

**ZAMAN SKALALARINDA LİNEER DİNAMİK SİSTEMLERİN
ASİMPOTOTİK DAVRANIŞI**

Süleyman ÖĞREKÇİ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

HAZİRAN 2009

ANKARA

Süleyman ÖĞREKÇİ tarafından hazırlanan ZAMAN SKALALARINDA LİNEER DİNAMİK SİSTEMLERİN ASİMPOTOTİK DAVRANIŞI adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Adil MISIR
Tez Danışmanı Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Zafer Ağacık
Matematik Anabilim Dalı, Ortadoğu Teknik Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Adil Mısır
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Doç. Dr. Ogün Doğru
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Tarih: 15/06/2009

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans / Doktora derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Nail ÜNSAL
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Süleyman ÖĞREKÇİ

**ZAMAN SKALALARINDA LİNEER DİNAMİK SİSTEMLERİN
ASİMPOTOTİK DAVRANIŞI
(Yüksek Lisans Tezi)**

Süleyman ÖĞREKÇİ

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
HAZİRAN 2009**

ÖZET

Bu tezde, zaman skalasında dinamik sistemlerin genel özellikleri ve çeşitli tiplerdeki lineer dinamik denklemlerin ve bunların belirli tipteki perturbasyonlarının çözümlerinin asimptotik davranışları arasındaki bağıntılar verilmiştir.

Bilim Kodu	:204.1.138
Anahtar Kelimeler	:Zaman Skalası, Dinamik Sistemler, Asimptotik Davranış
Sayfa Adedi	:76
Tez Yöneticisi	:Yrd. Doç. Dr. Adil MISIR

**ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF LINEAR DYNAMIC SYSTEMS ON TIME
SCALES**

(M.Sc. Thesis)

Süleyman ÖĞREKÇİ

**GAZI UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
JUNE 2009**

ABSTRACT

In this thesis, we consider dynamical systems on time scales and we give some relations between asymptotic behavior of the solutions of linear dynamical systems in different types and their perturbations in certain kinds on time scales.

Science Code	:204.1.138
Key Words	:Time Scales, Dynamical Systems, Asymptotic Behavior
Page Number	:76
Adviser	:Asist. Prof. Dr. Adil MISIR

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren Hocam Yrd. Doç. Dr. Adil MISIR'a ve eğitimim süresince maddi manevi hiçbir desteği esirgemeyen aileme teşekkürü borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR	ix
1. GİRİŞ	1
2. ZAMAN SKALASINDA HESAP VE LİNEER DİNAMİK DENKLEMLER	2
2.1. Zaman Skalası	2
2.2. Delta Türev	6
2.3. Delta İntegral	16
2.4. Genelleştirilmiş Üstel Fonksiyon	34
3. LİNEER DİNAMİK DENKLEM SİSTEMLERİ	42
3.1. Regressiv Matrisler ve Lineer Sistemler	42
4. LİNEER DİNAMİK SİSTEMLERİN ASİMPOTOTİK DAVRANIŞI	49
KAYNAKLAR	75
ÖZGEÇMİŞ	76

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullandığımız bazı simgeler açıklamalarıyla beraber aşağıda verilmiştir.

Simgeler	Açıklama
t	Zaman skalası
$\mathbb{r}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{z}$	Tam sayılar kümesi
$\sigma(t)$	İleri sıçrama operatörü
$\rho(t)$	Geri sıçrama operatörü
$\mu(t)$	Granül fonksiyonu
$f^\Delta(t)$	Delta türev
$\int_a^b f(\tau)\Delta\tau$	Delta integral (Riemann)
C_{rd}	Rd-sürekli fonksiyonlar kümesi
R	Regressiv fonksiyonlar kümesi
$e_A(t, t_0)$	Genelleştirilmiş üstel fonksiyon
$O(f)$	Landau notasyonu (Büyük O Notasyonu)
$o(f)$	Landau notasyonu (Küçük O Notasyonu)

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. Silindir Dönüşümü	37

1. GİRİŞ

Bu tezde, zaman skalasında lineer dinamik denklem sistemlerinin asimptotik özellikleri verilecektir. Bazı tiplerdeki dinamik denklem sistemleri ile bunların belirli tiplerdeki perturbasyonları arasında asimptotik ilişkiler incelenecektir.

Zaman skalası kavramı modern matematikte yeni bir kavramdır. 1988 yılında Stefan Hilger'in, ayrık ve sürekli kümeler üzerinde tanımlı fonksiyonların analizini birleştirmek için yaptığı çalışmalarla zaman skalası teorisi kurulmuştur.

Son yıllarda üzerinde çok yoğun çalışmalar yapılan zaman skalası teorisi, sürekli ve ayrık analiz veya fark denklemleri ve diferensiyel denklemler teorilerini kapsamaktadır. Kısaca zaman skalası teorisi, sürekli ve ayrık analizin genelleştirilmesidir.

Bu tezin ikinci bölümünde zaman skalası kavramı tanıtılmış, temel özellikleri verilmiş ve zaman skalasında lineer dinamik denklemler teorisi kısaca verilmiştir.

Üçüncü bölümde zaman skalasında lineer dinamik denklem sistemleri ve bazı temel özellikleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde zaman skalasında lineer dinamik denklemlerin asimptotik davranışları ile ilgili bazı özellikleri incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Zaman Skalası

2.1.1. Tanım

$\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin herhangi bir kapalı alt kümesine bir *zaman skalası* denir ve T ile gösterilir[3]. Bu küme üzerinde metrik, $\mathbb{R}$ deki alışılmış metrik olarak alınacaktır, yani $s, t \in T$ için $d(s, t) = |s - t|$ olarak alınacaktır.

2.1.1. Örnek

$\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^+$, $[0,1]$, $[0,1] \cup [2,3]$ kümeleri zaman skalasına birer örnektir. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}'$, $\mathbb{C}$, $(0,1)$ gibi kümeler ise zaman skalası olamazlar[3].

2.1.2. Tanım

T bir zaman skalası olsun. $t \in T$ için $\sigma : T \rightarrow T$ *ileri sıçrama operatörü*,

$$\sigma(t) = \inf\{s \in T : s > t\}$$

ile verilir. Benzer şekilde $t \in T$ için *geri sıçrama operatörü*,

$$\rho(t) = \sup\{s \in T : s < t\}$$

ile verilir. Bu tanımda $\inf \emptyset = \sup T$ alınır. Yani T nin maksimumu t ise $\sigma(t) = t$ dir. Benzer şekilde tanımda $\sup \emptyset = \inf T$ alınır. Yani T nin minimumu t ise $\rho(t) = t$ dir[3].

Tanım 2.1.3.

$\mu : T \rightarrow [0, \infty)$ *granül (graininess) fonksiyonu*,

$$\mu(t) = \sigma(t) - t$$

olarak tanımlanır[3].

2.1.1 Tanıma göre zaman skalasının elemanları aşağıdaki gibi sınıflandırılır:

- (i) $\sigma(t) = t$ ise $t \in T$ elemanına *sağ yoğun* denir.
- (ii) $\sigma(t) > t$ ise $t \in T$ elemanına *sağ saçılımlı* denir.
- (iii) $\rho(t) = t$ ise $t \in T$ elemanına *sol yoğun* denir.
- (iv) $\rho(t) < t$ ise $t \in T$ elemanına *sol saçılımlı* denir[3].

Ayrıca hem sağ saçılımlı hem sol saçılımlı noktalara ise *izole noktalar* denir. Hem sağ hem de sol yoğun noktalara ise *yoğun nokta* denir[3].

Örnek 2.1.2.

Kısaca $T = \mathbb{R}$ ve $T = \mathbb{Z}$ örneklerini verelim.

i) $T = \mathbb{R}$ alırsak, her $t \in \mathbb{R}$ için,

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{R} : s > t\} = \inf(t, \infty) = t$$

olur. Benzer şekilde $\rho(t) = t$ olduğu da görülür. Bundan dolayı her $t \in \mathbb{R}$ noktası yoğundur ve granül fonksiyonu, $\mu(t) \equiv 0$ olur.

ii) $T = Z$ alırsak, her $t \in Z$ için,

$$\sigma(t) = \inf\{s \in Z : s > t\} = \inf\{t+1, t+2, \dots\} = t+1$$

olur. Benzer şekilde $\rho(t) = t-1$ olduğu da görülür. Bundan dolayı her $t \in Z$ noktası izoledir ve granül fonksiyonu, $\mu(t) \equiv 1$ olur[3].

2.1.3. Örnek

$a, b > 0$ olsun.

$$p_{a,b} = \bigcup_{k=0}^{\infty} [k(a+b), k(a+b)+a]$$

zaman skalasını ele alalım. Bu durumda,

$$\sigma(t) = \begin{cases} t & , t \in \bigcup_{k=0}^{\infty} [k(a+b), k(a+b)+a) \\ t+b & , t \in \bigcup_{k=0}^{\infty} \{k(a+b)+a\} \end{cases}$$

olur. Granül fonksiyon,

$$\mu(t) = \begin{cases} 0 & , t \in \bigcup_{k=0}^{\infty} [k(a+b), k(a+b)+a) \\ b & , t \in \bigcup_{k=0}^{\infty} \{k(a+b)+a\} \end{cases}$$

elde edilir[3].

2.1.1. Not

Dikkat edilirse $t \in T$ olduğunda $\sigma(t)$ ve $\rho(t)$ de T dedir. Bu, T nin $\mathbb{R}$ nin kapalı bir alt kümesi oluşundandır[3].

2.1.4. Tanım

T sol-saçılımlı bir m maksimuma sahipse $T^\kappa = T - \{m\}$, diğer şartlarda $T = T^\kappa$ alınır. Bu tanımı kısaca

$$T^\kappa := \begin{cases} t & , \sup t = \infty \\ t & , \sup t < \infty \text{ ve } \rho(\sup t) = \sup t \\ (-\infty, \sup t) & , \sup t < \infty \text{ ve } \rho(\sup t) < \sup t \end{cases}$$

ile de verebiliriz[3].

2.1.1. Teorem (Tümevarım Prensibi)

$t_0 \in T$ olsun ve kabul edelim ki

$$\{S(t) : t \in [t_0, \infty)\}$$

ailesi aşağıdaki maddeleri sağlayan ifadelerin ailesi olsun,

- i) $S(t_0)$ ifadesi doğrudur.
- ii) $t \in [t_0, \infty)$ noktası sağ-saçılımlı ve $S(t)$ ifadesi doğru ise $S(\sigma(t))$ ifadesi de doğrudur.
- iii) $t \in [t_0, \infty)$ noktası sağ-yoğun ve $S(t)$ ifadesi doğru ise, o zaman t noktasının bir U komşuluğu vardır öyle ki. $\forall s \in U \cap (t, \infty)$ için $S(s)$ ifadesi doğrudur.

iv) $t \in [t_0, \infty)$ noktası sol-yoğun ve $\forall s \in [t_0, t)$ için $S(s)$ ifadesi doğru ise, $S(t)$ ifadesi de doğrudur.

Bu durumda $S(t)$ ifadesi her $t \in [t_0, \infty)$ için doğrudur[3].

İspat

$S^* = \{t \in [t_0, \infty) : S(t) \text{ doğru} \quad \text{değildir}\}$

kümesini alalım. Amacımız $S^* = \emptyset$ olduğunu göstermektir. $S^* \neq \emptyset$ olsun. S^* kümesi kapalı ve boştan farklı olduğundan bir minimumu vardır. $\inf S^* = t^* \in T$ olsun. $S(t^*)$ ifadesinin doğru olduğunu iddia ediyoruz. $t^* = t_0$ ise (i) den dolayı $S(t^*)$ ifadesi doğrudur. t^* noktası sol-saçıllımlı ise $S(t^*)$ ifadesi (ii) den dolayı doğrudur. t^* noktası sol-yoğun ise (iv) den dolayı $S(t^*)$ ifadesi doğrudur. Sonuç olarak her koşulda $t^* \notin S^*$ oluyor. Bundan dolayı t^* noktası sağ-saçıllımlı olamaz. Dolayısıyla $t^* \neq \max T$ olur. Yani t^* noktası sağ-yoğundur. Fakat bu durum (iii) ile çelişir[3].

2.2. Delta Türev

2.2.1 Tanım

$f : T \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in T^\kappa$ olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, t nin bir $U = (t - \delta, t + \delta) \cap T$ komşuluğu, her $s \in U$ için

$$| [f(\sigma(t)) - f(s)] - f^\Delta(t) \cdot [\sigma(t) - s] | \leq \varepsilon \cdot |\sigma(t) - s|$$

olacak şekilde varsa $f^\Delta(t)$ ye, f in t noktasında delta (Hilger) türevi denir.

Ayrıca her $t \in T^\kappa$ için $f^\Delta(t)$ mevcut ise f fonksiyonuna T^κ da *delta (Hilger) türevlenebilir* denir. Biz bundan sonra buna kısaca türevlenebilir diyeceğiz. $f^\Delta : T^\kappa \rightarrow \mathbb{R}$ ile de f in delta türevini göstereceğiz[3].

2.2.1 Örnek

i) $\alpha \in \mathbb{R}$ sabit olmak üzere, $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, her $t \in T$ için $f(t) = \alpha$ olarak tanımlanmışsa $f^\Delta(t) \equiv 0$ dır. Gerçekten her $s \in T$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - 0(\sigma(t) - s)| = |\alpha - \alpha| = 0 \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|$$

her zaman sağlanır.

ii) Her $t \in T$ için $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $f(t) = t$ olarak tanımlanmışsa $f^\Delta(t) \equiv 1$ dir. Gerçekten her $s \in T$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - 1(\sigma(t) - s)| = |\sigma(t) - s - (\sigma(t) - s)| = 0 \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|$$

her zaman sağlanır[3].

2.2.1. Teorem

$f : T \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in T^\kappa$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

- i) f fonksiyonu t de türevlenebilir ise t de sürekli dir.
- ii) f fonksiyonu t de sürekli ve t sağ-saçılımlı ise f fonksiyonu t de türevlenebilirdir ve

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\mu(t)}$$

dir.

iii) t sağ-yoğun ve

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

limiti sonlu ise f fonksiyonu t de türevlenebilirdir ve

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

dir.

iv) f fonksiyonu t de türevlenebilir ise,

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t).f^{\Delta}(t)$$

sağlanır[3].

