



**EULER-BERNOULLI KİRİŞİ OLARAK MODELLENMİŞ YÜKSEK HIZLI
TREN DEMİRYOLU KÖPRÜSÜNÜN DİNAMİK DAVRANIŞININ
ADOMIAN AYRIŞTIRMA METODUYLA İNCELENMESİ**

Ferda BİLİK

**DOKTORA TEZİ
MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Eylül 2015

Ferda BİLİK tarafından hazırlanan “EULER-BERNOULLI KİRİŞİ OLARAK MODELLENMİŞ YÜKSEK HIZLI TREN DEMİRYOLU KÖPRÜSÜNÜN DİNAMİK DAVRANIŞININ ADOMIAN AYRIŞTIRMA METODUYLA İNCELENMESİ” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Makine Mühendisliği Anabilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Tuncay KARAÇAY

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

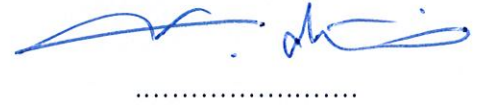
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum



Başkan : Prof. Dr. Nizami AKTÜRK

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum



Üye : Prof. Dr. Saadettin ORHAN

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı, Yıldırım Beyazıt Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum



Üye : Prof. Dr. Fatma AYAZ

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum



Üye : Doç. Dr. Mehmet A. GÜLER

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı, TOBB ETÜ

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum



Tez Savunma Tarihi: 09/09/2015

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Doktora Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.



Prof. Dr. Şeref SAĞIROĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Ferda BİLİK

09/09/2015

EULER-BERNOULLI KİRİŞİ OLARAK MODELLENMİŞ YÜKSEK HIZLI TREN
DEMİRYOLU KÖPRÜSÜNÜN DİNAMİK DAVRANIŞININ ADOMIAN
AYRIŞTIRMA METODUYLA İNCELENMESİ
(Doktora Tezi)

Ferda BİLİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Eylül 2015

ÖZET

Raylı ulaşım altyapısına yapılan yatırımların hem ülkemizde hem de dünyada artan bir eğilim göstermesi ve dolayısıyla yaygınlaşması sebebiyle bu konularda yapılan akademik ve mühendislik çalışmalar da ivme kazanmıştır. Yüksek hızlı tren (YHT) köprüleri de demiryolunun önemli bir parçasıdır ve tren hızlarının artması bu köprülerin önemini daha da artırmaktadır. Literatürde YHT köprüleri Euler-Bernoulli (EB) kirişi, tren ise hareketli kuvvet olarak modellenebilmektedir. Dördüncü mertebe, homojen olmayan kısmi diferansiyel denklem ile ifade edilen, tren geçişine bağlı hareket denklemlerinin çözümü konusunda matematiksel yöntemlerin sınırlı olması sebebiyle yeni çözüm yöntemlerinin geliştirilmesi gereği ortaya çıkmıştır. Bu çalışmada YHT köprülerinin dinamik davranışı Adomian ayrıştırma metodu (AAM) ve bu metodun değiştirilmiş ve geliştirilmiş formları kullanılarak analiz edilmiştir. Öncelikle kuvvetin farklı uygulama biçimleri için kirişin matematiksel modellemesi yapılmış ve buna bağlı hareket denklemleri oluşturulmuştur. Elde edilen dördüncü mertebe, homojen olmayan kısmi diferansiyel denklem, sınır ve başlangıç şartları dikkate alınarak modal analiz ile ikinci mertebe homojen olmayan adi diferansiyel denklem haline dönüştürülmüş ve kiriş modal yerdeğişimi AAM'ler uygulanarak seri açılım şeklinde ifade edilmiştir. Bu sonsuz seri açılımlarda Binom ve Taylor seri açılımları kullanılarak genel ifadeler elde edilmiştir. Hareket denkleminde sönüm etkisi de dikkate alınarak benzer işlemler tekrarlanmıştır. YHT köprülerinin yapısal özellikleri ile tren hareketinin etkisinin değerlendirilmesi amacıyla bir dizi sayısal çözümleme yapılmış ve modal yerdeğişimleri boyutsuz köprü uzunluklarına göre çizdirilmiştir. Bu sonuçlar köprü-tren dinamik ilişkisi açısından yorumlanmıştır. Bu çalışma AAM ve bu metodun değiştirilmiş ve geliştirilmiş formlarının köprü dinamik analizlerinde etkin bir şekilde kullanılabileceğini göstermiştir.

Bilim Kodu : 914.3.003
Anahtar Kelimeler : Euler-Bernoulli kirişi, Adomian ayrıştırma metodu, demiryolu köprüleri, yüksek hızlı tren
Sayfa Adedi : 97
Danışman : Yrd. Doç. Dr. Tuncay KARAÇAY

INVESTIGATION OF A HIGH-SPEED TRAIN RAILWAY BRIDGE MODELLED AS
AN EULER-BERNOULLI BEAM USING ADOMIAN DECOMPOSITION METHOD

(Ph. D. Thesis)

Ferda BİLİK

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

September 2015

ABSTRACT

Railway infrastructure investments have an increasing trend in our country as well as globally. Thus, academic and engineering studies gain speed due to this spread in the infrastructure. High speed train (HST) bridges are important elements of the railways and they become more important with the increasing speed of the trains. HST bridges are modelled as an Euler-Bernoulli (EB) beam and the train passing over them could be modelled as a moving force. Solution methods of the modelled fourth-order, non-homogenous, partial differential equations are limited and so a new methods, to obtain the response of a beam to the moving force, is needed. In this study, the dynamic response of a HST bridge is analyzed using Adomian decomposition method (ADM) as well as its modified and improved forms. First, the mathematical model of the beam is obtained for different form of excitation force. Then the forth-order, non-homogenous, partial differential equation is transformed to a second-order, non-homogeneous, ordinary differential equation using modal analysis, considering initial and boundary conditions. And, modal displacement of the beam is represented in a series expansion using ADM. This infinite series is generalized using Binomial and Taylor series expansions. Similar steps are also repeated for the beam with damping. In order to interpret the effect of the structural properties of the HST, a series of numerical calculations are done and resulting modal displacement are drawn with respect to dimensionless bridge length. The results are discussed as dynamic response of bridge-train interaction. This study showed that ADM and its modified and improved forms could be used in analysis of bridge dynamics effectively.

Science Code : 914.1.003

Key Words : Euler-Bernoulli beam, Adomian decomposition method, railway bridges, high speed train

Page Number : 97

Supervisor : Assist. Prof. Dr. Tuncay KARAÇAY

TEŞEKKÜR

“Bilim dünyası bir havlu ise senden nemli yeri bulup, sıkarak, bir damla su elde etmeni istiyoruz” diyerek doktora eğitimimde yapmam gerekeni kısaca özetleyen, ilmi ve tecrübesi ile beni yönlendiren saygıdeğer hocam Prof. Dr. Nizami AKTÜRK’e, tüm tez izleme sürecimde yardım ve katkılarıyla beni onurlandıran, yaptığım çalışmalardan duyduğu memnuniyeti her seferinde dile getiren saygıdeğer hocam Prof. Dr. Saadettin ORHAN’a, “Dolmadan taşmaz, hiçbir doğum sancısız olmaz” diyerek, ne derece uzun ve zorlu bir yolun beni beklediğini en başta söyleyen, çalışmalarım boyunca bilgisini benden esirgemeyen, yol gösteren, akademik bakış açısı kazanmama vesile olan, bazen acımasız olsa da çoğu zaman hoşgörülü ve sabırlı, danışmanım olmasından dolayı kendimi şanslı hissettiğim, saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. Tuncay KARAÇAY’a, literatür araştırmalarımda, yaptığı çalışmalardan faydalandığım tüm bilim insanlarına, AAM’yi bulan Prof. Dr. George ADOMIAN’a ve bu yöntemi geliştiren Prof. Dr. Abdul-Majid Wazwaz, Prof. Dr. Mohammad Mehdi Hosseini, Prof. Dr. Hassan Haddadpour ve Prof. Dr. Tamer Ahmed Abassy’e, manevi destek ve dualarını benden esirgemeyen tüm dostlarıma ve aileme, şükranlarımı sunuyorum. Yaptığım bu çalışmayı haklarını asla ödeyemeyeceğim, teşekkür için sözlerin kifayetsiz kalacağı anneme ve babama armağan ediyorum.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ.....	ix
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	x
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xii
1. GİRİŞ.....	1
2. YÜKSEK HIZLI TREN DEMİRYOLU KÖPRÜSÜ	13
2.1. Demiryolu Köprüsü Matematiksel Modellemesi	13
3. KÖPRÜ MODELİNİN DİNAMİK ANALİZİ	17
3.1. Sönümsüz Euler-Bernoulli Kirişinin Modal Analizi.....	20
3.1.1. Sönümsüz EB kirişinin serbest titreşimi.....	22
3.1.2. Üzerinden hareketli kuvvet geçen sönümsüz EB kirişinin modal analizi	24
3.2. Adomian Ayırıştırma Metodu Çözüm Yöntemleri.....	27
3.2.1. Adomian ayırıştırma metodu (AAM)	28
3.2.2. Değiştirilmiş Adomian ayırıştırma metodu (DAAM)	30
3.2.3. Geliştirilmiş Adomian ayırıştırma metodu (GAAM)	30
3.3. Sönümsüz EB Kirişinin AAM ile Çözümü.....	33
3.3.1. Orta noktasına kuvvet uygulanan sönümsüz EB kirişinin AAM ile çözümü	33
3.3.2. Üzerinden hareketli kuvvet geçen sönümsüz EB kirişinin AAM ile çözümü	40
3.4. Sönümsüz EB Kirişinin DAAM ile Çözümü.....	44
3.4.1. Orta noktasına kuvvet uygulanan EB kirişinin DAAM ile çözümü	44

	Sayfa
3.4.2. Başlangıç noktasına α uzaklıkta kuvvet uygulanan EB kirişinin DAAM ile çözümü.....	47
3.4.3. Üzerinden hareketli kuvvet geçen EB kirişinin DAAM ile çözümü	50
3.5. Sönümsüz EB kirişinin GAAM ile Çözümü.....	52
3.5.1. Üzerinden hareketli kuvvet geçen EB kirişinin GAAM ile çözümü	52
4. SÖNÜMLÜ EULER BERNOULLI KİRİŞİ DİNAMİK ANALİZİ.....	57
4.1. Üzerinden Hareketli Kuvvet Geçen Sönümlü EB Kirişi Modal Analizi	57
4.2. Üzerinden Hareketli Kuvvet Geçen Sönümlü EB Kirişinin GAAM ile Çözümü	58
5. BULGULAR VE YORUMLAR.....	67
5.1. EB Kirişi Olarak Modellenen YHT Demiryolu Köprüsü Özellikleri	67
5.2. Orta Noktasına Kuvvet Uygulanan Sönümsüz Köprü Titreşimi.....	69
5.3. Üzerinden YHT Geçen Sönümsüz Köprü Titreşimi	70
5.4. Sönümlü EB Kirişi Olarak Modellenen YHT Demiryolu Köprüsü Titreşimi....	78
6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	79
KAYNAKLAR	83
EKLER.....	91
EK-1. Köprü dinamiği analitik çözümü işlem sırası.....	92
EK-2. Dirac Delta fonksiyonu özellikleri	93
EK-3. Binom ve Taylor seri açılımları	94
EK-4. Doğrusal, homojen, ikinci mertebe diferansiyel denklem çözümü	95
EK-5. Doğrusal, homojen olmayan, ikinci mertebe diferansiyel denklem çözümü	96
ÖZGEÇMİŞ	97

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 3.1. Kiriş tipleri ve sınır şartları	21
Çizelge 5.1. YHT köprü özellikleri.....	68
Çizelge 5.2. YHT köprüsünde ilk beş moddaki doğal frekans değerleri, $l=40\text{ m}$	68
Çizelge 5.3. Köprü uzunluk değişimine göre birinci moddaki doğal frekans değerleri .	69
Çizelge 5.4. Orta noktasına kuvvet uygulanan sönümsüz kirişin farklı uzunluklarında, birinci moddaki modal yerdeğişimi tepe değerleri, $F=60\text{ kN}$	70
Çizelge 5.5. YHT'lerin farklı hızlarında, köprü modellerinin birinci moddaki modal yerdeğişimi tepe değerleri, $F=60\text{ kN}$, $l=40\text{ m}$	73

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. Köprü matematiksel modellemeleri.....	14
Şekil 2.2. Çok geçişli, sürekli köprü modeli.....	15
Şekil 2.3. Tek kirişli, tek geçişli, basit mesnetli, sabit kesitli köprü modeli.....	16
Şekil 3.1. Düzgün kesitli, tek kirişli köprü modeli	22
Şekil 3.2. Üzerinden sabit hızlı F kuvveti geçen tek kirişli köprü modeli.....	25
Şekil 3.3. Orta noktasına sabit F kuvveti uygulanan tek kirişli köprü modeli	33
Şekil 3.4. Başlangıç noktasından α mesafede F kuvveti uygulanan tek kirişli köprü modeli.....	47
Şekil 5.1. Orta noktasına farklı genliklerde kuvvet uygulanan sönümsüz kiriş modal yerdeğişimi, $l=40m$ a) Model-1, b) Model-2, c) Model-3.....	69
Şekil 5.2. Orta noktasına kuvvet uygulanan sönümsüz kiriş için uzunluk değişimine bağlı modal yerdeğişimi, $F=60 kN$ $l=40 m$ a) Model-1, b) Model-2, c) Model-3	70
Şekil 5.3. Model-1 için hız değişimine bağlı sönümsüz kiriş modal yerdeğişimi, $F=60 kN$, $l=40 m$	71
Şekil 5.4. Model-2 için hız değişimine bağlı sönümsüz kiriş modal yerdeğişimi, $F=60 kN$, $l=40 m$	71
Şekil 5.5. Model-3 için hız değişimine bağlı sönümsüz kiriş modal yerdeğişimi, $F=60 kN$, $l=40 m$	72
Şekil 5.6. Model-1 için uzunluk değişimine bağlı sönümsüz kiriş modal yerdeğişimi, $\vartheta = 250 km/sa$, $F=60 kN$	73
Şekil 5.7. Model-2 için uzunluk değişimine bağlı sönümsüz kiriş modal yerdeğişimi, $\vartheta = 250 km/sa$, $F=60 kN$	74
Şekil 5.8. Model-3 için uzunluk değişimine bağlı sönümsüz kiriş modal yerdeğişimi, $\vartheta = 250 km/sa$, $F=60 kN$	74
Şekil 5.9. Model-1 için kuvvet genliği değişimine bağlı sönümsüz kiriş modal yerdeğişimi, $l=50 m$, $\vartheta = 300 km/sa$	75
Şekil 5.10. Model-2 için kuvvet genliği değişimine bağlı sönümsüz kiriş modal yerdeğişimi, $l=50 m$, $\vartheta = 300 km/sa$	75

Şekil	Sayfa
Şekil 5.11. Model-3 için kuvvet genliği değişimine bağlı sönümsüz giriş modal yerdeğişimi, $l=50\text{ m}$, $\vartheta = 300\text{ km/sa}$	76
Şekil 5.12. Köprü modellerinin kuvvet frekans değişimine bağlı modal yerdeğişimi, $F=60\text{ kN}$, $l=40\text{ m}$, $\vartheta = 300\text{ km/sa}$, a) 10 [Hz], b) 20 [Hz]	76
Şekil 5.13. Model-2 köprünün ilk dört moddaki modal yerdeğişimleri, $\vartheta = 300\text{ km/sa}$, $F=100\text{ kN}$, $l=40\text{ m}$, a) 1. mod, b) 2. mod, c) 3. mod, d) 4. mod	77
Şekil 5.14. Köprü modellerinin, sönümlü ve sönümsüz durum için modal yerdeğişimi, $c=16000$, $\vartheta = 300\text{ km/sa}$, $F=60\text{ kN}$, $l=40\text{ m}$, a) Model-1, b) Model-2, c) Model-3.....	78

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
A	Kiriş kesit alanı
A_n	Adomian polinomu
c	Sönümleme sabiti
E	Elastisite modülü
F	Kiriş üzerine uygulanan kuvvet
F_0	Harmonik kuvvet genliği
f_0	Harmonik kuvvet zorlama frekansı
F_z	Kuvvet değişkeni
g	Homojen olmayan terim
G	Kayma modülü
I	Alan atalet momenti
k	Terim sayısı
k_f	Boyutsuz formda elastisite ifadesi
k_R	Dönme yay sabiti
k_T	Öteleme yay sabiti
κ	Kayma düzeltme faktörü
l	Köprü toplam uzunluğu
L_X	Yola bağlı doğrusal diferansiyel operatör
L_T	Zamana bağlı doğrusal diferansiyel operatör
L^{-1}	AAM doğrusal diferansiyel operatör tersi
m	Türev mertebesi
N	Toplam mod sayısı
N	Doğrusal olmayan diferansiyel operatör
q_n	Kiriş n . modal genliği
R	Doğrusal diferansiyel operatör
s	Terim sayısı
t	Zaman

Simgeler**Açıklamalar**

T	Boyutsuz zaman ifadesi
U	Homojen denklem
ϑ	Hız
V	Boyutsuz hız ifadesi
w	Modal yer değişimi
W	Boyutsuz fomda modal yer değişimi
W_n	Boyutsuz formda n . mod şekil fonksiyonu
x	Kiriş eksenini boyunca uzanan koordinat
X	Boyutsuz fomda giriş eksenini koordinatı
Y	Homojen olmayan denklem
ρ	Kiriş malzeme yoğunluğu
ω_n	Doğal frekans
ω_0	Harmonik kuvvet doğal frekansı
ζ_n	Sönümlleme katsayısı
δ	Dirac Delta fonksiyonu
ψ	Kiriş birim uzunluğu kütlesi
χ	Kiriş dönme ataleti

Kısaltmalar**Açıklamalar**

AAM	Adomian ayrıştırma metodu
AKS	Ayarlı kütle sönümleyici
AP	Adomian polinomları
DAAM	Değiştirilmiş Adomian ayrıştırma metodu
DQM	Diferansiyel kareleme metodu
DQEM	Diferansiyel kareleme eleman metodu
DSCM	Ayrık tekil evrişim metodu
EAAM	Genişletilmiş Adomian ayrıştırma metodu
EB	Euler Bernoulli
ERRI	Avrupa Demiryolu Araştırma Enstitüsü
GAAM	Geliştirilmiş Adomian ayrıştırma metodu

Kısaltmalar**Açıklamalar****HAM**

Homotopi analiz metodu

HPM

Homotopi perturbasyon metodu

İAAAM

İki aşamalı Adomian ayrıştırma metodu

KEM

Kompozit elemanlar metodu

PAKS

Pasif ayarlı kütle sönümleyici

UIC

Uluslararası Demiryolları Birliği

VIM

Varyasyonel iterasyon metodu

YHT

Yüksek hızlı tren

1. GİRİŞ

Raylı ulaşım, on dokuzuncu yüzyılın ilk yarısında ticarileşerek, Avrupa'daki önemli ağların gelişimi ve İngiliz teknolojisinin de etkisiyle İkinci Dünya Savaşı'ndan bu yana güvenlik ve ülke savunmalarında stratejik öneme sahip unsurlardan biri haline gelmiştir. 1830'larda 50 km/sa "yüksek hız" kabul edilirken tren hızları önemli ölçüde artış göstermiş ve 1845'lerde 70 km/sa'e ulaşmıştır. Motorlu araçların icadına kadar dünyanın tek karada giden toplu ulaşım araçları olan trenlerde, yolculuk süresinin kısaltılması için çaba harcanmış ve yirminci yüzyılda 160 km/sa hız taahhüt edilmiştir. 1920'lerde ilk olarak İngiltere'de 110 km/sa hızlı seferler düzenlenmiş, savaş döneminde buharlı trenler 125~160 km/sa hıza ulaşmıştır. 60'lı yılların başında, kısa sürede, güvenli ve konforlu ulaşımı taahhüt eden Japon 'Shinkansen' YHT teknolojisinin icadıyla, tüm dünyada demiryolları ile ilgili araştırmalarda artış yaşanmış, Fransa'da 'TGV' (1981), Almanya'da 'ICE' (1991) ve İspanya'da 'AVE' (1992) YHT'leri geliştirilerek, büyük şehirlerde ulaşım problemlerinin çözümü için geniş metro ağları kurulmaya başlanmıştır [1]. Kapsamlı araştırmaların yapılması amacıyla Uluslararası Demiryolları Birliği (UIC) ve Avrupa Demiryolu Araştırma Enstitüsü (ERRI) gibi kuruluşlar oluşturulmuş, EN 1991-2 (Eurocodes-Actions on structures/Traffic Loads on Bridges), EN 1990-A2 (Eurocodes-Basis of Structural Design/Application for bridges) vb. standartlar geliştirilmiştir [2].

Tüm dünyada petrol fiyatlarındaki artışa bağlı olarak alternatif enerji kaynaklarına duyulan ihtiyaç, hızlı kentleşme, sanayileşme ve nüfus artışının beraberinde getirdiği ulaşım sorunları demiryollarına verilen önemi artırmıştır. Fosil yakıtlara olan bağımlılığın azalmasına sebep olan demiryolu ağlarına son kırk yılda büyük yatırımlar yapılmış, kısa süreli ve güvenli seyahatler için kesintisiz ray sistemleri, beton traversler ve elastik montaj elemanları geliştirilerek, yüksek hıza dayanıklı demiryolları inşa edilmiştir. İlk olarak 1856'da demiryolu ile tanışan ülkemizde ise II Dünya Savaşı sonrası karayolu ağırlıklı ulaşım politikalarının ön plana alındığı durgunluk döneminin ardından, 2009 yılında 300 km/sa hıza uygun demiryolu hatları inşa edilerek yolcu seferleri yapılmaya başlanmıştır.

YHT'ler, geçmişte kullanılan düşük hızlı, buharlı lokomotiflere kıyasla demiryollarında daha karmaşık dinamik etkiler yaratmıştır. Bu durum, coğrafi özellikler nedeniyle

demiryolu ağırları üzerinde kurulan köprü ve viyadüklerin tasarımlarında dikkate alınması gereken en önemli parametrelerden biri haline gelmiştir.

Demiryolu köprü dinamiği, yapı tipi, malzemesi, kiriş uzunluğu, kütlesi, ataleti, kesiti, sınır şartları, travers açıklığı ve sönüm gibi köprü özellikleri ile aks yükü, yük tekrarı, aks ağırlığı, hareket yörüngesi, aks mesafesi ve hız gibi tren özelliklerine bağlı birçok değişkenin dikkate alındığı karmaşık bir analiz gerektirmektedir [3]. Yapı mekaniğinde genel kabul statik kuvvet analizidir. Fakat zamanla değişen kuvvetler, statik kuvvetlere kıyasla köprülerde daha ciddi yapısal problemler meydana getirdiğinden, köprü ve tren özelliklerine bağlı dinamik katsayılar geliştirilmiştir [4]. Statik yük etkileri bu dinamik katsayılarla çarpılarak yapı dinamik cevabı elde edilmeye çalışılmıştır. Oluşturulan standartlarda tren hızlarının 200 km/sa'ı aştığı durumlar için dinamik analizlerin yapılması zorunlu hale getirilmiştir. Bu standartlarda, normal demiryolu trafiği için LM 71, ağır yük trafiği için SW/2, sürekli köprülerde SW/0 ve hızı 200 km/sa'ı aşan yolcu trenleri için de HSLM olarak isimlendirilen yük modelleri geliştirilmiştir [4].

Sanayileşme ile birlikte demiryolu yük taşıma potansiyelinin ülkeden ülkeye farklılık göstermesi, ulusal standartların farklı dizayn katsayıları belirlemelerine sebep olmuştur [3]. Genelde rezonans tehlikesini içermeyen bu katsayılar, yapılan dinamik hesapların beklentileri karşılamamasına yol açmış ve yüksek hız söz konusu olduğunda muhtemel rezonans risklerinin belirlenmesinde dinamik analizleri çok daha önemli hale getirmiştir.

Demiryolu köprüleri, ağır periyodik yüklere maruz yapılar olduklarından, aşırı titreşimler, yorulma dayanımının azalmasına, deformasyon ve çatlakların meydana gelmesine, teker-ray temasının kopmasına ve hatta can kayıplarına yol açan yıkımların meydana gelmesine sebep olmaktadır [5]. Tren hızı arttıkça zorlama frekansı da artmakta ve tren köprü üzerinden geçerken, köprü doğal frekansı ile bu zorlama frekansı çakıştığında rezonans olayı meydana gelmektedir. Museros ve diğerleri, üzerinden hareketli kuvvet geçen, basit mesnetli ve elastik sınır şartlarına sahip kiriş titreşiminde rezonans meydana gelen hız tespiti konusunda çalışmalar yapmışlardır [6].

Araç geçişi nedeniyle meydana gelen titreşimin, köprü tasarımlarında dikkate alınmaya başlamasıyla birlikte, araç ve köprü arasındaki etkileşim konusunda analitik ve deneysel çalışmalarda artış yaşanmıştır. Literatürde köprü tasarım hesaplarında, yüklemenin zamana

bağlı etkisini de göz önüne alan ve gerçek trenler için hareket denklemlerinin çözülmesini kapsayan farklı dinamik analiz yöntemleri geliştirilmiştir. Bu yöntemlerde, yapısal sistemlerin dinamik analizleri serbest titreşim ve zorlanmış titreşim olmak üzere iki durum için değerlendirilmiştir.

Zorlama işlemi, tren hareketi, rüzgar ya da deprem kuvveti gibi sisteme verilen harici periyodik yüklemelerle gerçekleşmektedir. Matematiksel modellemelerde bu kuvvetler, hareketli kuvvet, kütle, ya da kütle-yay-sönümleyici grubu şeklinde ifade edilmiştir [7]. James, tren geçişinin, basit mesnetli, tek kirişli demiryolu köprülerinde oluşturduğu dinamik etkiyi, artan aks yüklerini de dikkate alarak incelemiş ve köprü tasarımında güvenilirlik hesaplarını yapmıştır [3]. Ekström ve Kieri, trafik yükü etkisindeki basit mesnetli zorlanmış kiriş tek serbestlik dereceli eşdeğer bir sistem haline getirerek, matematiksel işlemleri azaltmış ve demiryolu köprüsü dinamik cevabını elde etmişlerdir [8]. Liu ve diğerleri, tren geçişini temsil eden periyodik hareketli yükleri, gövde, aks ve tekerden oluşan üç serbestlik dereceli vagon şeklinde modelleyerek, köprü dinamik davranışını analiz etmişlerdir [9]. Goicolea ve Antolín, trafik yükleri ile birlikte geçici rüzgar kuvveti etkisini de dikkate alarak üç boyutlu modelledikleri demiryolu viyadüğünün dinamik davranışında, yanal kuvvetlerin etkisini, sonlu elemanlar analiz yöntemini kullanarak incelemişlerdir [10].

Literatürde teorik çalışmalarda tek ya da çift hatlı, basit mesnetli ya da sürekli, kemerli ya da asma köprü çeşitleri yaygın olarak kullanılmaktadır. Köprü titreşim analizlerinde matematiksel modellemelerde ise Euler, Rayleigh ve Timoshenko modeli olarak bilinen çeşitli kiriş modelleri ile plaka teorileri kullanılmıştır. Köprülerde kayma deformasyonu ve dönme ataleti etkisi dikkate alındığında Timoshenko kiriş modeli uygulanırken bu kiriş modelinde bazı fiziksel parametreler sıfır ya da sonsuz kabul edildiğinde Rayleigh kirişi ve Euler kirişi hareket denklemleri elde edilmektedir [11, 12].

Genelde tek geçişli ve düzgün kesitli köprüler için yapılan çalışmalar, çok geçişli sürekli köprüler için de denenmiştir. Ichikawa ve diğerleri, Euler-Bernoulli (EB) kirişi şeklinde modelledikleri, çok geçişli köprü üzerinde hareket eden dönen kütlelerin ataletinin ve hızının köprü dinamiğine etkisini, özfonksiyon açılımı veya modal analiz ile doğrudan integrasyon yöntemini birlikte kullanarak incelemişlerdir [13]. Chan ve Ashebo, çok geçişli sürekli köprülerde kiriş sayısı arttıkça hesap hassasiyeti azaldığından, köprü

üzerinde rastgele bir kiriş seçerek işlem süresini kısaltmış ve soladan sağa doğru birbiri ardına sıralı iki kuvvet uygulandığında köprü dinamiğini, tekil değer ayrıştırma yöntemi kullanarak analiz etmişlerdir [14]. Asnachinda ve diğerleri, aks yüklerinin dinamik etkisini belirlemek amacıyla, kiriş üzerindeki konumu zamana bağlı değişen noktasal yükler kullanmış ve birden fazla araç geçişi için çok geçişli köprü dinamik cevabını deneysel verilerle karşılaştırmışlardır [15]. Gustafsson, YHT geçişine maruz çok geçişli köprü dinamik analizini sonlu elemanlar yöntemi ile Matlab fonksiyonları kullanarak incelemiş, işlem süresini kısaltmış ve yayılı yüklere kıyasla noktasal yüklerin daha fazla dinamik değişime sebep olduğunu görmüştür [16]. Wiberg, tren geçişini noktasal kuvvet şeklinde ifade ederek, üç boyutlu EB kirişi şeklinde modellediği çok geçişli demiryolu köprüsünü sonlu elemanlar yöntemi kullanarak analiz etmiştir [17]. De Salvo ve diğerleri, mod sentezi yöntemini uygulayarak, hareketli kuvvet ya da dönen yüke maruz, birden fazla noktadan desteklenmiş EB kirişi olarak modelledikleri çok geçişli köprünün dinamik cevabını araştırmışlardır [18]. Mellier, sonlu elemanlar analiz yöntemi ile tek ve çift geçişli iki demiryolu köprüsü tipi için kiriş kesiti optimizasyonunu YHT geçişi ile oluşan titreşimide dikkate alarak yapmıştır [19].

İlk araştırmalarda köprüler sönümsüz ya da alt ve üst yapısı birbirine yay ile bağlı paralel kirişler şeklinde modellenmiştir. Daha sonra ise bu modellere sönümleyici de eklenerek paralel kiriş bağlantılarına ayırık noktalarda etki ettirilmiştir. Vu ve diğerleri, EB kirişi şeklinde modelledikleri, birbirine yay ve sönümleyici ile bağlı basit mesnetli, çift kirişli sistemin, harmonik zorlanma anındaki titreşimini araştırmışlardır [20]. Abu-Hilal, üzerine hareketli yük uygulanan, birbirine viskoelastik malzeme ile bağlı, düzgün kesitli, çift kirişli sistemin dinamiğini incelemiştir [21]. Dimitrovova ise zemine elastik malzeme ile bağlı iki kademeli, basit mesnetli kiriş üzerinden ataleti ihmal edilmiş sabit hızlı bir yük geçişi sırasında oluşan titreşimi analitik yöntemler kullanarak analiz etmiştir [22].

Hareketli kuvvet ve dönen kütle zorlamasına maruz plaka titreşimleri konusunda da çeşitli araştırmalar yapılmıştır. Shadnam ve diğerleri, tüm kenarları basit mesnetli plaka üzerinde gelişi güzel bir yörünge seçerek, bu yörüngede ilerleyen hareketli kütlenin meydana getirdiği dinamik etkiyi, öz fonksiyon büyüme yöntemi kullanarak incelemişlerdir [23]. Eftekhari ve Jafari ise serbest ve zorlanmış plaka titreşiminde Ritz metodu ve diferansiyel kareleme metodunu birlikte kullanarak farklı sınır şartları için dinamik analiz yapmışlardır [24]. Amiri ve diğerleri, sönümsüz orta kalınlıkta bir plakanın dinamik cevabını, keyfi

seçilen sınır şartlarında, Mindlin plaka teorisi denklemleri kullanarak, öz fonksiyon büyüme yöntemi ile yarı analitik çözmüşlerdir. Hareketli yükün plaka üzerinde ilerlediği yolu, düz bir hat kabul etmiş ve plaka kalınlığı değişiminin dinamik cevaba etkisini araştırmışlardır [25].

İzin verilen aks yüklerinde ki artışın köprü vb. yapılarda yorulma dayanımlarının azalmasına sebep olması, mevcut köprü alt yapılarının yenilenmesine ve yapı maliyetlerinin artmasına sebep olmuştur. Bu durum hareketli yüke maruz köprü dinamiğinde, köprü kullanım ömrünü uzatması ve yeni köprülerin yapısal tasarımında etkili olması sebebiyle sönüm etkisini önemli hale getirmiştir. Muserosa ve Martinez-Rodrigo, demiryolu köprüsü st ve alt yapısını birbirine doğrusal akışkanlı viskoz sönümleyici ile bağlı paralel iki kiriş şeklinde modelleyerek tren geçişi sırasında oluşan titreşimi, yapıyı iki serbestlik dereceli sisteme indirgeyerek araştırmışlardır [5]. Mofid ve diğerleri, hareketli kütle etkisinde ki viskoelastik kiriş titreşimini, esnek sınır şartları için analiz etmişlerdir [26]. Greco ve Santini, hareketli yüke maruz, basit mesnetli, EB kirişinde başlangıç ve bitiş noktalarına viskoz sönümleyici eklemiş, Jovanovic ise kiriş titreşimini viskoz sınır şartlarını dikkate alarak Fourier seri çözümü ile incelemiştir [27, 28].

Statik yüklere kıyasla hareketli yük uygulanan kirişlerde daha büyük yer değişimi ve gerilmelerin meydana gelmesi, otoyol ve demiryolu köprü titreşimlerinin kontrolünü gerektirmiştir. Wang ve diğerleri, tren geçişi nedeniyle köprüde oluşan titreşimin azaltılması amacıyla pasif ayarlı kütle sönümleyicilerin (PAKS) uygulanabilirliğini araştırmışlardır [29]. Kwon ve diğerleri, teker ve gövdeden oluşan iki serbestlik dereceli sistem olarak modelledikleri YHT geçişi nedeniyle meydana gelen titreşimi, köprü orta noktasına yerleştirdikleri ayarlı kütle sönümleyici (AKS) yardımıyla azaltmışlardır [30]. Guo ve Chen, birden fazla AKS'ye sahip yapıların dinamik analizini yaparak, sistem frekans cevabını elde etmişlerdir [31]. Luu ve diğerleri, ise eşit aralıklı, çok geçişli demiryolu köprülerinde, tek serbestlik dereceli kütle-yay-sönümleyici şeklinde modelledikleri AKS'leri kullanmış ve kütle-yay-sönümleyici grubu olarak modelledikleri YHT geçişi sırasında oluşan titreşimi Lagrange fonksiyonu yöntemini kullanarak analiz etmişlerdir [32].

Hat üzerindeki pürüzler, traversli ray yapısı, travers aralıklarının farklı olması, rüzgar kuvveti, sismik yer hareketleri gibi homojen olmayan etkiler de köprü titreşiminde son derece önemli parametreler olmuştur. Wu ve diğerleri, ray yapısını dikkate alarak tren ve demiryolu köprüsü arasında üç boyutlu bir dinamik etkileşim modeli geliştirmiş ve EB kirişi olarak modelledikleri kutu kesitli, çift şeritli demiryolu köprüsünün YHT geçişi sırasındaki titreşimini incelemişlerdir [33]. Dias, YHT'lerin oluşturduğu yanal kuvvetlerin demiryolu köprülerinde meydana getirdiği hat düzensizliklerini sonlu elemanlar yöntemini kullanılarak analiz etmiştir [2]. Zhang ve diğerleri, sismik zorlamaya maruz, beş kirişli bir demiryolu köprüsünü üç boyutlu Euler kirişi şeklinde modelleyerek, 27 serbestlik dereceli sistem şeklinde ifade ettikleri YHT geçişi için düzensiz titreşim analizini yapmışlardır [34, 35]. Koroma ve diğerleri, doğrusal, homojen olmayan, elastik temel üzerinde uzanan kiriş olarak modelledikleri demiryolu hattı dinamik cevabını harmonik zorlanma durumu için araştırmışlardır [36]. Gupta ve Ahuja, yüksek hızlara sahip trafik yüklerini hareket denkleminde harmonik seri şeklinde ifade ederek, demiryolu köprülerinde en büyük yerdeğişiminin, sönüm etkisinden bağımsız olarak yine aynı konum ve hız değerinde meydana geldiğini, Matlab yazılımı kullanarak grafik halinde ifade etmişlerdir [37]. Bilik ve Karaçay ise YHT köprüsünü düzgün kesitli, tek kirişli, EB kirişi şeklinde modellemiş ve köprü dinamik davranışını, traversli ray yapısından dolayı oluşan harmonik etkiyi de dikkate alarak, doğrusal, homojen dördüncü mertebe denklem çözüm yöntemi uygulayarak incelemişlerdir [38].

