}^n \left(F_i \int_a^b f_k^+(s) ds \right)^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i} \sum_{j=1, j \neq k}^n \frac{\alpha_{jk}}{p_k}} > 1 \quad (4.37)$$

eşitsizliği elde edilir.

4.1.4. Uyarı

Eş. 4.1 de $i, k = 1, 2, \dots, n$ için $\alpha_{ik} = \alpha_{kk}$ alınırsa Eş. 3.30 elde edilir. Buradan, [34] ve [35] in $i, k = 1, 2, \dots, n$ için $\alpha_{ik} = \alpha_{kk}$ şartı altında sonuçlar elde ettiği görülmektedir. Bu durumda Eş. 4.35 (veya Eş. 4.36), Tang ve He [34] (ya da Aktaş ve diğerleri [35]) tarafında verilen Teorem 3.1.13 (ya da Teorem 3.1.15) deki $i, k = 1, 2, \dots, n$ için $\alpha_{ik} = \alpha_{kk}$ şartına bağlı kalmaksızın Eş. 4.1 ile Eş. 4.3 problemi için Eş. 4.29 şartı altında elde edilen yeni Lyapunov tipi eşitsizliklerdir. Böylece Sonuç 4.1.2 ve Sonuç 4.1.3, Teorem 3.1.13 ve Teorem 3.1.15 i geliştirir ve genelleştirir. İlaveten, Eş. 4.1 sisteminde $n = 2$ alınırsa Eş. 4.35 (veya Eş. 4.36) Tang ve He [34] ün Teorem 3.1.12 (veya Aktaş ve diğerleri [35] in Teorem 3.1.14) deki Eş. 3.39 (veya Eş. 3.41) a iner.

Şimdi de Eş. 4.29 yerine $k = 1, 2, \dots, n$ için

$$\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_{ik}}{p_k} = 1 \quad (4.38)$$

şartı ele alınırsa Teorem 4.1.1, Teorem 4.1.2 ve Sonuç 4.1.1 den sırasıyla aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.1.4. Sonuç

$(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, Eş. 4.1 ile Eş. 4.3 probleminin $[a, b]$ aralığında aşikar olmayan bir çözümü ise Eş. 4.38 şartı altında

$$\prod_{k=1}^n \int_a^b f_k^+(s) \prod_{i=1}^n D_i^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i}}(s) ds > 1, \quad (4.39)$$

$$\prod_{k=1}^n \int_a^b f_k^+(s) \prod_{i=1}^n E_i^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i}}(s) ds > 1 \quad (4.40)$$

veya

$$\prod_{k=1}^n F_k \int_a^b f_k^+(s) ds > 1 \quad (4.41)$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.1.4 ün ispatı Sonuç 4.1.2 nin $k=1, 2, \dots, n$ için $e_k=1$ halinin ispatıyla aynı olduğundan verilmemiştir.

4.1.5. Uyarı

Eş. 3.45 de Eş. 4.38 şartı ele alınırsa Yang ve diğerleri [36] tarafından elde edilen Eş. 3.45, Eş. 4.41 ile çıkarılır.

Uyarı 4.1.2-4.1.5 ten sonuçlarımızın literatürde var olan bütün sonuçları geliştirip genelleştirdiği kolaylıkla görülür.

4.1.6. Uyarı

$f^+(t) \leq |f(t)|$ olduğundan yukarıdaki sonuçlarda $k=1,2,...,n$ için $f_k^+(t)$ yerine $|f_k(t)|$ yazılabilir.

Şimdi Eş. 4.1 ile Eş. 4.3 probleminde $k=1,2,...,n$ için $f_k(t) = \lambda_k q(t)$ alınarak $k=1,2,...,n$ için

$$-\left(r_k(t) \left|x_k'\right|^{p_k-2} x_k'\right)' = \lambda_k q(t) |x_k|^{\alpha_{kk}-2} x_k \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n |x_i|^{\alpha_{ki}} \quad (4.42)$$

özdeğer problemi için elde edilen Eş. 4.4 ve Eş. 4.19 Lyapunov tipi eşitsizliklerin uygulaması verilecektir.