2.2.2. Örnek

$T = \mathbb{R}$ ve $T = \mathbb{Z}$ durumlarını göz önüne alalım.

i) Eğer $T = \mathbb{R}$ ise 2.2.1. Teorem (iii) den dolayı $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ delta türevlenebilirdir ve

$$f'(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

limiti sonlu olarak mevcut ise

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t)$$

olur.

ii) Eğer $T = \mathbb{Z}$ ise 2.2.1. Teorem (ii) den dolayı $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ delta türevlenebilir ve

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(t+1) - f(t)}{1} = f(t+1) - f(t) = \Delta f$$

elde edilir[3].

2.2.3. Örnek

$h > 0$ için, $t \in h\mathbb{Z} = \{hk : k \in \mathbb{Z}\}$ olsun. Bu durumda, $t \in t$ için,

$$\sigma(t) = \inf\{s \in t : s > t\} = \inf\{t + nh : n \in \mathbb{N}\} = t + h$$

olur. Benzer şekilde $\rho(t) = t - h$ elde edilir. O halde granül fonksiyonu,

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = t + h - t = h$$

elde edilir. Görüldüğü gibi bu örnekte granül fonksiyon sabittir. Bir $f : t \rightarrow r$ fonksiyonu ve her $t \in t$ için,

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$f^{\Delta\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(\sigma(t)) - f^{\Delta}(t)}{\mu(t)} = \frac{f^{\Delta}(t+h) - f^{\Delta}(t)}{h}$$

$$= \frac{\frac{f(t+2h) - f(t+h)}{h} - \frac{f(t+h) - f(t)}{h}}{h}$$

$$= \frac{f(t+2h) - 2f(t+h) + f(t)}{h^2}$$

olarak elde edilir. Bu yolla $f^{\Delta^n}(t)$ yi hesaplamak çok sıkıcıdır. Bu sebeple biz başka bir metod kullanacağız. Açık ki her $n \in \mathbb{N}$ için, $\sigma^n(t) = t + nh$ ve $\rho^n(t) = t - nh$ dır. Şimdi Δ_h operatörünü,

$$\Delta_h = \frac{1}{h}(\sigma - I), \quad I \text{ birim operatör.}$$

olarak tanımlayalım. Şimdi,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$$

Binom Teoremini hatırlayalım. Biz, Δ_h ın n . Kuvvetini bulmak için binom teoreminin bir operatör versiyonunu kullanabiliriz,

$$\Delta_h^n = \frac{1}{h^n}(\sigma - I)^n = \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sigma^k (-1)^{n-k}$$

elde edilir. Δ_h operatörünü $f(t)$ fonksiyonuna uygularsak,

$$f^{\Delta^n}(t) = \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k f(t + kh)$$

elde ederiz[3].

2.2.4. Örnek

$q > 1$ için

$$q^{\mathbb{Z}} = \{q^k : k \in \mathbb{Z}\} \text{ ve } \overline{q^{\mathbb{Z}}} = q^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$$

olsun. $t = \overline{q^{\mathbb{Z}}}$ zaman skalasını düşünelim,

$$\sigma(t) = \inf \{q^n : n \in [m+1, \infty)\} = q^{m+1} = qq^m = qt$$

olur. $t = q^m \in t$ için $\sigma(0) = 0$ olur. Çünkü 0 sağ-yoğun bir minimumdur. Diğer

bütün noktalar izole noktadır. Sonuç olarak $\sigma(t) = tq$, $\rho(t) = \frac{t}{q}$ ve $\mu(t) = (q-1)t$

olur. $f : t \rightarrow r$ fonksiyonu için, $\forall t \in t - \{0\}$ için

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(qt) - f(t)}{(q-1)t}$$

ve

$$f^{\Delta}(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(0) - f(s)}{0 - s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(s) - f(0)}{s}, \text{ (limit mevcut ise)}$$

olur. Şimdi de $t \neq 0$ olmak üzere, ikinci türevleri hesaplayalım,

$$f^{\Delta\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(\sigma(t)) - f^{\Delta}(t)}{\mu(t)} = \frac{f^{\Delta}(qt) - f^{\Delta}(t)}{(q-1)t}$$

$$= \frac{\frac{f(q^2t) - f(qt)}{q(q-1)t} - \frac{f(qt) - f(t)}{(q-1)t}}{(q-1)t}$$

$$= \frac{f(q^2t) - (q+1)f(qt) + qf(t)}{q(q-1)^2t}$$

elde edilir[3].

2.2.2. Teorem

$f, g : T \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $t \in T^{\kappa}$ noktasında türevlenebilir olsunlar. Bu durumda,

i) $f + g : T \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu türevlenebilirdir ve,

$$(f + g)^{\Delta} = f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t)$$

dir.

ii) Herhangi bir α sabiti için $\alpha f : T \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu türevlenebilirdir ve,

$$(\alpha f)^{\Delta}(t) = \alpha.f^{\Delta}(t)$$

dir.

iii) $fg : T \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu türevlenebilirdir ve,

$$(fg)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t)g(t) + f(\sigma(t))g^{\Delta}(t) = f(t)g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t)g(\sigma(t))$$

dir.

iv) Eğer $f(t).f(\sigma(t)) \neq 0$ ise $\frac{1}{f}$ fonksiyonu türevlenebilirdir ve,

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\Delta}(t) = -\frac{f^{\Delta}(t)}{f(t)f(\sigma(t))}$$

dir.

v) Eğer $g(t).g(\sigma(t)) \neq 0$ ise $\frac{f}{g}$ fonksiyonu türevlenebilirdir ve,

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(t)g(t) - f(t)g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}$$

dir[3].

2.2.3. Teorem

$m \in \mathbb{N}$ ve α bir sabit olsun.

$$i) f(t) = (t - \alpha)^m$$

şeklinde tanımlı bir fonksiyon için,

$$f^{\Delta}(t) = \sum_{v=0}^{m-1} (\sigma(t) - \alpha)^v (t - \alpha)^{m-1-v}$$

$$\text{ii) } g(t) = \frac{1}{(t - \alpha)^m}$$

şeklinde tanımlı bir fonksiyon için,

$$g^\Delta(t) = - \sum_{v=0}^{m-1} \frac{1}{(\sigma(t) - \alpha)^{m-v} (t - \alpha)^{v+1}}, \quad (\sigma(t) - \alpha)(t - \alpha) \neq 0$$

eşitlikleri doğrudur[3].

2.2.5. Örnek

$$(t^2)^\Delta = t + \sigma(t)$$

$$\left(\frac{1}{t}\right)^\Delta = -\frac{1}{t \cdot \sigma(t)}$$

oldukları 2.2.3. Teoremden dolayı açıktır[3].

2.2.2. Tanım

Bir $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için f^Δ fonksiyonu $T^{\kappa^2} = (T^\kappa)^\kappa$ da türevlenebilirse $f^{\Delta\Delta} = (f^\Delta)^\Delta : T^{\kappa^2} \rightarrow \mathbb{R}$ ikinci mertebeden türevlerden bahsedebiliriz. Benzer şekilde $f^{\Delta^n} : T^{\kappa^n} \rightarrow \mathbb{R}$ yüksek mertebeden türevleri de verebiliriz. Biz $\sigma^2(t) = \sigma(\sigma(t))$ ve $\rho^2(t) = \rho(\rho(t))$ notasyonunu kullanacağız. Uygunluk açısından $\sigma^0(t) = t$, $\rho^0(t) = t$, $f^{\Delta^0}(t) = t$ ve $T^{\kappa^0} = T$ ile göstereceğiz[3].

2.2.6. Örnek

Genel olarak f ve g nin ikisi de iki kez türevlenebilir olsa bile fg iki kez türevlenemez. Çünkü,

$$(fg) = f^{\Delta}g + f^{\sigma}g^{\Delta}$$

olduğundan f ve g iki kez türevlenebilir ve f^{σ} türevlenebilir ise bu durumda,

$$\begin{aligned} (fg)^{\Delta\Delta} &= (f^{\Delta}g + f^{\sigma}g^{\Delta})^{\Delta} = f^{\Delta\Delta}g + f^{\Delta\sigma}g^{\Delta} + f^{\sigma}g^{\Delta\Delta} + f^{\sigma\Delta}g^{\Delta\Delta} \\ &= f^{\Delta\Delta}g + (f^{\Delta\sigma} + f^{\sigma\Delta})g^{\Delta} + f^{\sigma\sigma}g^{\Delta\Delta} \end{aligned}$$

olur[3].

2.2.4. Teorem (Leibniz Formülü)

$S_k^{(n)}$ k tane σ ve $n-k$ tane Δ içeren, n uzunluğundaki mümkün olan tüm dizilerden oluşan bir küme olsun. Eğer her $\Lambda \in S_k^{(n)}$ için f^{Λ} mevcut ise, $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$(fg)^{\Delta^n} = \sum_{k=0}^n \left[\sum_{\Lambda \in S_k^{(n)}} f^{\Lambda} \right] g^{\Delta^k}$$

eşitliği doğrudur[3].

2.2.7. Örnek

$T = \mathbb{R}$ alalım. Bu durumda $\Lambda \in S_k^{(n)}$ için, $f^{\Lambda} = f^{(n-k)}$ olur. Burada $f^{(n)}$ ile n inci mertebeden adi türevi gösteriyoruz. Burada $|S_k^{(n)}| = \binom{n}{k}$ olup,

$$\sum_{\Lambda \in S_k^{(n)}} f^{\Lambda} = \sum_{\Lambda \in S_k^{(n-k)}} f(n) = f^{(n-k)} \sum_{\Lambda \in S_k^{(n)}} 1 = \binom{n}{k} f^{(n-k)}$$

olduğundan,

$$(fg)^{\Delta^n} = \sum_{k=0}^n \left[\sum_{\Lambda \in S_K^{(n)}} f^{\Lambda} \right] g^{\Delta^k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}$$

elde edilir ki bu alışılmış Leibniz Formülüdür[3].

2.3. Delta İntegral

2.3.1. Tanım

Bir $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun t nin tüm sağ-yoğun noktalarında sağ limiti var ve sonlu, t nin tüm sol-yoğun noktalarında sol limiti var ve sonlu ise f fonksiyonu *düzenlidir (regulated)* denir[3].

2.3.2. Tanım

Bir $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu t deki sağ-yoğun noktalarda sürekli ve t deki sol-yoğun noktalarda sol limitleri var ve sonlu ise f fonksiyonu *rd-sürekli* denir.

Bundan sonra rd-sürekli tüm $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonların kümesini

$$C_{rd} = C_{rd}(T) = C_{rd}(T, \mathbb{R})$$

ile göstereceğiz. Türevlenebilir ve türevleri rd-sürekli fonksiyonların kümesini de

$$C_{rd}^1 = C_{rd}^1(T) = C_{rd}^1(T, \mathbb{R})$$

ile göstereceğiz[3].

2.3.1. Teorem

$f : T \rightarrow r$ olsun.

- (i) f sürekli ise rd-sürekli
- (ii) f rd-sürekli ise düzenlidir.
- (iii) σ operatörü rd-sürekli.
- (iv) f rd-sürekli veya düzenli ise f^σ da öyledir.
- (v) f sürekli olsun. $g : t \rightarrow r$ fonksiyonu rd-sürekli veya düzenli ise $f \circ g$ da öyledir[3].

2.3.3. Tanım

Bir $f : T \rightarrow r$ sürekli fonksiyonu $D \subset t^\kappa$ için, her $t \in D$ noktasında diferensiyellenebilir ise ve, $t^\kappa \setminus D$ kümesi sayılabilir ve t nin hiçbir sağ-saçılımlı noktasını içermiyorsa, f fonksiyonuna D bölgesinde *pre-diferensiyellenebilir* denir[3].

2.3.1. Örnek

$t = p_{1,2}$ ve $f : T \rightarrow r$ fonksiyonu

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , t \in \bigcup_{k=0}^{\infty} [3k, 3k+1] \\ t-3k-1 & , t \in [3k+1, 3k+2] \end{cases}$$

olsun. Bu durumda f fonksiyonu,

$$D = t \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} \{3k+1\}$$

kümesinde pre-diferensiyellenebilir[3].

2.3.2. Teorem

Kapalı aralıkta, her düzenli fonksiyon sınırlıdır[3].

İspat

Kabul edelim ki $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırsız olsun. Yani, her $n \in \mathbb{N}$ için $t_n \in [a, b]$ ve $|f(t_n)| > n$ olsun. $\{t_n : n \in \mathbb{N}\} \subset [a, b]$ olduğundan $\{t_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ yakınsak bir alt dizi vardır. Yani en az bir $t_0 \in [a, b]$ vardır ki,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} t_{n_k} = t_0$$

dır. $\{t_{n_k} : k \in \mathbb{N}\} \subset t$ ve t kapalı olduğundan $t_0 \in t$ dir. Bu durumda t_0 noktası izole olamaz. Ve de t_0 noktasına ya yukarıdan ya da aşağıdan yaklaşan bir alt dizi vardır. Her iki durumda da düzgünlükten dolayı, $t \rightarrow t_0$ iken $f(t)$ nin limiti sonlu olmalıdır ki bu bir çelişkidir.

2.3.3. Teorem (Ortalama Değer Teoremi)

f ve g ; t de tanımlı reel değerli fonksiyonlar olsunlar ve ikisi de, bir D bölgesinde pre-diferensiyellenebilir olsunlar. Bu durumda, $\forall t \in D$ için

$$|f^\Delta(t)| \leq g^\Delta(t)$$

ise, her $r, s \in t$, $r \leq s$ için,

$$|f(s) - f(r)| \leq g(s) - g(r)$$

dir[3].

İspat

$r, s \in \mathbb{T}$ ve $r \leq s$ olsun. $[r, s) \setminus D = \{t_n : n \in \mathbb{N}\}$ ile gösterelim. $\varepsilon > 0$ olsun. Şimdi tümevarım kullanarak, $\forall t \in [r, s]$ için,

$$S(t) : |f(t) - f(r)| \leq g(t) - g(r) + \varepsilon \left[t - r + \sum_{t_n < t} 2^{-n} \right]$$

olduğunu göstereceğiz. Bunu göstererek ortalama değer teoremini ispatlamış oluruz. Şimdi 2.1.1. Teorem ile verilen tümevarım prensibinin dört koşulunu kontrol edelim.