Son yıllarda, köprü dinamiğinde doğal frekans, sönüm, mod şekli, araç hızı, hat düzensizliği gibi parametrelerin etkisi konusunda araştırmaların hız kazanması ile birlikte statik ya da dinamik, sabit ya da hareketli, düzenli ya da geliş güzel zorlayıcı kuvvetler nedeniyle oluşan kiriş titreşimini ifade eden dördüncü mertebe diferansiyel denklemlerin çözümü konusunda gerek nümerik ve gerekse analitik olmak üzere çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Runge–Kutta, Rayleigh–Ritz, Galerkin metodu, Fourier ve Laplace dönüşümü, Green fonksiyonu, sonlu elemanlar ve sonlu farklar analizi, mod birleştirme yöntemi, kompozit elemanlar metodu (KEM), diferansiyel transform metodu (DTM), diferansiyel kare eleman metodu (DQEM), ayrık tekil evrişim metodu (DSC), atış metodu (shooting method), B-spline interpolasyon metodu, Adomian ayrıştırma metodu (AAM), varyasyonel iterasyon metodu (VIM) ve Homotopi perturbasyon metodu (HPM) bu yöntemlerden bazılarıdır.

Bu yöntemlerin kiriş titreşim hesaplarına uygulanması konusunda da farklı çalışmalar yapılmıştır. Oliveto, başlangıç ve bitiş noktalarına viskoz sönümleyici eklenmiş basit mesnetli EB kirişi dinamik analizinde mod birleştirme yöntemini uygulamıştır [39]. Björklund, farklı köprü parametreleri için optimum köprü tasarımında sonlu elemanlar analizini kullanmış, Hryniewicz ise hareketli yüke maruz düzgün olmayan Rayleigh kirişi dinamik analizini Fourier dönüşümü ve AAM'yi birlikte kullanarak yapmıştır [4, 12]. Ding ve diğerleri, hareketli kuvvete maruz, viskoelastik zemin üzerinde uzanan, EB kirişi titreşim analizinde, Galerkin yöntemini kullanmış ve boyutsuz parametreler yardımıyla elde ettikleri eşitlikleri dördüncü mertebe Runge–Kutta metodu ile çözmüşlerdir [40]. Şimşek ve diğerleri, kiriş dinamik özellikleri eksenel doğrultuda değişen, fonksiyonelliği artırılmış malzemeden yapılmış, harmonik hareketli yüke maruz, basit mesnetli EB kirişi hareket denklemi çözümünde, Lagrange eşitliklerinden yararlanmışlardır [41]. Duan ve Wang, kademeli kiriş serbest titreşim analizinde değiştirilmiş DSC yöntemini kullanmışlardır [42]. Wang ve Wang, izotropik malzemeden yapılmış EB kirişi olarak modelledikleri çok kademeli kesit değişimine sahip, basit mesnetli, serbest kiriş titreşimini DQEM yöntemini kullanılarak incelemişlerdir [43]. Johansson, elastik mesnetli, çok geçişli, sönümlü kiriş olarak modellediği YHT demiryolu köprüsü dinamik davranışını Laplace dönüşüm yöntemi uygulayarak analiz etmiş ve elastik mesnetli kirişlerin, basit mesnetli kirişlere nazaran daha fazla ivmelendiğini, çok geçişli sürekli köprülerin dinamik yerdeğişiminin basit mesnetli tek geçişli köprülerden daha az olduğunu görmüştür [7]. Johansson ve diğerleri, hareketli yük etkisi altındaki, birden fazla kademeye sahip EB kirişinin dinamik davranışını, modal analiz yöntemi kullanarak incelemiş ve her kademe için elastik sınır şartlarını uygulayarak Laplace dönüşüm yöntemi ile doğal frekans ve mod şekillerini elde etmişlerdir [44]. Li ve diğerleri, zorlanmış Timoshenko kiriş titreşiminde sönümleyici etkisini, Green fonksiyonu kullanılarak analiz etmişlerdir [11].

Matematiksel modellerin nümerik çözümlerinden farklı olarak analitik çözümlerinin bulunması amacıyla yapılan çalışmalarda yüzyıldan uzun bir süredir kullanılan yöntem pertürbasyon metotları olmuştur. Bu yöntemde küçük parametre varsayımlarının gerekli olması doğrusal olmayan denklem çözümlerini zorlaştırmıştır. En uygun parametre seçimi ideal sonuca ulaşmayı sağlarken kötü seçimler ciddi çözümsüzlüklere yol açmıştır. Bu olumsuzluklar nedeniyle yeni yöntemler geliştirilmesine ihtiyaç duyulmuştur. Liao, topolojideki homotopi kavramı ile Taylor serisini birleştiren, denklemde küçük

parametreler gerektirmeyen Homotopi analiz metodunu (HAM) geliştirmiş ve analitik seri çözüm tekniğinde yakınsaklığın kontrolünü sağlamıştır [45].

Pertürbasyon tekniğı ile homotopi kavramının birleştirildiğı, çok az iterasyonla çözüme yakınsama sağlayan HPM ise ilk olarak He tarafından önerilmiş ve doğrusal olmayan denklemlerin çözümünde etkin bir şekilde kullanılmaya başlanmıştır. Bu yöntemde çözüm serisinin bulunması için başlangıç yaklaşımının ve uygun homotopinin kurulması yeterli olmuştur [46-48]. Odibat, bu yöntemde değışiklik yaparak doğrusal ve doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklem çözümüne uygulamıştır [49]. Wang ve diğeri, HPM ve Green fonksiyonunun birlikte kullanıldığı yeni bir yaklaşım geliştirerek, doğrusal ve doğrusal olmayan adi diferansiyel denklemlerin, homojen ve homojen olmayan sınır şartlarında çözümünü sağlamışlardır. Bu yaklaşımda, sınır değıer problemlerinin yarı analitik çözümünde Green fonksiyonları çözüm basamaklarını azaltırken, HPM ise hesapları sadeleştirerek çözüme hızlı bir şekilde yakınsamayı sağlamıştır [50]. Chun ve Sakthivel, doğrusal ve doğrusal olmayan sınırdeğıer problemlerinin çözümünde HPM'yi uygulamış ve buldukları sonuçları genişletilmiş AAM ve atış metodu ile karşılaştırmışlardır [51]. Biazar ve Eslami, matematik, fizik ve mühendislik uygulamalarında çözümü oldukça karmaşık olan kısmi diferansiyel denklem çözümünde yeni HPM'yi kullanmışlardır [52].

Kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerinin bulunamadığı durumlarda nümerik yöntemlere ihtiyaç duyulmuştur. Ha, iki noktalı sınır değıer problem çözümünde doğrusal olmayan atış yöntemini kullanmıştır [53]. Fang ve diğeri, sınır değıer problem çözümünde sonlu farklar, sonlu elemanlar ve sonlu hacimler yöntemleri gibi farklı sayısal yöntemler uygulamışlardır [54]. Ha ve Lee, ikinci meretebe adi diferansiyel denklem sınır değıer problem çözümünde Green fonksiyonlarını kullanmışlardır [55].

Doğrusal olmayan problemlerin çözümünde kullanılan diğeri bir yöntem VIM'dir. Bu yöntemde diferansiyel eşitlik doğrusal ve doğrusal olmayan iki operatör ve homojen olmayan bir terim ile ifade edilirken, yaklaşık çözüm denkleminde Lagrange çarpanları kullanılmaktadır. Momani ve diğeri, doğrusal ve doğrusal olmayan sınır değıer problem çözümünde VIM'nu uygulamışlardır [56]. Abushammala, üçüncü mertebe doğrusal olmayan sınır değıer problem çözümü için Green fonksiyonları ile Picard ve Mann nokta iterasyonlarının birlikte kullanıldığı yeni bir yöntem geliştirmiştir [57].

Tüm bu yöntemler dışında, küçük parametre varsayımlarına ve doğrusallaştırmaya gerek duyulmadan doğrusal ve doğrusal olmayan, adi ve kısmi diferansiyel denklem çözümlerinde kullanılmak üzere yeni bir yöntem geliştirilmiştir. Sonuca hızla yakınsama sağlayan seri açılımı prensibine dayalı bu analitik yöntem 80'li yılların sonunda George Adomian tarafından geliştirilen AAM'dir. Bu yöntemde denklem çözümü, en yüksek türev mertebesine göre eşitliğin her iki tarafının integralinin alınmasını sağlayan doğrusal bir operatörün kullanılması esasına dayanmaktadır [58]. Sonraki dönemlerde adi ve kısmi diferansiyel denklem çözümlerinde kullanım alanının artması sebebiyle yine Adomian tarafından daha kullanışlı hale getirilmiştir [59]. Gabet, yeni bir ayrıştırma teorisi geliştirerek doğrusal ve doğrusal olmayan denklem çözümünde kullanmıştır [60]. Wazwaz, AAM'yi değiştirerek, seriye açılımın daha kolay ve hızlı şekilde yapılmasını sağlamış ve başlangıç değer problemleri ile altıncı mertebe sınır değer problem çözümüne uygulamıştır [61-64]. Wazwaz ve El-Sayed, iterasyon sayısını azaltarak işlem zamanını kısalttıkları AAM'nin değiştirilmiş formunu kullanarak, diferansiyel ve integral denklem çözümlerini elde etmişlerdir [65]. Biazar ve diğerleri, daha karmaşık doğrusal ve doğrusal olmayan diferansiyel denklem çözümlerinde AAM'yi kullanmışlardır [66].

AAM genel denkleminde, doğrusal olmayan terimlerin elde edilmesinde Adomian Polinomlarından (AP) faydalanılmaktadır. Çok fazla hesap gerektiren bu polinomların daha kısa zamanda elde edilmesi amacıyla çeşitli bilgisayar programları da geliştirilmiştir [67-69]. Buna ek olarak doğrusal operatörlerin seri açılımının kolaylaştırılması amacıyla da çalışmalar yapılmıştır. Bu amaçla Luo, problemi iki bölüme ayırmış ve öncelikle çözümü kolay kısma AAM'yi uygulamış ve elde ettiği serileri diğer bölüm çözümüne ekleyerek nihai sonuca ulaşmıştır [70]. Hosseini ve Nasabzadeh, yeni bir doğrusal diferansiyel operatör geliştirerek, ikinci mertebe adi diferansiyel denklem çözümünde bu operatörü kullanmışlardır [71,72]. Jang, doğrusal operatör tersini çift katlı integral şeklinde düşünerek sınır değer problemi çözümü için yeni bir AAM geliştirmiş ve klasik AAM kullanıldığında karşılaşılan zorlukları ortadan kaldırmıştır [73]. Momani ve diğerleri, dördüncü mertebe sınırdeğer problemi çözümünde, Hasan ve Zhu tekil sınırdeğer problem çözümünde, Duan ve Rach birinci mertebe doğrusal olmayan adi diferansiyel denklem çözümünde, Elsaid, doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklem çözümünde AAM'yi kullanmış, Kumar ve Singh ise sınır değer problemi çözümü için DAAM'nu geliştirmişlerdir [74-78]. Abassy, türev mertebesi ikiden fazla olan doğrusal olmayan ve homojen olmayan diferansiyel denklem çözümlerinde kullanılmak üzere daha pratik bir

AAM geliştirmiştir [79, 80]. Al-Hayani ve Casasús, sınır şartlarındaki süreksizlikleri dikkate alarak, doğrusal ve doğrusal olmayan başlangıç değer problem çözümlünde, AAM'yi uygulamışlardır [81]. Das, membran titreşimini değiştirilmiş ayırıtırma yöntemi kullanarak incelemiştir [82]. Muhammad, nükleer enerji, akışkanlar mekaniği, ısı transferi, mikrobiyoloji, tümör büyümesi vb. alanlarda doğrusal olmayan dağılım ile ifade edilebilen iki boyutlu difüzyon ve dalga denklemlerinin çözümlünde AAM'yi uygulamıştır [83]. Duan ve Rach, AAM'de değişiklik yaparak, çok noktalı, doğrusal olmayan sınır değer problem çözümlünde bu yöntemi kullanmışlardır [84]. Khan ve diğerleri, AP ve Laplace dönüşümünü birlikte kullanarak yardımcı parametre yöntemi geliştirmiş ve doğrusal olmayan denklem çözümlüne uygulamışlardır [85].

Mühendislikte birçok alanda kullanılmaya başlanan AAM, kiriş titreşim problemlerinin çözümlünde de uygulanmıştır. Haddadpour, modal analiz ve AAM'yi birlikte kullanarak EB kirişi hareket denklemini sonsuz seri açılımı şeklinde ifade etmiştir [86]. Lai ve diğerleri, EB kirişinde, sağ ve sol sınır şartlarını dört farklı opsiyon ve onaltı adet sabit ile iki denklem şeklinde ifade ederek, hareket denklemi çözümlünde AAM kullanmışlardır [87]. Hsu ve diğerleri, değişken kesitli serbest kiriş titreşim problemlerinin, klasik ya da esnek sınır şartlarındaki çözümlü için DAAM geliştirmiş ve seri açılım uygulamaları sonucu *i*. doğal frekans ve mod şekillerini elde etmiş ve sonrasında aynı yöntemi Timoshenko kiriş titreşimi analizi için de kullanmışlardır [88, 89]. Mao ve Pietrzko, düzgün kesite sahip iki kademededen oluşan Euler kirişi serbest titreşim analizinde AAM'yi uygulamışlardır [90]. Mao, birden fazla kademeye sahip EB kirişi serbest titreşiminde AAM'den yararlanmış ve sonrasında iki ucundan elastik mesnetlenmiş, birbirine elastik katman ile bağlı, *n* sayıda kiriş serbest titreşim analizinde DAAM kullanmıştır [91, 92]. Coşkun ve diğerleri, değişken kesitli EB kirişi serbest titreşim analizinde AAM, VIM ve HPM yöntemlerini kullanmış ve doğal frekans ile buna bağlı mod şekillerini karşılaştırmışlardır [93]. Mao ve Pietrzko, değişken kesitli, basit mesnetli kiriş serbest titreşimini AAM'yi kullanarak analiz etmişlerdir [94].

Köprüler genelde 100 yılı aşan kullanım ömürleri dikkate alınarak, trafik yükleri ve birçok bilinmeyen için parametre kabulleri yapılarak tasarlanmaktadır [3]. Son yıllarda Avrupa'da, ulaştırma sektöründeki ilerlemelere rağmen, demiryolu pazar payında 1970'lerin başından buyana yaşanan düşüş ve yakın geçmişte öngörölmeyen bu denli hızlı teknoloji gelişimi, kullanılmakta olan birçok demiryolu köprüsünün YHT'ler için gerekli dinamik dayanımı

karşılayamaz nitelikte olduğunu göstermiştir. Küreselleşme, nüfus artışı, sanayileşme ve şirketlerin rekabet baskısı ile 2040'lı yıllar için 450 km/sa'lık tren hızlarının öngörülmesi ise köprü dayanım hesaplarını ve dinamik analizleri daha önemli hale getirmiştir [11].

Literatürde, tren geçişine bağlı trafik yüklerinin köprü yapı dinamiğine etkileri konusunda yapılan araştırmalarda analitik yöntemlerin sınırlı olması sebebiyle genelde sonlu farklar ya da sonlu elemanlar analizi gibi nümerik yöntemler kullanılmaktadır. Bu yöntemlerde temel düşünce, karmaşık bir probleme, problemi basite indirgeyerek bir çözüm bulmaktır. Kabul edilebilir doğru sonucun elde edilmesi ise verilerin doğru girilmesine ve çözüm bölgesinin alt bölgelere uygun şekilde ayrıklaştırılmasına bağlıdır. Bu alt analizlerin yapılarak nihai sonuca ulaşılması için ise yüksek donanımlı bilgisayarlara ihtiyaç duyulmaktadır.

Tüm bu tespitler ışığında makine mühendisliğinin fizik ve titreşim bilgisi, inşaat mühendisliğinin yapı tasarım bilgisi ile uygulamalı matematiğin analitik yöntem bilgisinin birleştirildiği bu çalışmada literatürde yapılan araştırmalardan farklı olarak üzerinden hızlı tren geçen köprü titreşimi modal yerdeğişimi analitik ifadeleri AAM, DAAM ve GAAM kullanılarak elde edilmiştir. Köprü ve tren etkileşimi iki boyutlu model şeklinde basitleştirilmiş ve tren, köprü doğrultusuna dik hareketli bir kuvvet olarak kabul edilmiştir. YHT köprüsü dönme, kayma ve burulma ataletleri ihmal edilmiş, basit mesnetli, EB kirişi olarak modellenmiş ve sönümsüz serbest kiriş modeli için genelleştirilmiş doğal frekans ve n . mod şekil fonksiyonu ifadeleri elde edilmiştir. Kiriş üzerine uygulanan kuvvetin konumu hareket denklemlerinde Dirac Delta fonksiyonu ile ifade edilmiştir.

Öncelikle kiriş orta noktasına kuvvet uygulanan durum için ve sonrasında da sabit hızla ilerleyen bir kuvvet uygulanan durum için kiriş matematiksel modellemeleri yapılmış ve buna bağlı hareket denklemleri oluşturulmuştur. Elde edilen dördüncü mertebe, homojen olmayan, kısmi diferansiyel denklemler, sınır ve başlangıç şartları dikkate alınarak, modal analiz ve klasik doğrusal-homojen denklem çözüm yöntemleri ile çözümlenerek kiriş modal yerdeğişimi analitik ifadeleri elde edilmiştir. Hat düzensizliklerine bağlı dinamik etki ise uygulanan kuvvetin harmonik şekilde olduğu kabul edilerek, daha sonra hesaplara dahil edilmiştir.

Sonraki aşamada, homojen olmayan denklem çözümlerinde AAM ve bu metodun değiştirilmiş (DAAM) ve geliştirilmiş (GAAM) formları hakkında bilgi verilerek çözüm

basamakları anlatılmıştır. Orta noktasına kuvvet uygulanan ve üzerinden hareketli kuvvet geçen kiriş hareket denklemlerine AAM uygulanarak modal yerdeğişimi analitik ifadeleri elde edilmiştir. Kiriş hareket denklemleri boyutsuz parametrelerle ifade edilerek kuvvetin farklı uygulama biçimleri için DAAM uygulanmış, başlangıç noktasına α uzaklıkta sabit bir F kuvveti uygulandığında kiriş modal yerdeğişimi de incelenmiştir. Üzerinden hareketli kuvvet geçen kiriş hareket denklemi çözümünde ise GAAM uygulanarak modal yerdeğişimi seri açılım şeklinde ifade edilmiştir. Bu sonsuz seri açılımları Taylor ve Binom açılımları kullanılarak genel ifadeler elde edilmiş ve kiriş modal yerdeğişimi analitik ifadeleri bulunmuştur. Sönüm etkisinin de dikkate alındığı kiriş hareket denklemi çözümü için de benzer işlemler tekrarlanmıştır.

Elde edilen analitik ifadeler, köprü yapısal özellikleri ve YHT özelliklerinin etkilerinin değerlendirilmesi amacıyla farklı kiriş özellikleri, kuvvet genlikleri, zorlama frekansları ve tren hızları için sayısal olarak çözümlenmiş ve tek geçişli köprüde meydana gelen modal yerdeğiştirme sonuçları incelenmiştir. Bu sonuçlar fiziksel davranış yönünden yorumlanmış ve hem çözüm yöntemi açısından hem de tren-köprü dinamik ilişkisi açısından önerilerde bulunulmuştur.

2. YÜKSEK HIZLI TREN DEMİRYOLU KÖPRÜSÜ

Mühendislik uygulamalarında demiryolu hatlarında coğrafi özellikler nedeniyle viyadük ve köprüler yaygın olarak kullanılmaktadır. YHT geçişi ile oluşacak rezonans etkisi dikkate alınmadığı takdirde bu köprü ve viyadüklerde malzeme dayanımlarını aşan gerilmeler oluşmakta, ray-tekerlek teması kaybolarak can kaybına yol açan yıkımlar meydana gelebilmektedir. Bu durum, demiryolu köprülerinde dinamik analizlerin yapılmasını son derece önemli hale getirmiştir.

Yapıların dinamik analizleri serbest titreşim ve zorlanmış titreşim olmak üzere iki bölümde değerlendirilmektedir. Zorlama işlemi sisteme verilen harici bir kuvvet veya frekansın fonksiyonu ile gerçekleşmektedir. YHT kaynaklı trafik yüklerinin etkisiyle oluşan titreşim hesaplarında, trafik yüklerinin köprüye aniden etki etmesine bağlı darbe etkisi, periyodik yük tekrarı, hat düzensizlikleri gibi parametrelerin önemi büyüktür. Tren hareketi gibi periyodik yüklere maruz sistemlerde dinamik analizde öncelikle matematiksel modellemeler yapılarak hareket denklemleri oluşturulmakta ve ardından mod şekilleri belirlenerek sonuçlar değerlendirilmektedir.

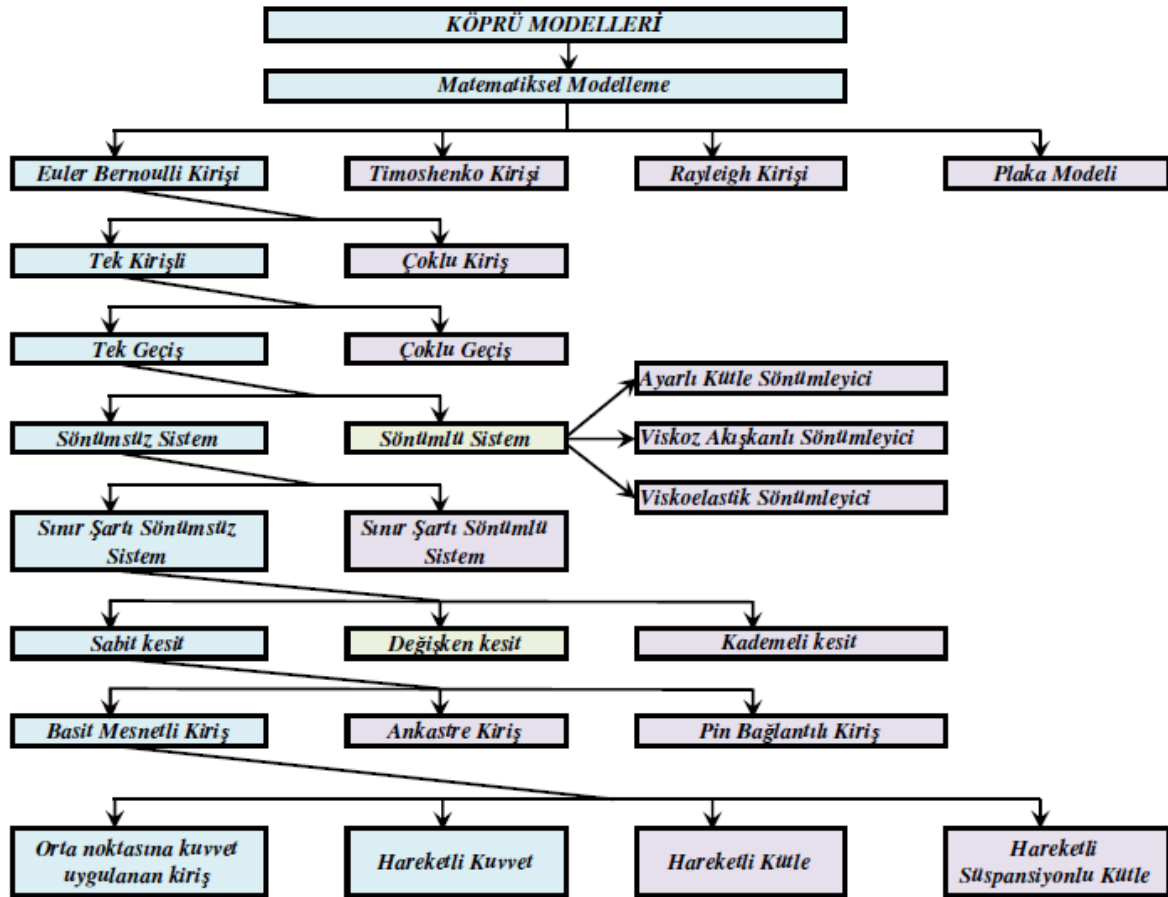
Bu bölümde YHT demiryolu köprülerinin matematiksel modellemesiyle alakalı hesaplamalarda kullanılabilecek alternatiflerin belirlenmesi amacıyla incelemeler yapılmış ve literatürde uygulanmış modeller konusunda bilgi verilmiştir.

2.1. Demiryolu Köprüsü Matematiksel Modellemesi

YHT geçişi sırasında köprülerde meydana gelen titreşim, statik yüklere kıyasla çok daha fazladır. Demiryolu köprü dinamiği, yapı tipi, travers açıklığı, kiriş boyu, kütlesi, ataleti, kesiti, sınır şartları, yük tekrarı, hareket yörüngesi, tren hızı gibi pek çok değişkene bağlı karmaşık bir analiz gerektirmektedir. Dinamik analizler, köprülerden 200 km/sa'ten daha büyük hızlarda geçmesi düşünülen tren tipleri ile oluşturulan hareketli bir dizi noktasal yük ile temsil edilen tren modelleri dikkate alınarak yapılabilmektedir. YHT demiryolu köprü tasarımlarında, yüklemenin zamana bağlı etkisini de göz önüne alan hareket denklemlerinin çözülmesini kapsayan farklı analiz yöntemleri geliştirilmiştir.

Köprü titreşim analizleri için literatürde kullanılan matematiksel modeller ve bu çalışmada kullanılan matematiksel modelleme yaklaşımının tasnifi Şekil 2.1'de verilen şemada kısaca

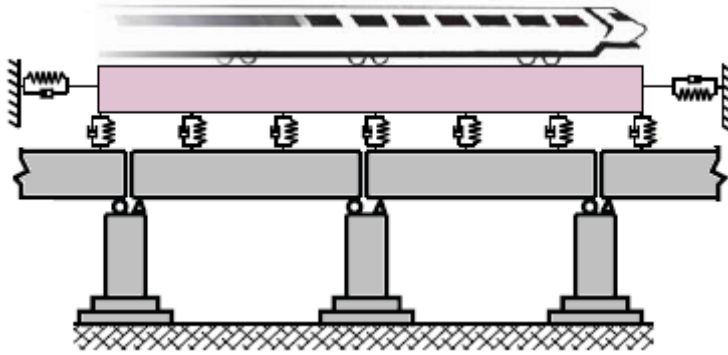
özetlenmiştir. Yapılan çalışmalarda dinamik analizler için Euler, Rayleigh ve Timoshenko modeli olarak bilinen çeşitli kiriş modelleri ile plaka teorileri uygulanmış ve köprüler sönümsüz tek kiriş ya da birbirine yay ile bağlı paralel kirişler şeklinde modellenmiştir. Bu çalışmalar genelde tek geçişli ve düzgün kesitli köprüler içindir, fakat çok geçişli köprü dinamiği konusunda da araştırmalar yapılmıştır.



Şekil 2.1. Köprü matematiksel modellemeleri

Hızlı araçların kullanımlarının yaygınlaşması ile köprü vb. yapılarda güvenli tasarım hesaplarında, dinamik yükler önem kazanmış ve bu yüklerin oluşturduğu bozucu etkinin ortadan kaldırılması amacıyla ilk başta sönümsüz kabul edilen köprülerde sönüm etkisi de dikkate alınmaya başlanmıştır. Statik yüklere kıyasla hareketli yük uygulanan kirişlerde daha büyük yer değişimi ve gerilmelerin meydana gelmesi, otoyol ve demiryolu köprülerinde ayarlı kütle sönümleyici, viskoz akışkanlı sönümleyici ve viskoelastik sönümleyici gibi elemanların kullanılmasına sebep olmuştur. Kirişler birbirine yay-sönümleyici grubu ile bağlı düşünülmüş ya da sönümleyici sistemler, paralel kiriş bağlantılarına ayrı noktalarda etki ettirilmiştir.

Yapılan araştırmalarda basit mesnetli, ankastre ve pin bağlantılı kiriş olarak modellenen köprüler öncelikle sönümsüz sınır şartları için, daha sonra ise sönümlü sınır şartları da dikkate alınarak incelenmiştir. Açıklanan tüm bu kiriş tipleri şekil 2.2'deki matematiksel modelde görsel hale getirilmiştir. Araç ve köprü etkileşiminde köprüler sabit, değişken ya da kademeli kesite sahip kiriş şeklinde, araçlar ise köprü üzerinde herhangi bir konumda yer alan sabit kuvvet, hareketli kuvvet, hareketli ktle ya da süspansiyonlu hareketli ktle şeklinde modellenmiştir.



şekil 2.2. Çok geçişli, sürekli köprü modeli

Yüksek hız söz konusu olduğunda muhtemel rezonans risklerinin belirlenmesinde dinamik analizler büyük önem taşımaktadır. Köprü tasarım hesaplarında inşaat uygulamalarında genelde sonlu farklar ya da sonlu elemanlar analizi gibi bilgisayar destekli nümerik metodlar kullanılmaktadır. Fakat bu nümerik metodlar dışında köprü titreşiminde farklı zorlanma biçimleri için hareket denklemlerinin üzümünde kullanılmak üzere analitik yöntemler de geliştirilmiştir.

Köprü dinamik analizleri için geliştirilen kiriş teorilerinden Timoshenko modeli kiriş hareket denklemi Eş. 2.1'deki gibi dördüncü mertebe, homojen olmayan diferansiyel denklem ile ifade edilmektedir [11].

$$\begin{aligned}
 EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} - \left(\frac{EIc_1}{\kappa GA} + c_2 \right) \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial t \partial x^2} - \left(\frac{EI\psi}{\kappa GA} + \chi \right) \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial t^2 \partial x^2} + c_1 \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \\
 + \left(\frac{c_1 c_2}{\kappa GA} + \psi \right) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + \left(\frac{\psi c_2}{\kappa GA} + \frac{c_1 \chi}{\kappa GA} \right) \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial t^3} + \frac{\psi \chi}{\kappa GA} \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial t^4} \\
 = \frac{EI}{\kappa GA} \frac{\partial^2 w f(x,t)}{\partial x^2} - f(x,t) - \frac{c_2}{\kappa GA} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} - \frac{\chi}{\kappa GA} \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2}
 \end{aligned} \quad (2.1)$$

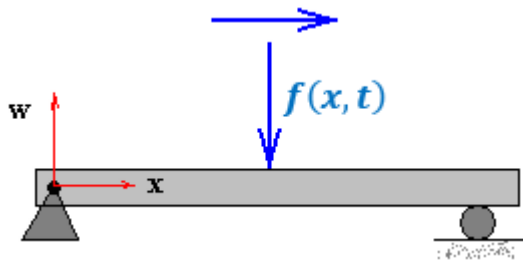
Burada $w(x, t)$ modal yer değişimin fonksiyonunu, x kiriş eksen boyunca uzanan koordinatı, t zamanı, E elastisite modülünü, I alan atalet momentini, c_1 ve c_2 sırayla öteleme ve dönme sönüm katsayılarını, G kayma modülünü, κ kayma düzeltme faktörünü, A kesit alanını, ψ kiriş birim uzunluğu kütlesini, χ kiriş dönme ataletini ve $f(x, t)$ ise zorlama kuvvetini ifade etmektedir. Klasik yöntemler uygulanarak bu diferansiyel denklemin analitik çözümü oldukça zordur. Bu nedenle bazı kabuller yapılarak bu hareket denkleminin sadeleştirilmesi gerekmektedir.

Bu çalışmada kiriş dinamik analizinin kolaylaştırılması amacıyla öncelikle Şekil 2.1'den sönümsüz sınır şartlarına sahip, basit mesnetli, tek kirişli, tek geçişli ve sabit kesitli en sade köprü modeli seçilmiş ve Şekil 2.3'te gösterilmiştir. Dinamik analizin daha da basitleştirilmesi Eş.2.1'deki hareket denkleminde kayma faktörü (κ) sonsuz kabul edilerek gerçekleştirilmekte ve Rayleigh modeli kiriş hareket denklemi elde edilmektedir [11].

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} - c_2 \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial t \partial x^2} - \chi \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial t^2 \partial x^2} + c_1 \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + \psi \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = -f(x, t) \quad (2.2)$$

Eş. 2.2'de dönme ataleti ihmal edildiğinde ise diğer kiriş teorilerine kıyasla analitik çözümü daha kolay olacak olan EB kiriş hareket denklemi elde edilmektedir [11].

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} - c_2 \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial t \partial x^2} + c_1 \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + \psi \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = -f(x, t) \quad (2.3)$$



Şekil 2.3. Tek kirişli, tek geçişli, basit mesnetli, sabit kesitli köprü modeli

Bu çalışmada, öncelikle Eş.2.3'te sönüm katsayıları ve zorlama kuvveti ihmal edilerek bir analitik çözüm elde edilmiş ve ilerleyen bölümlerde de sırayla kuvvetin farklı uygulama biçimleri ve sönüm etkisi de dikkate alınarak incelemeler yapılmıştır.

3. KÖPRÜ MODELİNİN DİNAMİK ANALİZİ

Köprü tasarımlarında araç geçişi nedeniyle meydana gelen titreşimin dikkate alınmaya başlamasıyla birlikte, araç ve köprü arasındaki etkileşim konusunda analitik ve deneysel çalışmalar hız kazanmıştır. Otoyol köprülerinde araç trafiği nedeniyle meydana gelen zorlayıcı etkiye benzer bir durum, demiryolu köprülerinde tren geçişi sırasında yaşanmaktadır.

Köprü titreşim hesaplarında, matematiksel modellemede Euler, Rayleigh ve Timoshenko modeli olarak bilinen çeşitli kiriş modelleri kullanılmaktadır. EB kirişi hareket denklemi, dördüncü mertebe, değişken katsayılı, kısmi türevli diferansiyel denklem ile ifade edilmektedir. EB kirişi titreşim problemleri analitik veya yaklaşık yöntemler ile çözülebilir fakat tam ve doğru kabuller yapılmadığında yüksek mertebeli doğal frekans ve mod durumlarını belirlemek zor olabilir. Sınır değer problemlerinin çözümünde kullanılan yöntemler aşağıda sıralanmıştır.

- Atış (shooting) metodu
- Sonlu farklar metodu, sonlu elemanlar metodu
- Spline interpolasyon metodu
- Green fonksiyonu metodu
- Homotopi perturbasyon metodu (HPM), Homotopi analiz metodu (HAM)
- Varyasyonel iterasyon metodu (VIM)
- Adomian ayrıştırma metodu (AAM)

Bu yöntemlerden atış metodu ve sonlu farklar metodu, kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerinin olmadığı ya da analitik çözümün çok karmaşık olduğu durumlarda kullanılmaktadır [53]. Sonlu elemanlar metodu ise temeli Ritz tekniğine dayanan, bilgisayar teknolojisindeki gelişmelerle birlikte birçok mühendislik uygulamasında, geometrisi düzgün olmayan parça ya da yapıların gerilme analizlerinde kullanılmaya başlanan nümerik bir metoddur.