Böylece Eş. 4.2 lineer homojen sistemi aşıkâr olmayan bir $(e_1, e_2, ..., e_n)$ çözüme sahip ise

$$|\lambda_n| > \left[\left(\prod_{k=1}^{n-1} |\lambda_k|^{e_k} \right) \prod_{k=1}^n \left(\int_a^b |q(s)| \prod_{i=1}^n D_i^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i}}(s) ds \right)^{e_k} \right]^{-\frac{1}{e_n}} \quad (4.43)$$

veya

$$|\lambda_n| > \left[\left(\prod_{k=1}^{n-1} |\lambda_k|^{e_k} \right) \prod_{k=1}^n \left(\int_a^b |q(s)| \prod_{i=1}^n E_i^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i}}(s) ds \right)^{e_k} \right]^{-\frac{1}{e_n}} \quad (4.44)$$

eşitsizliği elde edilir.

4.2. Fark Denklem Sistemleri için Yeni Lyapunov Tipi Eşitsizlikler

$i = 1, 2, \dots, m$ ve $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $r_i(n) > 0$ ve $f_i(n)$ reel değerli fonksiyonlar ve $i, k = 1, 2, \dots, m$ için $1 < p_i < \infty$, $\alpha_{ik} \geq 0$ ve $B_i(n)$ ler Eş. 3.54 te belirtildiği gibi olmak üzere aşağıdaki sistem için elde edilen sonuçlar verilecektir.

$$\begin{cases} -\Delta \left(r_1(n) |\Delta x_1(n)|^{p_1-2} \Delta x_1(n) \right) = f_1(n) |x_1(n+1)|^{\alpha_{11}-2} x_1(n+1) |x_2(n+1)|^{\alpha_{12}} \dots |x_m(n+1)|^{\alpha_{1m}} \\ -\Delta \left(r_2(n) |\Delta x_2(n)|^{p_2-2} \Delta x_2(n) \right) = f_2(n) |x_1(n+1)|^{\alpha_{21}} |x_2(n+1)|^{\alpha_{22}-2} x_2(n+1) \dots |x_m(n+1)|^{\alpha_{2m}} \\ \dots \\ -\Delta \left(r_m(n) |\Delta x_m(n)|^{p_m-2} \Delta x_m(n) \right) = f_m(n) |x_1(n+1)|^{\alpha_{m1}} |x_2(n+1)|^{\alpha_{m2}} \dots |x_m(n+1)|^{\alpha_{mm}-2} x_m(n+1) \end{cases} \quad (4.45)$$

4.2.1. Teorem

$i = 1, 2, \dots, m$ için $e_i \geq 0$ olmak üzere $(e_1, e_2, \dots, e_m)$

$$e_i \left(1 - \frac{\alpha_{ii}}{p_i} \right) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \frac{\alpha_{ji}}{p_i} e_j = 0 \quad (4.46)$$

lineer homojen sistemin çözümü olsun. $n \in \mathbb{Z}[a, b] = \{a, a+1, \dots, b-1, b\}$ olmak üzere Eş.

4.45 sisteminin $[a, b]$ aralığında $i = 1, 2, \dots, m$, için $x_i(a) = 0 = x_i(b)$ şartını sağlayan aşikar olmayan bir $(x_1(n), x_2(n), \dots, x_m(n))$ çözümüne sahip ise

$$\prod_{i=1}^m \left(\sum_{\tau=a}^{b-2} f_i^+(\tau) \prod_{j=1}^m B_j^{\frac{\alpha_{ij}}{p_j}}(\tau) \right)^{e_i} \geq 1 \quad (4.47)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat

$i = 1, 2, \dots, m$ olmak üzere $x_i(a) = 0 = x_i(b)$ ve $n \in \mathbb{Z}[a, b]$ için $x_i(n) \neq 0$ olsun.