- i) Aşık olarak $S(r)$ ifadesi doğrudur.
- ii) t sağ saçılımlı olsun ve $S(t)$ doğru olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} |f(\sigma(t)) - f(r)| &= |f(t) + \mu(t).f^\Delta(t) - f(r)| \\ &\leq \mu(t).|f^\Delta(t)| + |f(t) - f(r)| \\ &\leq \mu(t).g^\Delta(t) + g(t) - g(r) + \varepsilon \left[t - r + \sum_{t_n < t} 2^{-n} \right] \\ &= g(\sigma(t)) - g(r) + \varepsilon \left[t - r + \sum_{t_n < \sigma(t)} 2^{-n} \right] \\ &< g(\sigma(t)) - g(r) + \varepsilon \left[t - r + \sum_{t_n < \sigma(t)} 2^{-n} \right] \end{aligned}$$

olup $S(\sigma(t))$ doğrudur.

iii) $t = s$ sağ yoğun noktada $S(t)$ doğru olsun. ($\sigma(t) = t$). İki durumu da göz önüne alalım. Yani $t \in D$ ve $t \notin D$ için. İlk önce $t \in D$ olsun. Bu durumda f ve g , t de diferensiyellenebilirler. Bundan dolayı bir U komşuluğu vardır, öyle ki; her $\tau \in U$ için,

$$|f(t) - f(\tau) - f^\Delta(t) \cdot (t - \tau)| \leq \frac{\varepsilon}{2} |t - \tau|$$

ve

$$|g(t) - g(\tau) - g^\Delta(t) \cdot (t - \tau)| \leq \frac{\varepsilon}{2} |t - \tau|$$

dır. Böylece,

$$|f(t) - f(\tau)| \leq \left[|f(t)| + \frac{\varepsilon}{2} \right] |t - \tau|$$

ve

$$g(\tau) - g(t) - g^\Delta(t) \cdot (\tau - t) \geq -\frac{\varepsilon}{2} |t - \tau|$$

dır. Bu durumda her $\tau \in U \cap (t, \infty)$ için,

$$|f(\tau) - f(r)| \leq |f(\tau) - f(t)| + |f(t) - f(r)|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left[f^\Delta(t) + \frac{\varepsilon}{2} \right] |t - \tau| + |f(t) - f(r)| \\
&\leq \left[g^\Delta(t) + \frac{\varepsilon}{2} \right] |t - \tau| + g(t) - g(r) + \varepsilon \left[t - r + \sum_{t_n < t} 2^{-n} \right] \\
&= g^\Delta(t) \cdot (\tau - t) + \frac{\varepsilon}{2} (\tau - t) + g(t) - g(r) + \varepsilon(t - r) + \varepsilon \sum_{t_n < t} 2^{-n} \\
&\leq g(\tau) - g(t) + \frac{\varepsilon}{2} |\tau - t| + \frac{\varepsilon}{2} (\tau - t) + g(t) - g(r) + \varepsilon(t - r) + \varepsilon \sum_{t_n < t} 2^{-n} \\
&= g(\tau) - g(r) + \varepsilon \left[t - r + \sum_{t_n < \tau} 2^{-n} \right]
\end{aligned}$$

olup $S(\tau)$ ifadesi her $\tau \in U \cap (t, \infty)$ için doğrudur.

Şimdi ikinci durum olarak $t \notin D$ olsun. Bu durumda bazı $m \in \mathbb{N}$ için $t = t_m$ olur. f ve g pre-diferensiyellenebilir olduklarından bir U komşuluğu vardır, öyle ki; her $\tau \in U$ için,

$$|f(\tau) - f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} 2^{-m}$$

ve

$$|g(\tau) - g(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} 2^{-m}$$

dir. Bundan dolayı,

$$g(\tau) - g(t) \geq -\frac{\varepsilon}{2} 2^{-m}$$

olur. Bunları kullanarak,

$$\begin{aligned} |f(\tau) - f(r)| &\leq |f(\tau) - f(t)| + |f(t) - f(r)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} 2^{-m} + g(t) - g(r) + \varepsilon \left[t - r + \sum_{t_n < t} 2^{-n} \right] \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} 2^{-m} + g(\tau) + \frac{\varepsilon}{2} 2^{-m} - g(r) + \varepsilon \left[\tau - r + \sum_{t_n < t} 2^{-n} \right] \\ &= \varepsilon 2^{-m} + g(\tau) - g(r) + \varepsilon \left[\tau - r + \sum_{t_n < t} 2^{-n} \right] \\ &= g(\tau) - g(r) + \varepsilon \left[\tau - r + \sum_{t_n < t} 2^{-n} \right] \end{aligned}$$

elde edilir ki $S(\tau)$, her $\tau \in U \cap (t, \infty)$ için doğrudur.

iv) t sol yoğun olsun ve her $\tau < t$ için $S(\tau)$ doğru olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow t^-} |f(\tau) - f(r)| &\leq \lim_{\tau \rightarrow t^-} \left\{ g(t) - g(r) + \varepsilon \left[\tau - r + \sum_{t_n < \tau} 2^{-n} \right] \right\} \\ &\leq \lim_{\tau \rightarrow t^-} \left\{ g(\tau) - g(r) + \varepsilon \left[\tau - r + \sum_{t_n < t} 2^{-n} \right] \right\} \end{aligned}$$

olup $S(t)$ doğrudur[3].

2.3.1. Not

f ve g , D de pre-diferensiyellenebilir olsunlar,

i) U , uç noktaları $r, s \in t$ olan kompakt bir aralık ise,

$$|f(s) - f(r)| \leq \left\{ \sup_{t \in U^{\kappa_1}} |f^{\Delta}(t)| \right\} |s - r|$$

dir[3],

ii) $\forall t \in D$ için $f^{\Delta}(t) \equiv 0$ ise f sabit fonksiyondur,

iii) $\forall t \in D$ için $f^{\Delta}(t) = g^{\Delta}(t)$ ise bu durumda, C bir sabit olmak üzere,

$\forall t \in D$ için $g(t) = f(t) + C$ dir[3],

2.3.4. Teorem (Ön-Antitürevin varlığı)

f düzenli olsun. Bu durumda bir F fonksiyonu vardır öyle ki, $F; D$ bölgesinde pre-diferensiyellenebilirdir ve, her $t \in D$ için

$$F^{\Delta}(t) = f(t)$$

dir[3].

2.3.4. Tanım

$f : t \rightarrow r$ düzenli bir fonksiyon olsun. 2.3.4. Teorem de tanımlanan fonksiyona f in “ön-antitürevi” denir. Bu durumda düzenli bir f fonksiyonunun “Belirsiz integrali” c bir sabit olmak üzere ve $F ; f$ nin ön-antitürevi olmak üzere,

$$\int f(t) \Delta t = F(t) + c ,$$

olarak tanımlanır. Ve “Cauchy integrali” $\forall r, s \in t$ olmak üzere,

$$\int_r^s f(t) \Delta t = F(s) - F(r)$$

olarak tanımlanır.

$f : t \rightarrow r$ fonksiyonu için $\forall t \in t^{\kappa}$ için $F^{\Delta}(t) = f(t)$ ise F ye f nin “antitürevi” denir[3].

2.3.2. Örnek

$t = z$ ve $a \neq 1$ sabit olmak üzere,

$$\int a^t \Delta t$$

integralini hesaplayalım.

$$\left[\frac{a^t}{a-1} \right]^{\Delta} = \Delta \left(\frac{a^t}{a-1} \right) = \frac{a^{t+1} - a^t}{a-1} = a^t$$

olduğundan, c sabit olmak üzere,

$$\int a^t \Delta t = \frac{a^t}{a-1} + c$$

elde edilir[3].

2.3.5. Teorem (Antitürevin varlığı)

Her rd-sürekli fonksiyonun antitürevi vardır. Ayrıca $t_0 \in \mathbb{T}$ ise, $t \in \mathbb{T}$ için,

$$F(t) = \int_{t_0}^t f(\tau) \Delta \tau$$

şeklinde tanımlanan $F(t)$ fonksiyonu, $f(t)$ nin antitürevidir[3].

İspat

f rd-sürekli olsun. 2.3.1. Teorem (ii) den dolayı f düzenlidir. 2.3.4. Teoremden dolayı ön-antitürevi vardır. $F(t_0) \neq t_0$ olsun ve her $t \in D$ için $F^\Delta(t) = f(t)$ olsun. Yani F fonksiyonu D de ön-diferensiyellenebilirdir. Biz göstereceğiz ki, her $t \in \mathbb{T}^\kappa$ için $F^\Delta(t) = f(t)$ dir. ($\mathbb{T}^\kappa \setminus D \subset \mathbb{T}^\kappa$ dır). Bu durumda t sağ-yoğundur. Çünkü $\mathbb{T}^\kappa \setminus D$ de sağ saçılımlı nokta yoktur. f rd-sürekli olduğundan, t de sürekli dir. $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda burada bir U komşuluğu vardır öyle ki, $\forall s \in U$ için,

$$|f(s) - f(t)| \leq \varepsilon$$

olur. Şimdi $\tau \in \mathbb{T}$ için,

$$h(\tau) = F(\tau) - f(t).(\tau - t_0)$$

tanımlayalım. Bu durumda h ; D de ön-diferensiyellenebiliridir. Bu durumda, $\tau \in D$ için

$$h^\Delta(\tau) = F^\Delta(\tau) - f(t) = f(\tau) - f(t)$$

olup, her $s \in D \cap U$ için,

$$|h^\Delta(s)| = |f(s) - f(t)| \leq \varepsilon$$

olur. Bu yüzden,

$$\sup_{s \in D \cap U} |h^\Delta(s)| \leq \varepsilon$$

olur. 2.3.1. Notdan dolayı her $r \in U$ için,

$$\begin{aligned} |F(t) - F(r) - f(t).(t-r)| &= |h(t) + f(t).(t-t_0) - [h(r) + f(t).(r-t_0)] - f(t).(t-r)| \\ &= |h(t) - h(r)| \\ &= \left\{ \sup_{s \in D \cap U} |h^\Delta(s)| \right\} |t-r| \\ &\leq \varepsilon |t-r| \end{aligned}$$

olup F ; t de diferensiyellenebilirdir ve $F^\Delta(t) = f(t)$ dir[3].

2.3.6. Teorem

$f \in C_{rd}$ ve $t \in \mathbb{T}^k$ ise, bu durumda,

$$\int_t^{\sigma(t)} f(\tau) \Delta \tau = \mu(t).f(t)$$

dir[3].

İspat

2.3.5. Teoremden dolayı f nin bir F antitürevi vardır ve,

$$\int_t^{\sigma(t)} f(\tau) \Delta \tau = F(\sigma(t)) - F(t)$$

$$= \mu(t).F^\Delta(t)$$

$$\mu(t).f(t)$$

olur[3].

2.3.7. Teorem

$f^\Delta(t) \geq 0$ ise f azalmayandır[3].

İspat

$[a, b]$ de $f^\Delta(t) \geq 0$ ve $s, t \in \mathbb{T}$ için $a \leq s \leq t \leq b$ olsun. Bu durumda,

$$f(t) = f(s) + \int_s^t f^\Delta(\tau) \Delta \tau \geq f(s)$$

olarak sonuç elde edilir[3].

2.3.8. Teorem

$a, b, c \in \mathbb{T}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in C_{rd}$ olsun. Bu durumda,

$$\text{i) } \int_a^b [f(t) + g(t)] \Delta t = \int_a^b f(t) \Delta t + \int_a^b g(t) \Delta t ;$$

$$\text{ii) } \int_a^b \alpha \cdot f(t) \Delta t = \alpha \cdot \int_a^b f(t) \Delta t ;$$

$$\text{iii) } \int_a^b f(t) \Delta t = - \int_b^a f(t) \Delta t ;$$

$$\text{iv) } \int_a^b f(t) \Delta t = \int_a^c f(t) \Delta t + \int_c^b f(t) \Delta t ;$$

$$\text{v) } \int_a^b f(\sigma(t)) \cdot g^\Delta(t) \Delta t = (f \cdot g)(b) - (f \cdot g)(a) - \int_a^b f^\Delta(t) \cdot g(t) \Delta t ;$$

$$\text{vi) } \int_a^b f(t) \cdot g^\Delta(t) \Delta t = (f \cdot g)(b) - (f \cdot g)(a) - \int_a^b f^\Delta(t) \cdot g(\sigma(t)) \Delta t ;$$

$$\text{vii) } \int_a^a f(t) \Delta t = 0 ;$$

viii) $[a, b]$ de $|f(t)| \leq g(t)$ ise bu durumda,

$$\left| \int_a^b f(t) \Delta t \right| \leq \int_a^b g(t) \Delta t$$

dir;

ix) $\forall t \in [a, b)$ için $f(t) \geq 0$ ise bu durumda,

$$\int_a^b f(t) \Delta t \geq 0$$

dır[3].

2.3.9. Teorem

$f \in C_{rd}$ ve $a, b \in \mathbb{T}$ olsun.

i) $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise,

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \int_a^b f(t) dt$$

olur ki burada sağ taraf belirli integralidir.

ii) $[a, b]$ izole noktalardan oluşmuş ise,

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \begin{cases} \sum_{t \in [a, b)} \mu(t) \cdot f(t) & , a < b \\ 0 & , a = b \\ - \sum_{t \in [b, a)} \mu(t) \cdot f(t) & , a > b \end{cases}$$

dır.

iii) $h > 0$ için $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hk : k \in \mathbb{Z}\}$ ise

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \begin{cases} \sum_{k=\frac{a}{h}}^{\frac{b}{h}-1} f(kh) \cdot h & , a < b \\ 0 & , a = b \\ - \sum_{k=\frac{b}{h}}^{\frac{a}{h}-1} f(kh) \cdot h & , a > b \end{cases}$$

dır.

iv) $t = z$ ise,

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \begin{cases} \sum_{t=a}^b f(t) & , a < b \\ 0 & , a = b \\ - \sum_{t=b}^a f(t) & , a > b \end{cases}$$

dır[3].