Sonlu elemanlar metodundaki temel düşünce problemi basite indirgeyerek karmaşık bir probleme çözüm bulmaktır. Bu yöntemde çözüm bölgesi, çok sayıda, basit, küçük, birbirine bağlı, sonlu eleman adı verilen alt bölgelere ayrılmakta ve bu elemanlar

birbirlerine düğüm noktası adı verilen özel noktalardan bağlanarak, deplasman, gerilme, sıcaklık, basınç ve hız gibi değişkenlerden oluşan polinom şeklinde basit fonksiyonlar ile yaklaşık olarak ifade edilmektedir. Genellikle matris formunda olan bu ifadelerin çözülmesi ile de değişkenlerin düğüm noktalarındaki değerleri elde edilmektedir. Her sonlu eleman için ayrı ayrı bulunan ifadeler uygun şekilde birleştirilerek bütün sisteme ait nihai sonuç bulunmaktadır. Bu yöntemde kabul edilebilir doğru sonucun elde edilmesi, verilerin doğru girilmesine ve çözüm bölgesinin alt bölgelere uygun şekilde ayrıklaştırılmasına bağlıdır.

Spline interpolasyon metodu ise kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde, tanımlanan aralık içinde polinom bulma esasına dayanan sayısal bir yöntemdir. Green fonksiyonları kullanıldığında da sınır değer problemi integral eşitliklerine dönüştürülmekte ve iterasyon uygulanarak çözüme ulaşılmaktadır [54-57].

Matematiksel modellerin yaklaşık analitik çözümlerinde yüzyıldan uzun bir süredir kullanılan yöntem pertürbasyon metotlarıdır. Pertürbasyon teorisi, tam olarak çözülemeyen bir problemin, bu probleme bağlı başka bir problemten yola çıkılarak, yaklaşık çözümünü elde etmek için kullanılan matematiksel metotları içermektedir. Tam olarak çözümlenebilen problemin matematiksel tanımına "küçük" bir terim eklenerek eldeki problem formüle edilebiliyorsa, pertürbasyon teorisi uygulanabilir denilmektedir. Kuvvet serisindeki ilk terim, tam olarak çözülebilen problemin çözümü iken, diğer terimler, çözümde başlangıç problemine göre sapmayı tanımlamaktadır.

Hemen hemen tüm pertürbasyon yöntemlerinde küçük bir parametrenin denklemde bulunması gerekmektedir. Pertürbasyon teorisi, problemin çözümünü, tam olarak çözülebilen problemten sapmayı ölçen bir "küçük" parametrenin kuvvet serisi cinsinden bulunmasını amaçlamaktadır. Bu sözde küçük parametre varsayımı büyük ölçüde pertürbasyon tekniklerinin uygulamalarını kısıtlamaktadır. Doğrusal olmayan problemlerin büyük çoğunluğunda bu küçük parametre varsayımı yapılamamaktadır. Uygun bir küçük parametre bulunsa bile, çoğu durumda, pertürbasyon metotları ile bulunan yaklaşık çözümler, sadece parametrenin küçük değerleri için geçerli olmaktadır. Ayrıca, bu küçük parametrelerin belirlenmesinde özel tekniklerin kullanılması gerekmektedir. En uygun parametre seçimi ideal sonuca ulaşmayı sağlarken kötü seçimler ciddi çözümsüzlüklere yol açmaktadır.

Pertürbasyon yöntemlerindeki bu olumsuzluklar nedeniyle küçük parametre varsayımı gerektirmeyen yeni yöntemlere ihtiyaç duyulmuştur. Bu amaçla pertürbasyon tekniği ile topolojideki homotopi kavramı birleştirilerek, çok az iterasyonla çözüme hızla yakınsayan HPM geliştirilmiş ve doğrusal olmayan denklemlerin çözümünde kullanılmaya başlanmıştır. Pertürbasyon metotlarının dezavantajlarını ortadan kaldıran HPM’de, metodun yakınsaması homotopi yolunun doğru seçimine bağlı olup homotopinin uygun seçilmemesi durumunda ise sonsuz iterasyona gerek duyulmaktadır [46-48].

Pertürbasyon yaklaşımları doğrusal problemler için geçerlidir, fakat doğrusal olmayan problem çözümleri için HPM’den farklı olarak, çözüm serilerinin yakınsaklık bölgesini ve hızını kontrol etme imkânı da sağlayan HAM geliştirilmiştir [95]. Bu yöntemin uygulanmasında pertürbasyon metotlarında olduğu gibi küçük parametre varsayımlarının yapılmasına gerek yoktur. Bu metodda, HPM’ye benzer biçimde, topolojinin temel kavramlarından biri olan homotopi ile Taylor serisi açılımı da kullanılarak çözüm serilerinin yakınsaklık bölgesi kontrol altına alınmakta ve doğrusal olmayan problem, daha basit sonsuz sayıda doğrusal alt probleme dönüştürülmektedir. Bu yöntem, başlangıç yaklaşımı ve yardımcı doğrusal operatörlerin seçiminde serbestlik sağladığı gibi, başlangıç yaklaşımı ne seçilirse seçilsin analitik çözüme ulaşılmasa bile yakınsak bir seri çözümün bulunmasına imkân vermektedir. HAM’da çözüm serisinin olusturulması yardımcı doğrusal operatörün, yardımcı fonksiyonun, başlangıç yaklaşımının ve yakınsaklık kontrol parametresinin seçimine bağlı iken, HPM’da başlangıç yaklaşımı ve uygun homotopinin kurulması yeterli olmaktadır. Bu da HPM’nin HAM’a kıyasla daha kolay uygulanabilir olduğunu göstermiştir [96].

Doğrusal olmayan problemlerin çözümünde kullanılan diğer bir yöntem VIM’dur. Bu yöntemde diferansiyel eşitlik doğrusal ve doğrusal olmayan iki operatör ve homojen olmayan bir terim ile ifade edilerek, yaklaşık çözüm denkleminde Lagrange çarpanları kullanılmaktadır [56,57]. Bu yöntemlerden farklı olarak AAM ise en yüksek türev mertebesine göre eşitliğin her iki tarafının integralinin alınmasını sağlayan doğrusal bir operatör ile Adomian polinomları adı verilen kuvvet serilerinden faydalanılarak ayrıştırılan doğrusal olmayan bir operatör kullanılarak sonuca hızla yakınsayan, seri açılımı prensibine dayalı analitik bir yöntemdir [58].

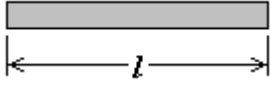
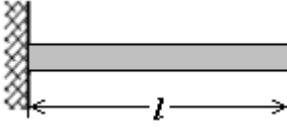
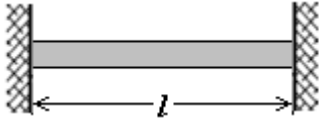
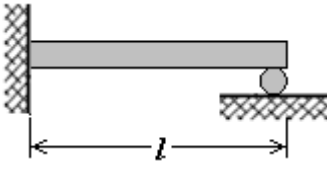
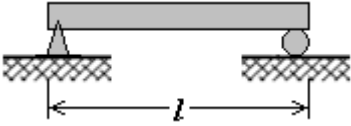
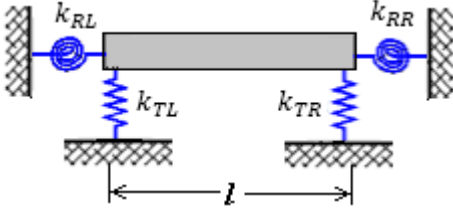
Bu bölümde, kayma deformasyonu ve dönme ataleti ihmal edilmiş, toplam uzunluğu l , elastisite modülü E , alan atalet momenti I , yoğunluğu ρ , kesit alanı A olan, sönümsüz, kesiti değişmeyen, basit mesnetli, düz bir köprü, EB kirişi şeklinde modellenerek hareket denklemleri yazılmıştır. Kiriş modal yerdeğişimi analitik ifadelerinin elde edilmesinde kullanılmak üzere serbest kiriş modeli için genelleştirilmiş doğal frekans ve n . mod şekil fonksiyonu ifadeleri bulunmuştur. Dördüncü mertebe, homojen olmayan, kısmi diferansiyel denklem ile ifade edilen hareket denklemleri, sınır ve başlangıç şartları dikkate alınarak, modal analiz ve klasik doğrusal-homojen denklem çözüm yöntemleri ile çözülmüştür. Kiriş üzerine uygulanan kuvvetin konumu hareket denklemlerinde Dirac Delta fonksiyonu ile ifade edilerek dinamik yüklerin sönümsüz köprü titreşimine etkileri incelenmiştir.

Homojen olmayan denklem çözümlerinde kullanılacak olan AAM ve bu metodun değiştirilmiş ve geliştirilmiş formları, ara çözüm basamakları verilerek anlatılmıştır. Herhangi bir noktasına ve özel olarak orta noktasına kuvvet uygulanan durum ile üzerinden hareketli kuvvet geçen kiriş hareket denklemlerine, bu yöntemler uygulanarak modal yerdeğişimleri seri açılım şeklinde ifade edilmiştir. Bu sonsuz seri açılımları Taylor ve Binom açılımları kullanılarak genel bir ifade olarak yazılmış, kirişin yerdeğişimi analitik ifade edilmiştir. Tüm bu yapılar EK-1'deki köprü dinamiği analitik çözümü işlem sırasında özetlenmiştir.

3.1. Sönümsüz Euler-Bernoulli Kirişinin Modal Analizi

Köprü dinamik analizlerinde hareket denklemlerinin çözülerek, modal yerdeğişimi analitik ifadelerinin elde edilebilmesi için öncelikle köprü sınır şartlarının belirlenmesi gerekmektedir. Bu amaçla literatürde sıkça kullanılan EB kiriş tipleri ve sınır şartları Çizelge 3.1'de verilmiştir. Bu sınır şartları dikkate alınarak öncelikle serbest köprü titreşimi hareket denklemi çözümü yapılmakta ve kiriş mod şekil fonksiyonu ile genelleştirilmiş doğal frekans ifadesi elde edilmektedir. Bu bölümde sönümsüz, düz bir kiriş, basit mesnetli kabul edilerek sınır şartları yazılmış ve hareket denklemi doğrusal, homojen dördüncü mertebe diferansiyel denklem çözüm yöntemi ile çözülmüştür. Mod şekil fonksiyonu ile genelleştirilmiş doğal frekans ifadesi elde edilerek kuvvetin farklı uygulama biçimleri için kiriş modal analizi yapılmıştır.

Çizelge 3.1. Kiriş tipleri ve sınır şartları

<i>Kiriş Tipleri</i>	<i>Sınır Şartları</i>
 <i>Serbest kiriş</i>	$\frac{\partial^2 w(0, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w(l, t)}{\partial x^2} = 0$ $\frac{\partial}{\partial x} \left[EI \frac{\partial^2 w(0, t)}{\partial x^2} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[EI \frac{\partial^2 w(l, t)}{\partial x^2} \right] = 0$
 <i>Ankastre kiriş</i>	$w(0, t) = 0, \quad \frac{\partial w(0, t)}{\partial x} = 0$ $\frac{\partial^2 w(l, t)}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[EI \frac{\partial^2 w(l, t)}{\partial x^2} \right] = 0$
 <i>Sabitlenmiş kiriş</i>	$w(0, t) = w(l, t) = 0, \quad \frac{\partial w(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial w(l, t)}{\partial x} = 0$
 <i>Sabit-mesnetli kiriş</i>	$w(0, t) = 0, \quad \frac{\partial w(0, t)}{\partial x} = 0$ $w(l, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 w(l, t)}{\partial x^2} = 0$
 <i>Basit mesnetli kiriş</i>	$w(0, t) = w(l, t) = 0$ $\frac{\partial^2 w(0, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w(l, t)}{\partial x^2} = 0$
 <i>Elastik mesnetli kiriş [87]</i>	$\left[EI(x) \frac{d^2 W_n(x)}{dx^2} - k_{RL} \frac{dW_n(x)}{dx} \right] \Big _{x=0} = 0$ $\left[\frac{d}{dx} \left(EI(x) \frac{d^2 W_n(x)}{dx^2} \right) + k_{TL} W_n(x) \right] \Big _{x=0} = 0$ $\left[EI(x) \frac{d^2 W_n(x)}{dx^2} + k_{RR} \frac{dW_n(x)}{dx} \right] \Big _{x=l} = 0$ $\left[\frac{d}{dx} \left(EI(x) \frac{d^2 W_n(x)}{dx^2} \right) - k_{TR} W_n(x) \right] \Big _{x=l} = 0$

3.1.1. Sönümsüz EB kirişinin serbest titreşimi

Matematiksel modeli Şekil 3.1’de verilen tek kirişli köprünün serbest titreşim hareket denklemi,

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad 0 < x < l \quad (3.1)$$

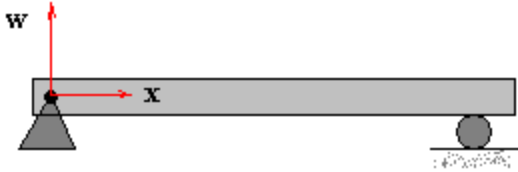
sınır şartları,

$$w(0, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 w(0, t)}{\partial x^2} = 0, \quad w(l, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 w(l, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (3.2)$$

ve başlangıç şartları,

$$w(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = 0 \quad (3.3)$$

şeklindedir. Burada $w(x, t)$ modal yer değişiminin fonksiyonunu, x kiriş eksenini boyunca uzanan koordinatı ifade etmektedir.



Şekil 3.1. Düzgün kesitli, tek kirişli köprü modeli

Yer değişimi fonksiyonu modal koordinatlara göre aşağıdaki gibi yazılmaktadır [8].

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x) q_n(t) \quad (3.4)$$

Burada $q_n(t)$ kirişin n . modal genliğini ve $W_n(x)$ ise n . mod şekil fonksiyonunu ifade etmektedir. Harmonik hareket $q_n(t) = e^{i\omega_n t}$ kabulü yapılır ve gerekli türevler alınır,

$$\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = -\omega_n^2 W_n(x) e^{i\omega_n t}, \quad \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} = \frac{d^4 W_n(x)}{dx^4} e^{i\omega_n t} \quad (3.5)$$

ve bu ifadeler hareket denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$EI \frac{d^4 W_n(x)}{dx^4} - \omega_n^2 \rho A W_n(x) = 0 \quad (3.6)$$

elde edilir. Bu özdeğer problemi için sınır şartları aşağıda verilmiştir.

$$W_n(0) = 0, \quad EI \frac{d^2 W_n(0)}{dx^2} = 0, \quad W_n(l) = 0, \quad EI \frac{d^2 W_n(l)}{dx^2} = 0 \quad (3.7)$$

n . mod şekil fonksiyonu $W_n(x) = B e^{\beta_n x}$ şeklinde ifade edilerek x 'e göre türevi alınıp özdeğer probleminde yerine yazıldığında ise,

$$EIB\beta_n^4 e^{\beta_n x} - \omega_n^2 \rho A B e^{\beta_n x} = 0 \quad (3.8)$$

elde edilmektedir. Bu doğrusal, homojen dördüncü mertebe denklemin çözümü aşağıda verilmiştir.

$$EI\beta_n^4 - \omega_n^2 \rho A = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta_n^2 = \pm \omega_n \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \quad (3.9)$$

$$\beta_n = \pm \alpha, \pm i\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = |\beta_n| = \sqrt[4]{\left| \frac{\rho A \omega_n^2}{EI} \right|} \quad (3.10)$$

$$W_n(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x} + C_3 e^{i\alpha x} + C_4 e^{-i\alpha x} \quad (3.11)$$

$$e^{\alpha x} = \sinh \alpha x + \cosh \alpha x, \quad e^{-\alpha x} = -\sinh \alpha x + \cosh \alpha x \quad (3.12)$$

$$e^{i\alpha x} = \cos \alpha x + i \sin \alpha x, \quad e^{-i\alpha x} = \cos \alpha x - i \sin \alpha x \quad (3.13)$$

$$W_n(x) = C_1(\sinh \alpha x + \cosh \alpha x) + C_2(-\sinh \alpha x + \cosh \alpha x) + C_3(\cos \alpha x + i \sin \alpha x) + C_4(\cos \alpha x - i \sin \alpha x) \quad (3.14)$$

$$W_n(x) = (C_1 + C_2)\cosh \alpha x + (C_1 - C_2)\sinh \alpha x + (C_3 + C_4)\cos \alpha x + (C_3 - C_4)i \sin \alpha x \quad (3.15)$$

Burada $B_1 = C_1 + C_2$, $B_2 = C_1 - C_2$, $B_3 = C_3 + C_4$ ve $B_4 = C_3 - C_4$ dönüşümleri yapılarak yerlerine yazılıp, sınır şartları için birinci ve ikinci türevleri alındığında,

$$W_n(x) = B_1 \cosh(\beta_n x) + B_2 \sinh(\beta_n x) + B_3 \cos(\beta_n x) + B_4 \sin(\beta_n x) \quad (3.16)$$

$$\dot{W}_n(x) = \beta_n [B_1 \sinh(\beta_n x) + B_2 \cosh(\beta_n x) - B_3 \sin(\beta_n x) + B_4 \cos(\beta_n x)] \quad (3.17)$$

$$\ddot{W}_n(x) = \beta_n^2 [B_1 \cosh(\beta_n x) + B_2 \sinh(\beta_n x) - B_3 \cos(\beta_n x) - B_4 \sin(\beta_n x)] \quad (3.18)$$

elde edilir. $x=0$ sınır şartından $B_1=B_3=0$ bulunur. $x=l$ sınır şartı uygulandığında ise,

$$\begin{bmatrix} \sinh(\beta_n l) & \sin(\beta_n l) \\ \cosh(\beta_n l) & -\cos(\beta_n l) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_2 \\ B_4 \end{Bmatrix} = \vec{0} \quad (3.19)$$

elde edilir. Bu matrisin çözümünden $\beta_n = \frac{n\pi}{l}$ bulunur. Buna göre basit mesnetli EB kirişi için genelleştirilmiş doğal frekans;

$$\omega_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \infty \quad (3.20)$$

ve n . mod şekil fonksiyonu ifadesi;

$$W_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \infty \quad (3.21)$$

şeklinde elde edilir. Bu ifadeler diğer bölümlerde kuvvetin farklı uygulama biçimleri için bulunacak kiriş modal yer değişimi analitik çözümlerinde kullanılacaktır.

3.1.2. Üzerinden hareketli kuvvet geçen sönümsüz EB kirişinin modal analizi

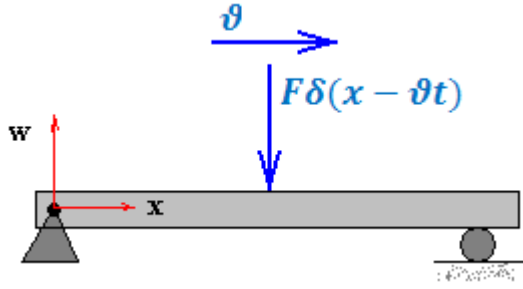
Matematiksel modeli Şekil 3.2’de verilen tek kirişli köprünün üzerinden ϑ sabit hızı ile ilerleyen bir F kuvveti geçtiği andaki hareket denklemi,

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = F \delta(x - \vartheta t) \quad (3.22)$$

ve bu denklem çözümünde kullanılacak boyutsuz parametreler,

$$T = \frac{t}{l} \sqrt{\frac{EI}{\rho}}, \quad V = \vartheta \sqrt{\frac{\rho}{EI}}, \quad X = \frac{x}{l}, \quad k_f = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{EI}{A}}, \quad W(X) = \frac{W(x)}{l}, \quad F_z = \frac{F}{EA} \quad (3.23)$$

şeklinde verilmektedir.



Şekil 3.2. Üzerinden sabit hızlı F kuvveti geçen tek kirişli köprü modeli

Burada titreşim analizini basitleştirmek amacıyla aşağıda sıralanan kabuller yapılmıştır;

- (i) Kuvvet, köprü merkez eksenı doğrultusunda soldan sağa doğru hareket etmektedir.
- (ii) Hareket boyunca köprü ve kuvvet arasındaki temas süreklidir.
- (iii) Titreşim sırasında hat düzensizliği ihmal edilmiş ve köprü kesiti değişmemektedir.

Bu kabuller ve Eş. 3.23'teki boyutsuz parametreler dikkate alınarak kiriş hareket denklemi, sınır ve başlangıç şartları sırayla aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$k_f^2 \frac{\partial^4 W(X, T)}{\partial X^4} + \frac{\partial^2 W(X, T)}{\partial T^2} = F_z \delta(X - VT) \quad , \quad 0 < X < 1 \quad (3.24)$$

$$W(0, T) = 0, \quad \frac{\partial^2 W(0, T)}{\partial X^2} = 0 \quad , \quad W(1, T) = 0, \quad \frac{\partial^2 W(1, T)}{\partial X^2} = 0 \quad (3.25)$$

$$W(X, 0) = 0, \quad \frac{\partial W(X, 0)}{\partial T} = 0 \quad (3.26)$$

Burada T zamanı, V hızı, F_z kuvveti, X koordinatı, k_f ise elastisiteyi boyutsuz formda ifade etmektedir [40]. $W(X, T)$ dikey yer değişimi fonksiyonu ise modal koordinatlara göre boyutsuz formda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$W(X, T) = \sum_{n=1}^N W_n(X) q_n(T) \quad (3.27)$$

Burada $W_n(X)$, n . mod şekil fonksiyonunun, $q_n(T)$ ise kirişin n . modal genliğinin boyutsuz formda ifadesidir. N toplam mod sayısını göstermektedir. Eş.3.27. gerekli türevler alınarak Eş. 3.24'te yerlerine yazılır ve bulunan eşitliğin her iki tarafı $W_n(X)$ ile çarpılıp 0 ile 1 aralığında X 'e göre integrali alınırsa,

$$k_f^2 \sum_{n=1}^N \left[q_n(T) \int_0^1 \frac{d^4 W_n(X)}{dX^4} W_n(X) dX \right] + \sum_{n=1}^N \left[\frac{d^2 q_n(T)}{dT^2} \int_0^1 W_n(X) W_n(X) dX \right] \\ = \int_0^1 F_z \delta(X - VT) W_n(X) dX \quad , \quad 0 < X < 1 \quad (3.28)$$

elde edilir. Eş.3.21’de serbest titreşim durumu için elde edilen n . mod şekil fonksiyonu boyutsuz formda aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$W_n(X) = \sin(\beta_n X) \quad , \quad n = 1, 2, 3 \dots \infty \quad (3.29)$$

Burada Eş.3.21’e göre $\beta_n = n\pi$ ’dir. Boyutsuz formda modların normalleştirilmesinde ortogonalite durumu için basit mesnetli kirişte genel ifade aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$\delta_{ns} = \int_0^1 W_n(X) W_s(X) dX = \begin{cases} 0, & n \neq s \\ \frac{1}{2}, & n = s \end{cases} \quad (3.30)$$

Bu ifadeler $n=s$ için Eş. 3.28’de yerlerine yazılır, gerekli türevler ve Dirac Delta fonksiyonunun integrali alınır,

$$\frac{d^2 q_n(T)}{dT^2} + k_f^2 \beta_n^4 q_n(T) = 2F_z \sin(\beta_n VT) \quad , \quad n = 1, 2, 3 \dots \infty \quad (3.31)$$

bulunur. Bu denklemin çözümünde matematiksel işlemleri kolaylaştırmak amacıyla $\mu^2 = k_f^2 \beta_n^4$ ve $\theta = \beta_n V$ kabulü yapılır ve yerlerine yazılırsa,

$$\frac{d^2 q_n(T)}{dT^2} + \mu^2 q_n(T) = 2F_z \sin(\theta T) \quad , \quad n = 1, 2, 3 \dots \infty \quad (3.32)$$

olur. Bu ikinci mertebe, doğrusal, homojen olmayan, adi diferansiyel denklemin kökleri $m_{1,2} = \pm \mu i$ olarak kabul edilir ve diferansiyel denklem formülasyonunda yerlerine yazılırsa,

$$q_n(T) = c_1 \cos(\mu T) + c_2 \sin(\mu T) + \frac{\sin(\mu T)}{\mu} \int 2F_z \sin(\theta T) \cos(\mu T) dT \\ - \frac{\cos(\mu T)}{\mu} \int 2F_z \sin(\theta T) \sin(\mu T) dT \quad (3.33)$$

elde edilir (Bkz. EK-5). Bu eşitlikte integral ifadelerinin çözümü yapılır ve gerekli sadeleştirmeler yapıldıktan sonra, denklemin birinci türevi alınır,

$$q_n(T) = c_1 \cos(\mu T) + c_2 \sin(\mu T) - \frac{2F_z \sin(\theta T)}{\theta^2 - \mu^2} \quad (3.34)$$

$$\dot{q}_n(T) = -c_1 \mu \sin(\mu T) + c_2 \mu \cos(\mu T) - \frac{2F_z \theta \cos(\theta T)}{\theta^2 - \mu^2} \quad (3.35)$$

elde edilir. Bu eşitliklerde başlangıç şartları yerlerine yazılırsa $c_1 = 0$ ve $c_2 = \frac{2F_z \theta}{\mu(\theta^2 - \mu^2)}$ bulunur. Bu ifadeler Eş.3.34'te yerlerine yazılıp daha önce verilen $\mu^2 = k_f^2 \beta_n^4$ ve $\theta = \beta_n V$ ifadeleri denklemde yerlerine yazılırsa,

$$q_n(T) = \frac{2F_z}{\beta_n^2(V^2 - k_f^2 \beta_n^2)} \left(\frac{\beta_n V \sin(k_f \beta_n^2 T)}{k_f \beta_n^2} - \sin(\beta_n V T) \right) \quad (3.36)$$

bulunur. Eş.3.29 ve Eş.3.36, Eş.3.27'de yerlerine yazılırsa boyutsuz formda yerdeğişimi ifadesi,

$$W(X, T) = \sum_{n=1,2,3..}^N \sin(\beta_n X) \left[\frac{2F_z}{\beta_n^2(V^2 - k_f^2 \beta_n^2)} \left(\frac{\beta_n V \sin(k_f \beta_n^2 T)}{k_f \beta_n^2} - \sin(\beta_n V T) \right) \right] \quad (3.37)$$

şeklinde elde edilir. Eş.3.23, Eş.3.37'de yerlerine yazılıp gerekli düzenleme ve sadeleştirmeler yapıldığında ise üzerinden ϑ sabit hızı ile ilerleyen F kuvveti geçen tek kirişli köprünün modal yer değişimi analitik ifadesi,

$$w(x, t) = \frac{2Fl^3}{\pi^4 EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \left(n^2 - \frac{\rho A l^2 \vartheta^2}{\pi^2 EI} \right)} \left[\sin\left(\frac{n\pi}{l} \vartheta t\right) - \frac{n\pi \vartheta}{l \omega_n} \sin(\omega_n t) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \quad (3.38)$$

şeklinde elde edilir.

3.2. Adomian Ayrıştırma Metodu Çözüm Yöntemleri

Bu bölümde EB kirişi hareket denklemi analitik çözümünde kullanılacak olan AAM ve bu metodun değiştirilmiş ve geliştirilmiş formları, ara çözüm basamakları verilmiştir.

3.2.1. Adomian ayrıştırma metodu (AAM)

AAM doğrusal ve doğrusal olmayan, adi ve kısmi diferansiyel denklem çözümlerinde küçük parametre varsayımlarına ve doğrusallaştırmaya gerek duyulmadan, sonuca hızla yakınsayan, seri açılımı prensibine dayalı analitik bir yöntemdir [97]. Kronolojik sırayla, Duffing denklemi (1994), doğrusal olmayan Schrödinger denklemi (1998), Boussinesq denklemi (2001), dalga denklemleri, ısı transferi denklemleri, Burger's-Huxley ve Burger's-Fisher denklemleri (2004), Lane-Emden denklemi (2006), Lotca-Volterra denklemi, Sturm-Liouville denklemi (2007), Abelian diferansiyel denklemleri (2008), yayılma ve reaksiyon denklemi (2009) gibi fizik, mühendislik ve uygulamalı matematik bilimlerinde sıklıkla kullanılan denklem çözümlerine uygulanmış ve yöntemin sadeliği, uygulanabilirliği, doğruluğu bu çalışmaları yapan bilim insanları tarafından test edilmiştir. Farklı araştırmalarda Taylor Serisi (1998), HPM ve VIM (2008) gibi çözüm yöntemleri ile karşılaştırılarak bu metodun kısa sürede çözüme yakınsama sağladığı görülmüştür [83]. Yapılan çalışmalarda AAM yöntemi genel ifadesi aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$Fw(x) = g(x) \quad (3.39)$$

Burada F , doğrusal olmayan adi diferansiyel denklem operatörünü ve $g(x)$ ise zorlayıcı kuvvet fonksiyonunu ifade etmektedir. $Fw(x)$ 'in doğrusal terimi $Lw(x) + Rw(x)$ ve doğrusal olmayan terimi ise $Nw(x)$ şeklinde iki bölümden oluşmaktadır. Burada L integrali alınabilen en yüksek mertebeli türevli terim operatörünü, R ise mertebesi L 'den az olan doğrusal diferansiyel operatörü ifade etmektedir. Doğrusal operatör $L = \frac{d^m}{dx^m}$ şeklinde gösterilmektedir. Bu operatörün tersi ise m defa integralinin alınmasıdır ve aşağıda verilmiştir.

$$L^{-1}(\cdot) = \int_{x_0}^x (\cdot) \underbrace{dx}_{m \text{ defa}} \quad (3.40)$$

Bu yöntemde doğrusal ve doğrusal olmayan operatörler kullanılarak Eş. 3.39 tekrar yazılır ve gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra eşitliğin her iki tarafının L^{-1} opartörü kullanılarak integrali alınırsa,

$$Lw(x) + Rw(x) + Nw(x) = g(x) \quad (3.41)$$

$$L^{-1}[Lw(x)] = L^{-1}[g(x)] - L^{-1}[Rw(x)] - L^{-1}[Nw(x)] \quad (3.42)$$

$$w(x) - w^*(x_0) = L^{-1}[g(x)] - L^{-1}[Rw(x)] - L^{-1}[Nw(x)] \quad (3.43)$$

$$w(x) = w^*(x_0) + L^{-1}[g(x)] - L^{-1}[Rw(x)] - L^{-1}[Nw(x)] \quad (3.44)$$

elde edilmektedir. Burada $w^*(x_0)$, $w(x)$ 'in başlangıç şartlarındaki integralini ifade etmektedir. $w(x)$ ve $Nw(x)$ aşağıdaki gibi ifade edilerek,

$$w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n, \quad Nw(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (3.45)$$

Eş.3.44'te yerlerine yazıldığında,

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = w^*(x_0) + L^{-1}[g(x)] - L^{-1}R \sum_{n=0}^{\infty} w_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (3.46)$$

elde edilmektedir. Bu seri açılımı iki bölüme ayrılarak aşağıdaki gibi yazılmaktadır [64].

$$\begin{aligned} w_0 &= w^*(x_0) + L^{-1}[g(x)] \\ w_{n+1} &= -L^{-1}[Rw_n] - L^{-1}[Nw_n] \quad n \geq 0 \end{aligned} \quad (3.47)$$

Burada serinin ilk terimi w_0 basit integral yöntemleriyle çözülebilir. Fakat serinin diğer terimleri tam olarak hesaplanamaz. Bu durumda serinin ilk terimine bağlı olarak elde edilen AP'ler kullanılır ve diğer tüm terimler hesaplanır.

A_n polinomlarının ilk dört terimi ve genel ifadesi aşağıda verilmiştir.

$$A_0 = f(w_0) \quad (3.48)$$

$$A_1 = w_1 f'(w_0) \quad (3.49)$$

$$A_2 = w_2 f'(w_0) + \frac{w_1^2}{2!} f''(w_0) \quad (3.50)$$

$$A_3 = w_3 f'(w_0) + w_1 w_2 f''(w_0) + \frac{w_1^3}{3!} f'''(w_0) \quad (3.51)$$

⋮

$$A_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n c(k, n) \frac{d^k f}{dw^k} = \left[\frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dw^n} \left(\sum_{k=0}^n w_k (\lambda)^k \right) \right]_{\lambda=0} \quad (3.52)$$

Burada $c(k, n)$ ifadesinde, k terim sayısını n ise terimlerin alt indislerinin toplam değerini göstermektedir [97]. Bu polinomlar AAM genel denkleminde yerine yazılır ve L^{-1} operatörüne göre integrali alınırsa genel ifade seri açılımı şeklinde elde edilir [58].

3.2.2. Değiştirilmiş Adomian ayrıştırma metodu (DAAM)

Matematik, fizik ve mühendislik uygulamalarında çözümü oldukça karmaşık olan kısmi diferansiyel denklem çözümünde kullanılan AAM daha kullanışlı hale getirilmiş ve bu amaçla yeni bir diferansiyel operatör geliştirilerek bu yönteme DAAM adı verilmiştir [72]. Bu yöntemde ikinci mertebe diferansiyel denklemin genel ifadesi ve başlangıç şartları;

$$\ddot{y} + P(T)\dot{y} + N(X, T) = g(T) \quad , \quad y(0) = A \quad , \quad \dot{y}(0) = B \quad (3.53)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Burada türevin mertebesi $m=2$ 'dir. DAAM'ye göre yeni bir diferansiyel operatör olan L aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$L = e^{-\int P(T)dT} \frac{d}{dT} \left(e^{\int P(T)dT} \frac{d}{dT} \right) \quad (3.54)$$

L operatörünün tersi, türevin mertebesince integralinin alınmasıdır ve

$$L^{-1}(\cdot) = \int_0^T e^{-\int P(T)dT} \int_0^T e^{\int P(T)dT} (\cdot) dT dT \quad (3.55)$$

şeklinde verilmiştir. Sonraki aşamalarda klasik AAM çözüm basamakları takip edilerek seri açılımı elde edilmektedir. Tek fark, doğrusal diferansiyel operatörün farklı bir yöntemle bulunmasıdır.