$i = 1, 2, \dots, m$ için $x_i(a) = 0 = x_i(b)$ olduğunu göz önünde bulundurup Eş. 4.45 sisteminin i -nci satırını $x_i(n+1)$ ile çarpıp a dan $b-2$ ye kadar toplamı alınırsa $i = 1, 2, \dots, m$ için

$$\sum_{\tau=a}^{b-1} r_i(\tau) |\Delta x_i(\tau)|^{p_i} = \sum_{\tau=a}^{b-2} \left[f_i(\tau) \prod_{j=1}^m |x_j(\tau+1)|^{\alpha_{ij}} \right] \leq \sum_{\tau=a}^{b-2} \left[f_i^+(\tau) \prod_{j=1}^m |x_j(\tau+1)|^{\alpha_{ij}} \right] \quad (4.48)$$

eşitsizliği elde edilir. $i = 1, 2, \dots, m$ ve $a \leq n \leq b-1$ olmak üzere $x_i(a) = 0$ ve Hölder eşitsizliğinden

$$|x_i(n+1)|^{p_i} = \left| \sum_{\tau=a}^n \Delta x_i(\tau) \right|^{p_i} \leq \left(\sum_{\tau=a}^n r_i^{\frac{1}{1-p_i}}(\tau) \right)^{p_i-1} \left(\sum_{\tau=a}^n r_i(\tau) |\Delta x_i(\tau)|^{p_i} \right) \quad (4.49)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece $i = 1, 2, \dots, m$ için

$$|x_i(n+1)|^{p_i} \left(\sum_{\tau=a}^n r_i^{\frac{1}{1-p_i}}(\tau) \right)^{1-p_i} \leq \sum_{\tau=a}^n r_i(\tau) |\Delta x_i(\tau)|^{p_i} \quad (4.50)$$

elde edilir. Benzer şekilde $i = 1, 2, \dots, m$ ve $a \leq n \leq b-1$ olmak üzere $x_i(b) = 0$ ve Hölder eşitsizliğinden

$$|x_i(n+1)|^{p_i} \left(\sum_{\tau=n+1}^{b-1} r_i^{\frac{1}{1-p_i}}(\tau) \right)^{1-p_i} \leq \sum_{\tau=n+1}^{b-1} r_i(\tau) |\Delta x_i(\tau)|^{p_i} \quad (4.51)$$

elde edilir. $i = 1, 2, \dots, m$ için Eş. 4.48 den

$$K_i = \sum_{\tau=a}^{b-1} r_i(\tau) |\Delta x_i(\tau)|^{p_i} = \sum_{\tau=a}^{b-2} f_i(\tau) \prod_{j=1}^m |x_j(\tau+1)|^{\alpha_{ij}} \quad (4.52)$$

olmak üzere Eş. 4.50 ve Eş. 4.51 in toplamından

$$\left| x_i(n+1) \right|^{p_i} \leq B_i(n) \sum_{\tau=a}^{b-1} r_i(\tau) \left| \Delta x_i(\tau) \right|^{p_i} = K_i B_i(n) \quad (4.53)$$

elde edilir. $i, j = 1, 2, \dots, m$ için Eş. 4.53 eşitsizliğinin her iki tarafının $\frac{\alpha_{ji}}{p_i}$ -nci kuvveti alınır

$$\left| x_i(n+1) \right|^{\alpha_{ji}} \leq K_i^{\frac{\alpha_{ji}}{p_i}} B_i^{\frac{\alpha_{ji}}{p_i}}(n) \quad (4.54)$$

elde edilir.

$j = i$ olmak üzere Eş. 4.54 ün her iki tarafını $i = 1, 2, \dots, m$ için $f_i^+(n) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \left| x_j(n+1) \right|^{\alpha_{ij}}$ ile çarpılıp a dan $b-2$ ye kadar toplamı alınır $i = 1, 2, \dots, m$ olmak üzere

$$\sum_{\tau=a}^{b-2} f_i^+(\tau) \prod_{j=1}^m \left| x_j(\tau+1) \right|^{\alpha_{ij}} \leq K_i^{\frac{\alpha_{ii}}{p_i}} \sum_{\tau=a}^{b-2} f_i^+(\tau) B_i^{\frac{\alpha_{ii}}{p_i}}(\tau) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \left| x_j(\tau+1) \right|^{\alpha_{ij}} \quad (4.55)$$

elde edilir. Eş. 4. 52 nin Eş. 4.55 te kullanılmasıyla $i = 1, 2, \dots, m$ olmak üzere