İspat

i) 2.2.2. Örnek (i) ve genel matematiğin temel teoreminden açıktır.

ii) $[a, b]$ sonlu sayıda noktadan oluşmuş ve her noktası izoledir. $a < b$ olsun ve $[a, b] = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ kabul edelim. Yani $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ olsun. Bu durumda,

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t) \Delta t \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_{t_i}^{\sigma(t_i)} f(t) \Delta t \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \mu(t_i) \cdot f(t_i)$$

$$= \sum_{t \in [a, b)} \mu(t) \cdot f(t)$$

olur. $b < a$ de benzer şekilde ispatlanabilir.

Teoremin (iii) ve (iv) şıkları (ii) nin özel halleridir[3].

2.3.5. Tanım

$a \in \mathbb{T}$, $\sup \mathbb{T} = \infty$ ve $f; [0, \infty)$ da rd-süreklili ise bu durumda *genelleştirilmiş integral*,

$$\int_a^\infty f(t) \Delta t = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \Delta t$$

olarak tanımlanır. Sağ taraftaki limit mevcut ise genelleştirilmiş integral “yakınsaktır”, aksi takdirde “ıraksaktır” denir[3].

2.3.10. Teorem (Zincir Kuralı)

$g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{T}^\kappa$ da diferensiyellenebilir fonksiyon olsun. Ayrıca $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda $[t, \sigma(t)]$ reel aralığında bir c noktası vardır öyle ki,

$$(f \circ g)^\Delta(t) = f'(g(c)) \cdot g^\Delta(t)$$

eşitliği sağlanır[3].

2.3.11. Teorem

t bir zaman skalası ve $\nu : t \rightarrow r$ kesin olarak artan bir fonksiyon ve $\tilde{t} = \nu(t)$ bir zaman skalası olsun. $\tilde{\sigma}$ ile $\tilde{t}$ üzerindeki sıçrama fonksiyonunu ve $\tilde{\Delta}$ ile $\tilde{t}$ üzerindeki $\tilde{t}$ türevi gösterelim. Bu durumda $\nu \circ \sigma = \tilde{\sigma} \circ \nu$ olur[3].

2.3.12. Teorem (Zincir Kuralı)

$\nu : t \rightarrow r$ kesin olarak artan bir fonksiyon ve $\tilde{t} = \nu(t)$ bir zaman skalası olsun. $w : t \rightarrow r$ alalım. Eğer $\nu^\Delta(t)$ ve $w^{\tilde{\Delta}}(\nu(t))$, $t \in t^\kappa$ için varsa, $(w \circ \nu)^\Delta = (w^{\tilde{\Delta}} \circ \nu)^\Delta$ olur[3].

2.3.12. Teorem (Değişken değiştirme).

Kabul edelim ki, $f : t \rightarrow r$ kesin artan bir fonksiyon ve $\tilde{t} = f(t)$ bir zaman skalası olsun. Bu durumda $g \in C_{rd}(t, r)$ ve $f \in C^1_{rd}(t, r)$ olmak üzere, her $t, s \in t$ için

$$\int_s^t g(\eta) f^\Delta(\eta) \Delta\eta = \int_{f(s)}^{f(t)} (g \circ f^{-1})(\xi) \tilde{\Delta}\xi$$

dır[3.]

2.3.13. Teorem

Teorem 2.20 deki şartlar altında $\tilde{t} = t$ ise

$$\int_s^t g(\eta) f^\Delta(\eta) \Delta\eta = \int_{f(s)}^{f(t)} (g \circ f^{-1})(\eta) \Delta\eta$$

dır[3].

2.3.14. Teorem (Ara değer teoremi).

$f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olsun. $t, s \in \mathbb{T}$ ve $t > s$ olmak üzere,

$$f(s)f(t) < 0$$

sağlanıyorsa, bir $r \in [s, t)$ için $f(r) = 0$ veya $f(r)f(\sigma(r)) < 0$ olur[3].

2.3.15. Teorem (Leibnitz kuralı)

Kabul edelim ki, $s \in \mathbb{T}^\kappa$ ve $f : \mathbb{T} \times \mathbb{T}^\kappa \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, her $r > s$ ve $r \in \mathbb{T}^\kappa$ olmak üzere (r, r) noktasında sürekli olsun. Bununla birlikte,

$f^\Delta(r, \cdot) \in C_{rd}([s, \sigma(r)])$ olsun. O zaman; $\int_s^t g(t) = f(t, \eta) \Delta\eta$ ile tanımlanırsa

$$g^\Delta(t) = \int_s^t f^\Delta(t, \eta) \Delta\eta + f(\sigma(t), t)$$

sağlanır[3].

Yukarıdaki teoremde türev birinci derecede uygulanmaktadır.

2.4. Genelleştirilmiş Üstel Fonksiyon

2.4.1. Tanım

$h > 0$ olmak üzere, *Hilger karmaşık sayıları*, *Hilger eksen*i, *Hilger yedek eksen*i ve *Hilger sanal çemberi* sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlıdır,

$$\mathbb{C}_h = \left\{ z \in \mathbb{C} : z \neq -\frac{1}{h} \right\},$$

$$\mathbb{R}_h = \left\{ z \in \mathbb{C}_h : z \in \mathbb{R}, z > -\frac{1}{h} \right\},$$

$$\mathbb{A}_h = \left\{ z \in \mathbb{C}_h : z \in \mathbb{R}, z < -\frac{1}{h} \right\},$$

$$\mathbb{I}_h = \left\{ z \in \mathbb{C}_h : \left| z + \frac{1}{h} \right| = \frac{1}{h} \right\}.$$

Bunlarla beraber, $h = 0$ için $\mathbb{C}_0 = \mathbb{C}$, $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R}$, $\mathbb{I}_0 = i\mathbb{R}$ ve $\mathbb{A}_0 = \emptyset$ ile tanımlıdır[3].

2.4.2. Tanım

$h > 0$ ve $z \in \mathbb{C}_h$ olsun.

$$z\text{'nin Hilger reel kısmı}; \operatorname{Re}_h(z) = \frac{|zh+1|-1}{h}$$

$$z\text{'nin Hilger imajiner kısmı}; \operatorname{Im}_h(z) = \frac{\operatorname{Arg}(zh+1)}{h} \text{ ile tanımlıdır.}$$

Burada $\operatorname{Arg}(z)$, z 'nin esas argümentidir. $(-\pi < \operatorname{Arg}(z) < \pi)$

Ayrıca $\operatorname{Re}_h(z)$ ve $\operatorname{Im}_h(z)$

$$-\frac{1}{h} < \operatorname{Re}_h(z) < \infty \text{ ve } -\frac{\pi}{h} < \operatorname{Im}_h(z) \leq \frac{\pi}{h} \text{ aralıklarını sağlar[3].}$$

2.4.3. Tanım

$-\frac{\pi}{h} < w \leq \frac{\pi}{h}$ olsun. Hilger'in pür imajiner sayısı i_w

$$i_w = \frac{e^{iwh} - 1}{h}$$

ile tanımlanır. $z \in \mathbb{C}_h$ için, $i \operatorname{Im}_h(z) \in I_h$ olur[3].

2.4.1. Teorem

Eğer $-\frac{\pi}{h} < w \leq \frac{\pi}{h}$ ise

$$|i_w|^2 = \frac{4}{h_2} \sin^2 \frac{wh}{2}$$

olur[3].

2.4.4. Tanım

$\mathbb{C}_h$ üzerindeki “circle plus” toplama $\oplus$ işlemi

$$z \oplus w = z + w + zwhw$$

ile tanımlanır. Bu durumda $(\mathbb{C}_h, \oplus)$ bir Abelian grup olur[3].

2.4.2. Teorem

$z \in \mathbb{C}_h$ için $z = \operatorname{Re}_h z \oplus i \operatorname{Im}_h z$ olur[3].

2.4.5. Tanım

2.4.4. Tanımda tanımlanan $\oplus$ işlemi altında $z \in \mathbb{C}_h$ nin toplamsal tersi

$\ominus z = \frac{-z}{1+zh}$ olur. Bu durumda $\mathbb{C}_h$ üzerindeki “circle minus” çıkarma $\ominus$ işlemini

$$z \ominus w = z \oplus (\ominus w)$$

ile tanımlarız[3].

2.4.6. Tanım

$h \geq 0$ olmak üzere,

$$\xi : \mathbb{C}_h \rightarrow Z_h = \left\{ z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{h} < \text{Im}(z) \leq \frac{\pi}{h} \right\}$$

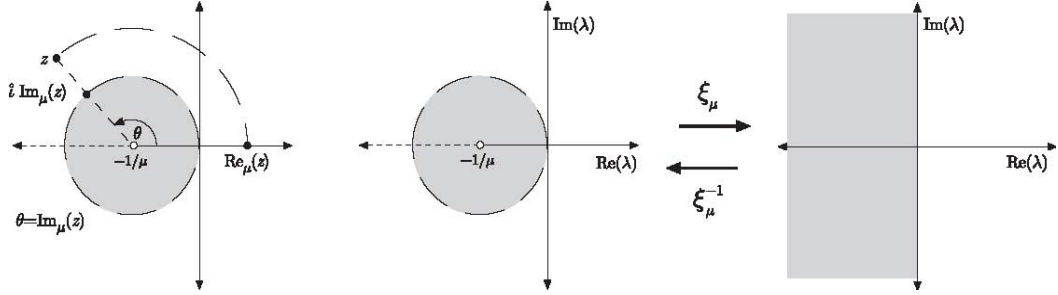
silindir dönüşümü,

$$\xi_h(z) = \begin{cases} z & , \quad h = 0 \\ \frac{1}{h} \log(1+zh) & , \quad h > 0 \end{cases}$$

ile tanımlıdır. Ters silindir dönüşümü $\xi_h^{-1} : Z_h \rightarrow \mathbb{C}_h$ ise

$$\xi_h^{-1}(z) = \begin{cases} z & , \quad h = 0 \\ \frac{1}{h} (e^{zh} - 1) & , \quad h > 0 \end{cases}$$

şeklindedir[3].



Şekil 2.1 Silindir Dönüşümü

2.4.7. Tanım

$p: t \rightarrow r$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $t \in t^\kappa$ için $1 + \mu(t)p(t) \neq 0$ özelliği sağlanıyorsa p fonksiyonuna *regressivdir* denir. Bütün regressiv ve rd-sürekli $f: t \rightarrow r$ fonksiyonlarının kümesini $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t, r) = \mathbf{R}(t, r)$ ile göstereceğiz[3].

2.4.8. Tanım

$p \in \mathbf{R}(t, r)$ olmak üzere zaman skalası üzerinde *üstel fonksiyon* her $t, s \in t$ için

$$e_p(t, s) = \exp \left(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta \tau \right)$$

ile tanımlanır[3].

2.4.1. Lemma

Eğer $p \in \mathbf{R}$ ise her $r, s, t \in t$ için

$$e_p(t, r)e_p(r, s) = e_p(t, s)$$

yarıgrup özelliği sağlanır[3].

İspat

$p \in \mathbf{R}$, her $r, s, t \in \mathbf{t}$ olsun. 2.4.8. Tanımdan

$$\begin{aligned}
 e_p(t, r) e_p(t, s) &= \exp \left(\int_r^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta \tau \right) \exp \left(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta \tau \right) \\
 &= \exp \left(\int_r^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta \tau + \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta \tau \right) \\
 &= \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta \tau \\
 &= e_p(t, s)
 \end{aligned}$$

elde edilir[3].

2.4.9. Tanım

$p \in \mathbf{R}$ ise birinci mertebeden lineer dinamik denklem,

$$y^\Delta = p(t)y$$

regressiv olarak adlandırılır[3].

2.4.3. Teorem

$f \in \mathbf{R}$ ve $t \in \mathbf{t}$ olmak üzere,

$$x^\Delta - f(t)x = 0, \quad x(t_0) = x_0 \in \mathbf{r}$$

ile verilen başlangıç değer probleminin tek çözümü

$$x(t) = x_0 e_f(t, t_0), \quad t \in \mathbb{T},$$

ile belirlidir[3].

2.4.4. Teorem (Sabitlerin Çeşitlenmesi)

$f \in \mathbf{R}$, $g \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ ve $t_0 \in \mathbb{T}$ olmak üzere

$$x^\Delta - f(t)x = g(t), \quad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}$$

ile verilen başlangıç değer probleminin tek çözümü

$$x(t) = x_0 e_f(t, t_0) + \int_{t_0}^t e_f(t, \sigma(\eta)) g(\eta) \Delta \eta$$

ile belirlidir[3].

2.4.5. Teorem

$p, q \in \mathbf{R}$ ise

$$(i) \quad e_0(t, s) \equiv 1 \text{ ve } e_p(t, t) \equiv 1$$

$$(ii) \quad e_p(\sigma(t), s) = (1 + \mu(t)p(t))e_p(t, s)$$

$$(iii) \quad \frac{1}{e_p(t, s)} = e_{\ominus p}(t, s)$$

$$(iv) \quad e_p(t, s) = \frac{1}{e_p(s, t)} = e_{\ominus p}(s, t)$$

$$(v) \quad e_p(t, s)e_p(s, r) = e_p(t, r)$$

$$(vi) \quad e_p(t, s)e_q(t, s) = e_{p \oplus q}(t, s)$$

$$(vii) \quad \frac{e_p(t, s)}{e_q(t, s)} = e_{p \ominus q}(t, s)$$

$$(viii) \quad \left(\frac{1}{e_p(\cdot, s)} \right)^\Delta = - \frac{p(t)}{e_p^\sigma(\cdot, s)}$$

dir[6].

2.4.6. Teorem

$p \in \mathbf{R}$ ve $t_0 \in \mathbf{t}$ olsun.

(i) Eğer $\mathbf{t}^\kappa$ üzerinde $1 + \mu(t)p(t) > 0$ ise her $t \in \mathbf{t}$ için $e_p(t, t_0) > 0$ olur.