3.2.3. Geliştirilmiş Adomian ayrıştırma metodu (GAAM)

Homojen olmayan diferansiyel denklemlerde, zamana bağlı türev mertebesi ikiden fazla olduğunda, klasik AAM ile elde edilemeyen çözümler, bu yöntemin geliştirilmiş formu

kullanılarak bulunabilmektedir [79,80]. Bu yöntemde homojen olmayan ve doğrusal olmayan başlangıç değer problemi ve sınır şartları aşağıdaki gibi ifade edilmektedir;

$$Lw(x, t) + Rw(x, t) + Nw(x, t) = g(x, t) \quad (3.56)$$

$$w(x, t_0) = w^{(0)}(x) = f_0(x) \quad (3.57)$$

$$\left. \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = w^{(1)}(x) = f_1(x) \quad (3.58)$$

$$\left. \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \right|_{t=0} = \frac{w^{(2)}(x)}{2!} = f_2(x) \quad (3.59)$$

⋮

$$\left. \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} w(x, t)}{\partial t^{m-1}} \right|_{t=0} = \frac{w^{(m-1)}(x)}{(m-1)!} = f_{m-1}(x) \quad (3.60)$$

Burada L , integrali alınabilen en yüksek mertebeden türevli terim operatörünü, R , mertebesi L 'den az olan doğrusal terim operatörünü, N , doğrusal olmayan terim operatörünü, g ise homojen olmayan fonksiyonu ifade etmektedir. Bu yöntemde L operatörünün tersi, türevin mertebesi (m defa) kadar integralinin alınmasıdır ve aşağıdaki gibi gösterilmektedir.

$$L^{-1}(\cdot) = \int_0^t \cdots \int_0^t (\cdot) d\tau \cdots (m \text{ defa}) \cdots dt \quad (3.61)$$

Buna göre genel denklemde gerekli düzenleme yapıp eşitliğin her iki tarafının tersi alındığında,

$$L^{-1}(Lw(x, t)) = L^{-1}(g(x, t)) - L^{-1}(Rw(x, t)) - L^{-1}(Nw(x, t)) \quad (3.62)$$

$$w(x, t) = f_0(x) + f_1(x)t + f_2(x)t^2 + \cdots + f_{m-1}(x)t^{m-1} - L^{-1}[Nw(x, t) + Rw(x, t) - g(x, t)] \quad (3.63)$$

elde edilmektedir. Burada $w(x, t)$, $Nw(x, t)$ ve $g(x, t)$ terimleri toplam serisi şeklinde aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \quad , \quad Nw(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad , \quad g(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \quad (3.64)$$

Bu ifadeler Eş.3.63'te yerlerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x, t) &= f_0(x) + f_1(x)t + f_2(x)t^2 + \dots + f_{m-1}(x)t^{m-1} \\ &\quad - L^{-1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n + R \left(\sum_{n=0}^{\infty} w_n \right) - \sum_{n=0}^{\infty} g_n \right] \end{aligned} \quad (3.65)$$

tüm seri terimleri elde edilir. Bu toplam serisi iki parçaya bölünerek önce serinin sıfıncı terimi bulunur, bu terimler bir sonraki terimde yerlerine yazılarak serinin diğer terimleri elde edilmektedir.

$$w_0(x, t) = f_0(x) + f_1(x)t + f_2(x)t^2 + \dots + f_{m-1}(x)t^{m-1} \quad (3.66)$$

$$w_{n+1}(x, t) = -L^{-1}(A_n + Rw_n - g_n) \quad , \quad n \geq 0 \quad (3.67)$$

GAAM'ye göre AP (A_n) ve homojen olmayan terim polinomu (g_n) aşağıdaki gibi ifade edilmektedir [80].

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{nm!} \left[\frac{d^{nm}}{d\lambda^{nm}} N \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i f_i t^i \right) \right]_{\lambda=0} + \frac{1}{(nm+1)!} \left[\frac{d^{(nm+1)}}{d\lambda^{(nm+1)}} N \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i f_i t^i \right) \right]_{\lambda=0} + \dots \\ &\quad + \frac{1}{(nm+m-1)!} \left[\frac{d^{(nm+m-1)}}{d\lambda^{(nm+m-1)}} N \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i f_i t^i \right) \right]_{\lambda=0} , \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots \end{aligned} \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned} g_n &= \frac{1}{nm!} \left[\frac{d^{nm}}{dt^{nm}} g(x, t) \right]_{t=0} t^{nm} + \frac{1}{(nm+1)!} \left[\frac{d^{(nm+1)}}{dt^{(nm+1)}} g(x, t) \right]_{t=0} t^{nm+1} + \dots \\ &\quad + \frac{1}{(nm+m-1)!} \left[\frac{d^{(nm+m-1)}}{dt^{(nm+m-1)}} g(x, t) \right]_{t=0} t^{nm+m-1} , \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots \end{aligned} \quad (3.69)$$

Burada n terim sayısını, m türevin mertebesini ve f_n ise $w_n(x, t)$ 'de, t_n 'in katsayısını ifade etmektedir.

3.3. Sönümsüz EB Kirişinin AAM ile Çözümü

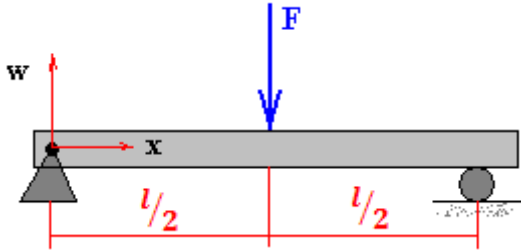
Zorlanmış kiriş hareket denklemlerinin çözümünün karmaşık ve matematiksel yöntemlerin sınırlı olması sebebiyle kesin çözümler elde etmek oldukça zordur. Bu bölümde kuvvetin farklı uygulama biçimleri için sönümsüz EB kiriş hareket denklemleri AAM kullanılarak çözülmüş ve analitik ifadeler elde edilmiştir.

3.3.1. Orta noktasına kuvvet uygulanan sönümsüz EB kirişinin AAM ile çözümü

Orta noktasına sabit bir F kuvveti uygulanan tek kirişli köprü modeli Şekil 3.3'te verilmiştir. Bu modelin hareket denklemi ise,

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = F \delta \left(x - \frac{l}{2} \right) \quad , \quad 0 < x < l \quad (3.70)$$

şeklindedir. Burada δ , Dirac Delta fonksiyonu F kuvvetinin köprü orta noktasındaki konumunu ifade etmektedir [20].



Şekil 3.3. Orta noktasına sabit F kuvveti uygulanan tek kirişli köprü modeli

Eş. 3.70, AAM genel ifadesine göre aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$L_X w(x, t) + L_T w(x, t) = \frac{F}{\rho A} \delta \left(x - \frac{l}{2} \right) \quad , \quad 0 < x < l \quad (3.71)$$

Burada, $L_X = \frac{EI}{\rho A} \frac{\partial^4}{\partial x^4}$ ve $L_T = \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ sırasıyla yola ve zamana bağlı AAM diferansiyel operatörleri olup L_T operatörünün tersi türev mertebesi (iki) kadar integralinin alınmasıdır [86].

$$L_T^{-1} w(x, t) = \int_0^t \int_0^\sigma w(x, t) dt d\sigma \quad (3.72)$$

Hareket denklemindeki yer değişimi ifadesi $w(x, t)$, homojen $U(x, t)$ ve homojen olmayan $Y(x, t)$ denklem çözümü toplamı şeklinde aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$w(x, t) = U(x, t) + Y(x, t) \quad (3.73)$$

Burada homojen denklem çözümü, kiriş hareket denkleminin sağ tarafı sıfıra eşitlenerek (yani Eş. 3.1'de verilen serbest titreşim durumu için) elde edilir. AAM'a göre bu denklemin her iki tarafının L_T^{-1} operatörü kullanılarak iki kez integrali alındığında,

$$U(x, t) = f_0(x) + tf_1(x) - L_T^{-1}L_X U(x, t) \quad (3.74)$$

elde edilmektedir [86]. Burada $U(x, t)$ toplam serisi şeklinde ifade edilerek Eş.3.74'te yerine yazıldığında,

$$\sum_{s=0}^{\infty} U_s(x, t) = f_0(x) + tf_1(x) - L_T^{-1}L_X \sum_{s=0}^{\infty} U_s(x, t) \quad (3.75)$$

olur. Bu seri açılımı Eş.3.47'de olduğu gibi iki bölüme ayrılarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$U_0(x, t) = f_0(x) + tf_1(x) \quad (3.76)$$

$$U_s(x, t) = -L_T^{-1}L_X U_{s-1}(x, t) \quad , \quad s \geq 1$$

Bu genel ifadeye göre homojen çözüm için seri açılımı aşağıda verilmiştir.

$$U_0(x, t) = f_0(x) + tf_1(x) \quad (3.77)$$

$$U_1(x, t) = -L_T^{-1}L_X U_0(x, t) = -L_X \left[f_0(x) \frac{t^2}{2!} + f_1(x) \frac{t^3}{3!} \right] \quad (3.78)$$

$$U_2(x, t) = -L_T^{-1}L_X U_1(x, t) = L_X^2 \left[f_0(x) \frac{t^4}{4!} + f_1(x) \frac{t^5}{5!} \right] \quad (3.79)$$

⋮

$$U_s(x, t) = (-1)^s L_X^s \left[f_0(x) \frac{t^{2s}}{(2s)!} + f_1(x) \frac{t^{2s+1}}{(2s+1)!} \right] \quad (3.80)$$

Bu eşitlik Eş.3.75'te yerine yazılırsa,

$$\sum_{s=0}^{\infty} U_s(x, t) = f_0(x) + t f_1(x) + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s L_X^s \left[f_0(x) \frac{t^{2s}}{(2s)!} + f_1(x) \frac{t^{2s+1}}{(2s+1)!} \right] \quad (3.81)$$

elde edilir.

Eş.3.3'te verilen başlangıç şartları AAM için aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$U(x, 0) = z(x) = f_0(x) \quad , \quad \frac{dU(x, 0)}{dt} = h(x) = f_1(x) \quad (3.82)$$

Burada $z(x)$ ve $h(x)$ fonksiyonları sınır şartlarını göstermektedir. Bu fonksiyonlar Fourier seri açılımına göre,

$$z(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n W_n(x) \quad , \quad h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n W_n(x) \quad (3.83)$$

şeklinde olup Z_n ve H_n ifadeleri ise,

$$Z_n = \int_0^l z(x) W_n(x) dx \quad , \quad H_n = \int_0^l h(x) W_n(x) dx \quad (3.84)$$

şeklinde verilmiştir. Özdeğer fonksiyonlarının normalizasyonunda aşağıdaki ifade kullanılmaktadır.

$$\int_0^l W_k L_X W_n dx = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ \gamma_k & k = n \end{cases} \quad (3.85)$$

Burada $k=n$ için düzenleme yapıldığında,

$$L_X W_n(x) = \gamma_n W_n(x) \quad (3.86)$$

ve seri açılımı dikkate alındığında,

$$L_X^s W_n(x) = \gamma_n^s W_n(x) \quad (3.87)$$

elde edilmektedir. Eş.3.83 ve Eş.3.82, Eş.3.81'de yerlerine yazıldığında,

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n W_n(x) + t \sum_{n=1}^{\infty} H_n W_n(x) + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s L_X^s \left[\sum_{n=1}^{\infty} Z_n W_n(x) \frac{t^{2s}}{(2s)!} + \sum_{n=1}^{\infty} H_n W_n(x) \frac{t^{2s+1}}{(2s+1)!} \right] \quad (3.88)$$

bulunur. Bu eşitlikte Eş.3.87'ye göre gerekli düzenleme ve sadeleştirmeler yapıldığında,

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n \left[\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\gamma_n^s t^{2s}}{(2s)!} \right] W_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} H_n \left[\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\gamma_n^s t^{2s+1}}{(2s+1)!} \right] W_n(x) \quad (3.89)$$

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n \left[\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(t\sqrt{\gamma_n})^{2s}}{(2s)!} \right] W_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{\sqrt{\gamma_n}} \left[\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(t\sqrt{\gamma_n})^{2s+1}}{(2s+1)!} \right] W_n(x) \quad (3.90)$$

elde edilir. Bu eşitlikte $\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(t\sqrt{\gamma_n})^{2s}}{(2s)!} = 1 - \frac{(t\sqrt{\gamma_n})^2}{2!} + \frac{(t\sqrt{\gamma_n})^4}{4!} \dots$ ifadesi Cos Taylor serisi açılımını, $\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(t\sqrt{\gamma_n})^{2s+1}}{(2s+1)!} = t\sqrt{\gamma_n} - \frac{(t\sqrt{\gamma_n})^3}{3!} + \frac{(t\sqrt{\gamma_n})^5}{5!} \dots$ ise Sin Taylor serisi açılımını ifade etmektedir. Bu açılımlar Eş.3.90'da yerlerine yazıldığında,

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(Z_n \cos \sqrt{\gamma_n} t + \frac{H_n}{\sqrt{\gamma_n}} \sin \sqrt{\gamma_n} t \right) W_n(x) \quad (3.91)$$

homojen terim çözümü elde edilir. Homojen olmayan terim çözümü için ise Eş.3.71 $Y(x, t)$ 'ye göre düzenlenir ve eşitliğin her iki tarafının L_T^{-1} operatörü kullanılarak iki kez integrali alınır.

$$Y(x, t) = L_T^{-1} \left[\frac{F}{\rho A} \delta \left(x - \frac{l}{2} \right) \right] - L_T^{-1} L_X Y(x, t) \quad (3.92)$$

Burada $Y(x, t)$ toplam serisi şeklinde ifade edilerek Eş.3.92'de yerine yazıldığında,

$$\sum_{s=0}^{\infty} Y_s(x, t) = L_T^{-1} \left[\frac{F}{\rho A} \delta \left(x - \frac{l}{2} \right) \right] - L_T^{-1} L_X \sum_{s=0}^{\infty} Y_s(x, t) \quad (3.93)$$

elde edilir. Bu seri açılımı Eş.3.47'ye göre iki bölüme ayrılarak aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$Y_0(x, t) = L_T^{-1} \left[\frac{F}{\rho A} \delta \left(x - \frac{l}{2} \right) \right] \quad (3.94)$$

$$Y_s(x, t) = -L_T^{-1} L_X Y_{s-1}(x, t) = (-1)^s (L_T^{-1})^s L_X^s Y_0(x, t) \quad , \quad s \geq 1$$

Eş.3.94, Eş.3.93'te yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} Y_s(x, t) &= L_T^{-1} \left[\frac{F}{\rho A} \delta \left(x - \frac{l}{2} \right) \right] \\ &\quad - L_T^{-1} L_X \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (L_T^{-1})^s L_X^s L_T^{-1} \left[\frac{F}{\rho A} \delta \left(x - \frac{l}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.95)$$

elde edilir. Burada $\frac{F}{\rho A} \delta \left(x - \frac{l}{2} \right)$ ifadesinin normalizasyonu aşağıda verilmiştir.

$$\frac{F}{\rho A} \delta \left(x - \frac{l}{2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(t) W_n(x) \quad (3.96)$$

$$P_n(t) = \int_0^l \frac{F}{\rho A} \delta \left(x - \frac{l}{2} \right) W_n(x) dx \quad (3.97)$$

Eş.3.96, Eş.3.95'te yerine yazılıp, gerekli düzenleme ve sadeleştirmeler yapıldıktan sonra elde edilen denklemde Eş.3.87 yerine yazıldığında,

$$Y(x, t) = L_T^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} P_n(t) W_n(x) - L_T^{-1} L_X \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (L_T^{-1})^s L_X^s L_T^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} P_n(t) W_n(x) \quad (3.98)$$

ve düzenleme yapıldığında,

$$Y(x, t) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^s \gamma_n^s W_n(x) (L_T^{-1})^{s+1} P_n(t) \quad (3.99)$$

elde edilir. Burada $(L_T^{-1})^{s+1} P_n(t) = K_{s+1}(t)$ olarak ifade edilebilir. $Y_s(x, t)$ 'nin bulunabilmesi için öncelikle bu ifadenin bulunması gerekmektedir. Bunun için de $K_1(t)$ aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$K_1(t) = L_T^{-1} P_n(t) = \int_0^t \int_\sigma^t P_n(\sigma) dT d\sigma = \int_0^t P_n(\sigma) (t - \sigma) d\sigma \quad (3.100)$$

$$K_2(t) = (L_T^{-1})^2 P_n(t) = L_T^{-1} K_1(t) \quad (3.101)$$

⋮

$$K_{s+1}(t) = (L_T^{-1})^s P_n(t) = \int_0^t P_n(\sigma) \frac{(t - \sigma)^{2s+1}}{(2s + 1)!} d\sigma \quad (3.102)$$

Eş.3.102, Eş.3.99'da yerine yazılıp, gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$Y(x, t) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^s \gamma_n^s W_n(x) \int_0^t P_n(\sigma) \frac{(t - \sigma)^{2s+1}}{(2s + 1)!} d\sigma \quad (3.103)$$

$$Y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n(x)}{\sqrt{\gamma_n}} \int_0^t P_n(\sigma) \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\left((t - \sigma)\sqrt{\gamma_n}\right)^{2s+1}}{(2s + 1)!} d\sigma \quad (3.104)$$

elde edilmektedir. Bu eşitlikte $\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\left((t - \sigma)\sqrt{\gamma_n}\right)^{2s+1}}{(2s + 1)!}$ terimi Sin Taylor serisi açılımını ifade etmektedir. Bu açılım Eş.3.104'te yerine yazıldığında homojen olmayan terim çözümü,

$$Y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n(x)}{\sqrt{\gamma_n}} \int_0^t P_n(\sigma) \sin\left((t - \sigma)\sqrt{\gamma_n}\right) d\sigma \quad (3.105)$$

şeklinde elde edilir.

Eş.3.91 ve Eş.3.105, Eş.3.73'te yerlerine yazıldığında genel çözüm;

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(Z_n \cos \sqrt{\gamma_n} t + \frac{H_n}{\sqrt{\gamma_n}} \sin \sqrt{\gamma_n} t \right) W_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n(x)}{\sqrt{\gamma_n}} \int_0^t P_n(\sigma) \sin\left((t - \sigma)\sqrt{\gamma_n}\right) d\sigma \quad (3.106)$$

olur. Bu denklemde kirişin n 'inci doğal frekansı $\omega_n = \sqrt{\gamma_n}$ şeklinde ifade edilerek gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(Z_n \cos \omega_n t + \frac{H_n}{\omega_n} \sin \omega_n t + \frac{1}{\omega_n} \int_0^t P_n(\sigma) \sin((t - \sigma)\omega_n) d\sigma \right) W_n(x) \quad (3.107)$$

elde edilir. Eş.3.97'de $W_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$ ifadesi için Dirac Delta fonksiyonunun integrali alınır ve Eş.3.84 ile birlikte Eş.3.107'de yerlerine yazılırsa,

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2F}{l\omega_n \rho A} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \int_0^t \sin((t - \sigma)\omega_n) d\sigma \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (3.108)$$

elde edilir. Bu denklemdeki integral ifadesinin çözümü aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} \int_0^t \sin((t - \sigma)\omega_n) d\sigma &= \int_0^t (\sin(\omega_n t) \cos(\omega_n \sigma) - \cos(\omega_n t) \sin(\omega_n \sigma)) d\sigma \\ &= \sin(\omega_n t) \left(\frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n} \right) - \cos(\omega_n t) \left(-\frac{\cos(\omega_n t) - 1}{\omega_n} \right) \Big|_0^t \\ &= \frac{\sin^2(\omega_n t) + \cos^2(\omega_n t) - \cos(\omega_n t)}{\omega_n} \Big|_0^t \\ &= \frac{1 - \cos(\omega_n t)}{\omega_n} \end{aligned} \quad (3.109)$$

Eş.3.109 ve $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$ ($n=1,3,5..$) ifadesi Eş.3.108'de yerlerine yazılırsa,

$$w(x, t) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left(\frac{2F}{l\omega_n \rho A} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1 - \cos(\omega_n t)}{\omega_n} \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) , \quad (3.110)$$

bulunur. Eş.3.20, Eş.3.110'da yerlerine yazılıp gerekli sadeleştirme ve düzenleme yapıldığında ise orta noktasına kuvvet uygulanan kirişin modal yerdeğişimi analitik ifadesi,

$$w(x, t) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left(\frac{2Fl^3}{(n\pi)^4 EI} (-1)^{\frac{n-1}{2}} [1 - \cos(\omega_n t)] \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (3.111)$$

şeklinde elde edilir.

3.3.2. Üzerinden hareketli kuvvet geçen sönümsüz EB kirişinin AAM ile çözümü

Demiryolu köprü titreşimi uygulamalarında hat üzerindeki pürüzler, traversli ray yapısı, travers aralıklarının farklı olması gibi homojen olmayan etkiler nedeniyle analizlerde gerçekçi sonuçlar alınamamaktadır. Bu bölümde, demiryolu hatındaki homojen olmayan etkiler harmonik bir kuvvet şeklinde ifade edilerek Şekil 3.2'deki köprü dinamik analizi AAM kullanılarak incelenmiştir.

Eş.3.22'deki kuvvet ifadesi $F = F_0 e^{i\omega_0 t}$ şeklinde tanımlanarak AAM genel ifadesine göre aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$L_X w(x, t) + L_T w(x, t) = \frac{F_0 e^{i\omega_0 t}}{\rho A} \delta(x - \vartheta t) \quad , \quad 0 < x < l \quad (3.112)$$

Burada F_0 harmonik kuvvetin genliğini, $\omega_0 = 2\pi f_0$ harmonik kuvvetin doğal frekansını, f_0 zorlama frekansını ve ϑ tren hızını ifade etmektedir. Hareket denklemindeki yer değişimi ifadesi Eş.3.73'de olduğu gibi homojen ve homojen olmayan denklem çözümü toplamı şeklinde yazılırsa, homojen terim çözümü Eş.3.91'deki gibi olur. Homojen olmayan terim çözümü için ise Eş.3.112 önce $Y(x, t)$ 'ye göre düzenlenir ve eşitliğin her iki tarafının L_T^{-1} operatörü kullanılarak iki kez integrali alınırsa,

$$Y(x, t) = L_T^{-1} \left[\frac{F_0 e^{i\omega_0 t}}{\rho A} \delta(x - \vartheta t) \right] - L_T^{-1} L_X Y(x, t) \quad (3.113)$$

elde edilir. Burada $Y(x, t)$ toplam serisi şeklinde ifade edilerek Eş.3.113'te yerine yazıldığında,

$$\sum_{s=0}^{\infty} Y_s(x, t) = L_T^{-1} \left[\frac{F_0 e^{i\omega_0 t}}{\rho A} \delta(x - \vartheta t) \right] - L_T^{-1} L_X \sum_{s=0}^{\infty} Y_s(x, t) \quad (3.114)$$

bulunur. Bu seri açılımı Eş.3.47'ye göre iki bölüme ayrılarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$Y_0(x, t) = L_T^{-1} \left[\frac{F_0 e^{i\omega_0 t}}{\rho A} \delta(x - \vartheta t) \right] \quad (3.115)$$

$$Y_s(x, t) = -L_T^{-1} L_X Y_{s-1}(x, t) = (-1)^s (L_T^{-1})^s L_X^s Y_0(x, t) \quad , \quad s \geq 1$$

Bu eşitlik Eş.3.114'te yerine yazılırsa,

$$\sum_{s=0}^{\infty} Y_s(x, t) = L_T^{-1} \left[\frac{F_0 e^{i\omega_0 t}}{\rho A} \delta(x - \vartheta t) \right] - L_T^{-1} L_X \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (L_T^{-1})^s L_X^s L_T^{-1} \left[\frac{F_0 e^{i\omega_0 t}}{\rho A} \delta(x - \vartheta t) \right] \quad (3.116)$$

elde edilir. Burada $\frac{F_0 e^{i\omega_0 t}}{\rho A} \delta(x - \vartheta t)$ ifadesinin normalizasyonu aşağıda verilmiştir.

$$\frac{F_0 e^{i\omega_0 t}}{\rho A} \delta(x - \vartheta t) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(t) W_n(x) \quad (3.117)$$

$$P_n(t) = \int_0^l \frac{F_0 e^{i\omega_0 t}}{\rho A} \delta(x - \vartheta t) W_n(x) dx \quad (3.118)$$

Eş.3.117, Eş.3.116'da yerine yazılıp, gerekli düzenleme ve sadeleştirmeler yapıldıktan sonra elde edilen denklemde Eş.3.87 yerine yazıldığında Eş.3.98 ile Eş.3.107 arasındaki çözümler elde edilir. Burada Eş.3.118 ifadesinde $W_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$ için Dirac Delta fonksiyonunun integrali alınır ve Eş.3.82'ye göre Eş.3.84 ile birlikte Eş.3.107'de yerlerine yazılırsa,

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{2}{l}} \frac{F_0 e^{i\omega_0 t}}{\omega_n \rho A} \int_0^t \sin\left(\frac{n\pi \vartheta \sigma}{l}\right) \sin((t - \sigma)\omega_n) d\sigma \right) \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (3.119)$$

bulunur. Bu denklemde $V = \frac{n\pi \vartheta}{l}$ dönüşümü yapılarak, gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2F_0 e^{i\omega_0 t}}{l\omega_n \rho A} \int_0^t \sin(V\sigma) \sin((t - \sigma)\omega_n) d\sigma \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (3.120)$$

elde edilir. Bu denklemdeki integral ifadesi I şeklinde gösterilmiş ve çözümü aşağıda verilmiştir.

$$I = \int_0^t \sin(\omega_n t) \sin(V\sigma) \cos(\omega_n \sigma) d\sigma - \int_0^t \cos(\omega_n t) \sin(V\sigma) \sin(\omega_n \sigma) d\sigma \quad (3.121)$$

$$\sin(V\sigma) \sin(\omega_n\sigma) = \frac{1}{2} [\cos(V - \omega_n)\sigma - \cos(V + \omega_n)\sigma] \quad (3.122)$$

$$\sin(V\sigma) \cos(\omega_n\sigma) = \frac{1}{2} [\sin(V - \omega_n)\sigma + \sin(V + \omega_n)\sigma] \quad (3.123)$$

Eş.3.122 ve Eş.3.123, Eş.3.121’de yerlerine yazılırsa,

$$I = \frac{\sin(\omega_n t)}{2} \int_0^t [\sin(V - \omega_n)\sigma + \sin(V + \omega_n)\sigma] d\sigma - \frac{\cos(\omega_n t)}{2} \int_0^t [\cos(V - \omega_n)\sigma - \cos(V + \omega_n)\sigma] d\sigma \quad (3.124)$$

elde edilir. Burada işlemleri kolaylaştırmak amacıyla $V - \omega_n = r$ ve $V + \omega_n = j$ dönüşümü yapılır ve integraller alınır,

$$\int_0^t \sin(r\sigma) d\sigma = -\frac{\cos(rt) - 1}{r} \quad \text{ve} \quad \int_0^t \sin(j\sigma) d\sigma = -\frac{\cos(jt) - 1}{j} \quad (3.125)$$

$$\int_0^t \cos(r\sigma) d\sigma = \frac{\sin(rt)}{r} \quad \text{ve} \quad \int_0^t \cos(j\sigma) d\sigma = \frac{\sin(jt)}{j} \quad (3.126)$$

elde edilir. Eş.3.125 ve Eş.3.126, Eş.3.124’te yerlerine yazılırsa,

$$I = -\frac{\sin(\omega_n t)}{2} \left[\frac{\cos(rt) - 1}{r} + \frac{\cos(jt) - 1}{j} \right] - \frac{\cos(\omega_n t)}{2} \left[\frac{\sin(rt)}{r} - \frac{\sin(jt)}{j} \right] \quad (3.127)$$

elde edilir. Bu eşitlikte gerekli matematiksel işlemler ve sadeleştirmeler yapılırsa,

$$I = \left[\frac{-\sin(\omega_n t) \cos(rt) j + \sin(\omega_n t) j - \sin(\omega_n t) \cos(jt) r + \sin(\omega_n t) r}{2rj} \right] + \left[\frac{-\sin(rt) \cos(\omega_n t) j + \sin(jt) \cos(\omega_n t) r}{2rj} \right] \quad (3.128)$$

$$\sin(\omega_n t) \cos(rt) = \frac{1}{2} [\sin(\omega_n - r)t + \sin(\omega_n + r)t] \quad (3.129)$$

$$\sin(\omega_n t) \cos(jt) = \frac{1}{2} [\sin(\omega_n - j)t + \sin(\omega_n + j)t] \quad (3.130)$$

$$\sin(rt) \cos(\omega_n t) = \frac{1}{2} [-\sin(\omega_n - r)t + \sin(\omega_n + r)t] \quad (3.131)$$

$$\sin(jt) \cos(\omega_n t) = \frac{1}{2} [-\sin(\omega_n - j)t + \sin(\omega_n + j)t] \quad (3.132)$$

elde edilir. Eş.3.129-Eş.3.132, Eş.3.128'de yerlerine yazılarak gerekli sadeleştirmeler yapıldığında ise,

$$I = \frac{-2\sin(\omega_n + r)tj + 2\sin(\omega_n t)j - 2\sin(\omega_n - j)tr + 2\sin(\omega_n t)r}{4rj} \quad (3.133)$$

elde edilir. Daha önce verilen $V - \omega_n = r$ ve $V + \omega_n = j$ dönüşüm ifadeleri Eş.3.133'te yerlerine yazılır ve tekrar düzenlenirse,

$$\begin{aligned} I &= \frac{-4\omega_n \sin(Vt) + 4V \sin(\omega_n t)}{4(V^2 - \omega_n^2)} = \frac{1}{(V^2 - \omega_n^2)} [V \sin(\omega_n t) - \omega_n \sin(Vt)] \\ &= -\frac{\omega_n}{(V^2 - \omega_n^2)} \left[\sin(Vt) - \frac{V}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \right] \end{aligned} \quad (3.134)$$

elde edilir. Bu ifade Eş.3.120'de yerine yazılarak düzenleme yapılırsa,

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2F_0 e^{i\omega_0 t}}{l\omega_n \rho A} \left(-\frac{\omega_n}{(V^2 - \omega_n^2)} \left[\sin(Vt) - \frac{V}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \right] \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (3.135)$$

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2F_0 e^{i\omega_0 t}}{l\rho A(\omega_n^2 - V^2)} \left[\sin(Vt) - \frac{V}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.136)$$

bulunur. Burada daha önce verilen $V = \frac{n\pi\vartheta}{l}$ kabulü ve Eş.3.20 ifadesi yerlerine yazılıp gerekli sadeleştirme ve düzenlemeler yapıldığında ise traversli ray yapısından dolayı harmonik kuvvet şeklinde modellenen YHT geçişine bağlı demiryolu köprüsü modal yer değişimi ifadesi,

$$w(x, t) = \frac{2F_0 l^3}{\pi^4 EI} \sum_{n=1,2,\dots}^N \frac{e^{i\omega_0 t}}{n^2 \left(n^2 - \frac{\rho A l^2 \vartheta^2}{\pi^2 EI} \right)} \left(\sin\left(\frac{n\pi}{l} \vartheta t\right) - \frac{n\pi \vartheta}{l\omega_n} \sin(\omega_n t) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (3.137)$$

şeklinde elde edilir.

3.4. Sönümsüz EB Kirişinin DAAM ile Çözümü

Bu bölümde boyutsuz parametreler kullanılarak, kuvvetin farklı uygulama biçimleri için sönümsüz EB kirişi hareket denklemleri yazılarak, DAAM ile kiriş modal yerdeğişimi analitik ifadeleri elde edilmiştir.

3.4.1. Orta noktasına kuvvet uygulanan EB kirişinin DAAM ile çözümü

Şekil 3.3'teki köprü modelinde Eş.3.70'deki hareket denklemi, Eş.3.23'te verilen boyutsuz parametreler dikkate alınarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$k_f^2 \frac{\partial^4 W(X, T)}{\partial X^4} + \frac{\partial^2 W(X, T)}{\partial T^2} = F_z \delta \left(X - \frac{1}{2} \right) \quad , \quad 0 < X < 1 \quad (3.138)$$

Burada, Eş.3.27'deki boyutsuz formda yer değişimi fonksiyonu gerekli türevler alınarak Eş.3.138'de yerlerine yazılır ve bulunan eşitliğin her iki tarafı $W_n(X)$ ile çarpılıp 0 ile 1 aralığında X 'e göre integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} k_f^2 \sum_{n=1}^N \left[q_n(T) \int_0^1 \frac{d^4 W_n(X)}{dX^4} W_n(X) dX \right] + \sum_{n=1}^N \left[\frac{d^2 q_n(T)}{dT^2} \int_0^1 W_n(X) W_n(X) dX \right] \\ = \int_0^1 F_z \delta \left(X - \frac{1}{2} \right) W_n(X) dX \quad , \quad 0 < X < 1 \end{aligned} \quad (3.139)$$

elde edilir. Eş.3.29 ve $n=s$ için Eş. 3.30, Eş.3.139'da yerlerine yazılır ve Dirac Delta fonksiyonunun integrali alınırsa, $\beta_n = n\pi$ için,

$$\frac{d^2 q_n(T)}{dT^2} + k_f^2 \beta_n^4 q_n(T) = 2F_z \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right) \quad , \quad n = 1, 3, 5, \dots \infty \quad (3.140)$$

bulunur. Matematiksel işlemleri kolaylaştırmak amacıyla $\mu^2 = k_f^2 \beta_n^4$ kabulü yapıp Eş.3.140'ta yerine yazılırsa,

$$\frac{d^2 q_n(T)}{dT^2} + \mu^2 q_n(T) = 2F_z (-1)^{\frac{n-1}{2}} \quad , \quad n = 1, 3, 5, \dots \infty \quad (3.141)$$

elde edilir. Bu ikinci mertebe diferansiyel denklem Eş.3.53'te verilen DAAM genel formatında yazılacak olursa $P(T) = 0$ olur.

Buna göre Eş.3.55 yazıldığında L diferansiyel operatörünün tersi,

$$L^{-1}(\cdot) = \int_0^T \int_0^T (\cdot) dT dT \quad (3.142)$$

olur. Eş.3.41'e göre AAM genel denklemi aşağıda verilmiştir.

$$Lq_n(T) + Rq_n(T) + N(q_n(T)) = g_n(T) \quad (3.143)$$

Eş.3.141, bu genel terim ifadeleriyle eşleştirildiğinde,

$$Lq_n(T) = \frac{d^2 q_n(T)}{dT^2}, \quad Rq_n(T) = \mu^2 q_n(T), \quad N(q_n(T)) = 0, \quad g_n(T) = 2F_z(-1)^{\frac{n-1}{2}} \quad (3.144)$$

ve Eş.3.45'e göre tersi alınarak, toplam serisi şeklinde ifade edildiğinde,

$$\sum_{k=0}^{\infty} q_k(T) = f_0 + f_1 T - L^{-1} \left[\mu^2 q_n(T) - 2F_z(-1)^{\frac{n-1}{2}} \right] \quad (3.145)$$

elde edilir. Bu seri açılımı Eş.3.47'ye göre iki parçaya bölünerek aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$q_0(T) = f_0 + f_1 T + L^{-1} \left[2F_z(-1)^{\frac{n-1}{2}} \right] \quad (3.146)$$

$$q_{k+1}(T) = -L^{-1}[\mu^2 q_k(T)] \quad (3.147)$$

Burada öncelikle serinin sıfıncı teriminin bulunması gerekir. Bunun için de Eş.3.26'daki başlangıç şartları tekrar düzenlenir,

$$W(X, 0) = q^{(0)}(0) = f_0 = 0, \quad \left. \frac{dW(X, T)}{dT} \right|_{T=0} = q^{(1)}(0) = f_1 = 0 \quad (3.148)$$

ve Eş.3.146'da yerlerine yazılarak, Eş.3.142'ye göre iki kez integrali alınırsa serinin sıfıncı terimi,

$$q_0(T) = L^{-1} \left[2F_z(-1)^{\frac{n-1}{2}} \right] = \int_0^T \int_0^T \left(2F_z(-1)^{\frac{n-1}{2}} \right) dT dT = \left(2F_z(-1)^{\frac{n-1}{2}} \right) \frac{T^2}{2} \quad (3.149)$$

elde edilir.