$$K_i \leq K_i^{\frac{\alpha_{ii}}{p_i}} \sum_{\tau=a}^{b-2} f_i^+(\tau) B_i^{\frac{\alpha_{ii}}{p_i}}(\tau) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \left| x_j(\tau+1) \right|^{\alpha_{ij}} \quad (4.56)$$

elde edilir. Böylece Eş. 4. 55 in Eş. 4. 56 da kullanılmasıyla $i = 1, 2, \dots, m$ olmak üzere

$$K_i^{1-\frac{\alpha_{ii}}{p_i}} \leq \sum_{\tau=a}^{b-2} f_i^+(\tau) B_i^{\frac{\alpha_{ii}}{p_i}}(\tau) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m K_j^{\frac{\alpha_{ij}}{p_j}} B_i^{\frac{\alpha_{ij}}{p_j}}(\tau) \quad (4.57)$$

ve buradan

$$K_i^{1-\frac{\alpha_{ii}}{p_i}} \leq \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m K_j^{\frac{\alpha_{ij}}{p_j}} \sum_{\tau=a}^{b-2} f_i^+(\tau) \prod_{j=1}^m B_j^{\frac{\alpha_{ij}}{p_j}}(\tau) \quad (4.58)$$

elde edilir. $i = 1, 2, \dots, m$ için Eş. 4.58 eşitsizliğinin her iki tarafının sırasıyla e_i -nci kuvvetini alıp elde edilen eşitsizliklerin taraf tarafa çarpılmasıyla

$$\prod_{i=1}^m K_i^{e_i \left(1-\frac{\alpha_{ii}}{p_i}\right)} \leq \prod_{i=1}^m \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m K_j^{\frac{\alpha_{ij}}{p_j}} \right)^{e_i} \prod_{i=1}^m \left(\sum_{\tau=a}^{b-2} f_i^+(\tau) \prod_{j=1}^m B_j^{\frac{\alpha_{ij}}{p_j}}(\tau) \right)^{e_i} \quad (4.59)$$

ve buradan

$$\prod_{i=1}^m K_i^{e_i \left(1-\frac{\alpha_{ii}}{p_i}\right)} \leq \left(\prod_{i=1}^m K_i^{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \frac{\alpha_{ji}}{p_i} e_i} \right) \prod_{i=1}^m \left(\sum_{\tau=a}^{b-2} f_i^+(\tau) \prod_{j=1}^m B_j^{\frac{\alpha_{ij}}{p_j}}(\tau) \right)^{e_i} \quad (4.60)$$

elde edilir. Böylece $i = 1, 2, \dots, m$ için $\theta_i = e_i \left(1 - \frac{\alpha_{ii}}{p_i}\right) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \frac{\alpha_{ji}}{p_i} e_j$ olmak üzere

$$\prod_{i=1}^m K_i^{\theta_i} \leq \prod_{i=1}^m \left(\sum_{\tau=a}^{b-2} f_i^+(\tau) \prod_{j=1}^m B_j^{\frac{\alpha_{ij}}{p_j}}(\tau) \right)^{e_i} \quad (4.61)$$

elde edilir. Hipotezden $i = 1, 2, \dots, m$ için $\theta_i = 0$, $e_i \geq 0$ ve $i = \{1, 2, \dots, m\}$ için en az bir $e_i \geq 0$ olacak şekilde Eş. 4.46 sistemi aşıkarak olmayan bir $(e_1, e_2, \dots, e_m)$ çözümüne sahiptir. $(e_1, e_2, \dots, e_m)$ çözümlerinden birinin seçilmesiyle Eş. 4.61 den Eş. 4.47 eşitsizliği elde edilir. İspat tamamlanır.

$i = 1, 2, \dots, m$ için

$$\sum_{j=1}^m \frac{\alpha_{ij}}{p_j} = 1 \quad (4.62)$$

şartı gerçekleşirse Teorem 4.2.1 den aşağıdaki sonucun elde edileceği kolayca görülebilir.