(ii) Eğer $\mathbf{t}^\kappa$ üzerinde $1 + \mu(t)p(t) < 0$ ise her $t \in \mathbf{t}$ için

$$r_p(t, t_0) = \alpha(t, t_0)(-1)^{n_t} \text{ olur.}$$

Burada

$$\alpha(t, t_0) = \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{\log |1 + \mu(\tau)p(\tau)|}{\mu(\tau)} \Delta \tau \right)$$

ve

$$n_t = \begin{cases} |[t_0, t]| & , \quad t \geq t_0 \\ |[t, t_0]| & , \quad t < t_0 \end{cases}$$

dir[3].

2.4.10. Tanım

$\mathbf{R}$ nin tüm pozitif regressiv elemanlarının kümesi,

$$\mathbf{R}^+ = \mathbf{R}^+(t) = \mathbf{R}^+(t, r) = \{p \text{ regressiv ve } 1 + \mu(t)p(t) > 0\}$$

ile tanımlanır[3].

2.4.2. Lemma

$\mathbf{R}^+, \mathbf{R}$ nin bir alt grubudur[3].

2.4.7. Teorem (Üstel fonksiyonun işareti)

Kabul edelim ki $f \in \mathbf{R}$ ve $t_0 \in t$ olsun. O zaman,

- (i) $f \in \mathbf{R}^+$ ise, her $t \in t$ için $e_f(t, t_0) > 0$ olur.
- (ii) $1 + \mu(t)p(t) < 0$ ifadesini sağlayan $t \in t^\kappa$ noktaları için $e_f(t, t_0)e_f(\sigma(t), t_0) < 0$ olur[3].

3. LİNEER DİNAMİK DENKLEM SİSTEMLERİ

3.1. Regressiv Matrisler ve Lineer Sistemler

3.1.1. Tanım

A , t üzeninde tanımlı $m \times n$ tipinde matris değerli fonksiyon olsun. Eğer A matrisinin her bir elemanı t üzerinde rd-sürekli ise A matrisi t üzerinde *rd-sürekli* denir. rd-sürekli matris fonksiyonların ailesi

$$C_{rd} = C_{rd}(t) = C_{rd}(t, r^{m \times n})$$

olarak gösterilir. A matris fonksiyonun her bir elemanı t üzerinde türevlenebilir ise, A ya, t üzerinde *türevlenebilirdir* denir. Bu durumda

$$A^\Delta = (a_{ij}^\Delta)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$$

ile gösterilir[3].

3.1.1. Teorem

A , $t \in t^\kappa$ noktasında türevlenebilir ise, bu taktirde

$$A^\sigma(t) = A(t) + \mu(t)A^\Delta(t)$$

sağlanır[3].

3.1.2. Teorem

A ve B , $n \times n$ tipinde türevlenebilir matris fonksiyonları ise,

$$(i) (A + B)^\Delta = A^\Delta + B^\Delta;$$

$$(ii) \text{ E\u011fer } \alpha \text{ sabit ise, } (\alpha A)^\Delta = \alpha A^\Delta;$$

$$(iii) (AB)^\Delta = A^\Delta B^\sigma + AB^\Delta = A^\sigma B^\Delta + BA^\Delta;$$

$$(iv) \text{ E\u011fer } AA^\sigma \text{ tersinir matris ise } (A^{-1})^\Delta = -(A^\sigma)^{-1} A^\Delta A^{-1} = -A^{-1} A^\Delta (A^\sigma)^{-1};$$

$$(v) \text{ E\u011fer } BB^\sigma \text{ tersinir matris ise}$$

$$(AB^{-1})^\Delta = (A^\Delta - AB^{-1}B^\Delta)(B^\sigma)^{-1} = (A^\Delta - (AB^{-1})^\sigma B^\Delta)B^{-1}$$

dir[3].

Şimdi

$$y^\Delta(t) = A(t)y(t) \tag{3.1}$$

linear dinamik sistemini göz önüne alalım. Burada A , t üzerinde $n \times n$ tipinde matris değerli bir fonksiyondur. E\u011fer $y: T \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektör değerli fonksiyonu, her bir $t \in t^\kappa$ için, Eş.3.1 lineer dinamik denklemini sağlarsa, bu taktirde $y(t)$ vektör değerli fonksiyonuna t üzerinde Eş.3.1 denklem sisteminin *çözümüdür* denir[3].

Eş.3.1 sistemini içeren başlangıç değer probleminin çözümünü tanımlamak için aşağıdaki tanımlara ihtiyaç vardır.

3.1.2. Tanım

$n \times n$ tipinde A matris değerli fonksiyonu için $I + \mu(t)A(t)$ matrisi tersinir ise A matrisine t üzerinde *regressiv* matris denir. Regressiv ve rd-sürekli matris

fonksiyonların ailesi $\mathbf{R}=\mathbf{R}(t)=\mathbf{R}(t, r^{n \times n})$ ile gösterilir. Eğer $A \in \mathbf{R}$ ise Eş.3.1 denklem sistemi *regressivdir* denir[3].

3.1.3. Teorem (Varlık-Teklik Teoremi)

A, t üzerinde $n \times n$ tipinde regressiv matris değerli fonksiyon $t_0 \in t$ ve $y \in r^n$ olsun. $f: t \rightarrow r^n$ vektör değerli fonksiyonu rd-sürekli olsun. Bu taktirde,

$$y^\Delta(t) = A(t)y(t) \quad y(t_0) = y_0$$

başlangıç değer probleminin $y: t \rightarrow r^n$ şeklinde bir tek çözümü vardır[3].

3.1.3. Tanım

A ve B, t üzerinde $n \times n$ tipinde matris değerli fonksiyonlar olsun. Bu taktirde her $t \in t^\kappa$ için

$$(A \oplus B)(t) = A(t) + B(t) + \mu(t)A(t)B(t)$$

ve

$$(\Theta A)(t) = -A(t)[I + \mu(t)A(t)]^{-1}A(t)$$

olarak tanımlanır[3].

3.1.1. Lemma

$(\mathbf{R}(t, r^{n \times n}), \oplus)$ bir gruptur[3].

3.1.2. Lemma

Eğer A , B ve C matris değerli fonksiyonları t ise bu taktirde

$$A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$$

özelliği sağlanır[3].

3.1.4. Tanım (Üstel Matris Fonksiyon)

$t \in t$ ve $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ tipinde matris değerli fonksiyon olsun.

$$Y^\Delta(t) = A(t)Y(t), \quad Y(t_0) = I,$$

başlangıç değer probleminin bir tek matris değerli çözüm fonksiyonu $e_A(t, t_0)$ olarak tanımlanır[3].

Üstel matris fonksiyonun bazı önemli özellikleri aşağıdaki teoremde verilmiştir.

3.1.4. Teorem

$A, B \in t$ matris değerli fonksiyonlar olsun. Bu taktirde,

$$(i) \ e_0(t, s) \equiv I \text{ ve } e_A(t, t) \equiv I;$$

$$(ii) \ e_A(\sigma(t), s) = (I + \mu(t)A(t))e_A(t, s);$$

$$(iii) \ e_A^{-1}(t, s) = e_{\ominus A}^*(t, s);$$

$$(iv) \ e_A(t, s) = e_A^{-1}(s, t)e_{\ominus A}^*(s, t);$$

$$(v) e_A(t, s)e_A(s, r) = e_A(t, r);$$

$$(vi) \text{ Eğer } e_A(t, s) \text{ ve } B(t) \text{ de\u0131işmeli ise, } e_A(t, s)e_A(t, s) = e_{A \oplus B}(t, s)$$

sağlanır. * ile matrisin adjointi kastedilmektedir[3].

3.1.5. Teorem

Eğer $A \in \mathbf{R}$ ve $a, b, c \in t$ ise, bu taktirde

$$[e_A(c, .)]^\Delta = -[e_A(c, .)]^\sigma A$$

ve

$$\int_a^b e_A(c, \sigma(t))A(t)\Delta t = e_A(c, a) - e_A(c, b)$$

sağlanır[3].

Şimdi Eş.3.1 denklem sitemi ile beraber,

$$y^\Delta = A(t)y(t) + f(t) \tag{3.2}$$

homogen olmayan denklem sistemini göz önüne alalım. Burada $f: t \rightarrow \mathbf{r}^n$ vektör değerli fonksiyondur.

3.1.6. Teorem (Sabitlerin Çeşitlenmesi)

$A \in \mathbf{R}$, t üzerinde $n \times n$ tipinde matris değerli fonksiyon, $t_0 \in t$ ve $y: t \rightarrow \mathbf{r}^n$ olsun. $f: t \rightarrow \mathbf{r}^n$ vektör değerli fonksiyonu rd-sürekli olsun. Bu takdirde

$$y(t) = A(t)y(t) + f(t), \quad y(t_0) = y_0$$

başlangıç değer probleminin $y: t \rightarrow \mathbf{r}^n$ biçiminde bir tek çözümü vardır. Bu çözüm

$$y(t) = e_A(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^t e_A(t, \sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau$$

ile verilir[3].

3.1.7. Teorem

$A \in \mathbf{R}$ ve C türevlenebilir olsun. Eğer C ,

$$C^\Delta = A(t)C - C^\sigma A(t)$$

dinamik denkleminin çözümü ise, bu takdirde

$$C(t)e_A(t, s) = e_A(t, s)C(s)$$

sağlanır[3].

3.1.1. Sonuç

$A \in \mathbf{R}$ ve C bir sabit matris olsun. Eğer C , A ile değişmeli ise, C , e_A ile değişmelidir. Özellikle A sabit bir matris ise bu taktirde A ile e_A değişmelidir[3].

3.1.8. Teorem (Sabitlerin Çeşitlenmesi)

$A \in \mathbf{R}$, t üzerinde $n \times n$ tipinde matris değerli fonksiyon, $t_0 \in t$ ve $y: t \rightarrow \mathbf{r}^n$ olsun. Bu taktirde

$$x^\Delta = -A(t)x^\sigma + f(t), \quad x(t_0) = x_0$$

başlangıç değer probleminin $x: t \rightarrow \mathbf{r}^n$ biçiminde bir tek çözümü vardır. Bununla birlikte bu çözüm

$$x(t) = e_{\Theta A^*}(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t e_{\Theta A^*}(t, \tau)f(\tau)\Delta\tau$$

ile verilir[3].

4. LİNEER DİNAMİK SİSTEMLERİN ASİMPOTOTİK DAVRANIŞI

Bu bölümde, zaman skalasında lineer dinamik denklem sistemlerinin çözümleriyle, bu sistemlerin çeşitli yapılarıdaki perturbasyonlarının çözümlerinin asimptotik davranışları arasındaki ilişkileri veren bazı önemli teoremler ve sonuçlar incelenecektir.

Skaler bir dinamik denklemi incelemek, her zaman, bir dinamik denklemler sistemini incelemekten daha avantajlıdır. Bu yüzden inceleyeceğimiz teoremlerde sık sık, sistemi bir skaler denkleme indirgeme yoluna gidilmiştir. Sistemin katsayı matrislerinin elemanları olan fonksiyonların sağlaması gereken skaler denklemlerin teoremlerde koşul olarak verilmesi, bu avantajın kullanılmasıyla doğmaktadır.

Bu bölümde verilecek olan bazı teoremlerde “*asimptotik olarak denk olma*” kavramı kullanılacaktır. Bu yüzden ilk önce aşağıdaki tanımı verelim.

4.1. Tanım

İki dinamik denklem sisteminin çözümleri arasında bir homeomorfizm kurulabiliyorsa ve bu çözümler arasındaki fark asimptotik olarak (yani $t \rightarrow \infty$ iken) sıfıra gidiyorsa bu dinamik sistemler *asimptotik olarak denktir* denir[8].

Bu bölüm boyunca, $t \subset \mathbb{R}$ zaman skalasını üstten sınırsız kabul edeceğiz ($\sup t = \infty$). $n \in \mathbb{N}$ için $f: t \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ve $b: t \rightarrow \mathbb{R}^n$ rd-sürekli fonksiyonlar, $A \in \mathbf{R}$ ve $B \in C_{rd}$; t üzerinde tanımlı $n \times n$ matris değerli fonksiyonlar ve $C \in \mathbf{R}$; $n \times n$ sabit matris olmak üzere,

$$y^\Delta = A(t)y + b(t) \quad (4.1)$$

$$x^\Delta = A(t)x + b(t) + f(t, x) \quad (4.2)$$

$$x^\Delta = A(t)x \quad (4.3)$$

$$y^\Delta = [A(t) + B(t)]y \quad (4.4)$$

$$x^\Delta = Cx \quad (4.5)$$

$$y^\Delta = Cy + f(t, y), \quad f(t, 0) = 0 \quad (4.6)$$

dinamik sistemleri göz önüne alınacaktır. Eş.4.1 ile Eş.4.2, Eş.4.3 ile Eş.4.4 ve Eş.4.5 ile Eş.4.6 dinamik sistemlerinin asimptotik olarak denkliğini veren teoremler ve sonuçlar verilecektir.

Diferensiyel denklem sistemlerinde ve fark denklem sistemlerinde daha önce bu konuda çeşitli çalışmalar yapılmış ve bazı sonuçlar elde edilmiştir. Örneğin, Levinson [9] de, Eş.4.3 ün aşikar çözümünün *düzgün kararlı*, $A(t) \equiv A$ ve

$$\int_0^\infty \|B(t)\| dt < \infty \quad (4.7)$$

olması durumunda Eş.4.3 ile Eş.4.4 sistemlerinin asimptotik olarak denk olduğu sonucuna varmıştır. Daha sonra Wintner [10] da bu sonucu $A(t)$ değişken matrisi için geliştirmiş, Eş.4.3 ün çözümlerinin sınırlı olması ve Eş.4.7 nin ve,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \text{Trace}[B(s)] ds > -\infty$$

sağlanması durumunda Eş.4.3 ile Eş.4.4 sistemlerinin asimptotik olarak denk olduğu sonucuna varmıştır. Benzer olarak Yakubovich [11] de Eş.4.5 ile Eş.4.6 sistemleri için de asimptotik denkliğine ilişkin teoremler vermiştir. Fark denklem sistemlerinde de benzer çalışmalar yapılmıştır.