Eş.3.149 $k=0$ için Eş.3.147'de yerine yazılır ve $k=1,2,3...$ için benzer işlemler tekrarlanırsa,

$$\begin{aligned} q_1(T) &= -L^{-1}[\mu^2 q_0(T)] = \int_0^T \int_0^T \left(\mu^2 \left(2F_z(-1)^{\frac{n-1}{2}} \right) \frac{T^2}{2} \right) dT dT \\ &= -L^{-1} \left[\mu^2 \left(2F_z(-1)^{\frac{n-1}{2}} \right) \frac{T^2}{2} \right] = - \left(\mu^2 \left(2F_z(-1)^{\frac{n-1}{2}} \right) \right) \frac{T^4}{4!} \end{aligned} \quad (3.150)$$

$$\begin{aligned} q_2(T) &= -L^{-1}[\mu^2 q_1(T)] = - \int_0^T \int_0^T \left(\mu^4 \left(2F_z(-1)^{\frac{n-1}{2}} \right) \frac{T^4}{4!} \right) dT dT \\ &= -L^{-1} \left[\mu^2 \left(-\mu^2 \left(2F_z(-1)^{\frac{n-1}{2}} \right) \right) \frac{T^4}{4!} \right] = \left(\mu^4 \left(2F_z(-1)^{\frac{n-1}{2}} \right) \right) \frac{T^6}{6!} \end{aligned} \quad (3.151)$$

⋮

$$q_K(T) = (-1)^{k+1} \left(\mu^{2(k+1)} \left(2F_z(-1)^{\frac{n-1}{2}} \right) \right) \frac{T^{2(k+2)}}{[2(k+2)]!} \quad (3.152)$$

elde edilir. Bu ifadelerin tamamı K adet terim için seri açılımında yerlerine yazılırsa,

$$\sum_{k=0}^K q_k(T) = q_0(T) + q_1(T) + q_2(T) + \dots + q_K(T) \quad (3.153)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^K q_k(T) &= \left(2F_z(-1)^{\frac{n-1}{2}} \right) \frac{T^2}{2} - \left(\mu^2 \left(2F_z(-1)^{\frac{n-1}{2}} \right) \right) \frac{T^4}{4!} + \left(\mu^4 \left(2F_z(-1)^{\frac{n-1}{2}} \right) \right) \frac{T^6}{6!} \\ &\quad - \left(\mu^6 \left(2F_z(-1)^{\frac{n-1}{2}} \right) \right) \frac{T^8}{8!} + \left(\mu^8 \left(2F_z(-1)^{\frac{n-1}{2}} \right) \right) \frac{T^{10}}{10!} + \dots \end{aligned} \quad (3.154)$$

ve gerekli sadeleştirme ve düzenlemeler yapılsa,

$$q_n(T) = \left(2F_z(-1)^{\frac{n-1}{2}} \right) \frac{1}{\mu^2} \left[\frac{(\mu T)^2}{2!} - \frac{(\mu T)^4}{4!} + \frac{(\mu T)^6}{6!} - \frac{(\mu T)^8}{8!} + \frac{(\mu T)^{10}}{10!} + \dots \right] \quad (3.155)$$

elde edilir. Bu eşitlikte $\cos(\mu T) = 1 - \frac{(\mu T)^2}{2!} + \frac{(\mu T)^4}{4!} - \frac{(\mu T)^6}{6!} \dots$ Taylor serisi açılımı ve daha önce verilen $\mu^2 = k_f^2 \beta_n^4$ ifadesi yerlerine yazılırsa,

$$q_n(T) = \frac{2F_z}{k_f^2 \beta_n^4} (-1)^{\frac{n-1}{2}} [1 - \cos(k_f \beta_n^2 T)] \quad (3.156)$$

bulunur. Eş.3.29 ve Eş.3.156, $\beta_n = n\pi$ için Eş.3.27'de yerlerine yazılarak, gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$W(X, T) = \sum_{n=1,3,5}^N \sin(n\pi X) \left[\frac{2F_z}{k_f^2 \beta_n^4} (-1)^{\frac{n-1}{2}} (1 - \cos(k_f \beta_n^2 T)) \right] \quad (3.157)$$

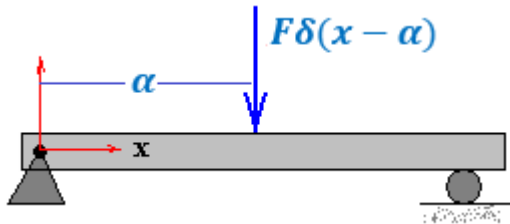
elde edilir. Eş.3.23'teki boyutsuz ifadeler ve Eş.3.20'deki doğal frekans ifadesi Eş.3.157'de yerine yazılarak, sadeleştirme ve düzenlemeler yapılırsa orta noktasına kuvvet uygulanan kiriş modal yerdeğiştirmesi analitik çözümü,

$$w(x, t) = \sum_{n=1,3,5}^N \left(\frac{2Fl^3}{(n\pi)^4 EI} (-1)^{\frac{n-1}{2}} [1 - \cos(\omega_n t)] \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (3.158)$$

şeklinde elde edilir.

3.4.2. Başlangıç noktasına α uzaklıkta kuvvet uygulanan EB kirişinin DAAM ile çözümü

Başlangıç noktasından α uzaklıkta bir F kuvveti uygulanan sönümsüz, düzgün kesitli, tek kirişli köprü matematiksel modeli Şekil 3.4'te verilmiştir.



Şekil 3.4. Başlangıç noktasından α mesafede F kuvveti uygulanan tek kirişli köprü modeli

Bu modelin hareket denklemi, Eş.3.23'teki boyutsuz parametreler dikkate alınarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$k_f^2 \frac{\partial^4 W(X, T)}{\partial X^4} + \frac{\partial^2 W(X, T)}{\partial T^2} = F_z \delta\left(X - \frac{\alpha}{l}\right) \quad , \quad 0 < X < 1 \quad (3.159)$$

Eş.3.27 gerekli türevler alınarak Eş.3.159'da yerlerine yazılır ve bulunan eşitliğin her iki tarafı $W_n(X)$ ile çarpılıp 0 ile 1 aralığında X 'e göre integrali alınırsa,

$$k_f^2 \sum_{n=1}^N \left[q_n(T) \int_0^1 \frac{d^4 W_n(X)}{dX^4} W_n(X) dX \right] + \sum_{n=1}^N \left[\frac{d^2 q_n(T)}{dT^2} \int_0^1 W_n(X) W_n(X) dX \right] \\ = \int_0^1 F_z \delta \left(X - \frac{\alpha}{l} \right) W_n(X) dX \quad , \quad 0 < X < 1 \quad (3.160)$$

elde edilir. Eş.3.29 ve $n=s$ için Eş. 3.30, Eş.3.160'ta yerlerine yazılır ve Dirac Delta fonksiyonunun integrali alınırsa $\beta_n = n\pi$ için,

$$\frac{d^2 q_n(T)}{dT^2} + k_f^2 \beta_n^4 q_n(T) = 2F_z \sin \left(\frac{n\pi\alpha}{l} \right) \quad , \quad n = 1,3,5..\infty \quad (3.161)$$

elde edilir. Bu denklemin çözümünde matematiksel işlemleri kolaylaştırmak amacıyla $\mu^2 = k_f^2 \beta_n^4$ kabulü yapılır ve yerine yazılırsa,

$$\frac{d^2 q_n(T)}{dT^2} + \mu^2 q_n(T) = 2F_z \sin \left(\frac{n\pi\alpha}{l} \right) \quad , \quad n = 1,3,5..\infty \quad (3.162)$$

olur. Bu ikinci mertebe diferansiyel denklem Eş.3.53'e göre yazılırsa $P(T)=0$ olur. Eş.3.162, Eş. 3.143'teki AAM genel terim ifadeleriyle eşleştirildiğinde,

$$Lq_n(T) = \frac{d^2 q_n(T)}{dT^2}, Rq_n(T) = \mu^2 q_n(T), N(q_n(T)) = 0, g_n(T) = 2F_z \sin \left(\frac{n\pi\alpha}{l} \right) \quad (3.163)$$

ve Eş.3.55'e göre tersi alınarak, toplam serisi şeklinde ifade edildiğinde,

$$\sum_{k=0}^{\infty} q_k(T) = f_0 + f_1 T - L^{-1} \left[\mu^2 q_n(T) - 2F_z \sin \left(\frac{n\pi\alpha}{l} \right) \right] \quad (3.164)$$

elde edilir. Bu seri açılımı Eş.3.47'ye göre iki parçaya bölünerek aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$q_0(T) = f_0 + f_1 T + L^{-1} \left[2F_z \sin \left(\frac{n\pi\alpha}{l} \right) \right] \quad (3.165)$$

$$q_{k+1}(T) = -L^{-1} [\mu^2 q_k(T)] \quad (3.166)$$

Burada öncelikle serinin sıfıncı teriminin bulunması gerekir. Bunun için Eş.3.148'de verilen başlangıç şartları Eş.3.165'te yerlerine yazılarak, Eş.3.142'ye göre iki kez integrali alınırsa serinin sıfıncı terimi,

$$q_0(T) = \int_0^T \int_0^T \left[2F_z \sin\left(\frac{n\pi\alpha}{l}\right) \right] dT dT = \left[2F_z \sin\left(\frac{n\pi\alpha}{l}\right) \right] \frac{T^2}{2} \quad (3.167)$$

elde edilir. Bu ifade $k=0$ için Eş.3.166'da yerine yazılır ve $k=1,2,3...$ için benzer işlemler tekrarlanırsa,

$$\begin{aligned} q_1(T) &= -L^{-1}[\mu^2 q_0(T)] = \int_0^T \int_0^T \left(\mu^2 \left[2F_z \sin\left(\frac{n\pi\alpha}{l}\right) \right] \frac{T^2}{2} \right) dT dT \\ &= -L^{-1} \left[\mu^2 \left[2F_z \sin\left(\frac{n\pi\alpha}{l}\right) \right] \frac{T^2}{2} \right] = - \left(\mu^2 \left[2F_z \sin\left(\frac{n\pi\alpha}{l}\right) \right] \right) \frac{T^4}{4!} \end{aligned} \quad (3.168)$$

$$\begin{aligned} q_2(T) &= -L^{-1}[\mu^2 q_1(T)] = - \int_0^T \int_0^T \left(\mu^4 \left[2F_z \sin\left(\frac{n\pi\alpha}{l}\right) \right] \frac{T^4}{4!} \right) dT dT \\ &= \left(\mu^4 \left[2F_z \sin\left(\frac{n\pi\alpha}{l}\right) \right] \right) \frac{T^6}{6!} \end{aligned} \quad (3.169)$$

⋮

$$q_K(T) = (-1)^{k+1} \left(\mu^{2(k+1)} \left[2F_z \sin\left(\frac{n\pi\alpha}{l}\right) \right] \right) \frac{T^{2(k+2)}}{[2(k+2)]!} \quad (3.170)$$

elde edilir. Bu ifadelerin tamamı K adet terim için Eş. 3.153'te yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^K q_k(T) &= \left[2F_z \sin\left(\frac{n\pi\alpha}{l}\right) \right] \frac{T^2}{2} - \left(\mu^2 \left[2F_z \sin\left(\frac{n\pi\alpha}{l}\right) \right] \right) \frac{T^4}{4!} + \left(\mu^4 \left[2F_z \sin\left(\frac{n\pi\alpha}{l}\right) \right] \right) \frac{T^6}{6!} \\ &\quad - \left(\mu^6 \left[2F_z \sin\left(\frac{n\pi\alpha}{l}\right) \right] \right) \frac{T^8}{8!} + \left(\mu^8 \left[2F_z \sin\left(\frac{n\pi\alpha}{l}\right) \right] \right) \frac{T^{10}}{10!} + \dots \end{aligned} \quad (3.171)$$

ve gerekli sadeleştirme ve düzenlemeler yapılsa,

$$q_n(T) = 2F_z \sin\left(\frac{n\pi\alpha}{l}\right) \frac{1}{\mu^2} \left[\frac{(\mu T)^2}{2!} - \frac{(\mu T)^4}{4!} + \frac{(\mu T)^6}{6!} - \frac{(\mu T)^8}{8!} + \frac{(\mu T)^{10}}{10!} + \dots \right] \quad (3.172)$$

elde edilir. Bu eşitlikte $\cos(\mu T) = 1 - \frac{(\mu T)^2}{2!} + \frac{(\mu T)^4}{4!} - \frac{(\mu T)^6}{6!} \dots$ Taylor serisi açılımı ve daha önce verilen $\mu^2 = k_f^2 \beta_n^4$ ifadesi yerlerine yazılırsa,

$$q_n(T) = \frac{2F_z}{k_f^2 \beta_n^4} \sin\left(\frac{n\pi\alpha}{l}\right) [1 - \cos(k_f \beta_n^2 T)] \quad (3.173)$$

elde edilir. Eş.3.29 ve Eş.3.173, $\beta_n = n\pi$ için Eş.3.27’de yerlerine yazılarak gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$W(X, T) = \sum_{n=1,3,5}^N \sin(n\pi X) \left[\frac{2F_z}{k_f^2 \beta_n^4} \sin\left(\frac{n\pi\alpha}{l}\right) (1 - \cos(k_f \beta_n^2 T)) \right] \quad (3.174)$$

bulunur. Eş.3.23’teki boyutsuz ifadeler ve Eş.3.20’deki doğal frekans ifadesi Eş.3.174’te yerine yazılıp, sadeleştirme ve düzenlemeler yapılırsa başlangıç noktasına α uzaklıkta kuvvet uygulanan kiriş modal yerdeğişimi analitik çözümü,

$$w(x, t) = \sum_{n=1,3,5}^N \left(\frac{2Fl^3}{(n\pi)^4 EI} \sin\left(\frac{n\pi\alpha}{l}\right) [1 - \cos(\omega_n t)] \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (3.175)$$

şeklinde elde edilir [98].

3.4.3. Üzerinden hareketli kuvvet geçen EB kirişinin DAAM ile çözümü

Şekil 3.2’deki YHT köprüsünün Eş.3.32’deki indirgenmiş hareket denklemi Eş.3.143 genel ifadesiyle eşleştirilirse,

$$Lq_n(T) = \frac{d^2 q_n(T)}{dT^2}, Rq_n(T) = \mu^2 q_n(T), N(q_n(T)) = 0, g_n(T) = 2F_z \sin(\theta T) \quad (3.176)$$

ve Eş.3.55’e göre tersi alınarak, toplam serisi şeklinde ifade edilirse,

$$\sum_{k=0}^{\infty} q_k(T) = f_0 + f_1 T - L^{-1}[\mu^2 q_n(T) - 2F_z \sin(\theta T)] \quad (3.177)$$

elde edilir. Bu seri açılımı Eş.3.47’ye göre iki parçaya bölünerek aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$q_0(T) = f_0 + f_1 T + L^{-1}[2F_z \sin(\theta T)] \quad (3.178)$$

$$q_{k+1}(T) = -L^{-1}[\mu^2 q_k(T)] \quad (3.179)$$

Eş.3.148, Eş.3.178’de yerlerine yazılarak, Eş.3.142’ye göre iki kez integrali alınırsa serinin sıfıncı terimi,

$$q_0(T) = L^{-1}[2F_z \sin(\theta T)] = \int_0^T \int_0^T (2F_z \sin(\theta T)) dT dT = 2F_z \left(\frac{T}{\theta} - \frac{\sin(\theta T)}{\theta^2} \right) \quad (3.180)$$

elde edilir. Bu ifade $k=0$ için Eş.3.179'da yerine yazılır ve $k=1,2,3\dots$ için benzer işlemler tekrarlanırsa,

$$\begin{aligned} q_1(T) &= -L^{-1}[\mu^2 q_0(T)] = \int_0^T \int_0^T \mu^2 2F_z \left(\frac{T}{\theta} - \frac{\sin(\theta T)}{\theta^2} \right) dT dT \\ &= -2F_z \mu^2 \left[\frac{T^3}{6\theta} - \frac{T}{\theta^3} + \frac{\sin(\theta T)}{\theta^4} \right] \end{aligned} \quad (3.181)$$

$$\begin{aligned} q_2(T) &= -L^{-1}[\mu^2 q_1(T)] = - \int_0^T \int_0^T \mu^2 \left(-2F_z \mu^2 \left[\frac{T^3}{6\theta} - \frac{T}{\theta^3} + \frac{\sin(\theta T)}{\theta^4} \right] \right) dT dT \\ &= 2F_z \mu^4 \left[\frac{T^5}{5! \theta} - \frac{T^3}{3! \theta^3} + \frac{T}{\theta^5} - \frac{\sin(\theta T)}{\theta^6} \right] \end{aligned} \quad (3.182)$$

$$q_3(T) = -2F_z \mu^6 \left[\frac{T^7}{7! \theta} - \frac{T^5}{5! \theta^3} + \frac{T^3}{3! \theta^5} + \frac{T}{\theta^7} + \frac{\sin(\theta T)}{\theta^8} \right] \quad (3.183)$$

⋮

elde edilir. Bu ifadelerin tamamı K adet terim için Eş.3.153'te yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^K q_k(T) &= 2F_z \left(\frac{T}{\theta} - \frac{\sin(\theta T)}{\theta^2} \right) - 2F_z \mu^2 \left[\frac{T^3}{3! \theta} - \frac{T}{\theta^3} + \frac{\sin(\theta T)}{\theta^4} \right] \\ &\quad + 2F_z \mu^4 \left[\frac{T^5}{5! \theta} - \frac{T^3}{3! \theta^3} + \frac{T}{\theta^5} - \frac{\sin(\theta T)}{\theta^6} \right] \\ &\quad - 2F_z \mu^6 \left[\frac{T^7}{7! \theta} - \frac{T^5}{5! \theta^3} + \frac{T^3}{3! \theta^5} + \frac{T}{\theta^7} + \frac{\sin(\theta T)}{\theta^8} \right] + \dots \end{aligned} \quad (3.184)$$

ve gerekli sadeleştirme ve düzenlemeler yapılsa,

$$\begin{aligned} q_n(T) &= 2F_z \left[\left(\mu T - \frac{(\mu T)^3}{3!} + \frac{(\mu T)^5}{5!} - \frac{(\mu T)^7}{7!} + \dots \right) \frac{1}{\mu \theta} \left(1 + \frac{\mu^2}{\theta^2} + \frac{\mu^4}{\theta^4} + \frac{\mu^6}{\theta^6} \dots \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin(\theta T)}{\theta^2} \left(1 + \frac{\mu^2}{\theta^2} + \frac{\mu^4}{\theta^4} + \frac{\mu^6}{\theta^6} \dots \right) \right] \end{aligned} \quad (3.185)$$

elde edilir. Burada $\sin(\mu T) = \mu T - \frac{(\mu T)^3}{3!} + \frac{(\mu T)^5}{5!} - \frac{(\mu T)^7}{7!} + \dots$ Sin Taylor seri açılımı ve $\left[1 - \left(\frac{\mu}{\theta} \right)^2 \right]^{-1} = 1 + \frac{\mu^2}{\theta^2} + \frac{\mu^4}{\theta^4} + \frac{\mu^6}{\theta^6} \dots$ Binom açılımı Eş.3.185'te yerlerine yazılarak gerekli

sadeleştirmeler yapılırsa,

$$q_n(T) = 2F_z \left[\frac{\theta^2}{(\theta^2 - \mu^2)} \frac{1}{\theta^2} \left(\frac{\theta \sin(\mu T)}{\mu} - \sin(\theta T) \right) \right] \\ = \frac{2F_z}{(\theta^2 - \mu^2)} \left(\frac{\theta \sin(\mu T)}{\mu} - \sin(\theta T) \right) \quad (3.186)$$

elde edilir. Eş.3.29 ve Eş.3.186, daha önce verilen $\mu^2 = k_f^2 \beta_n^4$ ve $\theta = \beta_n V$ ifadeleri dikkate alınarak Eş.3.27’de yerlerine yazılırsa,

$$W(X, T) = \sum_{n=1,2,3}^N \sin(\beta_n X) \left[\frac{2F_z}{\beta_n^2 (V^2 - k_f^2 \beta_n^2)} \left(\frac{\beta_n V \sin(k_f \beta_n^2 T)}{k_f \beta_n^2} - \sin(\beta_n V T) \right) \right] \quad (3.187)$$

elde edilir. Eş.3.20, Eş.3.23 ve $\beta_n = n\pi$ ifadesi Eş.3.187’de yerine yazılarak, sadeleştirme ve düzenlemeler yapıldığında ise üzerinden YHT geçen köprünün modal yerdeğişimi analitik ifadesi,

$$w(x, t) = \sum_{n=1,2,\dots}^N \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \left[\frac{2Fl^3}{EI\pi^4 \left(\frac{\vartheta^2 \rho A (n\pi l)^2}{EI\pi^4} - n^4 \right)} \left(\frac{n\pi \vartheta}{l\omega_n} \sin(\omega_n t) - \sin\left(n\pi \vartheta \frac{t}{l}\right) \right) \right] \quad (3.188)$$

şeklinde elde edilir.

3.5. Sönümsüz EB Kirişinin GAAM ile Çözümü

Bu bölümde sönümsüz EB kirişi hareket denklemi GAAM uygulanarak çözülmüş ve modal yerdeğişimi analitik ifadesi elde edilmiştir.

3.5.1. Üzerinden hareketli kuvvet geçen EB kirişinin GAAM ile çözümü

Şekil 3.2’deki YHT köprüsünün Eş.3.22’deki hareket denkleminde Eş.3.4’teki modal yerdeğişimi ifadesi gerekli türevler alınarak yerlerine yazılırsa,

$$EI \sum_{n=1}^N q_n(t) \frac{d^4 W_n(x)}{dx^4} + \rho A \sum_{n=1}^N \frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} W_n(x) = F \delta(x - \vartheta t) \quad , \quad 0 < x < l \quad (3.189)$$

ve Eş.3.6 düzenleme yapılarak Eş.3.189’da yerine yazılırsa,

$$\frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} W_n(x) + \omega_n^2 W_n(x) q_n(t) = \frac{F}{\rho A} \delta(x - \vartheta t) \quad (3.190)$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafı $W_n(x)$ ile çarpılıp 0 ile l aralığında x 'e göre integrali alındığında ise,

$$\sum_{n=1}^N \left[\frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} + \omega_n^2 q_n(t) \right] \int_0^l W_n(x) W_n(x) dx = \int_0^l \frac{F}{\rho A} \delta(x - \vartheta t) W_n(x) dx \quad (3.191)$$

elde edilir. Eş.3.21 ve basit mesnetli kiriş için $\int_0^l W_n(x) W_n(x) dx = \frac{l}{2}$ ifadesi Eş. 3.191'de yerlerine yazılır ve Dirac Delta fonksiyonunun integrali alınır,

$$\frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} + \omega_n^2 q_n(t) = \frac{2F}{l\rho A} \sin\left(\frac{n\pi}{l} \vartheta t\right) \quad , \quad n = 1, 2, 3 \dots \infty \quad (3.192)$$

elde edilir. Matematiksel işlemleri kolaylaştırmak amacıyla $\varepsilon = \frac{n\pi\vartheta}{l}$ ve $F_z = \frac{2F}{l\rho A}$ kabulü yapılır ve Eş.3.192'de yerlerine yazılırsa,

$$\frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} + \omega_n^2 q_n(t) = F_z \sin(\varepsilon t) \quad , \quad n = 1, 2, 3 \dots \infty \quad (3.193)$$

olur. Eş.3.56 genel terim ifadeleriyle Eş.3.193 eşleştirildiğinde,

$$Lq_n(t) = \frac{d^2 q_n(t)}{dt^2}, \quad Rq_n(t) = \omega_n^2 q_n(t), \quad N(q_n(t)) = 0, \quad g_n(t) = F_z \sin(\varepsilon t) \quad (3.194)$$

ve zamana bağlı türevin mertebesi iki için tersi alınıp Eş.3.65'te toplam serisi şeklinde ifade edildiğinde,

$$\sum_{k=0}^{\infty} q_k(t) = f_0 + f_1 t - L^{-1} \left[R \left(\sum_{k=0}^{\infty} q_k(t) \right) - \sum_{k=0}^{\infty} g_k(t) \right] \quad (3.195)$$

elde edilir. Bu seri açılımı Eş.3.66 ve Eş.3.67'ye göre iki parçaya bölünerek aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$q_0(t) = f_0 + f_1 t \quad (3.196)$$

$$q_{k+1}(t) = -L^{-1}[R(q_k(t)) - g_k(t)] \quad , \quad k \geq 0 \quad (3.197)$$

Eş.3.69, $n=k$ ve türevin mertebesi $m=2$ için yazılacak olursa;

$$g_k = \frac{1}{2k!} \left[\frac{d^{2k}}{dt^{2k}} g(t) \right]_{t=0} t^{2k} + \frac{1}{(2k+1)!} \left[\frac{d^{(2k+1)}}{dt^{(2k+1)}} g(t) \right]_{t=0} t^{2k+1} \quad k = 0,1,2 \dots \quad (3.198)$$

$$g_0 = \left[\frac{d}{dt} g(t) \right]_{t=0} t = t \frac{d}{dt} g(0) = t \frac{d}{dt} (F_z \sin(\varepsilon t)) = \varepsilon F_z t \cos(\varepsilon 0) = F_z \varepsilon t \quad (3.199)$$

$$g_1 = \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2}{dt^2} g(t) \right]_{t=0} t^2 + \frac{1}{3!} \left[\frac{d^3}{dt^3} g(t) \right]_{t=0} t^3 = -F_z \frac{(\varepsilon t)^3}{3!} \quad (3.200)$$

$$g_2 = \frac{1}{4!} \left[\frac{d^4}{dt^4} g(t) \right]_{t=0} t^4 + \frac{1}{5!} \left[\frac{d^5}{dt^5} g(t) \right]_{t=0} t^5 = F_z \frac{(\varepsilon t)^5}{5!} \quad (3.201)$$

$$g_3 = \frac{1}{6!} \left[\frac{d^6}{dt^6} g(t) \right]_{t=0} t^6 + \frac{1}{7!} \left[\frac{d^7}{dt^7} g(t) \right]_{t=0} t^7 = -F_z \frac{(\varepsilon t)^7}{7!} \quad (3.202)$$

:

elde edilir. Öncelikle Eş.3.3'teki başlangıç şartları Eş.3.57 ve Eş.3.58'e göre tekrar düzenlenir,

$$w(x, 0) = f_0 = 0 \quad , \quad \frac{dw(x, 0)}{dt} = f_1 = 0 \quad (3.203)$$

ve Eş.3.196'da yerlerine yazılıp serinin sıfırıncı terimi bulunduğundan sonra $k=0$ için Eş.3.199 ile birlikte Eş.3.197'de yerine yazılarak $k=1,2,3\dots$ için benzer işlemler tekrarlanırsa,

$$q_0(t) = f_0 + f_1 t = 0 \quad (3.204)$$

$$q_1(t) = -L^{-1}[\omega_n^2(q_0) - F_z \varepsilon t] = -\int_0^t \int_0^t (\omega_n^2(q_0) - F_z \varepsilon t) dt dt = F_z \varepsilon \frac{t^3}{3!} \quad (3.205)$$

$$q_2(t) = -L^{-1}(R(q_1) - g_1) = -L^{-1} \left(\omega_n^2 F_z \varepsilon \frac{t^3}{3!} + F_z \frac{(\varepsilon t)^3}{3!} \right) = -F_z (\omega_n^2 \varepsilon + \varepsilon^3) \frac{t^5}{5!} \quad (3.206)$$

$$q_3(t) = -L^{-1}(R(q_2) - g_2) = F_z(\omega_n^4 \varepsilon + \omega_n^2 \varepsilon^3 + \varepsilon^5) \frac{t^7}{7!} \quad (3.207)$$

$$q_4(t) = -L^{-1}(R(q_3) - g_3) = -F_z(\omega_n^6 \varepsilon + \omega_n^4 \varepsilon^3 + \omega_n^2 \varepsilon^5 + \varepsilon^7) \frac{t^9}{9!} \quad (3.208)$$

⋮

elde edilir. Bu ifadelerin tamamı K adet terim için seri açılımında yerlerine yazılırsa,

$$\sum_{k=0}^K q_k(t) = F_z \left[\varepsilon \frac{t^3}{3!} - \omega_n^2 \varepsilon \frac{t^5}{5!} - \varepsilon^3 \frac{t^5}{5!} + \omega_n^4 \varepsilon \frac{t^7}{7!} + \omega_n^2 \varepsilon^3 \frac{t^7}{7!} + \varepsilon^5 \frac{t^7}{7!} - \omega_n^6 \varepsilon \frac{t^9}{9!} \right. \\ \left. - \omega_n^4 \varepsilon^3 \frac{t^9}{9!} - \omega_n^2 \varepsilon^5 \frac{t^9}{9!} - \varepsilon^7 \frac{t^9}{9!} \dots \right] \quad (3.209)$$

olur. Bu eşitlikte gerekli sadeleştirme ve düzenlemeler yapıldığında,

$$q_n(t) = F_z \left[\frac{\varepsilon}{\omega_n^3} \left(\frac{(\omega_n t)^3}{3!} - \frac{(\omega_n t)^5}{5!} + \frac{(\omega_n t)^7}{7!} \dots \right) + \frac{\varepsilon^3}{\omega_n^5} \left(-\frac{(\omega_n t)^5}{5!} + \frac{(\omega_n t)^7}{7!} \dots \right) \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon^5}{\omega_n^7} \left(\frac{(\omega_n t)^7}{7!} - \frac{(\omega_n t)^9}{9!} + \frac{(\omega_n t)^{11}}{11!} \dots \right) \dots \right] \quad (3.210)$$

elde edilir. Burada $\sin(\omega_n t) = \omega_n t - \frac{(\omega_n t)^3}{3!} + \frac{(\omega_n t)^5}{5!} - \frac{(\omega_n t)^7}{7!} \dots$ Taylor seri açılımı Eş.3.210'da yerlerine yazılır,

$$q_n(t) = F_z \left[\frac{\varepsilon}{\omega_n^3} \left(\omega_n t - \sin(\omega_n t) \right) + \frac{\varepsilon^3}{\omega_n^5} \left(\omega_n t - \frac{(\omega_n t)^3}{3!} - \sin(\omega_n t) \right) \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon^5}{\omega_n^7} \left(\omega_n t - \frac{(\omega_n t)^3}{3!} + \frac{(\omega_n t)^5}{5!} - \sin(\omega_n t) \right) \dots \right] \quad (3.211)$$

ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$q_n(t) = \frac{F_z}{\omega_n^2} \left[\left(\varepsilon t - \frac{(\varepsilon t)^3}{3!} + \frac{(\varepsilon t)^5}{5!} - \frac{(\varepsilon t)^7}{7!} + \dots - \sin(\omega_n t) \frac{\varepsilon}{\omega_n} \right) \left\{ 1 + \left(\frac{\varepsilon}{\omega_n} \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{\varepsilon}{\omega_n} \right)^4 \dots \right\} \right] \quad (3.212)$$

elde edilir. Burada $\sin(\varepsilon t) = \varepsilon t - \frac{(\varepsilon t)^3}{3!} + \frac{(\varepsilon t)^5}{5!} - \frac{(\varepsilon t)^7}{7!} + \frac{(\varepsilon t)^9}{9!} \dots$ Sin Taylor seri açılımı ve

$\left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{\omega_n}\right)^2\right]^{-1} = 1 + \left(\frac{\varepsilon}{\omega_n}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{\omega_n}\right)^4 \dots$ Binom açılımı Eş.3.212'de yerlerine yazılarak gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$q_n(t) = F_z \left[\frac{1}{(\omega_n^2 - \varepsilon^2)} \left(\sin(\varepsilon t) - \frac{\varepsilon}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \right) \right] \quad (3.213)$$

bulunur. Eş.3.21 ve Eş.3.213, daha önce verilen $\varepsilon = \frac{n\pi\vartheta}{l}$ ve $F_z = \frac{2F}{l\rho A}$ ifadeleri dikkate alınarak Eş.3.4'te yerlerine yazılırsa YHT geçen köprü modal yerdeğişimi analitik ifadesi,

$$w(x, t) = \sum_{n=1,2,\dots}^N \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \left[\frac{2Fl^3}{EI\pi^4 \left(\frac{\vartheta^2 \rho A (n\pi l)^2}{EI\pi^4} - n^4 \right)} \left(\frac{n\pi\vartheta}{l\omega_n} \sin(\omega_n t) - \sin\left(\frac{n\pi\vartheta}{l} t\right) \right) \right] \quad (3.214)$$

şeklinde elde edilir. $F = F_0 e^{i\omega_0 t}$ şeklinde tanımlanarak Eş.3.214'te yerine yazılıp gerekli düzenleme yapıldığında Eş.3.137 ile aynı analitik çözüm elde edilir. Düzgün kesitli, sönümsüz kiriş hareket denklemi çözümlerinde, denklemin sağ tarafındaki ifade zamana bağlı bir fonksiyon olduğu takdirde GAAM uygulanabilmektedir. Aksi halde homojen olmayan terim polinomlarının hesabında türev sonuçları sıfır çıkacağından modal yerdeğişimi ifadeleri elde edilememektedir.

4. SÖNÜMLÜ EULER BERNOULLI KİRİŞİ DİNAMİK ANALİZİ

YHT demiryolu hatlarının gelişmesi ile demiryolu köprülerinde oluşacak titreşim birçok endişeleri de beraberinde getirmiştir. Zorlama frekansı ve genliğinin artışı köprü yapısında yorulma ve buna bağlı çatlakların meydana gelmesine sebep olmakta ve köprü kullanım ömrünü kısaltmaktadır. Sönümsüz kirişlerde trafik yüklerine bağlı rezonans riskinin daha büyük olması dinamik analizlerde sönüm etkisinin de dikkate alınması gerektiğini ortaya çıkarmıştır. Bu bölümde düzgün kesitli, tek kirişli, basit mesnetli EB kirişi olarak modellenmiş toplam uzunluğu l , elastisite modülü E , alan atalet momenti I , yoğunluğu ρ , kesit alanı A olan bir YHT köprüsünün dinamik analizi, hareket denkleminde sönüm etkisi de dikkate alınarak yapılmış ve kiriş modal yerdeğişimi analitik ifadesi GAAM kullanılarak elde edilmiştir.

4.1. Üzerinden Hareketli Kuvvet Geçen Sönümlü EB Kirişi Modal Analizi

Titreşim analizini basitleştirmek amacıyla sönümsüz kabul edilen ve matematiksel modeli Şekil 3.2’de verilen YHT köprüsü hareket denklemi, sönüm etkisi de dikkate alındığında aşağıdaki gibi ifade edilmektedir [44].

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right] + c \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[c_s I \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial t \partial x^2} \right] + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = f(x, t) \quad (4.1)$$

$$f(x, t) = F \delta(x - \vartheta t) \quad (4.2)$$

Burada c dış, c_s ise iç sönümü ifade etmektedir. Bu iç sönümleme köprüde oluşan dönme, kayma ve burulma ataletinden kaynaklanabilir. Bu terimler ihmal edilir ve Eş.3.4 gerekli türevler alınarak, Eş.4.1’de yerlerine yazılırsa,

$$\sum_{n=1}^N EI \frac{d^4 W_n(x)}{dx^4} q_n(t) + c W_n(x) \frac{dq_n(t)}{dt} + \rho A W_n(x) \frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} = F \delta(x - \vartheta t) \quad (4.3)$$

elde edilir. Eş.3.6 düzenleme yapılarak bu denklemde yerine yazılırsa,

$$\frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} W_n(x) + \frac{c}{\rho A} W_n(x) \frac{dq_n(t)}{dt} + \omega_n^2 W_n(x) q_n(t) = \frac{F}{\rho A} \delta(x - \vartheta t) \quad (4.4)$$

ve bu eşitliğin her iki tarafı $W_n(x)$ ile çarpılıp 0 ile l aralığında x 'e göre integrali alınır,

$$\sum_{n=1}^N \left[\frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} + \frac{c}{\rho A} \frac{dq_n(t)}{dt} + \omega_n^2 q_n(t) \right] \int_0^l W_n(x) W_n(x) dx = \int_0^l \frac{F}{\rho A} \delta(x - \vartheta t) W_n(x) dx \quad (4.5)$$

elde edilir. Eş.3.20, Eş.3.21 ve basit mesnetli kiriş için $\int_0^l W_n(x) W_n(x) dx = \frac{l}{2}$ ifadesi Eş. 4.5'te yerlerine yazılıp, Dirac Delta fonksiyonunun integrali alındığında ise,

$$\frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} + \frac{c}{\rho A} \frac{dq_n(t)}{dt} + \omega_n^2 q_n(t) = \frac{2F}{l\rho A} \sin\left(\frac{n\pi}{l} \vartheta t\right) \quad , \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (4.6)$$

elde edilir [42]. Burada matematiksel işlemleri kolaylaştırmak amacıyla $\zeta_n = \frac{c}{\rho A}$, $\varepsilon = \frac{n\pi\vartheta}{l}$ ve $F_z = \frac{2F}{l\rho A}$ kabulleri yapılır ve Eş.4.6'da yerlerine yazılırsa,

$$\frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} + \zeta_n \frac{dq_n(t)}{dt} + \omega_n^2 q_n(t) = F_z \sin(\varepsilon t) \quad , \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.7)$$

sönümlü kiriş hareket denklemi ikinci mertebe, homojen olmayan adi diferansiyel denkleme indirgenmiş olur.