4.2.1. Sonuç

$i = 1, 2, \dots, m$ için $f_i(n)$ ler reel değerli fonksiyonlar ve Eş. 4.45 sisteminin $[a, b]$ aralığında Eş. 4.62 şartı altındaki aşıkâr olmayan çözümü $(x_1(n), x_2(n), \dots, x_m(n))$ ise

$$\prod_{i=1}^m \left(\sum_{\tau=a}^{b-2} f_i^+(\tau) \prod_{j=1}^m B_j^{\frac{\alpha_{ij}}{p_j}}(\tau) \right)^{\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^m \frac{\alpha_{li}}{p_l}} \geq 1 \quad (4.63)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat

$i = 1, 2, \dots, m$ için $\theta_i = e_i \left(1 - \frac{\alpha_{ii}}{p_i} \right) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \frac{\alpha_{ji}}{p_i} e_j$ olmak üzere Teoremin ispatında olduğu gibi

devam edilirse Eş. 4.61 eşitsizliği elde edilir. Teorem 4.2.1 deki hipotezden $i = 1, 2, \dots, m$ için $\theta_i = 0$, $e_i \geq 0$ ve $i = \{1, 2, \dots, m\}$ için en az bir $e_i > 0$ olacak şekilde Eş. 4.46 sistemi aşıkâr olmayan $(e_1, e_2, \dots, e_m)$ çözümüne sahiptir. Eş. 4.62 şartı Eş. 4.46 sisteminde kullanılırsa $i = 1, 2, \dots, m$ için

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m e_i \frac{\alpha_{ij}}{p_j} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \frac{\alpha_{ji}}{p_i} e_j \quad (4.64)$$

eşitliği elde edilir. Yani, $j \neq i$, $i, j = 1, 2, \dots, m$ için $e_i = \frac{\alpha_{ji}}{p_i}$ dir ve Eş. 4.61 eşitsizliğinden

$l = i$, $l = 1, 2, \dots, m$ için

$$\prod_{i=1}^m \left(\sum_{\tau=a}^{b-2} f_i^+(\tau) \prod_{j=1}^m B_j^{\frac{\alpha_{ij}}{p_j}}(\tau) \right)^{\frac{\alpha_{ii}}{p_i}} \geq 1 \quad (4.65)$$

eşitsizliği elde edilir. $l = i, l = 1, 2, \dots, m$ için elde edilen eşitsizliklerin çarpılmasıyla Eş. 4.63 eşitsizliği elde edilir. İspat tamamlanır.

4.2.1. Uyarı

Eş. 4.45 sisteminde $i, j = 1, 2, \dots, m$ için $\alpha_{ij} = \alpha_{jj}$ alınırsa, Eş. 4.63 eşitsizliği Aktaş ve diğerleri [43] tarafından verilen Eş. 3.67 eşitsizliğiyle çakışır. Ek olarak, Eş. 4.45 sisteminde $m = 2$ için Eş. 4.63 eşitsizliği Eş. 3.66 eşitsizliğiyle çakışır. $i, j = 1, 2, \dots, m$ için $\alpha_{ij} = \alpha_{jj}$ şartına bağlı kalınmadığından bizim sonucumuz Aktaş ve diğerleri [43] ün sonuçlarını genelleştirir.

4.2.2. Uyarı

Eş. 4.63 e Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^m \left(\sum_{\tau=a}^{b-2} f_i^+(\tau) B_j(\tau) \right)^{\frac{\alpha_{ij}}{p_j} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^m \frac{\alpha_{li}}{p_l}} \geq 1 \quad (4.66)$$

eşitsizliğinin elde edileceği kolaylıkla görülür. $m = 2$ için Eş. 4.66 eşitsizliği Eş. 3.64 eşitsizliği ile çakışır. Böylece $m = 2$ için Eş. 4.66 eşitsizliği Eş. 3.64 den daha iyidir. Çünkü Eş. 3.64 Eş. 4.66 den elde edilir. Fakat tersi doğru değildir. Dahası Eş. 4.45 sisteminde $i = 1, 2, \dots, m$ için $\alpha_{ij} = \alpha_{jj}$ alınırsa Eş. 4.66 eşitsizliği Eş. 3.65 e iner. Sonuç olarak, bizim sonuçlarımız Zhang ve Tang [42] nin sonuçlarını geliştirir ve genelleştirir.