Zaman skalası alanında ise bu çalışmalar genelleştirilmiştir. Bohner, Bodine ve Lutz [5,6,7] de, Kaymakçalan, Mert ve Ağacık [8] de bu konuda kullanışlı sonuçlar elde etmişlerdir. Bu bölümde bu çalışmalarda elde edilen sonuçlar incelenecektir.

Şimdi Eş.4.1 ve Eş.4.2 denklemlerini düşünelim.

Her $t \in \mathbb{T}$ için, $I + \mu(t)A(t)$ tersi alınabilir olsun. (4.8)

Bu durumda varlık teoreminden dolayı bir $n \times n$, tersi alınabilir matris değerli $Y(t)$ fonksiyonu vardır öyle ki,

$$Y^\Delta(t) = A(t)Y(t), \quad Y(t_0) = I \quad (4.9)$$

sağlanır.

4.1. Teorem

Eş.4.8 sağlansın, ayrıca Eş.4.2 da verilen $f(t, y)$ fonksiyonu

$$\int |f(\tau, 0)| \Delta \tau < \infty, \quad (4.10)$$

$$\left. \begin{aligned} &|f(\tau, x_1) - f(\tau, x_2)| \leq \gamma(\tau)|x_1 - x_2|, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \\ &\int_{t_0}^{\infty} \gamma(\tau) \Delta \tau < \infty, \tau \in \mathbb{T}, \tau \geq t_0 \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Özelliklerini sağlayacak şekilde olsun.

Öyle P_1 ve P_2 bütünler projeksiyonları var olsun ki, $K > 0$ için

$$\left. \begin{aligned} &|Y(t)P_1Y^{-1}(s)| \leq K, \forall t \in \mathbb{T}, t > t_0, s \in [t_0, t) \cap \mathbb{T} \\ &|Y(t)P_2Y^{-1}(s)| \leq K, \forall s \in \mathbb{T}, s > t_0, t \in [t_0, s) \cap \mathbb{T} \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

olsun. Bu durumda, Eş.4.1 ve Eş.4.2 nin sınırlı çözümleri arasında bir homeomorfizm kurulabilir. Ayrıca eğer,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{Y(t)P_1\} = 0 \quad (4.13)$$

Sağlanırsa Eş.4.1 ve Eş.4.2 asimptotik olarak denktir [5].

4.1. Not

Eş.4.11 koşuluna perturbasyon terimi üzerinde *büyüme koşulu (growth condition)* denir. Eş.4.12 koşuluna *ayrışma koşulu (dichotomy condition)* denir. Buradaki P_1 ve P_2 bütünler projeksiyonlar,

$$\left. \begin{aligned} P_1^2 &= P_1 \\ P_2^2 &= P_2 \\ P_1 + P_2 &= I \\ P_1 P_2 &= P_2 P_1 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

şartlarını sağlayan $n \times n$ matrislerdir[5].

Bu teoremi ispatlamak için önce bir T operatörü tanımlayacağız. Bu operatör $t \geq t_1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} (Tx)(t) &= \int_{t_1}^t Y(t)P_1Y^{-1}(\sigma(\tau))f(\tau, x(\tau))\Delta\tau \\ &\quad - \int_t^\infty Y(t)P_2Y^{-1}(\sigma(\tau))f(\tau, x(\tau))\Delta\tau \end{aligned} \quad (4.15)$$

olarak tanımlansın. Bu tanımda $x, [t, \infty) \cap t$ aralığında sınırlı fonksiyon ve $t_1 \in [t_0, \infty) \cap t$ noktası da

$$\theta = K \int_{t_1}^{\infty} \gamma(\tau) \Delta \tau < 1 \quad (4.16)$$

sağlanacak şekilde seçilmiş bir noktadır (bkz. Eş.4.11).

4.2. Not

Eş.4.15 ile tanımlanan T operatörü, $x : t \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonu $[t, \infty) \cap t$ aralığında sınırlı olduğundan ve Eş.4.10-Eş.4.12 koşulları sağlandığından dolayı iyi tanımlıdır[5].

Şimdi T operatörü için bir lemma verelim.

4.1. Lemma

Eş.4.15 ile tanımlanan T operatörü için, Eş.4.8, Eş.4.10-Eş.4.12 koşulları sağlansın. Bu durumda $t \in [t_0, \infty) \cap t$ için,

$$(Tx)^\Delta - A(Tx) = f(\cdot, x) \quad (4.17)$$

bağıntısı sağlanır[5].

İspat

2.2.2. Teorem (iii) ile verilen çarpımın türevi kuralından dolayı, $t \in [t_0, \infty) \cap t$ için

$$\begin{aligned} (Tx)^\Delta(t) - A(t)(Tx)(t) &= Y^\Delta(t) \int_{t_1}^t P_1 Y^{-1}(\sigma(\tau)) f(\tau, x(\tau)) \Delta \tau \\ &\quad + Y^\sigma(t) P_1 Y^{-1}(\sigma(\tau)) f(t, x(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -Y^\Delta(t) \int_t^\infty P_2 Y^{-1}(\sigma(\tau)) f(\tau, x(\tau)) \Delta \tau \\
& + Y^\sigma(t) P_2 Y^{-1}(\sigma(t)) f(t, x(t)) \\
& - A(t) Y(t) \int_{t_1}^t P_1 Y^{-1}(\sigma(\tau)) f(\tau, x(\tau)) \Delta \tau \\
& + A(t) Y(t) \int_t^\infty P_2 Y^{-1}(\sigma(\tau)) f(\tau, x(\tau)) \Delta \tau \\
& = Y(\sigma(t)) \{P_1 + P_2\} Y^{-1}(\sigma(t)) f(t, x(t)) \\
& = f(t, x(t)),
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada Eş.4.9 ve Eş.4.14 ü kullandık[5].

4.1. Teoremin İspatı

Sınırlı fonksiyonlar için verilen

$$\|x\| = \sup_{t \in [t_1, \infty) \cap \mathbb{T}} |x(t)|$$

normunu kullanacağız. Eğer x_1 ve x_2 iki sınırlı fonksiyon ise, $t \in [t_1, \infty) \cap \mathbb{T}$ için

$$|(Tx_1)(t) - (Tx_2)(t)| \leq \theta |x_1 - x_2| \quad (4.18)$$

eşitsizliğinin sağlandığı gösterilebilir. Ayrıca Eş.4.10 koşulundan dolayı

$$|(T0)(t)| \leq K \int_{t_1}^\infty f(\tau, 0) \Delta \tau \quad (4.19)$$

eşitsizliği sağlanacağından, ayrıca Eş.4.18 ve Eş.4.11 koşullarından dolayı

$$\|Tx\| \leq \|Tx - T0\| + \|T0\| \leq \theta\|x\| + \|T0\| \quad (4.20)$$

sağlanır. Ayrıca Eş.4.18 ve Eş.4.20 den dolayı

$$\|Tx\| \leq \theta\|x\| + K \int_{t_1}^{\infty} f(\tau, 0) \Delta \tau \quad (4.21)$$

sağlanır. Böylece T operatörü $t \in [t_1, \infty) \cap t$ aralığında tanımlı fonksiyonların kümesinden, kendisine tanımlı bir daralma dönüşümüdür. Dolayısıyla $t \geq t_1$ için

$$y = x - Tx \quad (4.22)$$

dönüşümü, Eş.4.1 ve Eş.4.2 nin sınırlı çözümleri arasında bire-bir bir dönüşümdür (Eş.4.17. Eş.4.18) kullanılarak

$$(1 + \theta)^{-1} \|y_1 - y_2\| \leq \|x_1 - x_2\| \leq (1 - \theta)^{-1} \|y_1 - y_2\|$$

elde edilir ki bu da Eş.4.22 dönüşümünün ve tersinin $t \in [t_1, \infty) \cap t$ için sürekli olduğunu gösterir. Varlık teoremi ve Eş.4.8 kullanılarak bu aralık $[t_0, t_1] \cap t$ aralığına genişletilebilir. Son olarak verilen bir $\varepsilon > 0$ için bir $t_2(\varepsilon) > t_1$ seçelim öyle ki

$$K \int_{t_2(\varepsilon)}^{\infty} f(\tau, x(\tau)) \Delta \tau < \frac{\varepsilon}{2}$$

eşitsizliği sağlansın. Böylece

$$|x(t) - y(t)| = |(Tx)(t)|$$

$$< \left| Y(t)P_1 \right| \left| \int_{t_1}^{t_2(\varepsilon)} Y^{-1}(\sigma(\tau))f(\tau, x(\tau))\Delta\tau \right| + \frac{\varepsilon}{2},$$

elde edilir. Dolayısıyla, $t \in t$, $t \rightarrow \infty$ için $x(t) - y(t) = o(1)$ olur[5].

Şimdi *Levinson'un Perturbasyon Lemmasının* zaman skalasına genelleştirilmiş versiyonunu verelim. Bunun ispatını yaparken 4.1. Teoremi kullanacağız. Burada

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_k : t \rightarrow r, 1 \leq n \leq k, \text{ fonksiyonları rd - sürekli} \\ 1 + \mu(t)\lambda_k(t) \neq 0, \text{ her } t \in t \text{ için} \end{array} \right\} \quad (4.23)$$

ve

$$\Lambda(t) = \text{diag}\{\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)\}. \quad (4.24)$$

olarak kabul edeceğiz. Bu teoremde

$$w_{ij}^\Delta = \frac{\lambda_j(t) - \lambda_i(t)}{1 + \mu(t)\lambda_i(t)} w_{ij}, \quad w_{ij}(t_0) = 1 \quad (4.25)$$

başlangıç değer problemlerinin büyük önemi vardır. Varlık teklik teoreminden ve

$$1 + \mu(t) \frac{\lambda_j(t) - \lambda_i(t)}{1 + \mu(t)\lambda_i(t)} = \frac{1 + \mu(t)\lambda_j(t)}{1 + \mu(t)\lambda_i(t)} \neq 0$$

olduğundan $w_{ij} : t \rightarrow r$ çözümleri tek tanımlıdır. Son olarak R de t üzerinde tanımlı $n \times n$ rd-sürekli matris değerli bir fonksiyon olsun. Bu ön bilgiler doğrultusunda şimdi Levinson'un Perturbasyon Lemmasını verelim.

4.2. Teorem

Kabul edelim ki Eş.4.23 sağlansın. Ayrıca,

$$\int_{t_0}^{\infty} \left| \frac{R(\tau)}{\lambda_j(t) - \lambda_i(t)} \right| \Delta \tau < \infty, \quad 1 \leq i \leq n \quad (4.26)$$

olsun ve öyle $K, m > 0$ sayıları olsun ki her (i, j) çifti için

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & \lim_{\tau \rightarrow \infty} w_{ij}(\tau) = 0, \text{ ve } \forall t \in \mathbb{T}, t \geq t_0, s \in [t_0, t] \cap \mathbb{T} \text{ için } \left| \frac{w_{ij}(s)}{w_{ij}(t)} \right| \geq m, \\ (b) \quad & t \geq t_0, s \in [t_0, t] \cap \mathbb{T} \text{ için } \left| \frac{w_{ij}(s)}{w_{ij}(t)} \right| \leq K, \forall t \in \mathbb{T} \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

şıklarından *birisi* sağlansın. Buradaki w_{ij} ler Eş.4.25 ile tanımlanan fonksiyonlardır.

Bu durumda $x^\Delta = [\Lambda(t) + R(t)]x$ lineer dinamik denklem sistemi,

$$t \rightarrow \infty \text{ iken } X(t) = [I + o(1)]Y(t) \quad (4.28)$$

olan bir temel çözümler sistemine sahiptir. Buradaki Y ;

$$Y^\Delta = \Lambda(t)Y(t), \quad Y(t_0) = I$$

denklemini sağlayan bir matristir[5].

İspat

$i \in \{1, \dots, n\}$ sayısını sabitleyelim ve

$$\Lambda_i(t) = \frac{\Lambda(t) - \lambda_i(t)I}{1 + \mu(t)\lambda_i(t)}, \quad \text{ve} \quad f_i(t, x) = \frac{R(t)x}{1 + \mu(t)\lambda_i(t)}$$

olarak alalım. Şimdi artık

$$w_i^\Delta = \Lambda_i(t)w_i \quad (4.39)$$

ve

$$v_i^\Delta = \Lambda_i(t)v_i + f_i(t, v_i) \quad (4.40)$$

sistemlerine 4.1. Teoremi uygulayabiliriz. Eş.4.8 şartının sağlanması için

$$I + \mu(t)\Lambda_i(t) = \frac{I + \mu(t)\Lambda(t)}{I + \mu(t)\Lambda_i(t)}$$

matrisinin singüler olmaması gerekmektedir. Bu da Eş.4.23 koşulu sayesinde sağlanmaktadır. Çünkü Eş.4.24 ten dolayı $\Lambda(t)$ bir diyagonal matristir. Ayrıca f_i fonksiyonu aşikar olarak Eş.4.10 u sağlar. Eğer $\gamma = R/(1 + \mu\lambda_i)$ seçersek Eş.4.26 koşulunun sağlanmasıyla Eş.4.11 koşulu da sağlanır. Son olarak Eş.4.27 koşulunun sağlanması gerekiyor. Bu amaçla

$$p_j = \begin{cases} 1, & (i, j) \text{ (4.27) - (a) yı sağlarsa} \\ 0, & \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. $P_1 = \text{diag}\{p_1, \dots, p_n\}$ ve $P_2 = I - P_1$ olarak seçelim. Bu durumda Eş.4.14 sağlanır. Dikkat edilirse

$$W_i = \text{diag}\{w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{in}\}$$

olarak tanımlanırsa

$$W_i^\Delta = \Lambda_i(t)W_i, \quad W_i(t_0) = I$$

başlangıç değer problemi sağlanır. Buradaki w_{ij} ler Eş.4.25 ile tanımlanan fonksiyonlardır. Böylece Eş.4.27-(a) koşulu $\lim_{t \rightarrow \infty} \{W_i(t)P_1\} = 0$ olmasını gerektirir ve Eş.4.13 de $Y = W_i, i \in \{1, \dots, n\}$ olarak düşünülürse sağlanır. $t_0 \leq s \leq t, s, t \in \mathbb{T}$ için $W_i(t)P_1W_i^{-1}(s)$ matrisi; elemanları 0 veya, (i,j) çifti Eş.4.27-(a) koşulunu sağlarsa elemanları $w_{ij}(t)/w_{ij}(s)$ olan (ki burada $|w_{ij}(t)/w_{ij}(s)| \leq 1/m$ dir) bir matristir. Yine benzer şekilde $t_0 \leq t \leq s, s, t \in \mathbb{T}$ için $W_i(t)P_2W_i^{-1}(s)$ matrisi; elemanları 0 veya, (i,j) çifti Eş.4.27-(b) koşulunu sağlarsa elemanları $w_{ij}(t)/w_{ij}(s)$ olan (ki burada $|w_{ij}(t)/w_{ij}(s)| \leq K$ dir) bir matristir. Böylece $Y = W_i, i \in \{1, \dots, n\}$ olarak düşünülürse Eş.4.12 koşulu da sağlanır.