4.2. Üzerinden Hareketli Kuvvet Geçen Sönümlü EB Kirişinin GAAM ile Çözümü

Matematiksel modeli Şekil.3.2'de verilen YHT köprüsünün sönüm etkisi de dikkate alınmış hareket denkleminin indirgenmiş hali Eş.3.56'daki GAAM genel terim ifadeleriyle eşleştirildiğinde,

$$Lq_n(t) = \frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} \quad , \quad Rq_n(t) = \zeta_n \frac{dq_n(t)}{dt} + \omega_n^2 q_n(t), \quad g_n(t) = F_z \sin(\varepsilon t) \quad (4.8)$$

olur. Eş.4.8'deki $g_n(t)$ ifadesi ile Eş.3.194'teki $g_n(t)$ ifadesi aynı olduğundan homojen olmayan terim polinomları da Eş.3.198-Eş.3.202'deki gibidir. Eş.3.203, Eş.3.196'da yerlerine yazılıp serinin sıfırıncı terimi bulunduğundan sonra $k=0$ için Eş.3.199 ile birlikte Eş.4.8, Eş.3.197'de yerine yazılır ve $k=1, 2, 3, \dots$ için benzer işlemler tekrarlanırsa kiriş modal genliği serisinin ilk yedi terimi,

$$q_0(t) = f_0 + f_1 t = 0 \quad (4.9)$$

$$q_1(t) = -L^{-1} \left[\zeta_n \frac{dq_0(t)}{dt} + \omega_n^2 q_0(t) - F_z \varepsilon t \right] = F_z \varepsilon \frac{t^3}{3!} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} q_2(t) &= -L^{-1} [R(q_1(t)) - g_1(t)] = -L^{-1} \left(\zeta_n F_z \varepsilon \frac{t^2}{2!} + \omega_n^2 F_z \varepsilon \frac{t^3}{3!} + F_z \frac{(\varepsilon t)^3}{3!} \right) \\ &= -F_z \left(\zeta_n \varepsilon \frac{t^4}{4!} + \omega_n^2 \varepsilon \frac{t^5}{5!} + \varepsilon^3 \frac{t^5}{5!} \right) \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$q_3(t) = F_z \left(\zeta_n^2 \varepsilon \frac{t^5}{5!} + 2\zeta_n \omega_n^2 \varepsilon \frac{t^6}{6!} + \zeta_n \varepsilon^3 \frac{t^6}{6!} + \omega_n^4 \varepsilon \frac{t^7}{7!} + \omega_n^2 \varepsilon^3 \frac{t^7}{7!} + \varepsilon^5 \frac{t^7}{7!} \right) \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} q_4(t) &= -L^{-1} [R(q_3(t)) - g_3(t)] = -L^{-1} \left(\zeta_n \frac{d(q_3)}{dt} + \omega_n^2 (q_3) + F_z \frac{(\varepsilon t)^7}{7!} \right) \\ &= -F_z \left(\zeta_n^3 \varepsilon \frac{t^6}{6!} + 3\zeta_n^2 \omega_n^2 \varepsilon \frac{t^7}{7!} + \zeta_n^2 \varepsilon^3 \frac{t^7}{7!} + 3\zeta_n \omega_n^4 \varepsilon \frac{t^8}{8!} + 2\zeta_n \omega_n^2 \varepsilon^3 \frac{t^8}{8!} \right. \\ &\quad \left. + \zeta_n \varepsilon^5 \frac{t^8}{8!} + \omega_n^6 \varepsilon \frac{t^9}{9!} + \omega_n^4 \varepsilon^3 \frac{t^9}{9!} + \omega_n^2 \varepsilon^5 \frac{t^9}{9!} + \varepsilon^7 \frac{t^9}{9!} \right) \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} q_5(t) &= -L^{-1} \left(\zeta_n \frac{d(q_4)}{dt} + \omega_n^2 (q_4) - F_z \frac{(\varepsilon t)^9}{9!} \right) \\ &= F_z \left(\zeta_n^4 \varepsilon \frac{t^7}{7!} + 4\zeta_n^3 \omega_n^2 \varepsilon \frac{t^8}{8!} + \zeta_n^3 \varepsilon^3 \frac{t^8}{8!} + 6\zeta_n^2 \omega_n^4 \varepsilon \frac{t^9}{9!} + 3\zeta_n^2 \omega_n^2 \varepsilon^3 \frac{t^9}{9!} \right. \\ &\quad + \zeta_n^2 \varepsilon^5 \frac{t^9}{9!} + 4\zeta_n \omega_n^6 \varepsilon \frac{t^{10}}{10!} + 3\zeta_n \omega_n^4 \varepsilon^3 \frac{t^{10}}{10!} + 2\zeta_n \omega_n^2 \varepsilon^5 \frac{t^{10}}{10!} + \zeta_n \varepsilon^7 \frac{t^{10}}{10!} \\ &\quad \left. + \omega_n^8 \varepsilon \frac{t^{11}}{11!} + \omega_n^6 \varepsilon^3 \frac{t^{11}}{11!} + \omega_n^4 \varepsilon^5 \frac{t^{11}}{11!} + \omega_n^2 \varepsilon^7 \frac{t^{11}}{11!} + \varepsilon^9 \frac{t^{11}}{11!} \right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} q_6(t) &= -L^{-1} \left(\zeta_n \frac{d(q_5)}{dt} + \omega_n^2 (q_5) + F_z \frac{(\varepsilon t)^{11}}{11!} \right) \\ &= -F_z \left(\zeta_n^5 \varepsilon \frac{t^8}{8!} + 5\zeta_n^4 \omega_n^2 \varepsilon \frac{t^9}{9!} + \zeta_n^4 \varepsilon^3 \frac{t^9}{9!} + 10\zeta_n^3 \omega_n^4 \varepsilon \frac{t^{10}}{10!} \right. \\ &\quad + 4\zeta_n^3 \omega_n^2 \varepsilon^3 \frac{t^{10}}{10!} + \zeta_n^3 \varepsilon^5 \frac{t^{10}}{10!} + 10\zeta_n^2 \omega_n^6 \varepsilon \frac{t^{11}}{11!} + 6\zeta_n^2 \omega_n^4 \varepsilon^3 \frac{t^{11}}{11!} \\ &\quad + 3\zeta_n^2 \omega_n^2 \varepsilon^5 \frac{t^{11}}{11!} + \zeta_n^2 \varepsilon^7 \frac{t^{11}}{11!} + 5\zeta_n \omega_n^8 \varepsilon \frac{t^{12}}{12!} + 4\zeta_n \omega_n^6 \varepsilon^3 \frac{t^{12}}{12!} \\ &\quad + 3\zeta_n \omega_n^4 \varepsilon^5 \frac{t^{12}}{12!} + 2\zeta_n \omega_n^2 \varepsilon^7 \frac{t^{12}}{12!} + \zeta_n \varepsilon^9 \frac{t^{12}}{12!} + \omega_n^{10} \varepsilon \frac{t^{13}}{13!} + \omega_n^8 \varepsilon^3 \frac{t^{13}}{13!} \\ &\quad \left. + \omega_n^6 \varepsilon^5 \frac{t^{13}}{13!} + \omega_n^4 \varepsilon^7 \frac{t^{13}}{13!} + \omega_n^2 \varepsilon^9 \frac{t^{13}}{13!} + \varepsilon^{11} \frac{t^{13}}{13!} \right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

⋮

olur. Bu ifadelerin tamamı K adet terim için seri açılımında yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^K q_k(t) = F_z \left[\varepsilon \frac{t^3}{3!} - \zeta_n \varepsilon \frac{t^4}{4!} - \omega_n^2 \varepsilon \frac{t^5}{5!} - \varepsilon^3 \frac{t^5}{5!} + \zeta_n^2 \varepsilon \frac{t^5}{5!} + 2\zeta_n \omega_n^2 \varepsilon \frac{t^6}{6!} + \zeta_n \varepsilon^3 \frac{t^6}{6!} \right. \\
+ \omega_n^4 \varepsilon \frac{t^7}{7!} + \omega_n^2 \varepsilon^3 \frac{t^7}{7!} + \varepsilon^5 \frac{t^7}{7!} - \zeta_n^3 \varepsilon \frac{t^6}{6!} - 3\zeta_n^2 \omega_n^2 \varepsilon \frac{t^7}{7!} - \zeta_n^2 \varepsilon^3 \frac{t^7}{7!} \\
- 3\zeta_n \omega_n^4 \varepsilon \frac{t^8}{8!} - 2\zeta_n \omega_n^2 \varepsilon^3 \frac{t^8}{8!} - \zeta_n \varepsilon^5 \frac{t^8}{8!} - \omega_n^6 \varepsilon \frac{t^9}{9!} - \omega_n^4 \varepsilon^3 \frac{t^9}{9!} - \omega_n^2 \varepsilon^5 \frac{t^9}{9!} \\
- \varepsilon^7 \frac{t^9}{9!} + \zeta_n^4 \varepsilon \frac{t^7}{7!} + 4\zeta_n^3 \omega_n^2 \varepsilon \frac{t^8}{8!} + \zeta_n^3 \varepsilon^3 \frac{t^8}{8!} + 6\zeta_n^2 \omega_n^4 \varepsilon \frac{t^9}{9!} \\
+ 3\zeta_n^2 \omega_n^2 \varepsilon^3 \frac{t^9}{9!} + \zeta_n^2 \varepsilon^5 \frac{t^9}{9!} + 4\zeta_n \omega_n^6 \varepsilon \frac{t^{10}}{10!} + 3\zeta_n \omega_n^4 \varepsilon^3 \frac{t^{10}}{10!} \\
+ 2\zeta_n \omega_n^2 \varepsilon^5 \frac{t^{10}}{10!} + \zeta_n \varepsilon^7 \frac{t^{10}}{10!} + \omega_n^8 \varepsilon \frac{t^{11}}{11!} + \omega_n^6 \varepsilon^3 \frac{t^{11}}{11!} + \omega_n^4 \varepsilon^5 \frac{t^{11}}{11!} \\
+ \omega_n^2 \varepsilon^7 \frac{t^{11}}{11!} + \varepsilon^9 \frac{t^{11}}{11!} - \zeta_n^5 \varepsilon \frac{t^8}{8!} - 5\zeta_n^4 \omega_n^2 \varepsilon \frac{t^9}{9!} - \zeta_n^4 \varepsilon^3 \frac{t^9}{9!} \\
- 10\zeta_n^3 \omega_n^4 \varepsilon \frac{t^{10}}{10!} - 4\zeta_n^3 \omega_n^2 \varepsilon^3 \frac{t^{10}}{10!} - \zeta_n^3 \varepsilon^5 \frac{t^{10}}{10!} - 10\zeta_n^2 \omega_n^6 \varepsilon \frac{t^{11}}{11!} \\
- 6\zeta_n^2 \omega_n^4 \varepsilon^3 \frac{t^{11}}{11!} - 3\zeta_n^2 \omega_n^2 \varepsilon^5 \frac{t^{11}}{11!} - \zeta_n^2 \varepsilon^7 \frac{t^{11}}{11!} - 5\zeta_n \omega_n^8 \varepsilon \frac{t^{12}}{12!} \\
- 4\zeta_n \omega_n^6 \varepsilon^3 \frac{t^{12}}{12!} - 3\zeta_n \omega_n^4 \varepsilon^5 \frac{t^{12}}{12!} - 2\zeta_n \omega_n^2 \varepsilon^7 \frac{t^{12}}{12!} - \zeta_n \varepsilon^9 \frac{t^{12}}{12!} - \omega_n^{10} \varepsilon \frac{t^{13}}{13!} \\
- \omega_n^8 \varepsilon^3 \frac{t^{13}}{13!} - \omega_n^6 \varepsilon^5 \frac{t^{13}}{13!} - \omega_n^4 \varepsilon^7 \frac{t^{13}}{13!} - \omega_n^2 \varepsilon^9 \frac{t^{13}}{13!} - \varepsilon^{11} \frac{t^{13}}{13!} \\
+ \dots \left. \right] \quad (4.16)
\end{aligned}$$

olur. Taylor serisi ve Binom açılımı genel ifadeleri ile yazımın kolaylaştırılması amacıyla Eş.4.16 gruplara ayrılarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\sum_{k=0}^K q_k(t) = F_z[S_1 + S_2 + S_3] \quad (4.17)$$

Burada S_1 , S_2 ve S_3 terimleri aşağıda sıralanmıştır.

$$\begin{aligned}
S_1 = & \left(\varepsilon \frac{t^3}{3!} - \varepsilon^3 \frac{t^5}{5!} + \varepsilon^5 \frac{t^7}{7!} - \varepsilon^7 \frac{t^9}{9!} + \varepsilon^9 \frac{t^{11}}{11!} \dots \right) \\
& + \left(-\omega_n^2 \varepsilon \frac{t^5}{5!} + \omega_n^2 \varepsilon^3 \frac{t^7}{7!} - \omega_n^2 \varepsilon^5 \frac{t^9}{9!} + \omega_n^2 \varepsilon^7 \frac{t^{11}}{11!} \dots \right) \\
& + \left(\omega_n^4 \varepsilon \frac{t^7}{7!} - \omega_n^4 \varepsilon^3 \frac{t^9}{9!} + \omega_n^4 \varepsilon^5 \frac{t^{11}}{11!} \dots \right) + \left(-\omega_n^6 \varepsilon \frac{t^9}{9!} + \omega_n^6 \varepsilon^3 \frac{t^{11}}{11!} \dots \right) \\
& + \omega_n^8 \varepsilon \frac{t^{11}}{11!} - \omega_n^8 \varepsilon^3 \frac{t^{13}}{13!} \dots \quad (4.18)
\end{aligned}$$

$$S_2 = \left(-\zeta_n \varepsilon \frac{t^4}{4!} + \zeta_n \varepsilon^3 \frac{t^6}{6!} - \zeta_n \varepsilon^5 \frac{t^8}{8!} + \zeta_n \varepsilon^7 \frac{t^{10}}{10!} \dots \right) + \left(\zeta_n^2 \varepsilon \frac{t^5}{5!} - \zeta_n^2 \varepsilon^3 \frac{t^7}{7!} + \zeta_n^2 \varepsilon^5 \frac{t^9}{9!} \dots \right) \\ + \left(-\zeta_n^3 \varepsilon \frac{t^6}{6!} + \zeta_n^3 \varepsilon^3 \frac{t^8}{8!} \dots \right) + \zeta_n^4 \varepsilon \frac{t^7}{7!} - \zeta_n^4 \varepsilon^3 \frac{t^9}{9!} \dots \quad (4.19)$$

$$S_3 = 2\zeta_n \omega_n^2 \varepsilon \frac{t^6}{6!} - 3\zeta_n^2 \omega_n^2 \varepsilon \frac{t^7}{7!} - 3\zeta_n \omega_n^4 \varepsilon \frac{t^8}{8!} - 2\zeta_n \omega_n^2 \varepsilon^3 \frac{t^8}{8!} + 4\zeta_n^3 \omega_n^2 \varepsilon \frac{t^8}{8!} \\ + 6\zeta_n^2 \omega_n^4 \varepsilon \frac{t^9}{9!} + 3\zeta_n^2 \omega_n^2 \varepsilon^3 \frac{t^9}{9!} + 4\zeta_n \omega_n^6 \varepsilon \frac{t^{10}}{10!} + 3\zeta_n \omega_n^4 \varepsilon^3 \frac{t^{10}}{10!} \\ + 2\zeta_n \omega_n^2 \varepsilon^5 \frac{t^{10}}{10!} \dots \quad (4.20)$$

Burada Eş.4.18 ile Eş.3.209'daki köşeli parantez içindeki terimlerin aynı olduğu görülmektedir. Yani S_1 terimi sönümsüz kiriş n . modal genliğini ifade etmektedir ve seri açılımı genel ifadesi Eş.3.213'te elde edilen köşeli parantez içindeki terimle aynıdır. S_2 ve S_3 terimlerinin çözümü için de benzer işlemler tekrarlanır. Öncelikle Eş.4.19, Taylor ve Binom açılımı ile yazımın kolaylaştırılması amacıyla çarpanlarına ayrılarak,

$$S_2 = \frac{1}{\zeta_n^2} \left\{ -\frac{\varepsilon}{\zeta_n} \left[\left(\frac{(\zeta_n t)^4}{4!} + \frac{(\zeta_n t)^6}{6!} + \frac{(\zeta_n t)^8}{8!} \dots \right) - \left(\frac{\varepsilon}{\zeta_n} \right)^2 \left(\frac{(\zeta_n t)^6}{6!} + \frac{(\zeta_n t)^8}{8!} \dots \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{\varepsilon}{\zeta_n} \right)^4 \left(\frac{(\zeta_n t)^8}{8!} + \frac{(\zeta_n t)^{10}}{10!} \dots \right) \dots \right] \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon}{\zeta_n} \left[\left(\frac{(\zeta_n t)^5}{5!} + \frac{(\zeta_n t)^7}{7!} + \frac{(\zeta_n t)^9}{9!} \dots \right) - \left(\frac{\varepsilon}{\zeta_n} \right)^2 \left(\frac{(\zeta_n t)^7}{7!} + \frac{(\zeta_n t)^9}{9!} \dots \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{\varepsilon}{\zeta_n} \right)^4 \left(\frac{(\zeta_n t)^9}{9!} + \frac{(\zeta_n t)^{11}}{11!} \dots \right) \dots \right] \right\} \quad (4.21)$$

şekline dönüştürülür. Burada köşeli parantez içindeki terimler Taylor serisi formunda (Bkz. EK-3) aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$S_2 = \frac{1}{\zeta_n^2} \left\{ \frac{\varepsilon}{\zeta_n} \left[\left(1 + \frac{(\zeta_n t)^2}{2!} - \cosh(\zeta_n t) \right) - \left(\frac{\varepsilon}{\zeta_n} \right)^2 \left(1 + \frac{(\zeta_n t)^2}{2!} + \frac{(\zeta_n t)^4}{4!} - \cosh(\zeta_n t) \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{\varepsilon}{\zeta_n} \right)^4 \left(1 + \frac{(\zeta_n t)^2}{2!} + \frac{(\zeta_n t)^4}{4!} + \frac{(\zeta_n t)^6}{6!} - \cosh(\zeta_n t) \right) \dots \right] \right. \\ \left. - \frac{\varepsilon}{\zeta_n} \left[\left(\zeta_n t + \frac{(\zeta_n t)^3}{3!} - \sinh(\zeta_n t) \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{\varepsilon}{\zeta_n} \right)^2 \left(\zeta_n t + \frac{(\zeta_n t)^3}{3!} + \frac{(\zeta_n t)^5}{5!} - \sinh(\zeta_n t) \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{\varepsilon}{\zeta_n} \right)^4 \left(\zeta_n t + \frac{(\zeta_n t)^3}{3!} + \frac{(\zeta_n t)^5}{5!} + \frac{(\zeta_n t)^7}{7!} - \sinh(\zeta_n t) \right) \dots \right] \right\} \quad (4.22)$$

Eş.4.22’de gerekli çarpım işlemleri yapılır,

$$S_2 = \frac{1}{\zeta_n^2} \left\{ \frac{\varepsilon}{\zeta_n} \left[1 + \frac{(\zeta_n t)^2}{2!} - \left(\frac{\varepsilon}{\zeta_n} \right)^2 \frac{(\zeta_n t)^4}{4!} + \left(\frac{\varepsilon}{\zeta_n} \right)^4 \frac{(\zeta_n t)^6}{6!} - \dots - \cosh(\zeta_n t) \right] \right. \\ \left. - \frac{\varepsilon}{\zeta_n} \left[\zeta_n t + \frac{(\zeta_n t)^3}{3!} - \left(\frac{\varepsilon}{\zeta_n} \right)^2 \frac{(\zeta_n t)^5}{5!} + \left(\frac{\varepsilon}{\zeta_n} \right)^4 \frac{(\zeta_n t)^7}{7!} - \dots \right. \right. \\ \left. \left. - \sinh(\zeta_n t) \right] \right\} \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{\zeta_n} \right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{\zeta_n} \right)^4 \dots \right) \quad (4.23)$$

ve Binom açılımı genel terimleri (Bkz. EK-3) Eş. 4.23’te yerlerine yazılırsa,

$$S_2 = \frac{1}{\zeta_n^2} \left\{ \left[\frac{\varepsilon}{\zeta_n} + \frac{\zeta_n (\varepsilon t)^2}{\varepsilon 2!} - \frac{\zeta_n (\varepsilon t)^4}{\varepsilon 4!} + \frac{\zeta_n (\varepsilon t)^6}{\varepsilon 6!} - \dots - \frac{\varepsilon}{\zeta_n} \cosh(\zeta_n t) \right] \right. \\ \left. - \left[\varepsilon t + \left(\frac{\zeta_n}{\varepsilon} \right)^2 \frac{(\varepsilon t)^3}{3!} - \left(\frac{\zeta_n}{\varepsilon} \right)^2 \frac{(\varepsilon t)^5}{5!} + \left(\frac{\zeta_n}{\varepsilon} \right)^2 \frac{(\varepsilon t)^7}{7!} - \dots \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\varepsilon}{\zeta_n} \sinh(\zeta_n t) \right] \right\} \left(1 + \left(\frac{\varepsilon}{\zeta_n} \right)^2 \right)^{-1} \quad (4.24)$$

elde edilir. Eş.4.24’te Taylor serisi genel ifadesi için çarpanlara ayırma ve gerekli sadeleştirme işlemleri yapılırsa,

$$S_2 = \frac{1}{\zeta_n^2} \left\{ \frac{\zeta_n}{\varepsilon} \left[\left(\frac{\varepsilon}{\zeta_n} \right)^2 + \left(\frac{(\varepsilon t)^2}{2!} - \frac{(\varepsilon t)^4}{4!} + \frac{(\varepsilon t)^6}{6!} - \dots \right) - \left(\frac{\varepsilon}{\zeta_n} \right)^2 \cosh(\zeta_n t) \right] \right. \\ \left. - \left(\frac{\zeta_n}{\varepsilon} \right)^2 \left[\left(\frac{\varepsilon}{\zeta_n} \right)^2 \varepsilon t + \left(\frac{(\varepsilon t)^3}{3!} - \frac{(\varepsilon t)^5}{5!} + \frac{(\varepsilon t)^7}{7!} - \dots \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{\varepsilon}{\zeta_n} \right)^3 \sinh(\zeta_n t) \right] \right\} \left(\frac{\zeta_n^2 + \varepsilon^2}{\zeta_n^2} \right)^{-1} \quad (4.25)$$

bulunur.

Eş.4.25’teki köşeli parantez içindeki seriler *Cos* ve *Sin* Taylor seri açılımlarını ifade etmektedir. Bu ifadeler Eş.4.25’te yerlerine yazılırsa,

$$S_2 = \frac{1}{\zeta_n^2 + \varepsilon^2} \left\{ \frac{\zeta_n}{\varepsilon} \left[\left(\frac{\varepsilon}{\zeta_n} \right)^2 + 1 - \cos(\varepsilon t) - \left(\frac{\varepsilon}{\zeta_n} \right)^2 \cosh(\zeta_n t) \right] \right. \\ \left. - \left(\frac{\zeta_n}{\varepsilon} \right)^2 \left[\left(\frac{\varepsilon}{\zeta_n} \right)^2 \varepsilon t + \varepsilon t - \sin(\varepsilon t) - \left(\frac{\varepsilon}{\zeta_n} \right)^3 \sinh(\zeta_n t) \right] \right\} \quad (4.26)$$

ve çarpım işlemleri yapılarak,

$$S_2 = \frac{1}{\zeta_n^2 + \varepsilon^2} \left\{ \frac{\varepsilon}{\zeta_n} + \frac{\zeta_n}{\varepsilon} - \frac{\zeta_n}{\varepsilon} \cos(\varepsilon t) - \frac{\varepsilon}{\zeta_n} \cosh(\zeta_n t) - \varepsilon t - \left(\frac{\zeta_n}{\varepsilon} \right)^2 \varepsilon t + \left(\frac{\zeta_n}{\varepsilon} \right)^2 \sin(\varepsilon t) + \frac{\varepsilon}{\zeta_n} \sinh(\zeta_n t) \right\} \quad (4.27)$$

tekrar düzenleme yapılırsa,

$$S_2 = \frac{1}{\zeta_n^2 + \varepsilon^2} \left\{ \frac{\varepsilon}{\zeta_n} [1 - \cosh(\zeta_n t) + \sinh(\zeta_n t)] + \frac{\zeta_n}{\varepsilon} [1 - \cos(\varepsilon t)] - \varepsilon t - \left(\frac{\zeta_n}{\varepsilon} \right)^2 [\varepsilon t - \sin(\varepsilon t)] \right\} \quad (4.28)$$

elde edilir. Eş.4.20'deki S_3 terimi seri açılımı genel ifadesi ise aşağıda verilmiştir.

$$S_3 = \frac{1}{\varepsilon^2} \left\{ \frac{\zeta_n}{\varepsilon} \left[2 \left(\frac{\omega_n}{\varepsilon} \right)^2 \left(\frac{(\varepsilon t)^6}{6!} - \frac{(\varepsilon t)^8}{8!} + \dots \right) + 3 \left(\frac{\omega_n}{\varepsilon} \right)^4 \left(-\frac{(\varepsilon t)^8}{8!} + \frac{(\varepsilon t)^{10}}{10!} - \dots \right) + 4 \left(\frac{\omega_n}{\varepsilon} \right)^6 \left(\frac{(\varepsilon t)^{10}}{10!} - \frac{(\varepsilon t)^{12}}{12!} \dots \right) \dots \right] - \left(\frac{\zeta_n}{\varepsilon} \right)^2 \left[3 \left(\frac{\omega_n}{\varepsilon} \right)^2 \left(\frac{(\varepsilon t)^7}{7!} - \frac{(\varepsilon t)^9}{9!} + \dots \right) + 6 \left(\frac{\omega_n}{\varepsilon} \right)^4 \left(-\frac{(\varepsilon t)^9}{9!} + \frac{(\varepsilon t)^{11}}{11!} - \dots \right) + 10 \left(\frac{\omega_n}{\varepsilon} \right)^6 \left(\frac{(\varepsilon t)^{11}}{11!} - \frac{(\varepsilon t)^{13}}{13!} \dots \right) \dots \right] - \left(\frac{\zeta_n}{\varepsilon} \right)^3 \left[4 \left(\frac{\omega_n}{\varepsilon} \right)^2 \left(-\frac{(\varepsilon t)^8}{8!} + \frac{(\varepsilon t)^{10}}{10!} - \dots \right) + 10 \left(\frac{\omega_n}{\varepsilon} \right)^4 \left(\frac{(\varepsilon t)^{10}}{10!} - \frac{(\varepsilon t)^{12}}{12!} + \dots \right) + 20 \left(\frac{\omega_n}{\varepsilon} \right)^6 \left(-\frac{(\varepsilon t)^{12}}{12!} + \frac{(\varepsilon t)^{14}}{14!} \dots \right) \dots \right] + \left(\frac{\zeta_n}{\varepsilon} \right)^4 \left[5 \left(\frac{\omega_n}{\varepsilon} \right)^2 \left(-\frac{(\varepsilon t)^9}{9!} + \frac{(\varepsilon t)^{11}}{11!} - \dots \right) + 15 \left(\frac{\omega_n}{\varepsilon} \right)^4 \left(\frac{(\varepsilon t)^{11}}{11!} - \frac{(\varepsilon t)^{13}}{13!} \dots \right) \dots \right] + \left(\frac{\zeta_n}{\varepsilon} \right)^5 \left[6 \left(\frac{\omega_n}{\varepsilon} \right)^2 \left(\frac{(\varepsilon t)^{10}}{10!} - \frac{(\varepsilon t)^{12}}{12!} + \dots \right) \dots \right] \right\} \quad (4.29)$$

Burada köşeli parantez içindeki terimler *Sin* ve *Cos* Taylor seri açılımlarına göre (Bkz. EK-3) düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
S_3 = \frac{1}{\varepsilon^2} \left\{ \frac{\zeta_n}{\varepsilon} \left[2 \left(\frac{\omega_n}{\varepsilon} \right)^2 \left(1 - \frac{(\varepsilon t)^2}{2!} + \frac{(\varepsilon t)^4}{4!} - \cos(\varepsilon t) \right) \right. \right. \\
+ 3 \left(\frac{\omega_n}{\varepsilon} \right)^4 \left(1 - \frac{(\varepsilon t)^2}{2!} + \frac{(\varepsilon t)^4}{4!} - \frac{(\varepsilon t)^6}{6!} - \cos(\varepsilon t) \right) \\
+ 4 \left(\frac{\omega_n}{\varepsilon} \right)^6 \left(1 - \frac{(\varepsilon t)^2}{2!} + \frac{(\varepsilon t)^4}{4!} - \frac{(\varepsilon t)^6}{6!} + \frac{(\varepsilon t)^8}{8!} - \cos(\varepsilon t) \right) \dots \left. \right] \\
- \left(\frac{\zeta_n}{\varepsilon} \right)^2 \left[3 \left(\frac{\omega_n}{\varepsilon} \right)^2 \left(\varepsilon t - \frac{(\varepsilon t)^3}{3!} + \frac{(\varepsilon t)^5}{5!} - \sin(\varepsilon t) \right) \right. \\
+ 6 \left(\frac{\omega_n}{\varepsilon} \right)^4 \left(\varepsilon t - \frac{(\varepsilon t)^3}{3!} + \frac{(\varepsilon t)^5}{5!} - \frac{(\varepsilon t)^7}{7!} - \sin(\varepsilon t) \right) \\
+ 10 \left(\frac{\omega_n}{\varepsilon} \right)^6 \left(\varepsilon t - \frac{(\varepsilon t)^3}{3!} + \frac{(\varepsilon t)^5}{5!} - \frac{(\varepsilon t)^7}{7!} + \frac{(\varepsilon t)^9}{9!} - \sin(\varepsilon t) \right) \dots \left. \right] \\
- \left(\frac{\zeta_n}{\varepsilon} \right)^3 \left[4 \left(\frac{\omega_n}{\varepsilon} \right)^2 \left(1 - \frac{(\varepsilon t)^2}{2!} + \frac{(\varepsilon t)^4}{4!} - \frac{(\varepsilon t)^6}{6!} - \cos(\varepsilon t) \right) \right. \\
+ 10 \left(\frac{\omega_n}{\varepsilon} \right)^4 \left(1 - \frac{(\varepsilon t)^2}{2!} + \frac{(\varepsilon t)^4}{4!} - \frac{(\varepsilon t)^6}{6!} + \frac{(\varepsilon t)^8}{8!} - \cos(\varepsilon t) \right) \\
+ 20 \left(\frac{\omega_n}{\varepsilon} \right)^6 \left(1 - \frac{(\varepsilon t)^2}{2!} + \frac{(\varepsilon t)^4}{4!} - \frac{(\varepsilon t)^6}{6!} + \frac{(\varepsilon t)^8}{8!} - \frac{(\varepsilon t)^{10}}{10!} - \cos(\varepsilon t) \right) \dots \left. \right] \\
+ \left(\frac{\zeta_n}{\varepsilon} \right)^4 \left[5 \left(\frac{\omega_n}{\varepsilon} \right)^2 \left(\varepsilon t - \frac{(\varepsilon t)^3}{3!} + \frac{(\varepsilon t)^5}{5!} - \frac{(\varepsilon t)^7}{7!} - \sin(\varepsilon t) \right) \right. \\
+ 15 \left(\frac{\omega_n}{\varepsilon} \right)^4 \left(\varepsilon t - \frac{(\varepsilon t)^3}{3!} + \frac{(\varepsilon t)^5}{5!} - \frac{(\varepsilon t)^7}{7!} + \frac{(\varepsilon t)^9}{9!} - \sin(\varepsilon t) \right) \dots \left. \right] \\
+ \left(\frac{\zeta_n}{\varepsilon} \right)^5 \left[6 \left(\frac{\omega_n}{\varepsilon} \right)^2 \left(\frac{(\varepsilon t)^{10}}{10!} - \frac{(\varepsilon t)^{12}}{12!} + \dots \right) \dots \right] \left. \right\} \quad (4.30)
\end{aligned}$$

ve çarpım işlemleri yapılarak Binom açılımı genel ifadesi şeklinde yazılırsa,

$$\begin{aligned}
S_3 = \frac{1}{\varepsilon^2} \left\{ \frac{\zeta_n}{\varepsilon} \left[\left(\left[1 - \left(\frac{\omega_n}{\varepsilon} \right)^2 \right]^{-2} - 1 \right) - \left(\frac{\zeta_n}{\varepsilon} \right)^3 \left(\left[1 - \left(\frac{\omega_n}{\varepsilon} \right)^2 \right]^{-4} - 1 \right) \right. \right. \\
+ \left(\frac{\zeta_n}{\varepsilon} \right)^5 \left(\left[1 - \left(\frac{\omega_n}{\varepsilon} \right)^2 \right]^{-6} - 1 \right) \dots \left. \right] \left(1 - \frac{(\varepsilon t)^2}{2!} + \frac{(\varepsilon t)^4}{4!} - \cos(\varepsilon t) \right) \\
- \left(\frac{\zeta_n}{\varepsilon} \right)^2 \left[\left(\left[1 - \left(\frac{\omega_n}{\varepsilon} \right)^2 \right]^{-3} - 1 \right) - \left(\frac{\zeta_n}{\varepsilon} \right)^2 \left(\left[1 - \left(\frac{\omega_n}{\varepsilon} \right)^2 \right]^{-5} - 1 \right) \dots \right] \left(\varepsilon t \right. \\
\left. - \frac{(\varepsilon t)^3}{3!} + \frac{(\varepsilon t)^5}{5!} - \sin(\varepsilon t) \right) \left. \right\} \quad (4.31)
\end{aligned}$$

elde edilir. Eş.4.30'daki $\frac{(\varepsilon t)^4}{4!}$ ve $\frac{(\varepsilon t)^5}{5!}$ terimlerinden sonraki terimler Eş.4.31'de serilerin sonsuza gitmesine ve S_3 teriminin sıfıra yaklaşmasına sebep olmaktadır. Bu nedenle S_3 terimi ihmal edilmiştir. Sonuç olarak, sırayla Eş.3.213 ve Eş.4.28'de elde edilen S_1 ve S_2 terimleri Eş.4.17'de yerlerine yazıldığında sönümlü giriş n . modal genliği,

$$\begin{aligned}
q_n(t) = F_z \left[\frac{1}{\omega_n^2 - \varepsilon^2} \left(\sin(\varepsilon t) - \frac{\varepsilon}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \right) \right. \\
+ \frac{1}{\zeta_n^2 + \varepsilon^2} \left\{ \frac{\varepsilon}{\zeta_n} [1 - \cosh(\zeta_n t) + \sinh(\zeta_n t)] + \frac{\zeta_n}{\varepsilon} [1 - \cos(\varepsilon t)] - \varepsilon t \right. \\
\left. \left. - \left(\frac{\zeta_n}{\varepsilon} \right)^2 [\varepsilon t - \sin(\varepsilon t)] \right\} \right] \quad (4.32)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Eş.3.21 ve Eş.4.32, Eş.3.4'te yerlerine yazıldığında ise,

$$\begin{aligned}
w(x, t) = F_z \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\omega_n^2 - \varepsilon^2} \left(\sin(\varepsilon t) - \frac{\varepsilon}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \right) \right. \\
+ \frac{1}{\zeta_n^2 + \varepsilon^2} \left\{ \frac{\varepsilon}{\zeta_n} [1 - \cosh(\zeta_n t) + \sinh(\zeta_n t)] + \frac{\zeta_n}{\varepsilon} [1 - \cos(\varepsilon t)] - \varepsilon t \right. \\
\left. \left. - \left(\frac{\zeta_n}{\varepsilon} \right)^2 [\varepsilon t - \sin(\varepsilon t)] \right\} \right] \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \quad (4.33)
\end{aligned}$$

elde edilir. Daha önce verilen $\zeta_n = \frac{c}{\rho A}$, $\varepsilon = \frac{n\pi \vartheta}{l}$ ve $F_z = \frac{2F}{l\rho A}$ ifadeleri Eş.4.33'te yerlerine yazıldığında da sönümlü, tek geçişli, basit mesnetli YHT köprüsü modal yerdeğişimi analitik ifadesi elde edilir. Harmonik bir kuvvet, $F = F_0 e^{i\omega_0 t}$ şeklinde tanımlanarak Eş.4.33'te yerine yazıldığında ise harmonik kuvvetin sönümlü kiriş modal yerdeğişimine etkisi incelenebilir.