Şimdi de $j = 1, 2, \dots, m$ için

$$\sum_{i=1}^m \frac{\alpha_{ij}}{p_j} = 1 \quad (4.67)$$

şartı kullanılırsa Teorem 4.2.1 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.2.2. Sonuç

$i = 1, 2, \dots, m$ için $f_i(n)$ ler reel değerli fonksiyonlar ve Eş. 4.45 sisteminin $[a, b]$ aralığında Eş. 4.67 şartı altındaki aşikar olmayan çözümü $(x_1(n), x_2(n), \dots, x_m(n))$ ise

$$\sum_{\tau=a}^{b-2} f_i^+(\tau) \prod_{j=1}^m B_j^{\frac{\alpha_{ij}}{p_j}}(\tau) \geq 1 \quad (4.68)$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.2.2 nin ispatı, Sonuç 4.2.1 in ispatına benzer olduğundan verilmeyecektir.

Şimdi Eş. 4.45 sisteminde $i = 1, 2, \dots, m$ için $f_i(n) = \lambda_i \alpha_{ii} q(n) > 0$ alınarak

$$\begin{cases} -\Delta \left(|\Delta x_1(n)|^{p_1-2} \Delta x_1(n) \right) = \lambda_1 \alpha_{11} q(n) |x_1(n+1)|^{\alpha_{11}-2} x_1(n+1) |x_2(n+1)|^{\alpha_{12}} \dots |x_m(n+1)|^{\alpha_{1m}} \\ -\Delta \left(|\Delta x_2(n)|^{p_2-2} \Delta x_2(n) \right) = \lambda_2 \alpha_{22} q(n) |x_1(n+1)|^{\alpha_{21}} |x_2(n+1)|^{\alpha_{22}-2} x_2(n+1) \dots |x_m(n+1)|^{\alpha_{2m}} \\ \dots \\ -\Delta \left(|\Delta x_m(n)|^{p_m-2} \Delta x_m(n) \right) = \lambda_m \alpha_{mm} q(n) |x_1(n+1)|^{\alpha_{m1}} |x_2(n+1)|^{\alpha_{m2}} \dots |x_m(n+1)|^{\alpha_{mm}-2} x_m(n+1) \end{cases} \quad (4.69)$$

özdeğer problemi için elde edilen Lyapunov tipi eşitsizliğinin uygulaması verilecektir.

Böylece Eş. 4.46 lineer homojen sisteminin aşikar olmayan $(e_1, e_2, \dots, e_m)$ çözümü varsa

$$\lambda_m > \left[\left(\prod_{i=1}^m \lambda_i^{e_i} \right) \prod_{i=1}^m \left(\sum_{\tau=a}^{b-2} q(\tau) \prod_{j=1}^m B_j^{\frac{\alpha_{ij}}{p_j}}(\tau) \right)^{e_i} \right]^{-\frac{1}{e_m}} \quad (4.70)$$

eşitsizliği elde edilir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Tezde üç yeni ve orijinal çalışma bulunmaktadır. Çalışmalarımızdan biri “Gazi Uni. J. Sci.” dergisinde basım aşamasında olup diğer çalışmalarımız da indeksli dergilere gönderilmiştir. Çalışmalarımızda pek çok uygulama alanına sahip sistemler için yeni ve orijinal Lyapunov tipi eşitsizlikler elde edilmiştir. Sonuçlarımız literatürde yer alan çalışmaları genelleştirmektedir. Elde ettiğimiz sonuçlar araştırmacılara önemli bir ışık tutacaktır.