Şimdi, $w_i(t) = e_i$ fonksiyonu (ki burada $e_i \in \mathbb{R}^n$; i.nci birim vektördür) Eş.4.39 denkleminin aşikar sınırlı bir çözümü olduğundan Eş.4.40 denkleminin

$$v_i = w_i + \varepsilon_i = e_i + \varepsilon_i \quad \text{ve} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_i(t) = 0, \quad 1 \leq i \leq n$$

olan bir v_i çözümü vardır. Şimdi y_i fonksiyonu

$$y^\Delta = \lambda_i(t)y, \quad y(t_0) = 1$$

probleminin tek çözümü olsun. $x_i = y_i v_i = (e_i + \varepsilon_i)y_i$ kabul edelim. Dikkat edilirse $Y = \text{diag}\{y_1, \dots, y_n\}$ fonksiyonu Eş.4.9 u sağlamaktadır. 2.2.2. Teorem-(iii) ile verilen türevin çarpımı kuralından,

$$x_i^\Delta(t) = (y_i v_i)^\Delta(t) = y_i^\Delta(t)v_i(t) + y_i^\sigma(t)v_i^\Delta(t)$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda_i(t)y_i(t)v_i(t) + \{y_i(t) + \mu(t)y_i^\Delta(t)\} \frac{\Lambda(t) - \lambda_i(t)I + R(t)}{1 + \mu(t)\lambda_i(t)} v_i(t) \\
&= \lambda_i(t)x_i(t) + y_i(t) \{\Lambda(t) - \lambda_i(t)I + R(t)\} v_i(t) \\
&= [\Lambda(t) + R(t)]x_i(t)
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu da Eş.4.28 i verir. Böylece ispat tamamlanmış olur[5].

4.3. Not

Yukarıda verilen 4.2. Teoremi

$$x^\Delta = [\Lambda(t) + V(t) + R(t)]x$$

biçimindeki sistemlere uygulanılabilir hale getirmek için bazı dönüşümler geliştirilmiştir[5]. Bu tez çalışmasında bu dönüşümler incelenmemiştir. Detaylı bilgi için [5, 5. bölüm] e bakınız.

4.4. Not

Yukarıda verilen teoremlerde sözü edilen $A(t)$ matrisi

$$A(t) = C + R(t)$$

formundaysa, ki burada C , $n \times n$, köşegenleştirilebilir ve regressiv bir matrisdir, teoremlerin şartları daha da basitleştirilebilir[6]. Bu çalışmada bu konuya değinilmemiştir. Detaylı bilgi için [6] ya bakınız.

Şimdi daha önce incelenen iki teoreme ek olarak, dinamik sistemlerin asimptotik davranışı hakkında daha farklı bir yaklaşım ortaya koyan bir teoremi ispatsız olarak vereceğiz. Bu teorem, 4.1. teorem ve 4.2. teoremin bir sunucu olarak da görülebilir. İspatı için [6] ya bakınız.

4.3. Teorem

t zaman skalası, her $t \in \mathbb{R}$ ve $\alpha > 1$ için $\sigma(t) \leq \alpha t$ eşitsizliğini sağlayan bir zaman skalası olsun. B de rd-sürekli, regressiv, $n \times n$ matris değerli bir fonksiyon olsun. b de $t \rightarrow \infty$ iken

$$b(t) = O(1/t^n)$$

şartını sağlayan n -vektör değerli bir fonksiyon olsun. Ayrıca

$$Y^\Delta = B(t)Y$$

sisteminin $Y(t)$ çözümü $K, c, d > 0$ ve P_1, P_2 bütünler projeksiyonları için, *üstel ayrışma koşulu* (*exponential dichotomy condition*) dediğimiz

$$s \leq t \text{ için } |Y(t)P_1Y^{-1}(\sigma(s))| \leq Ke_c(s, t),$$

ve

$$s \geq t \text{ için } |Y(t)P_2Y^{-1}(\sigma(s))| \leq Ke_d(t, \sigma(s))$$

koşulunu sağlasın. Bu durumda, eğer x

$$x^\Delta = B(t)x + b(t)$$

sisteminin bir çözümü ise

$$y^\Delta = B(t)y$$

sisteminin bir y çözümü vardır, öyle ki $t \rightarrow \infty$ iken

$$|x(t) - y(t)| = O(1/t^n),$$

sağlanır[6].

Şimdi 4.1. teorem ve 4.2. teoremin, diferensiyel denklemlerde ($t = r$) ve fark denklemlerinde ($t = z$) nasıl uygulandığını bir örnek üzerinde inceleyelim.

4.1 Örnek

Kısaca $t = r$ ve $t = z$ durumları için verilen teoremleri inceleyelim. İlk önce $t = r$ olsun. Yani $t \in r$ için

$$\sigma(t) = \rho(t) = t, \quad \mu(t) = 0, \quad f^\Delta(t) = f'(t) \quad \text{ve} \quad \int_a^b f(\tau) \Delta\tau = \int_a^b f(\tau) d\tau$$

olur. Ayrıca bu durumda

$$w^\Delta = \lambda(t)w \quad w(t_0) = 1$$

Probleminin çözümü, $\lambda(t)$ fonksiyonu sürekli ise,

$$w(t) = \exp \left\{ \int_{t_0}^t \lambda(\tau) d\tau \right\}$$

olarak verilir. Bu durumda Eş.4.25 deki w_{ij} çözümleri, Eş.4.23 sağlanırsa,

$$w_{ij}(t) = \exp \left\{ \int_{t_0}^t [\lambda_j(\tau) - \lambda_i(\tau)] d\tau \right\}$$

olur. Böylece

$$\left| \frac{w_{ij}(s)}{w_{ij}(t)} \right| = \left| \exp \left\{ \int_t^s [\lambda_j(\tau) - \lambda_i(\tau)] d\tau \right\} \right| = \exp \left\{ \int_s^t \operatorname{Re} [\lambda_j(\tau) - \lambda_i(\tau)] d\tau \right\}$$

olur. Şimdi eğer bir $m > 0$ ve $t^* \in \mathbb{R}$ varsa öyle ki her $(i, j)_{i \neq j}$ çifti için

$$\left| \operatorname{Re} [\lambda_i(\tau) - \lambda_j(\tau)] \right| \geq m, \quad \forall t \in [t^*, \infty) \cap \mathbb{T}$$

sağlanırsa bu durumda $(i, j)_{i \neq j}$ için

$$\begin{aligned} (a) \quad & \operatorname{Re} [f_i(t) - f_j(t)] \geq m \quad \forall t \in [t^*, \infty) \cap \mathbb{T} \\ (b) \quad & \operatorname{Re} [f_i(t) - f_j(t)] \leq -m \quad \forall t \in [t^*, \infty) \cap \mathbb{T} \end{aligned} \tag{4.41}$$

yazarız ki burada $f_k(t) = \lambda_k(t)$ dir. Eş.4.23 sağlanırsa $\lambda_i - \lambda_j$ fonksiyonları sürekli olurlar. Böylece Eş.4.27-(a) koşulu Eş.4.41-(a) koşuluna; Eş.4.27-(b) koşulu da Eş.4.41-(b) koşuluna dönüşür.

Şimdi $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olsun, bu durumda $t \in \mathbb{Z}$ için

$$\sigma(t) = t + 1 \quad \rho(t) = t - 1 \quad \mu(t) = 1 \quad f^\Delta(t) = \Delta f(t)$$

$$\int_a^b f(\tau) \Delta \tau = \sum_{\tau=a}^b f(\tau), \quad a < b$$

olur. Ayrıca w fonksiyonu $t > t_0$ için

$$w(t) = \prod_{\tau=t_0}^{t-1} \{1 + \lambda(\tau)\}$$

ve w_{ij} fonksiyonları da

$$w_{ij}(t) = \prod_{\tau=t_0}^{t-1} \frac{1 + \lambda_j(\tau)}{1 + \lambda_i(\tau)}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} \left| \frac{w_{ij}(s)}{w_{ij}(t)} \right| &= \prod_{\tau=t_0}^{t-1} \frac{1 + \lambda_j(\tau)}{1 + \lambda_i(\tau)} \\ &= \exp \left\{ \sum_{\tau=s}^{t-1} [\log |1 + \lambda_i(\tau)| - \log |1 + \lambda_j(\tau)|] \right\} \\ &= \exp \left\{ \int_s^t [\log |1 + \lambda_i(\tau)| - \log |1 + \lambda_j(\tau)|] \Delta \tau \right\} \\ &= \exp \left\{ \int_s^t \operatorname{Re} [f_i(\tau) - f_j(\tau)] \Delta \tau \right\} \end{aligned}$$

yazılabilir ki burada $f_k(t) = \log(1 + \lambda_k(t))$ dir. Sonuç olarak yine Eş.4.41 koşulu Eş.4.27 koşulunun sağlanması için yeterlidir. Burada alternatif olarak başka bir koşul vermek de mümkündür.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_k(t) = \alpha_k, \quad 1 \leq k \leq n, \quad |\alpha_i| \neq |\alpha_j|, \quad 1 \leq i \leq j \leq n$$

olsun ki burada $\alpha_k(t) = 1 + \lambda_k(t)$ dir. Bu durumda açıktır ki aşağıdaki koşul, Eş.4.27 koşulunun sağlanması için yeterlidir

$$(a) \quad |\alpha_i| > |\alpha_j| \quad \text{veya} \quad (b) \quad |\alpha_i| < |\alpha_j|$$

[5].

Buraya kadar incelediğimiz teoremlerde, Eş.4.1 ile Eş.4.2 ve Eş.4.3 ile Eş.4.4 lineer sistemlerinin *sınırlı* çözümlerinin asimptotik davranışları arasındaki ilişkileri inceledik. Şimdi vereceğimiz teoremlerle Eş.4.3 ile Eş.4.4 ve Eş.4.5 ile Eş.4.6 denklemlerinin çözümleri arasındaki, çözümler sınırlı olmasa da, ilişkileri inceleyeceğiz. Sınırlılık şartı aranmadığından dolayı bu teoremler pratikte daha kullanışlı olabilmektedir.

Bu teoremleri incelemeden önce bazı ön bilgiler vereceğiz. İlk önce

$$y(t) = e_A(t, t_0)u(t) \quad (4.42)$$

değişken dönüşümü yapalım. Bu dönüşüm ile birlikte Eş.4.4 denklemi

$$u^\Delta = P(t)u \quad (4.43)$$

denklemine dönüşür ki burada

$$P(t) = e_A(t_0, \sigma(t))B(t)e_A(t, t_0) \quad (4.44)$$

dir. Şimdi, daha sonra kullanacağımız bir lemma verelim.

4.2. Lemma

Eğer

$$\int_{t_0}^{\infty} \|P(t)\| \Delta t < \infty \quad (4.45)$$

sağlanırsa bu durumda

$$\Psi^\Delta = P(t)\Psi + P(t) \quad (4.46)$$

dinamik denkleminin öyle bir Ψ çözümü vardır ki $t \rightarrow \infty$ iken $\Psi \rightarrow 0$ olur[8].

İspat

$$\Psi_0(t) = I, \quad \Psi_k(t) = -\int_t^\infty P(s)[I + \Psi(s)]\Delta s, \quad k = 1, 2, \dots$$

olarak tanımlayalım. Eş.4.45 kullanılarak $\sum_{k=1}^\infty \Psi_k(t)$ serisinin, yeterince büyük $t_1 \geq t_0$

ve $t \in [t_1, \infty) \cap \mathbf{t}$ için düzgün yakınsak olduğu kolayca görülebilir. Ayrıca

$t \in [t_1, \infty) \cap \mathbf{t}$ için $\Psi(t) = \sum_{k=1}^\infty \Psi_k(t)$ fonksiyonu da $t \rightarrow \infty$ iken $\Psi \rightarrow 0$ olur ve

$$\Psi(t) = -\int_t^\infty P(s)[I + \Psi(s)]\Delta s, \quad t \in [t_1, \infty) \cap \mathbf{t}$$

dir[8].

4.4. Teorem

Kabul edelim ki Eş.4.45 sağlansın ve

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_A(t, t_0)\Psi(t) = 0 \tag{4.47}$$

sağlansın. Bu durumda Eş.4.3 ile Eş.4.4 sistemleri asimptotik olarak denktir[8].

İspat

t noktası $t \geq t_1$ olacak şekilde yeterince büyük bir sayı olsun. 4.2. lemmadan dolayı $u(t) = [I + \Psi(t)]c$, $c \in \mathbb{R}^n$ fonksiyonu, $t \in [t_1, \infty) \cap \mathbb{T}$ için Eş.4.43 denkleminin bir çözümüdür ve böylece

$$y(t) = e_A(t, t_0)[I + \Psi(t)]c \quad (4.48)$$

fonksiyonu da Eş.4.4 ün bir çözümüdür. $t \rightarrow \infty$ iken $\Psi \rightarrow 0$ olduğundan öyle bir $t_2 > t_1$ noktası vardır ki bu noktada $I + \Psi(t_2)$ matrisi singüler değildir. Şimdi $x^0 = e_A(t_2, t_0)c$ ve $y^0 = e_A(t_2, t_0)[I + \Psi(t_2)]c$ olsun. Eş.4.3 ile Eş.4.4 denkleminin, $x(t_2) = x^0$ ve $y(t_2) = y^0$ noktalarından geçen çözümlerini sırasıyla $x(t) = x(t, t_2, x^0)$ ve $y(t) = y(t, t_2, y^0)$ olarak yazalım. Varlık ve teklik teoreminden dolayı ve $I + \Psi(t_2)$ nin singüler olmamasından dolayı

$$y^0 = e_A(t_2, t_0)[I + \Psi(t_2)]e_A(t_0, t_2)x^0$$

bağıntısı aracılığıyla Eş.4.3 ün $x(t)$ çözümüyle Eş.4.4 ün $y(t)$ çözümü arasında bire-bir bir dönüşüm kurulmuş olur. Bu da

$$y(t) = x(t) + e_A(t, t_0)\Psi(t)c, \quad t \in [t_1, \infty) \cap \mathbb{T}$$

dir. Böylece Eş.4.47 göz önüne alındığında ispat tamamlanmış olur[8].