5. BULGULAR VE YORUMLAR

Bu çalışmada bir YHT köprüsünün dinamik analizi için köprü basit mesnetli bir EB kirişi olarak modellenmiş ve farklı zorlama durumları için incelenmiştir. Köprünün atalet kaynaklı sönümleri, diğer bir deyişle, dönme, kayma ve burulma ataletleri ihmal edilmiştir. Analizlerde önce kiriş orta noktasına ve herhangi bir noktasına kuvvet uygulanan durum için ve sonrasında da sabit hızla ilerleyen bir kuvvet uygulanan durum için inceleme yapılmıştır. Sönümsüz kabul edilen bu durumlar için matematik model elde edilmiş ve hareket denklemleri oluşturulmuştur. Dördüncü mertebe, homojen olmayan, kısmi diferansiyel denklem, sınır ve başlangıç şartları dikkate alınarak ve gerekli boyutsuzlaştırma işlemleri yapılarak, ikinci mertebe homojen olmayan adi diferansiyel denklem haline dönüştürülmüş ve AAM, DAAM ve GAAM yöntemleri kullanılarak kiriş modal yerdeğişimi analitik ifadeleri elde edilmiştir. Tren hızına bağlı olarak traversli ray yapısından dolayı meydana gelen harmonik etki daha sonra hesaplara dahil edilmiştir. Tüm bu işlemler hareket denkleminde sönüm etkisi de dikkate alınarak tekrarlanmış ve sönümlü kirişin modal yerdeğişimi analitik ifadesi de elde edilmiştir.

Elde edilen analitik ifadeler fiziksel davranışı yorumlamak için üç tip yapısal özelliğe sahip köprü nümerik değerleri ile farklı kiriş uzunlukları, kuvvet genlikleri, frekansları ve tren hızlarında sayısal olarak çözümlenmiş ve köprüde meydana gelen modal yerdeğişimler incelenmiştir.

5.1. EB Kirişi Olarak Modellenen YHT Demiryolu Köprüsü Özellikleri

YHT demiryolu köprüsünde modal yerdeğişimlerini incelemek amacıyla aşağıda sıralanan yapısal özelliklere sahip üç tip köprü seçilmiştir.

- İsviçre'de Gothenburg ve Varbeg demiryolu hattında, Viskan nehri üzerinde, yapımı 1994 yılında tamamlanmış, toplam uzunluğu 45 m (2x22.5 m) olan çift geçişli, çift hatlı (betonarme) demiryolu köprüsü,
- Yine İsviçre'de Bothnia YHT demiryolu hattında bulunan 35 m uzunluğundaki (ön gerilmeli betonarme) Brustjärnsbäcken köprüsü,
- Ve yine Bothnia YHT demiryolu hattında bulunan, yapımı 2010 yılında tamamlanmış, 42 m uzunluğundaki tek geçişli, tek hatlı (çelik-betonarme kompozit) Banafjäl köprüsü,

Betonarme köprü tipi ‘Model-1’, ön gerilmeli betonarme köprü tipi ‘Model-2’ ve çelik-betonarme kompozit köprü tipi ise ‘Model-3’ şeklinde isimlendirilmiş ve köprülere ait yapı özellikleri Çizelge 5.1’de verilmiştir. YHT köprüsünün modlara göre rezonans durumlarının değerlendirilmesi amacıyla 40 m uzunluğunda, tek geçişli bir köprü modeli dikkate alınmıştır. İlk beş modda oluşacak doğal frekans değerleri, Çizelge 5.1’deki verilere göre Eş.3.20 esas alınarak hesaplanmış ve Çizelge 5.2’de verilmiştir. Köprü ρA çarpım değerinin artmasıyla doğal frekans azalırken, mod sayısındaki ve EI çarpım değerindeki artış köprü doğal frekansının artmasına sebep olmuştur. Köprü uzunluk değişiminin birinci modda elde edilen doğal frekans değerlerine etkisi ise Çizelge 5.3’te verilmiştir. Tüm köprü modellerinde giriş uzunluğu arttıkça beklendiği gibi doğal frekans değerlerinin azaldığı görülmüştür. Bilindiği gibi köprü doğal frekansı ile hareketli kuvvetin zorlama frekansı çakıştığında rezonans meydana gelmektedir. Çizelge 5.2’de en düşük doğal frekans Model-1’de yani betonarme YHT köprülerinde elde edilmiştir. Tren köprü üzerinden geçerken oluşan zorlama frekansı ne kadar küçük olursa köprü doğal frekansı ile çakışma olasılığı o kadar çabuk olacağından rezonans riski en yüksek köprü tipinin betonarme YHT köprüleri olduğu görülmüştür.

Çizelge 5.1. YHT köprü özellikleri [19]

<i>Analiz Model No</i>	<i>Elastisite Modülü E[GPa]</i>	<i>Yapı malzeme yoğunluğu ρ[kg/m³]</i>	<i>Kiriş kesit alanı A[m²]</i>	<i>Alan atalet momenti I [m⁴]</i>
Model-1	34	3750	5,13	1,12
Model-2	32	3924	6,39	2,62
Model-3	210	31825	0,57	0,62

Çizelge 5.2. YHT köprüsünde ilk beş moddaki doğal frekans değerleri, $l=40$ m

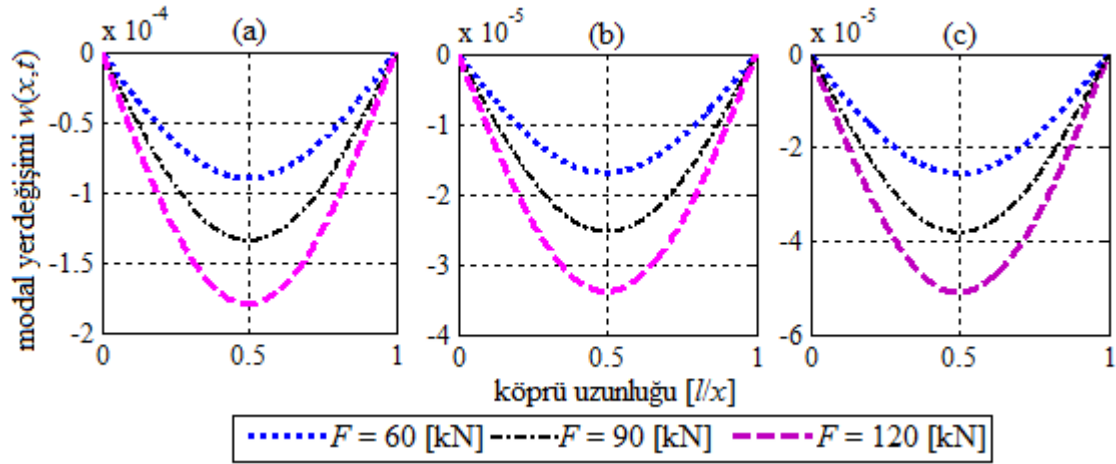
mod sayısı [n]	Model-1	Model-2	Model-3
1	8,68	11,28	16,53
2	34,71	45,12	66,10
3	78,11	101,52	148,73
4	138,86	180,47	264,41
5	216,97	281,99	413,15

Çizelge 5.3. Köprü uzunluk değişimine göre birinci moddaki doğal frekans değerleri

Kiriş Uzunluğu	Model-1	Model-2	Model-3
20 m	34,71	45,12	66,10
30 m	15,43	20,05	29,38
40 m	8,68	11,28	16,53
50 m	5,55	7,22	10,58
60 m	3,86	5,01	7,34

5.2. Orta Noktasına Kuvvet Uygulanan Sönümsüz Köprü Titreşimi

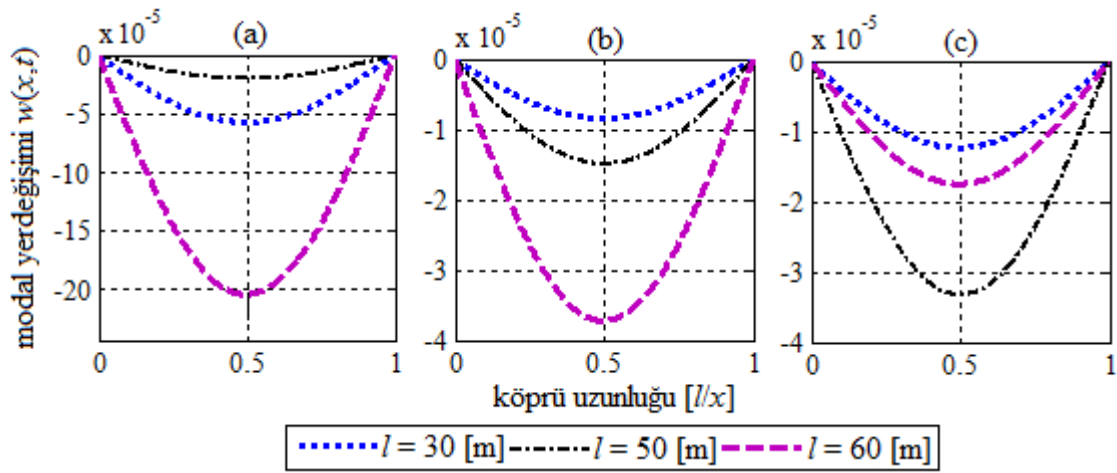
Kiriş orta noktasına statik bir kuvvet uygulandığında meydana gelen modal yerdeğişimleri, AAM'nin farklı uygulamalarıyla Eş.3.111 ve Eş.3.158'de elde edilen analitik ifadeler kullanılarak, Çizelge 5.1'deki verilere göre farklı kuvvet genlikleri ve kiriş uzunlukları için incelenmiştir. 40 m uzunluğundaki köprünün orta noktasına farklı büyüklüklerde (genliklerde) kuvvet uygulandığında meydana gelen modal yerdeğişimleri Şekil 5.1'de verilmiştir. Tüm modeller için kuvvet genliği arttıkça beklendiği gibi modal yerdeğişimi de artmış ve en büyük modal yer değişimi Model-1 köprüde elde edilmiştir.



Şekil 5.1. Orta noktasına farklı genliklerde kuvvet uygulanan sönümsüz kiriş modal yerdeğişimi, $l=40m$ a) Model-1, b) Model-2, c) Model-3

Aynı köprünün uzunluk değişiminin modal yerdeğişimine etkisinin değerlendirilmesi amacıyla köprü orta noktasına 60 kN kuvvet uygulanmış ve elde edilen grafikler Şekil 5.2'de verilmiştir. Model-2'de kiriş uzunluğu arttıkça beklendiği gibi modal yerdeğişimi de artarken, 50 m kiriş uzunluğunda Model-1 için en düşük, Model-3 için ise en büyük modal yerdeğişimi elde edilmiştir. Köprü modellerinin aynı uzunluklardaki modal

yerdeğişimlerinin karşılaştırılması amacıyla Şekil 5.2'deki tepe değerleri Çizelge 5.4'te sıralanmıştır. Buna göre Model-1'de en düşük modal yerdeğişimi kiriş uzunluğu 50 m olduğunda elde edilirken, kiriş uzunluğu 60 m olduğunda modal yerdeğişiminde 10 kat artış görülmüştür. Diğer modellerde Model-1'e kıyasla daha az yerdeğişimi meydana gelmesine rağmen 50 m kiriş uzunluğunda modeller arasındaki fark oldukça azdır. Bu durum orta noktasına statik bir kuvvet uygulanan kirişte, 50 m kiriş uzunluğu seçildiği takdirde yapı maliyetlerinin daha az olması sebebiyle Model-1 köprülerin tercih edilebileceğini göstermiştir.



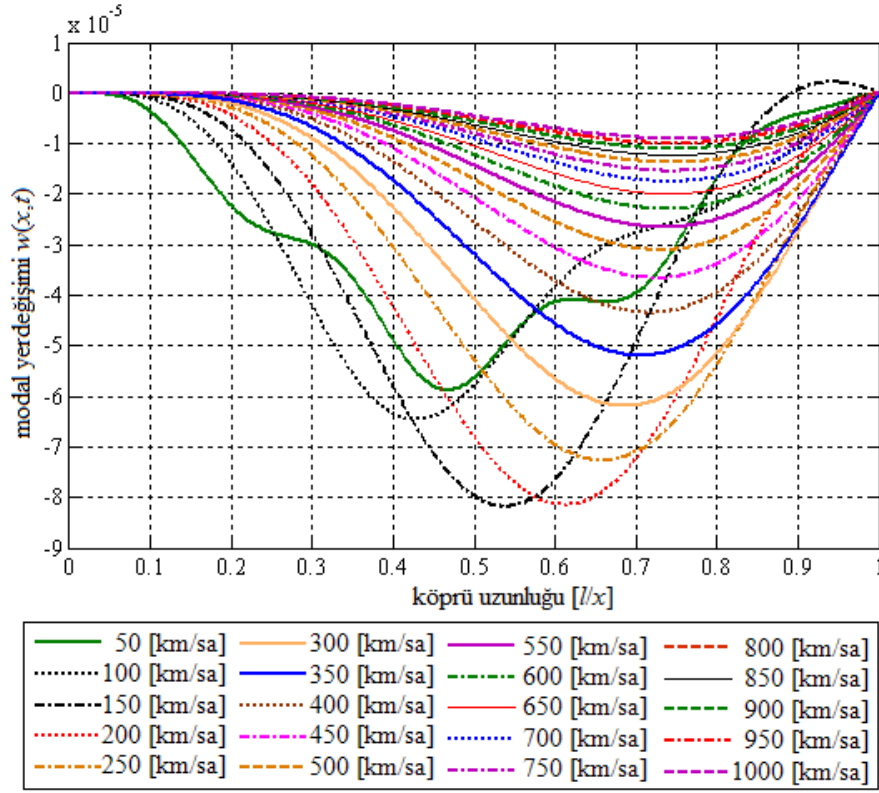
Şekil 5.2. Orta noktasına kuvvet uygulanan sönümsüz kiriş için uzunluk değişimine bağlı modal yerdeğişimi, $F=60$ kN a) Model-1, b) Model-2, c) Model-3

Çizelge 5.4. Orta noktasına kuvvet uygulanan sönümsüz kirişin farklı uzunluklarında, birinci moddaki modal yerdeğişimi tepe değerleri, $F=60$ kN

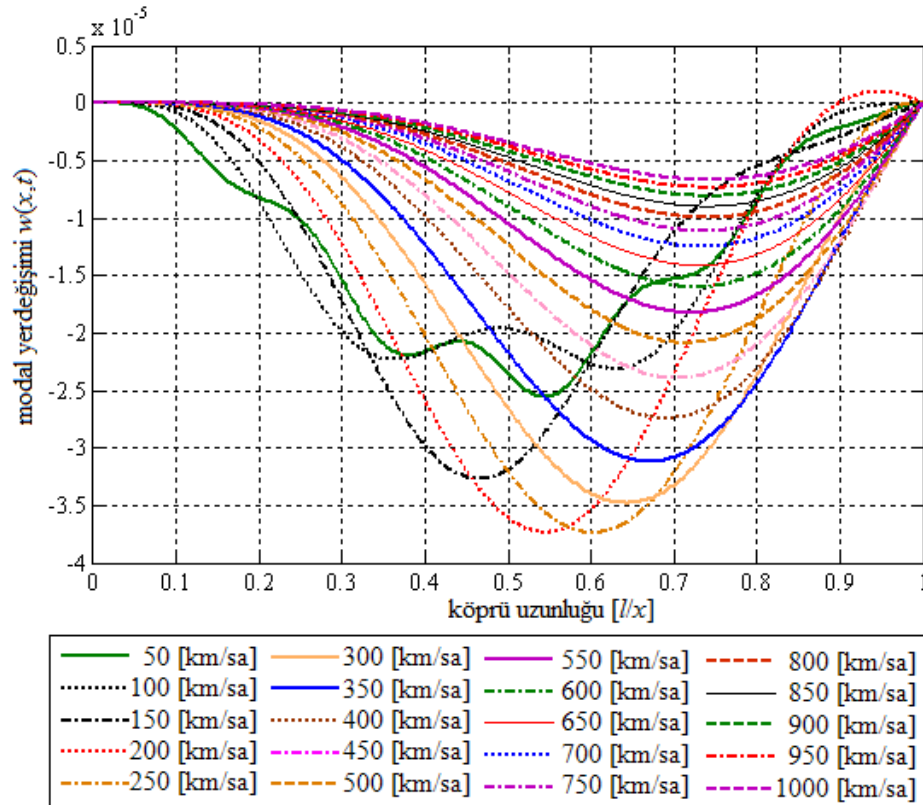
Kiriş uzunluğu	Model-1	Model-2	Model-3
30 m	5×10^{-5}	$0,9 \times 10^{-5}$	$1,2 \times 10^{-5}$
50 m	2×10^{-5}	$1,5 \times 10^{-5}$	$1,8 \times 10^{-5}$
60 m	20×10^{-5}	$3,8 \times 10^{-5}$	$3,4 \times 10^{-5}$

5.3. Üzerinden YHT Geçen Sönümsüz Köprü Titreşimi

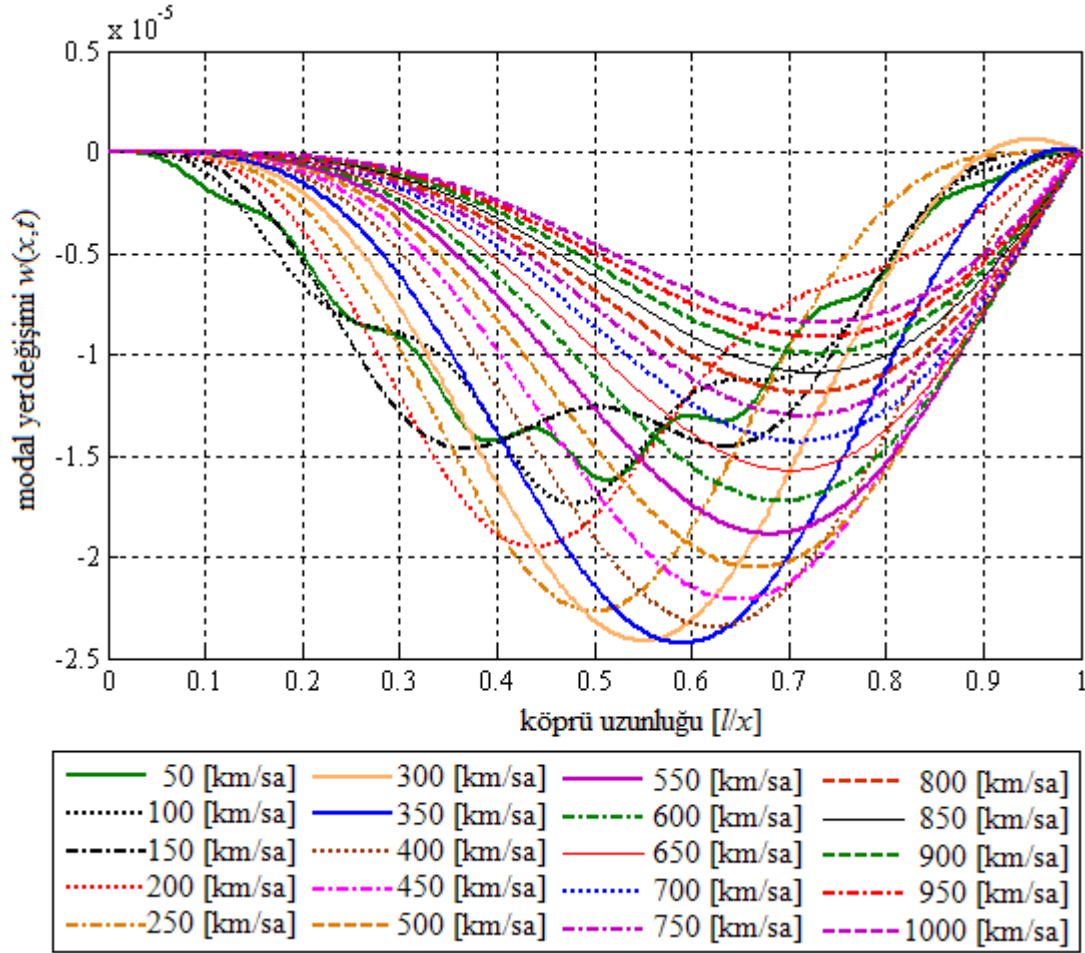
Köprü modal yerdeğişimleri, AAM'nin farklı uygulamalarıyla Eş. 3.137, Eş. 3.188 ve Eş. 3.214'te elde edilen analitik ifadeler kullanılarak farklı tren hızları, köprü uzunlukları, kuvvet genlikleri ve frekansları için incelenmiştir. Hız değişiminin birinci modda köprü modal yerdeğişimine etkisinin değerlendirilmesi amacıyla elde edilen grafikler Model-1 için Şekil 5.3'te, Model-2 için Şekil 5.4'te ve Model-3 için de Şekil 5.5'te verilmiştir.



Şekil 5.3. Model-1 için hız değişimine bağlı sönümsüz kiriş modal yerdeğişimi, $F=60 \text{ kN}$, $l=40 \text{ m}$



Şekil 5.4. Model-2 için hız değişimine bağlı sönümsüz kiriş modal yerdeğişimi, $F=60 \text{ kN}$, $l=40 \text{ m}$



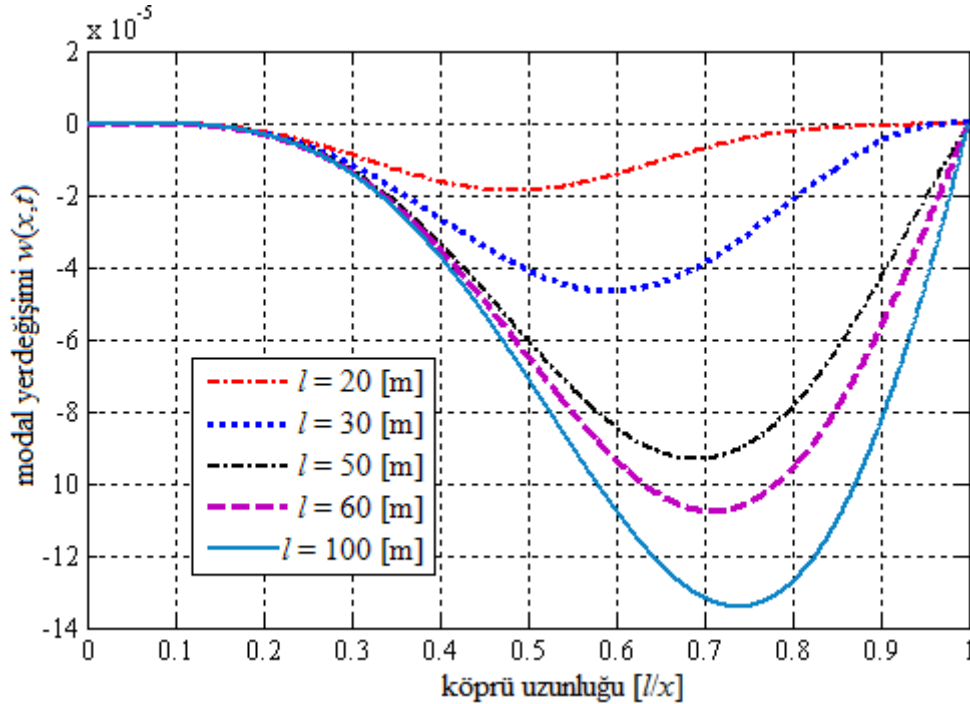
Şekil 5.5. Model-3 için hız değişimine bağlı sönümsüz kiriş modal yerdeğişimi, $F=60 \text{ kN}$, $l=40 \text{ m}$

Tüm köprü modellerinde, tren hızı arttıkça modal yerdeğişimlerinin önce arttığı, Model-1’de 200 km/sa , Model-2’de 250 km/sa ve Model-3’te de 350 km/sa eşik hız değerinden sonra azalarak sifıra yaklaştığı, en büyük yerdeğiştirmenin olduğu tepe noktasının tren hareket yönüne de bağlı olarak yatay ekseninde sağa doğru ötelendiği görülmüştür. Çizilen bu grafiklerdeki tepe değerleri, köprü modellerinin aynı tren hızlarındaki modal yerdeğişimlerinin karşılaştırılması amacıyla Çizelge 5.5’te sıralanmıştır. Düşük tren hızlarında en büyük modal yerdeğişimi Model-1 köprülerde elde edilmiş olsa da, tren hızı arttıkça Model-1’de %50’ye, diğer modellerde de %30’a yakın bir düşüş gözlemlenerek, tüm modellerin aynı hızdaki modal yerdeğişimi değerleri birbirine yaklaşmıştır. Bu durum, köprü uzunluğu kısa tutulup, köprü doğal frekansı artırılarak, rezonans riski en aza indirildiği takdirde yüksek tren hızları için Model-1 köprülerin tercih edilebileceğini göstermiştir.

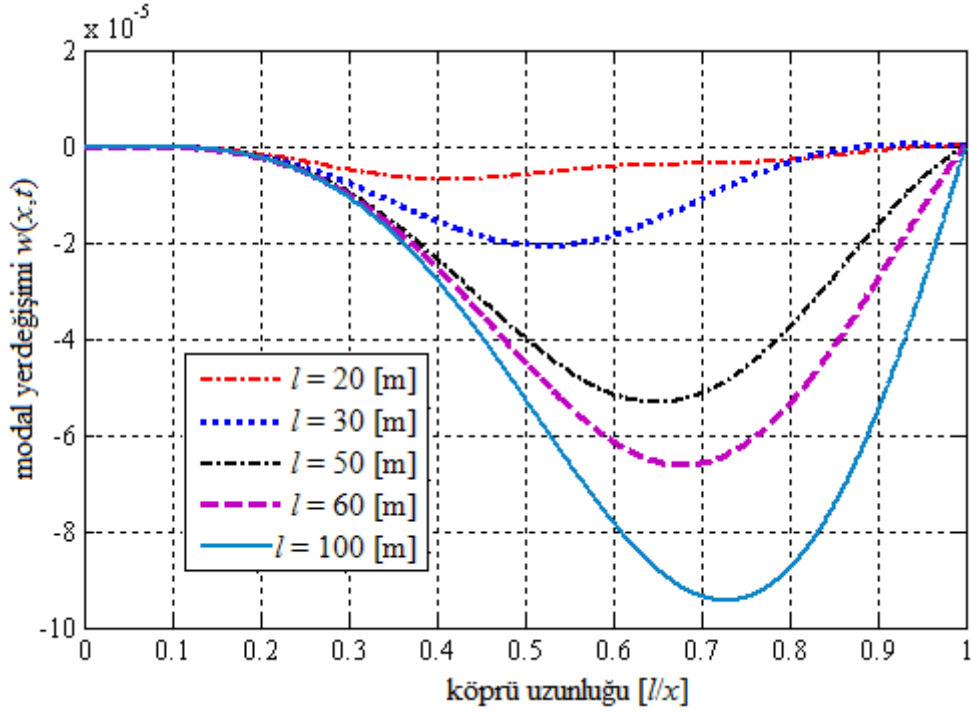
Çizelge 5.5. YHT'lerin farklı hızlarında, köprü modellerinin birinci moddaki modal yerdeğişimi tepe değerleri, $F=60 \text{ kN}$, $l=40 \text{ m}$

YHT hızı	Model-1	Model-2	Model-3
200 km/sa	$8,14 \times 10^{-5}$	$3,71 \times 10^{-5}$	$1,9 \times 10^{-5}$
250 km/sa	$7,25 \times 10^{-5}$	$3,7 \times 10^{-5}$	$2,25 \times 10^{-5}$
300 km/sa	$6,2 \times 10^{-5}$	$3,48 \times 10^{-5}$	$2,4 \times 10^{-5}$
350 km/sa	$5,2 \times 10^{-5}$	$3,1 \times 10^{-5}$	$2,4 \times 10^{-5}$
400 km/sa	$4,2 \times 10^{-5}$	$2,7 \times 10^{-5}$	$2,3 \times 10^{-5}$
600 km/sa	$2,2 \times 10^{-5}$	$1,6 \times 10^{-5}$	$1,7 \times 10^{-5}$

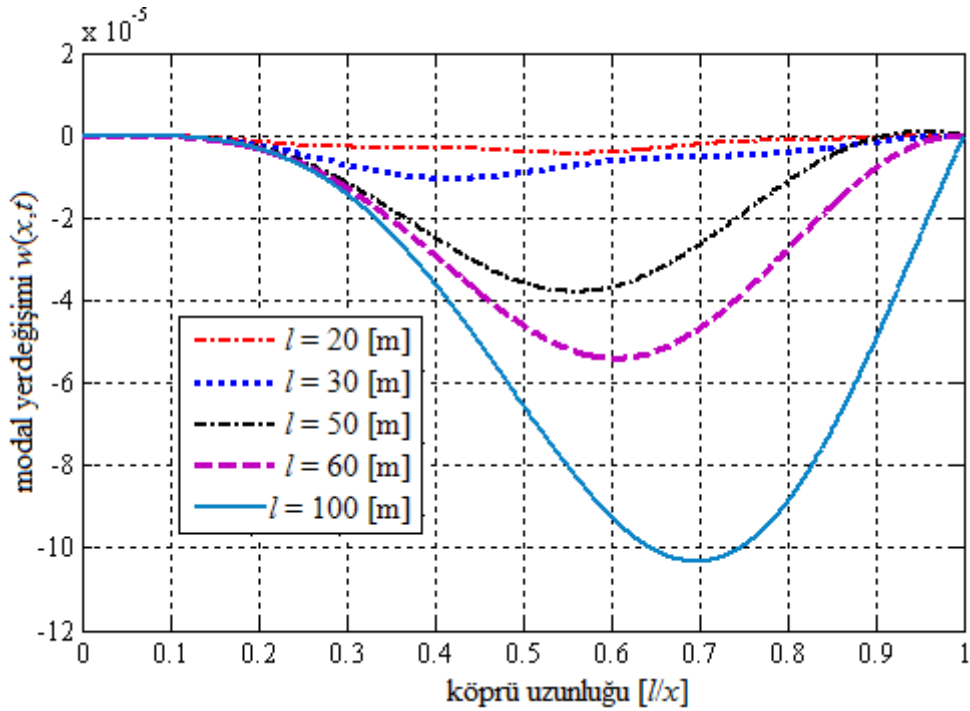
Köprü uzunluk değişiminin, YHT geçişi sırasında meydana gelen modal yerdeğişimlerine etkisi Şekil 5.6, Şekil 5.7 ve Şekil 5.8'de sırasıyla Model-1, Model-2 ve Model-3 için verilmiştir. Beklendiği gibi köprü uzunluğu arttıkça modal yerdeğişimi de artmış ve en büyük yerdeğiştirmenin olduğu tepe noktası tren hareket yönüne de bağlı olarak yatay ekseninde sağa doğru ötelenmiştir. Kiriş uzunluğu arttıkça tüm köprü modellerinin aynı uzunluktaki modal yerdeğişimi tepe değerleri birbirine yaklaşmıştır. Fakat köprü uzunluğundaki artış doğal frekans değerlerinde azalmaya sebep olduğundan köprü rezonans riski de artacağından uzun kirişli YHT köprülerinde Model-3 yapısal özelliklerinin tercih edilmesi daha doğru olacaktır.



Şekil 5.6. Model-1 için uzunluk değişimine bağlı sönümsüz kiriş modal yerdeğişimi, $\theta = 250 \text{ km/sa}$, $F=60 \text{ kN}$



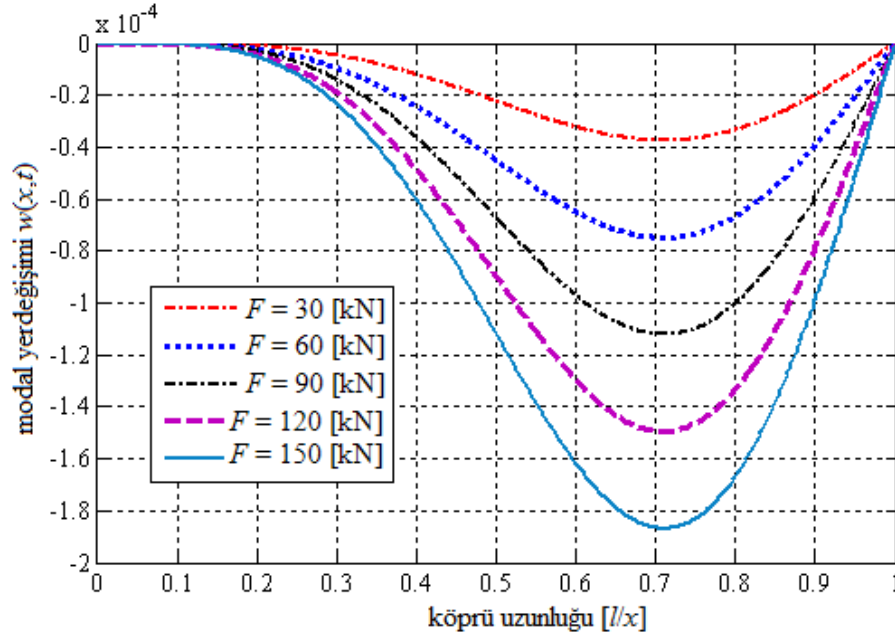
Şekil 5.7. Model-2 için uzunluk değişimine bağlı sönümsüz kiriş modal yerdeğişimi, $\vartheta = 250 \text{ km/sa}$, $F=60 \text{ kN}$



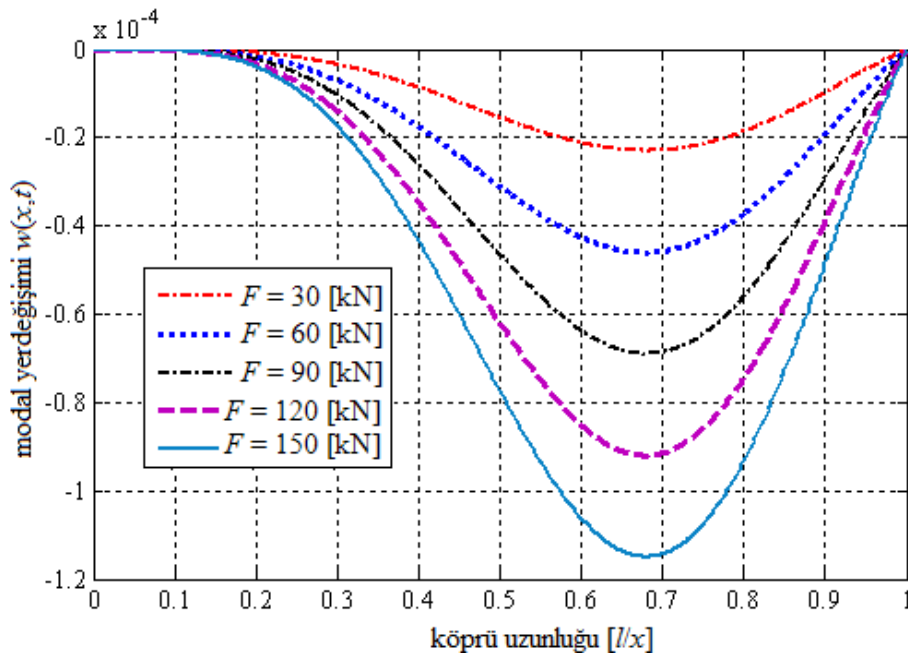
Şekil 5.8. Model-3 için uzunluk değişimine bağlı sönümsüz kiriş modal yerdeğişimi, $\vartheta = 250 \text{ km/sa}$, $F=60 \text{ kN}$

Kuvvet genliğindeki değişimin YHT geçişi sırasında meydana gelen modal yerdeğişimine etkisinin değerlendirilmesi amacıyla elde edilen grafikler Model-1, Model-2 ve Model-3

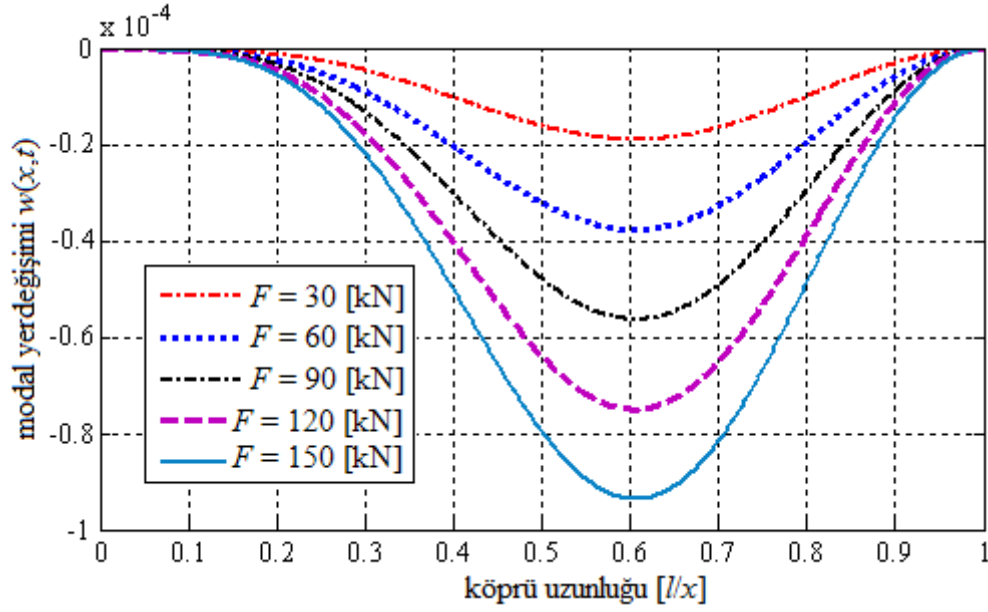
için Şekil 5.9, Şekil 5.10 ve Şekil 5.11’de sırayla verilmiştir. Tüm köprü modelleri için uygulanan kuvvetin genliği arttıkça beklendiği gibi modal yerdeğişimi de artmış ve en büyük yerdeğiştirmenin olduğu tepe noktasının yatay eksendeki konumunda herhangi bir değişim olmamıştır.