KAYNAKLAR

1. Haberman, R. (1987). Elementary Applied Partial Differential Equations. **Prentice Hall, Inc.**, New Jersey.
2. Liapunov, A. M. (1907). Probleme General de la Stabilité du Mouvement. **Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse**, 2, 203-474.
3. Hartman, P. (1964). Ordinary Differential Equations. **John Wiley & Sons**, New York.
4. Afrouzi, G. A. and Heidarkhani, S. (2009). Existence of Three Solutions for a Class of Dirichlet Quasilinear Elliptic Systems Involving the $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ -Laplacian. **Nonlinear Anal.**, 70, 135-143.
5. Aktaş, M. F. (2014). On the Multivariate Lyapunov Inequalities. **Appl. Math. Comput.**, 232, 784-786.
6. Aktaş, M. F., Çakmak, D. and Tiryaki, A. (2014). Lyapunov-Type Inequality for Quasilinear Systems with Anti-Periodic Boundary Conditions. **J. Math. Inequal.**, 8, 313-320.
7. Atkinson, F. V. (1964). Discrete and Continuous Boundary Problems. **Academic Press**, New York.
8. Borg, G. (1949). On Liapounoff Criterion of Stability. **Amer. J. Math.**, 71, 67-70.
9. Çakmak, D. (2010). Lyapunov-Type Integral Inequalities for Certain Higher Order Differential Equations. **Appl. Math. Comput.**, 216, 368-373.
10. Çakmak, D. (2013). On Lyapunov-Type Inequality for a Class of Nonlinear Systems. **Math. Inequal. Appl.**, 16, 101-108.
11. Çakmak, D. (2013). Lyapunov-Type Inequalities for Two Classes of Nonlinear Systems with Anti-Periodic Boundary Conditions. **Appl. Math. Comput.**, 223, 237-242.
12. Çakmak, D. (2014). On Lyapunov-Type Inequality for a Class of Quasilinear Systems. **Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.**, 9, 10.
13. Das, K. M. and Vatsala, A. S. (1973). On Green's function of an n -point boundary value problem. **Trans. Amer. Math. Soc.**, 182, 469-480.
14. He, X. and Tang, X. H. (2012). Lyapunov-Type Inequalities for Even Order Differential Equations. **Commun. Pure Appl. Anal.**, 11, 465-473.
15. Kwong, M. K. (1981). On Lyapunov's inequality for disfocality. **J. Math. Anal. Appl.**, 83, 486-494.

16. Lin, S. H. and Yang, G. S. (1989). On Discrete Analogue of Lyapunov Inequality. *Tamkang J. Math.*, 20, 169-186.
17. Pinasco, J. P. (2013). Lyapunov-Type Inequalities. *Springer*, New York.
18. Sim, I. and Lee, Y. H. (2010). Lyapunov Inequalities for One-Dimensional p -Laplacian Problems with a Singular Weight Function. *J. Inequal. Appl.*, 865096, 9.
19. Tiryaki, A. (2010). Recent Developments of Lyapunov-Type Inequalities. *Adv. Dyn. Syst. Appl.*, 5, 231-248.
20. Ünal, M., Çakmak, D. and Tiryaki, A. (2008). A Discrete Analogue of Lyapunov-Type Inequalities for Nonlinear Systems. *Comput. Math. Appl.*, 55, 2631-2642.
21. Wang, Y. and Shi, Y. (2005). Eigenvalues of Second-Order Difference Equations with Periodic and Antiperiodic Boundary Conditions. *J. Math. Anal. Appl.*, 309, 56-69.
22. Yang, X., Kim, Y. and Lo, K. (2011). Lyapunov-Type Inequality for a Class of Quasilinear Systems. *Math. Comput. Modell.*, 53, 1162-1166.
23. Yang, X., Kim, Y. and Lo, K. (2012). Lyapunov-Type Inequality for Quasilinear Systems. *Appl. Math. Comput.*, 219, 1670-1673.
24. Zhang, Q. and Tang, X. H. (2012). Lyapunov-Type Inequalities for Even Order Difference Equations. *Appl. Math. Letters*, 25, 1830-1834.
25. Guseinov, G. Sh. and Kaymakçalan, B. (2003). Lyapunov Inequalities for Discrete Linear Hamiltonian Systems. *Comput. Math. Appl.*, 45, 1399-1416.
26. Tiryaki, A., Ünal, M. and Çakmak, D. (2007). Lyapunov-Type Inequalities for Nonlinear Systems. *J. Math. Anal. Appl.*, 332, 497-511.
27. Wang, X. (2010). Stability Criteria for Linear Periodic Hamiltonian Systems. *J. Math. Anal. Appl.*, 367, 329-336.
28. Guseinov, G. Sh. and Zafer A. (2007). Stability Criteria for Linear Periodic Impulsive Hamiltonian Systems. *J. Math. Anal. Appl.*, 335, 1195-1206.
29. Tang, X. H., Zhang, Q. and Zhang, M. (2011). Lyapunov-Type Inequalities for the First-Order Nonlinear Hamiltonian Systems. *Comput. Math. Appl.*, 62, 3603-3613.
30. Tiryaki, A., Çakmak, D. and Aktaş, M. F. (2012). Lyapunov-Type Inequalities for a Certain Class of Nonlinear Systems. *Comput. Math. Appl.*, 64, 1804-1811.
31. Napoli, P. L. and Pinasco, J. P. (2006). Estimates for Eigenvalues of Quasilinear Elliptic Systems. *J. Differential Equations*, 227, 102-115.
32. Çakmak, D. and Tiryaki, A. (2010). On Lyapunov-Type Inequality for Quasilinear Systems. *Appl. Math. Comput.*, 216, 3584-3591.