4.2. Örnek

$t = r$ olsun ve $t \in [1, \infty)$ için

$$x^\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2t^{-2} & 0 \end{bmatrix} x \quad (4.49)$$

ve

$$y^\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2t^{-2} & 0 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ e^{-t} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

sistemlerini ele alalım. 4.4. teoremin şartlarının sağlandığı kolayca görülebilir ($t \geq 1$, $K > 0$ için $\|P(t)\| \leq Ke^{-t/2}$ ve $\|\Psi(t)\| \leq e^{2Ke^{-t/2}} - 1$ olur). Bu yüzden Eş.4.49 ve Eş.4.50 sistemleri asimptotik olarak denktir. Dikkat edersek burada Eş.4.49 denkleminin çözümleri $x_1 = [t^2, 2t]^T$ ve $x_2 = [t^{-1}, -t^{-2}]^T$ olup sınırlı değildir[8].

Şimdi vereceğimiz teoremle Eş.4.5 ile Eş.4.6 sistemlerinin çözümlerinin asimptotik davranışlarını inceleyip, sistemlerin asimptotik olarak denk olma koşullarını vereceğiz. Burada kabul edeceğiz ki bir $\eta \in C([t_0, \infty) \cap \mathbb{T})$ fonksiyonu var olsun öyle ki, her $(t, x_1), (t, x_2) \in [t_0, \infty) \cap \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n$ için

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq \eta(t) |x_1 - x_2| \quad (4.51)$$

sağlansın. Ayrıca kabul edelim ki

$$\int_{t_0}^{\infty} \|e_C(t_0, \sigma(t))\| \|e_C(t, t_0)\| \eta(t) \Delta t < \infty \quad (4.52)$$

sağlansın. Şimdi, daha sonra kullanacağımız iki lemma verelim.

4.3. Lemma

Eğer Eş.4.52 sağlanırsa bu durumda

$$u^\Delta = e_C(t_0, \sigma(t))f(t, e_C(t, t_0)u) \quad (4.53)$$

denkleminin her çözümü $[t_0, \infty) \cap \mathbb{T}$ aralığında sınırlıdır. Ayrıca (4.53) denkleminin her $u(t)$ çözümü için bir sabit $c \in \mathbb{R}^n$ vektörü vardır öyle ki $t \rightarrow \infty$ iken $u(t) \rightarrow c$ olur[8].

İspat

Eş.4.53 denkleminin $u(t_0) = u_0$ noktasından geçen çözümünü $u(t) = u(t, t_0, u_0)$ ile gösterelim. $f(t, 0) = 0$ olduğundan ve Eş.4.51 koşulundan dolayı

$$|u(t)| \leq |u(t_0)| + \int_{t_0}^t M(s)|u(s)|\Delta s, \quad [t_0, \infty) \cap \mathbb{T}$$

elde edilir ki burada

$$M(t) = \|e_C(t_0, \sigma(t))\| \|e_C(t, t_0)\| \eta(t)$$

dir. Eş.4.52 kullanılarak, ve $1 + \mu(t)M(t) > 0$ olduğundan dolayı *Gronwall eşitsizliği* kullanılarak görülebilir ki, $t \in [t_0, \infty) \cap \mathbb{T}$ için $|u(t)| \leq M_0$ olacak şekilde bir M_0 vardır vardır. Ayrıca

$$\left| \int_{t_0}^t e_C(t_0, \sigma(s))f(s, e_C(s, t_0)u(s))\Delta s \right| \leq M_0 \int_{t_0}^{\infty} M(s)\Delta s < \infty$$

olduğu açıktır. Bundan dolayı c sabitini

$$c = u_0 + \int_{t_0}^{\infty} e_C(t_0, \sigma(s)) f(s, e_C(s, t_0) u(s)) \Delta s$$

olarak tanımlayabiliriz. Böylece

$$u(t) = c - \int_t^{\infty} e_C(t_0, \sigma(s)) f(s, e_C(s, t_0) u(s)) \Delta s$$

olur ki bu da lemmanın ifadesini sağlar. Böylece ispat tamamlanmış olur[8]

4.4. Lemma

Eğer $y(t)$ fonksiyonu Eş.4.6 denkleminin bir çözümü ise Eş.4.53 denkleminin bir $u(t)$ çözümü vardır öyle ki

$$y(t) = e_C(t, t_0) u(t) \tag{4.54}$$

eşitliği sağlanır. Tersine, eğer $u(t)$ fonksiyonu Eş.4.53 denkleminin bir çözümü ise bu durumda Eş.4.6 denkleminin çözümü Eş.4.54 ile verilir[8].

İspat

Eş.4.54 ile verilen $y(t)$ fonksiyonunu Eş.4.6 da yerine yazarak denklemi sağladığı kolayca görülür. Tersine, Eş.4.54 ifadesinin türevi alınarak $u(t)$ fonksiyonunun Eş.4.53 ü sağladığı kolayca görülebilir[8].

4.5. Teorem

Eş.4.52 sağlansın. Bu durumda Eş.4.6 denkleminin her $y(t)$ çözümü $t \rightarrow \infty$ iken

$$y(t) = e_C(t, t_0)[c + o(1)] \quad (4.55)$$

formundadır ki burada $c \in \mathbb{R}^n$ sabit bir vektördür. Ayrıca

$$o(1) = - \int_t^\infty e_C(t_0, \sigma(s)) f(s, e_C(s, t_0)u(s)) \Delta s$$

dır. Burada $u(t)$ fonksiyonu Eş.4.53 denkleminin bir çözümüdür[8].

İspat

4.3. lemma ve 4.4. lemma ile verilen sonuçlar göz önüne alındığında Eş.4.55 in sağlandığı kolayca görülebilir[8].

4.6. Teorem

Kabul edelim ki Eş.4.52 sağlansın. Ayrıca

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^\infty \|e_C(t, \sigma(s))\| \|e_C(s, t_0)\| \eta(s) \Delta s = 0 \quad (4.56)$$

sağlansın. Bu durumda Eş.4.5 ile Eş.4.6 sistemleri asimptotik olarak denktir[8].

İspat

$$\begin{aligned} u(t) &= e_C(t, t_0) \left[c - \int_t^\infty e_C(t_0, \sigma(s)) f(s, e_C(s, t_0) u(s)) \Delta s \right] \\ &= x(t) - \int_t^\infty e_C(t, \sigma(s)) f(s, e_C(s, t_0) u(s)) \Delta s \end{aligned}$$

Sağlanır. Burada $x(t) = e_C(t, t_0)c$ fonksiyonu Eş.4.5 denkleminin, $u(t) = u(t, t_0, u_0)$ fonksiyonu da Eş.4.53 denkleminin bir çözümüdür. Açıktır ki verilen bir u_0 , Eş.4.5 ve Eş.4.6 denklemlerinin $x(t)$ ve $y(t)$ çözümleri arasında bire-bir bir dönüşüm tanımlayacaktır. Eş.4.56 koşulundan dolayı $t \rightarrow \infty$ iken $x(t) - y(t) \rightarrow 0$ olacaktır ki bu da ispatı tamamlar[8].

4.3. Örnek

$t = P_{1,1} = \bigcup_{k=0}^\infty [2k, 2k+1]$ olsun ve $t \in [0, \infty) \cap t$ için

$$x^\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} x \quad (4.57)$$

ve

$$y^\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} e^{-8t} (1 - \cos y_1) \\ e^{-9t} \sin y_2 \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

denklemlerini göz önüne alalım. Bu durumda $t \in [2k, 2k+1]$ için üstel fonksiyon

$$e_C(t,0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(3^k e^{2(t-k)} + (-1)^k e^{-2(t-k)}) & \frac{1}{4}(3^k e^{2(t-k)} - (-1)^k e^{-2(t-k)}) \\ 3^k e^{2(t-k)} - (-1)^k e^{-2(t-k)} & \frac{1}{2}(3^k e^{2(t-k)} + (-1)^k e^{-2(t-k)}) \end{bmatrix}$$

olacaktır. $\eta(t) = e^{-8t}$ seçersek Eş.4.52 nin sağlanacağı kolayca görülebilir. Gerçekten

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \|e_C(0, \sigma(t))\| \|e_C(t,0)\| \eta(t) \Delta t &\leq 4e^2 \int_0^\infty e^{-4t} \Delta t \\ &= 4 \sum_{k=0}^\infty \int_{2k}^{2k+1} e^{-4t+2} dt + 4 \sum_{k=0}^\infty e^{-8k-2} \\ &= \frac{e^2 + 3e^{-2}}{1 - e^{-8}} \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\int_t^\infty \|e_C(t, \sigma(s))\| \|e_C(s,1)\| \eta(s) \Delta s \leq 8e^{2t+2} \int_t^\infty e^{-4s} \Delta s$$

olduğundan Eş.4.56 şartı sağlanır. Dolayısıyla 4.6. teoremden dolayı Eş.4.57 ile Eş.4.58 sistemleri asimptotik olarak denktir[8].

4.4. Not

Dikkat edilirse gerek Eş.4.52 gerekse Eş.4.56 koşullarının sağlanıp sağlanmadığını kontrol etmek için $e_C(t,s)$ matrisini hesaplamak gerekmektedir. Bu da değişken katsayılı sistemlerde her zaman kolay olmamaktadır. Bu nedenle üstel matris fonksiyonun bazı özellikleri kullanılarak bu koşulları gerektiren bazı yeni koşullar türetilmiştir. Aşağıda bu koşullar yerine yazıldıktan sonra elde edilen teorem ispatsız olarak verilecektir. Bu konuda detaylar için [8, bölüm 5] e bakınız.

4.7. Teorem

$\lambda_j, \quad j = 1, 2, \dots, l$ ler, C matrisinin m_j katlı öz değerleri olsun ve $m_0 = \max\{m_1, m_2, \dots, m_l\}$ olarak tanımlayalım. Ayrıca, öyle $M_0 > 0$ ve β sayıları mevcut olsun ki $t \in [t_0, \infty) \cap \mathbb{T}$ için

$$\frac{1}{|1 + \lambda_j \mu(t)|} \leq M_0 \quad \text{ve} \quad B_{\lambda_j}(t) \leq \beta$$

şölsün ki burada

$$B_p(t) = \begin{cases} \frac{1}{\mu(t)} \log|1 + \mu(t)p(t)|, & \mu(t) > 0 \\ \operatorname{Re} p(t), & \mu(t) = 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanan fonksiyondur. Bu durumda eğer

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{[t\sigma(t)^{n-1}]^{m_0-1} e^{\beta(n\sigma(t)-\mu(t))}}{e_{\operatorname{Tr}C+\mu(t)\det C}(\sigma(t), t_0)} \eta(t) \Delta t < \infty$$

ve

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{m_0-1} e^{\beta t} \int_t^{\infty} \frac{[s\sigma(s)^{n-1}]^{m_0-1} e^{\beta(n\sigma(s)-\mu(s))}}{e_{\operatorname{Tr}C+\mu(s)\det C}(\sigma(s), t_0)} \eta(s) \Delta s = 0$$

koşulları sağlanırsa Eş.4.5 ve Eş.4.6 sistemleri asimptotik olarak denktir[8].

KAYNAKLAR

1. Agarwal R., Bohner M., O'Regan D., Peterson A., "Dynamic equations on time scales: a survey", *J. Comput. Appl. Math.*, 141:1-26 (2002).
2. Bohner M., Peterson A., "Advances in Dynamic Equations on Time Scales", *Birkhäuser*, Boston, 1-78 (2003).
3. Bohner M., Peterson A., "Dynamic Equations on Time Scales", *Birkhäuser*, Boston, 1-78 (2001).
4. Hilger S., "Analysis on measure chains - a unified approach to continuous and discrete calculus", *Results Math.*, 18:18-56 (1990).
5. Bohner M., Lutz D. A. "Asymptotic Behavior of Dynamic Equations on Time Scales", *Journal of Difference Equations and Applications*, 7:21-50 (2001).
6. Bodine S., Bohner M., Lutz D., "Asymptotic Behavior of Solutions of Dynamic Equations", *Journal of Mathematical Sciences*, 124:5110-5118 (2004)
7. Bohner M., Lutz D.A., "Asymptotic expansions and analytic dynamic equations", *Z. Angev. Math. Mech.*, 86:37-45 (2006).
8. Kaymakçalan B., Mert R., Ağacık Z., "Asymptotic Equivalence of Dynamic Systems on Time Scales", *Discrete and Continuous Dyn. Syst. Suppl.*, 558-567 (2007).
9. Levinson N., "The Asymptotic Nature of Solutions of Linear systems of Differential Equations", *Duke Math. J.*, 15:111-126 (1948).
10. Wintner A., "Linear Variations of Constants", *Amer. J. Math.*, 68:185-213 (1946).
11. Yakubovich V. A., "On the Asymptotic Behavior of Systems of Differential Equations", *Mat. Sbornik*, 28: 217-240 (1951).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : ÖĞREKÇİ, Süleyman

Uyruğu : T.C.

Doğum tarihi ve yeri : 29.05.1985 Antalya

Medeni hali : Bekar

Telefon : 0 (535) 678 57 22

e-mail : s.ogrekci@gmail.com

Eğitim Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Selçuk Üniversitesi /Matematik Bölümü	2007
Lise	Serik Anadolu Lisesi	2003

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Yüzme, Bilgisayar ve İnternet Teknolojileri, Kitap