33. Çakmak, D. and Tiryaki, A. (2010). Lyapunov-Type Inequality for a Class of Dirichlet Quasilinear Systems Involving $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ -Laplacian. **J. Math. Anal. Appl.**, 369, 76-81.
34. Tang, X. H. and He, X. (2012). Lower Bounds for Generalized Eigenvalues of the Quasilinear Systems. **J. Math. Anal. Appl.**, 385, 72-85.
35. Aktaş, M. F., Çakmak, D. and Tiryaki, A. (2012). A Note on Tang and He's Paper. **Appl. Math. Comput.**, 218, 4867-4871.
36. Yang, X., Kim, Y. and Lo, K. (2013). Lyapunov-Type Inequality for n Dimensional Quasilinear Systems. **Math. Inequal. Appl.**, 16, 929-934.
37. Aktaş, M. F. (2013). Lyapunov-Type Inequalities for n -Dimensional Quasilinear Systems. **Electron. J. Differential Equations**, 67, 8.
38. Tiryaki, A., Çakmak, D. and Aktaş, M. F. (2014). Lyapunov-Type Inequalities for Two Classes of Dirichlet Quasilinear Systems. **Math. Inequal. Appl.**, 17, 843-863.
39. Cheng, S. S. (1983). A Discrete Analogue of the Inequality of Lyapunov. **Hokkaido Math. J.**, 12, 105-112.
40. He, X. and Zhang, Q. (2011). A Discrete Analogue of Lyapunov-Type Inequalities for Nonlinear Difference Systems. **Comput. Math. Appl.**, 62, 677-684.
41. Zhang, Q., He, X. and Tang, X. H. (2013). Lyapunov-Type Inequalities and Disconjugacy for Some Nonlinear Difference System. **Adv. Difference Equ.**, 16, 11.
42. Zhang, Q. and Tang, X. H. (2012). Lyapunov-Type Inequalities for the Quasilinear Difference Systems. **Discrete Dyn. Nat. Soc.**, 860598, 16.
43. Aktaş, M. F., Çakmak, D. and Arıtürk, M. In press. Lyapunov-Type Inequalities for Two Classes of Difference Systems with Dirichlet Boundary Conditions. **Gazi Uni. J. Sci.**.

ÖZGEÇMİŞ**Kişisel Bilgiler**

Soyadı, adı : ARITÜRK, Merve
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 19/11/1990, Kadıköy
Medeni hali : Bekar
Telefon : 0 (312) 202 15 23
Faks : 0 (312) 212 22 79
E-mail : merveariturk@gazi.edu.tr

Eğitim

Derece	Okul/ Program	Mezuniyet Tarihi
Lisans	ODTÜ/ Matematik	2013
Lise	Pendik Lisesi	2008

İş Deneyimi, Yıl

2014- devam ediyor

Çalıştığı Yer

Gazi Üniversitesi

Görev

Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce, Fransızca

Hobiler

Tenis, Kitap okuma, Doğa yürüyüşü



GAZİ GELECEKTİR...