Şekil 5.9. Model-1 için kuvvet genliği değişimine bağlı sönümsüz kiriş modal yerdeğişimi, $l=50$ m, $\vartheta = 300$ km/sa

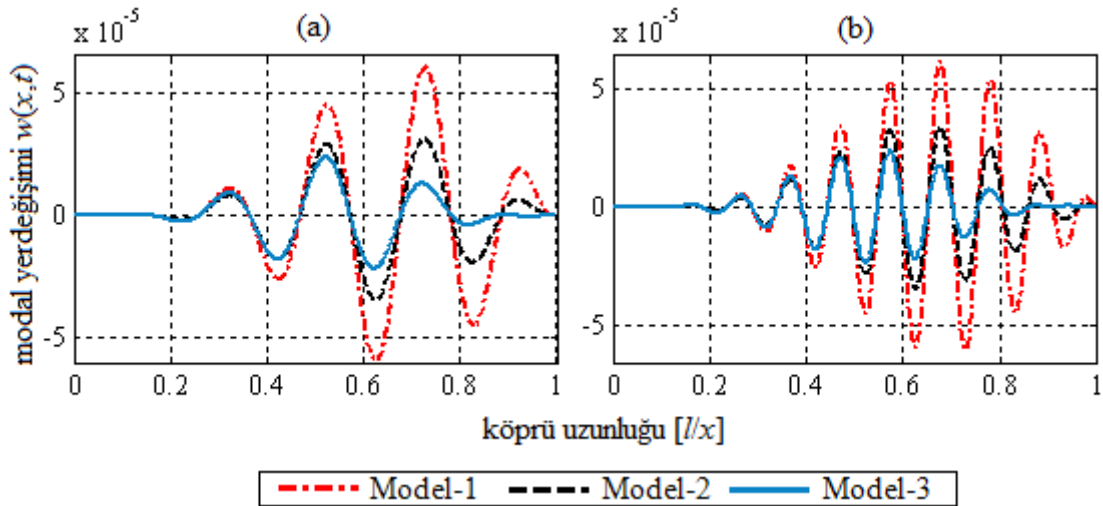


Şekil 5.10. Model-2 için kuvvet genliği değişimine bağlı sönümsüz kiriş modal yerdeğişimi, $l=50$ m, $\vartheta = 300$ km/sa



Şekil 5.11. Model-3 için kuvvet genliği değişimine bağlı sönümsüz kiriş modal yerdeğişimi, $l=50$ m, $\vartheta = 300$ km/sa.

Diğer modellere kıyasla en küçük modal yerdeğişimi genliklerinin Model-3 köprülerde meydana gelmiştir. Bu durum, ağır yük taşıyan YHT'lerin geçeceği demir yolu köprülerinde, EI çarpım değerinin yüksek, ρA çarpım değerinin ise düşük olduğu yapı malzemelerinin tercih edilmesi gerektiğini göstermiştir. Demiryolu köprüsünden geçen tren hızının bir fonksiyonu olan frekans ile harmonik titreşim üreten YHT'lerin farklı frekans değerleri için köprü modal yerdeğişimleri Şekil 5.12'de verilmiştir.

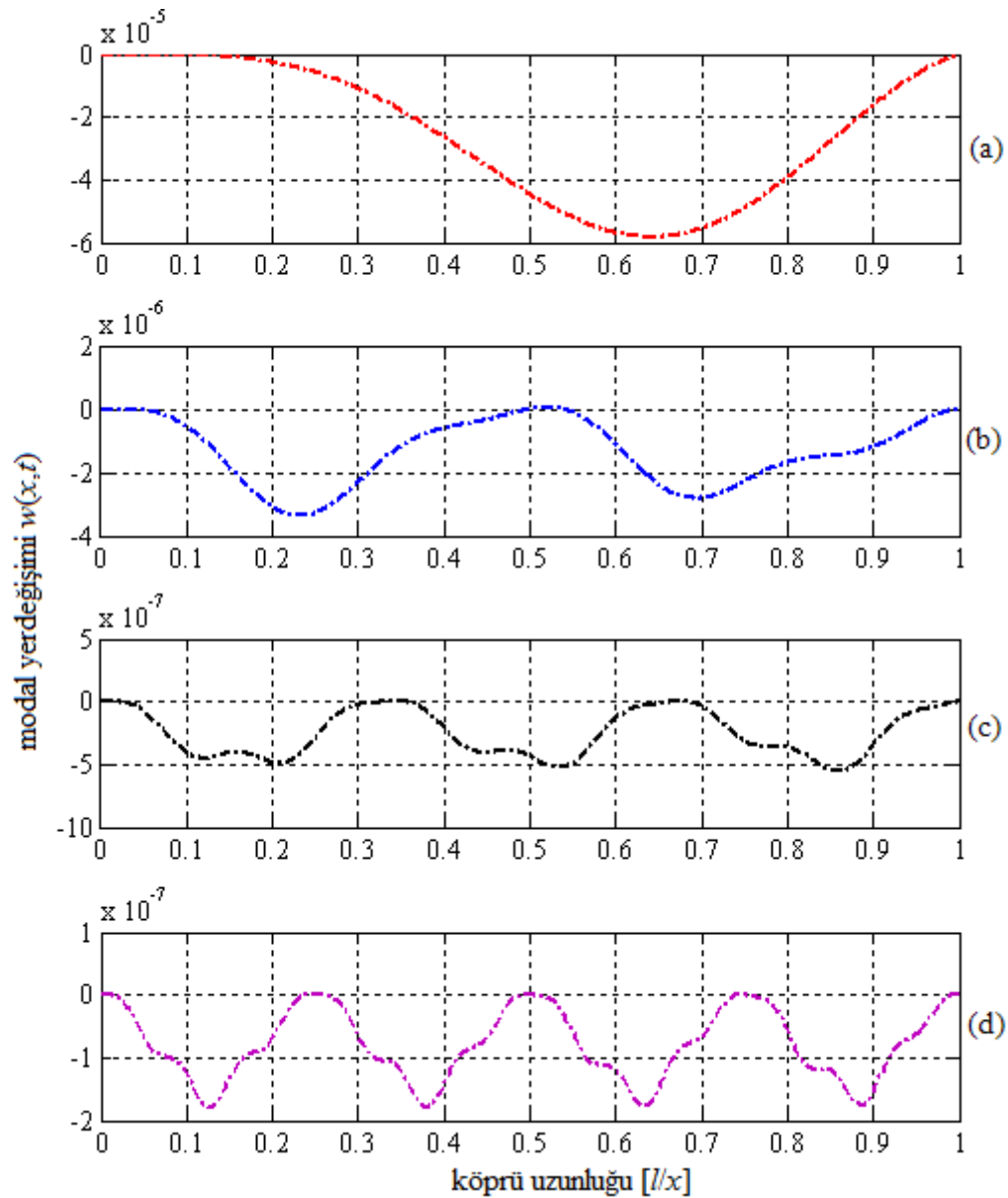


Şekil 5.12. Köprü modellerinin kuvvet frekans değişimine bağlı modal yerdeğişimi, $F=60$ kN, $\vartheta = 300$ km/sa a) 10 [Hz], b) 20 [Hz]

Beklendiği gibi frekans arttıkça köprü titreşimi de artmış ve aynı frekans değerlerinde köprü modelleri karşılaştırıldığında en büyük titreşim genliği Model-1 köprülerde elde

edilmiştir. Traversli ray yapılarının tren hızı arttıkça zorlama frekansında artış yönünde bir etki meydana getirmesi, YHT demiryolu köprü tasarımları için bu yapıların uygun olmadıklarını göstermiştir.

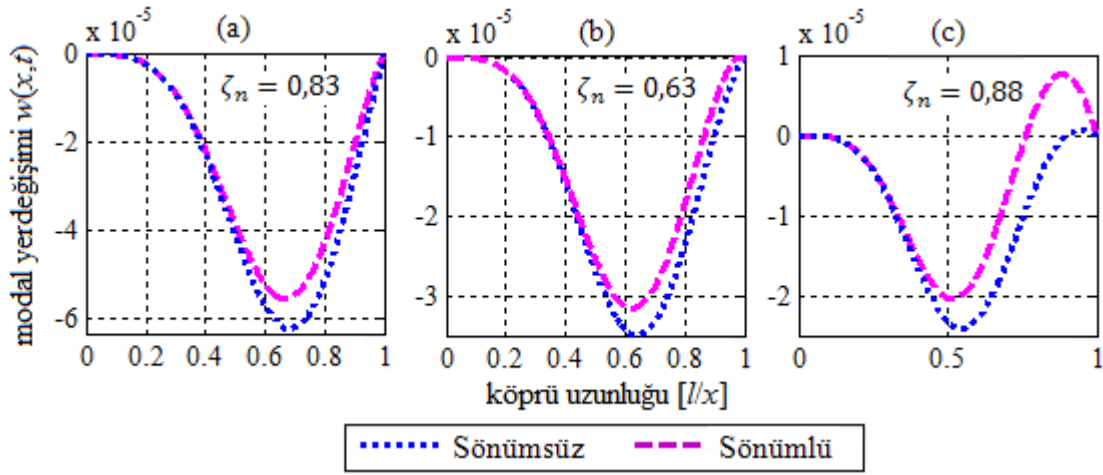
Mod sayısındaki artışın modal yerdeğişiminde meydana getirdiği etkinin değerlendirilmesi amacıyla Model-2'nin ilk dört moddaki yerdeğişimleri ele alınmış ve çizilen grafikler Şekil 5.13'te verilmiştir. Beklendiği gibi mod sayısı arttıkça titreşim genliği azalmıştır.



Şekil 5.13. Model-2 köprüünün ilk dört moddaki modal yerdeğişimleri, $\vartheta = 300 \text{ km/sa}$, $F=100 \text{ kN}$, $l=40 \text{ m}$ a) 1. mod, b) 2. mod, c) 3. mod, d) 4. mod

5.4. Sönümlü EB Kirişi Olarak Modellenen YHT Demiryolu Köprüsü Titreşimi

Dinamik analizlerde sönüm oldukça önemli bir parametre olup, sönüm arttırıldığı takdirde köprü rezonansı engellenebilmektedir. Sönüm etkisinin kiriş titreşiminde meydana getirdiği değişimin görülmesi amacıyla Eş. 3.214’de sönümsüz kiriş için ve Eş. 4.33’te sönümlü kiriş için elde edilen analitik ifadeler kullanılarak sönüm katsayısı $c=16000$ kabul edilip sönüm değerleri hesaplanmış ve bunlara göre çizilen modal yerdeğişimi grafikleri Şekil 5.14’te verilmiştir. Tüm modellerde beklendiği gibi modal yerdeğişimi genliği azalmış ve en büyük yer değişimi tepe noktası yatay ekseninde sola doğru kaymıştır.



Şekil 5.14. Köprü modellerinin, sönümlü ve sönümsüz durum için modal yerdeğişimleri, $c=16000, \vartheta = 300 \text{ km/sa}, F=60 \text{ kN}, l=40\text{m}$ a) Model-1, b) Model-2, c) Model-3

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Son yıllarda köprü dinamiği konusunda yapılan araştırmalardan farklı olarak, zorlanmış kiriş titreşimi modal yerdeğişimi analitik ifadelerinin, kuvvetin farklı uygulama biçimleri, özellikle de bir YHT köprüsünün tren geçişi sırasındaki durumu için AAM'ler uygulanarak elde edildiği bu çalışma ile hareketli kuvvetin köprü dinamiğine etkileri çizilen modal yerdeğişimi grafikleri ile değerlendirilmiştir.

Hızlı tren demiryolu köprü tasarım hesaplarında, inşaat uygulamalarında genelde sonlu farklar ya da sonlu elemanlar yöntemi olarak bilinen bilgisayar destekli nümerik metodlar kullanılmaktadır. Dördüncü mertebe, homojen olmayan, kısmi diferansiyel denklem ile ifade edilen, tren geçişine bağlı titreşim hareket denklemlerinin çözümü konusunda ise analitik yöntemler sınırlıdır. Uygulamalı matematikte son yıllarda diferansiyel denklem çözümleri konusunda yeni yöntemler geliştirilmiştir. AAM metodu da bu yöntemlerden biridir.

Bu çalışmada, literatürde nispeten yeni geliştirilmiş analitik yöntemlerden AAM, DAAM ve GAAM'lerin YHT demiryolu köprü dinamik analizinde hareket denklemi çözümünde uygulanabilirliği incelenmiştir. Köprü ve tren etkileşimi iki boyutlu model şeklinde basitleştirilerek, tren köprü doğrultusuna dik hareketli bir kuvvet, YHT köprüsü ise dönme, kayma ve burulma ataletleri ihmal edilmiş, basit mesnetli, EB kirişi şeklinde modellenmiştir. Öncelikle, sönümsüz serbest kiriş için genelleştirilmiş doğal frekans ve n . mod şekil fonksiyonu ifadeleri elde edilmiş ve kuvvetin farklı uygulama biçimleri için kiriş matematiksel modellemeleri yapılmıştır. Bu modellere göre dördüncü mertebe, homojen olmayan, kısmi diferansiyel denklem şeklinde ifade edilen hareket denklemleri yazılmıştır. Elde edilen bu denklemler, sınır ve başlangıç şartları dikkate alınarak modal analiz ile ikinci mertebe, homojen olmayan adi diferansiyel denklem haline dönüştürülmüş ve modal yerdeğişimi AAM ve bu metodun değiştirilmiş ve geliştirilmiş formları uygulanarak seri açılım şeklinde ifade edilmiştir. Bu sonsuz seri açılımlarda Taylor ve Binom açılımları kullanılarak genel ifadeler elde edilmiş ve sönüm etkisinin de dikkate alındığı kiriş hareket denklemi çözümü için de benzer işlemler tekrarlanmıştır.

Elde edilen analitik ifadeler, köprü yapısal özellikleri ve YHT özelliklerinin etkilerinin değerlendirilmesi amacıyla farklı kiriş özellikleri, kuvvet genlikleri, zorlama frekansları ve

tren hızları için sayısal olarak çözümlenmiş ve tek geçişli köprüde meydana gelen modal yerdeğişimleri boyutsuz köprü uzunluklarına göre grafik halinde gösterilmiştir. Bu grafikler köprü-tren dinamik ilişkisi açısından değerlendirildiğinde,

- Köprü uzunluğu ve ρA çarpım değeri arttıkça giriş doğal frekansının azaldığı,
- Mod sayısı ve EI çarpım değeri arttığında köprü doğal frekansının da arttığı,
- Köprü doğal frekansının düşük olması sebebiyle rezonans riski en yüksek köprü tipinin betonarme YHT köprüleri (Model-1) olduğu,
- Gerek statik ve gerekse hareketli kuvvet uygulanan köprülerde kuvvet genliği arttıkça giriş modal yerdeğişiminin de arttığı, en büyük modal yerdeğişiminin elde edildiği tepe noktasının giriş yatay eksenindeki konumunun değişmediği,
- Orta noktasına statik bir kuvvet uygulanan girişte, 50 m giriş uzunluğu seçildiği takdirde yapı maliyetlerinin daha az olması sebebiyle Model-1 köprülerin tercih edilebileceği,
- Tüm köprü modellerinde, tren hızı arttıkça modal yerdeğişimlerinin azaldığı, en büyük yerdeğiştirmenin olduğu tepe noktasının tren hareket yönüne de bağlı olarak yatay ekseninde sağa doğru ötelendiği,
- Köprü uzunluğu kısa tutulup, köprü doğal frekansı artırılarak, rezonans riski en aza indirildiği takdirde yüksek tren hızları için betonarme köprülerin tercih edilebileceği,
- Köprü uzunluğu arttıkça modal yerdeğişiminin de arttığı ve en büyük yerdeğiştirmenin olduğu tepe noktasının tren hareket yönüne de bağlı olarak yatay ekseninde sağa doğru ötelendiği,
- Köprü uzunluğundaki artış, doğal frekans değerlerinde azalmaya sebep olduğundan köprü rezonans riski de artacağı için uzun girişli YHT köprülerinde çelik-betonarme kompozit köprülerin tercih edilmesinin daha doğru olacağı,
- Ağır yük taşıyan YHT'lerin geçeceği demir yolu köprülerinde, EI çarpım değerinin yüksek, ρA çarpım değerinin ise düşük olduğu yapı malzemelerinin tercih edilmesi gerektiği,
- Zorlama frekansı arttıkça köprü titreşiminin de arttığı ve aynı frekans değerlerinde köprü modelleri karşılaştırıldığında en büyük titreşim genliğinin betonarme köprülerde meydana geldiği,
- Köprü üzerinden geçen YHT'ler, tren hızının bir fonksiyonu olan frekans ile harmonik titreşim ürettiklerinden, traversli ray yapısının yüksek hızlar için uygun olmadığı,

- Mod sayısı arttıkça beklendiği gibi titreşim genliğinin azaldığı,
- Sönüm etkisi de dikkate alındığında modal yerdeğişimi genliğinin azaldığı ve en büyük yer değişimi tepe noktasının yatay ekseninde sola doğru kaydığı,
- Düzgün kesitli, sönümsüz kiriş hareket denklemi çözümlerinde, denklemin sağ tarafındaki ifade zamana bağlı bir fonksiyon olduğu takdirde GAAM'nin uygulanabildiği, aksi halde homojen olmayan terim polinomlarının hesabında türev sonuçları sıfır çıkacağından modal yerdeğişimi ifadelerinin elde edilemediği, görülmüştür.

Fiziksel açıdan beklenen sonuçların elde edilmesi, AAM ve bu metodun değiştirilmiş ve geliştirilmiş formlarının köprü dinamik analizlerinde etkin bir şekilde kullanılabileceğini ve doğrusal olmayan etkilerin de dikkate alındığı daha karmaşık denklem çözümlerinde de uygulanabileceğini göstermiştir.

Bu çalışmada, analitik çözümlerin kolaylaştırılması amacıyla dönme, kayma ve burulma ataletleri ihmal edilerek EB kiriş teorisi uygulanmıştır. Fakat bu ataletlerin zorlanmış kiriş titreşiminde meydana getirecekleri etkinin değerlendirilmesi amacıyla hareketli yüke maruz YHT köprüleri, Rayleigh ve Timoshenko modeli hareket denklemleri ile ifade edilerek modal yerdeğişimleri elde edilebilir. Basit mesnetli kabul ettiğimiz köprülerin dinamik davranışı elastik sınır şartları için de incelenebilir. Ayarlı kütle sönümleyici ya da viskoz sönümleyiciler sisteme dahil edilerek YHT köprülerinin dinamiği araştırılabilir.

Bu çalışmada, tek geçişli olarak modellediğimiz YHT köprüleri çok geçişli düşünülerek tüm kirişlerin tren hareketi sırasındaki dinamik davranışları incelenebilir. Doğrusal tek bir kiriş şeklinde modellediğimiz YHT köprüsü, ray ve alt yapısı arasında bir dizi yay-sönümleyici grubu olan birbirine paralel iki kiriş şeklinde düşünülerek, sönümleyici etkisinin köprü-tren dinamiğinde meydana getireceği değişim araştırılabilir. YHT köprüleri uzunluğu boyunca kesiti değişen konik kiriş şeklinde düşünülerek, kuvvetin farklı uygulama biçimleri için hareket denklemlerinin analitik çözümü denenebilir. Trafik yüküne maruz çok geçişli köprülerde, kiriş kesitleri birbirinden farklı kabul edilerek, kiriş kademelerinin modal yer değişiminde meydana getireceği etkiler incelenebilir.

Köprü üzerinde ilerleyen tek bir kuvvet şeklinde modellediğimiz YHT'ler birbiri ardına sıralı hareketli kuvvet, dönen kütle ya da kütle-yay-sönümleyici grubu şeklinde

modellenerek periyodik yüklerin köprü dinamiğine etkisi incelenebilir. Tek hatlı modellediğimiz YHT köprüleri çift hatlı kabul edilerek, YHT geçişi sırasında oluşacak yanal kuvvetlerin köprü dinamiğine etkisi araştırılabilir. Ayrıca şiddetli rüzgar ya da sismik yer hareketlerinin YHT köprülerinde yaratacağı düzensiz titreşimler doğrusal olmayan ifadelerle hareket denklemlerine eklenerek bu denklemlerin analitik çözümleri AAM uygulanarak elde edilmeye çalışılabilir.

Bu çalışmada, AAM ve bu metodun değiştirilmiş ve geliştirilmiş formlarını kullanarak elde ettiğimiz kiriş modal yerdeğişimleri VIM, HAM ya da HPM gibi farklı yöntemler de kullanılarak elde edilmeye çalışılabilir ve bulunan sonuçlar karşılaştırılarak yöntemlerin etkinliği tartışılabilir.

Yukarıda sıralanan model önerilerinden AAM yöntemleri kullanılarak elde edilecek tüm analitik ifadeler sayısal olarak çözümlenerek yüksek hızlara dayanıklı köprü tasarımında ve mevcut köprülerin güçlendirilmesinde optimum parametre seçimi konusunda araştırmalar yapılabilir. Benzer adımlar otoyol köprülerinde araç trafiği etkisiyle oluşacak titreşim hesapları için de tekrarlanabilir.

Kiriş titreşim hesaplarında, küçük parametre varsayımlarına gerek kalmadan, seri açılım şeklinde de olsa mutlaka bir çözümün elde edilebildiği AAM yöntemleri ile doğru ve güvenilir sonuçların elde edilmesi, gelecekte biyomekanik, akışkanlar mekaniği, ısı transferi, mikrobiyoloji, nükleer enerji vb birçok farklı alanda da kullanılan homojen ve doğrusal olmayan adi ve kısmi diferansiyel denklem çözümlerinin yapılabileceğini göstermiştir.

KAYNAKLAR

1. Chandra, S., and Agarwal, M.M. (2007). *Railway Engineering*, (First Edition). India. Oxford University Press, 581-584.
2. Dias, R.F.S. (2007). *Dynamic Behaviour of High Speed Railway Bridges Vehicles Lateral Dynamic Behaviour*, Master Thesis, Instituto Superior Técnico Universidad Politécnica, Madrid, 3-6, 18-20, 33, 71-72.
3. James, G. (2003). *Analysis of Traffic Load Effects on Railway Bridges*, Doctoral Thesis, Structural Engineering Division Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 7-15, 33.
4. Björklund, L. (2004). *Dynamic Analysis of a Railway Bridge Subjected to High Speed Trains*, Master Thesis, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 1, 2, 6, 10, 11, 14-25, 49, 50, 112, 113.
5. Muserosa, P., and Martinez-Rodrigo, M.D. (2007). Vibration control of simply supported beams under moving loads using fluid viscous dampers. *Journal of Sound and Vibration*, 300, 292-315.
6. Museros, P., Moliner, E., and Martinez-Rodrigo, M.D. (2013). Free vibrations of simply-supported beam bridges under moving loads: Maximum resonance, cancellation and resonant vertical acceleration. *Journal of Sound and Vibration*, 332, 326-345.
7. Johansson, C. (2013). *Simplified Dynamic Analysis of a Railway Bridges Under High Speed Trains*, Licentiate Thesis, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 14, 21, 41, 42.
8. Ekström, D., and Kieri, L. (2007). *Dynamic Analysis of a Railway Bridges Simplified Modelling Using SDOF Technique*, Master Thesis, Civil and Environmental Structural Engineering, Chalmers University Of Technology, Göteborg, Sweden, 97, 98.
9. Liu, K., De Roeck, G., and Lombaert, G. (2009). The effect of dynamic train-bridge interaction on the bridge response during a train passage. *Journal of Sound and Vibration*, 325, 240-251.
10. Goicolea, J.M., and Antolín, P. (2012). *Coupled Models for the Dynamics of Bridges under High-Speed Rail Traffic*. A Symposium to Honour Professor Enrique Alarcón, Madrid. UPM Press, pp163-174.
11. Li, X.Y., Zhao, X., and Li, Y.H. (2014). Green's functions of the forced vibration of Timoshenko beams with damping effect. *Journal of Sound and Vibration*, 333, 1781–1795.
12. Hryniewicz, Z. (2011). Dynamics of Rayleigh beam on nonlinear foundation due to moving load using Adomian decomposition and colflet expansion. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 31, 1123-1131.

13. Ichikawa, M., Miyakawa, Y., and Matsuda, A. (2000). Vibration analysis of the continuous beam subjected to a moving mass. *Journal of Sound and Vibration*, 230 (3) 493-506.
14. Chan, T.H.T., and Ashebo, D.B. (2006). Theoretical study of moving force identification on continuous bridges. *Journal of Sound and Vibration*, 295, 870-883.
15. Asnachinda, P., Pinkaew, T., and Laman, J.A. (2008). Multiple vehicle axle load identification from continuous bridge bending moment response. *Engineering Structures*, 30, 2800-2817.
16. Gustafsson, A. (2008). *Reduced Models For Dynamic Analysis Of High-Speed Railway Bridges*, Master Thesis, Lund University, Structural Mechanics, Sweden, 63.
17. Wiberg, J. (2009). *Railway Bridge Response To Passing Trains: Measurements And FE Model Updating*, Doctoral Thesis, Royal Institute of Technology in Stockholm, Civil and Architectural Structural Engineering, Sweden, 3, 11, 23-25.
18. DeSalvo, V., Muscolino, G., and Palmeri, A. (2010). A substructure approach tailored to the dynamic analysis of multi-span continuous beams under moving loads. *Journal of Sound and Vibration*, 329, 3101-3120.
19. Mellier, C. (2010). *Optimal Design of Bridges for High-Speed Trains: Single and Double-Span Bridges*, Master Thesis, Royal Institute of Technology in Stockholm, Civil and Architectural Structural Engineering, Sweden, 20, 21, 29, 59.
20. Vu, H. V., Ordonez, A. M., and Karnopp, B. H. (2000). Vibration Of A Double-Beam System. *Journal of Sound and Vibration*, 229 (4) 807-822.
21. Abu-Hilal, M. (2006). Dynamic response of a double Euler–Bernoulli beam due to a moving constant load. *Journal of Sound and Vibration*, 297, 477-491.
22. Dimitrovova, Z. (2010). A general procedure for the dynamic analysis of finite and infinite beams on piece-wise homogeneous foundation under moving loads. *Journal of Sound and Vibration*, 329, 2635-2653.
23. Shadnam, M.R., Mofid, M., and Akin, J.E., (2001). On the dynamic response of rectangular plate, with moving mass. *Thin-Walled Structures*, 39, 797-806.
24. Eftekhari, S.A., and Jafari, A.A. (2012). A mixed method for free and forced vibration of rectangular plates. *Applied Mathematical Modelling*, 36, 2814-2831.
25. Amiri, J.V., Nikkhoo, A., Davoodi, M.R., and Hassanabadi, M.E. (2013). Vibration analysis of a Mindlin elastic plate under a moving mass excitation by eigenfunction expansion method. *Thin-Walled Structures*, 62, 53-64.
26. Mofid, M., Tehranchi, A., and Ostadhossein, A. (2010). On the viscoelastic beam subjected to moving mass. *Advances in Engineering Software*, 41, 240-247.
27. Greco, A., and Santini, A. (2002). Dynamic response of a flexural non-classically damped continuous beam under moving loadings. *Computers and Structures*, 80, 1945-1953.

28. Jovanovic, V. (2011). A Fourier series solution for the transverse vibration response of a beam with a viscous boundary. *Journal of Sound and Vibration*, 330, 1504-1515.
29. Wang, J.F., Lin, C.C., and Chen, B.L. (2003). Vibration suppression for high-speed railway bridges using tuned mass dampers. *International Journal of Solids and Structures*, 40, 465-491.
30. Kwon, H.C., Kim, M.C., and Lee, I.W. (1998). Vibration Control Of Bridges Under Moving Load. *Computers and Structures*, 66 (4) 473-480.
31. Guo, Y.Q., and Chen, W.Q. (2007). Dynamic analysis of space structures with multiple tuned mass dampers. *Engineering Structures*, 29, 3390-3403.
32. Luu, M., Zabel, V., and Könke, C. (2012). An optimization method of multi-resonant response of high-speed train bridges using TMDs. *Finite Elements in Analysis and Design*, 53, 13-23.
33. Wu, Y.S., Yang, Y.B., and Yau, J.D. (2001). Three-Dimensional Analysis of Train-Rail-Bridge Interaction Problems. *Vehicle System Dynamics*, 36 (1) 1-35.
34. Zhang, Z.C., Lin, J.H., Zhang, Y.H., Zhao, Y., Howson, W.P., and Williams, F.W. (2010). Non-stationary random vibration analysis for train-bridge systems subjected to horizontal earthquakes. *Engineering Structures*, 32, 3571-3582.
35. Zhanga, Z., Zhang, Y., Lin, J. Zhao, Y., and Howson, W.P. (2011). Williams, F.W. (2011). Random vibration of a train traversing a bridge subjected to traveling seismic waves. *Engineering Structures*, 33, 3546-3558.
36. Koroma, S.G., Hussein, M.F.M., and Owen, J.S. (2014). Vibration of a beam on continuous elastic foundation with nonhomogeneous stiffness and damping under a harmonically excited mass. *Journal of Sound and Vibration*, 333, 2571-2587.
37. Gupta, A., and Ahuja, A.S. (2014). Dynamic Analysis of Railway Bridges under High Speed Trains. *Universal Journal of Mechanical Engineering*, 2(6), 199-204.
38. Bilik, F., and Karaçay, T. (2015, March). *Vibration Analysis of a High Speed Railway Bridge Modelled as Simply Supported Euler-Bernoulli Beam*. First International Congress On Advanced Railway Engineering, İstanbul, Turkey.
39. Oliveto, G. (1997). Complex modal analysis of a flexural vibrating beam with viscous end conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 200 (3), 327-345.
40. Ding, H., Chen, L.Q., and Yang, S.P. (2012). Convergence of Galerkin truncation for dynamic response of finite beams on nonlinear foundations under a moving load. *Journal of Sound and Vibration*, 331, 2426-2442.
41. Şimşek, M., Kocatürk, T., and Akbaş, Ş.D. (2012). Dynamic behavior of an axially functionally graded beam under action of a moving harmonic load. *Composite Structures*, 94, 2358-2364.

42. Duan, G., and Wang, X. (2013). Free vibration analysis of multiple-stepped beams by the discrete singular convolution. *Applied Mathematics and Computation*, 219, 11096-11109.
43. Wang, X., and Wang, Y. (2013). Free vibration analysis of multiple-stepped beams by the differential quadrature element method. *Applied Mathematics and Computation*, 219, 5802-5810.
44. Johansson, C., Pacoste, C., and Karoumi, R. (2013). Closed-form solution for the mode superposition analysis of the vibration in multi-span beam bridges caused by concentrated moving loads. *Computers and Structures*, 119, 85-94.
45. Liao, S. (1997). Homotopy Analysis Method: A New Analytical Technique for Nonlinear Problems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2 (2), 95-100
46. He, J.H. (1999). Homotopy perturbation technique. *Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 178, 257-262.
47. He, J.H. (2003). Homotopy perturbation method: a new nonlinear analytical technique. *Applied Mathematics and Computation*, 135, 73-79.
48. He, J.H. (2009). An elementary introduction to the homotopy perturbation method. *Computers and Mathematics with Applications*, 57, 410-412.
49. Odibat, Z.M. (2007). A new modification of the homotopy perturbation method for linear and nonlinear operators. *Applied Mathematics and Computation*, 189, 746-753.
50. Wang, Y.G., Song, H.F., and Li, D. (2009). Solving two-point boundary value problems using combined homotopy perturbation method and Green's function method. *Applied Mathematics and Computation*, 212, 366-376.
51. Chun, C., and Sakthivel, R. (2010). Homotopy perturbation technique for solving two-point boundary value problems-comparison with other methods. *Computer Physics Communications*, 181, 1021-1024.
52. Biazar, J., and Eslami, M. (2011). A new homotopy perturbation method for solving systems of partial differential equations. *Computers and Mathematics with Applications*, 62, 225-234.
53. Ha, S.N. (2001). A Nonlinear Shooting Method for Two-Point Boundary Value Problems. *Computers and Mathematics with Applications*, 42, 1411-1420.
54. Fang, Q., Tsuchiya, T., and Yamamoto, T. (2002). Finite difference, finite element and finite volume methods applied to two-point boundary value problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 139, 9-19.
55. Ha, S. N., and Lee, C. R. (2002). Numerical Study for Two-Point Boundary Value Problems Using Green's Functions. *Computers and Mathematics with Applications*, 44, 1599-1608.

56. Momani, S., Abuasad, S., and Odibat, Z. (2006). Variational iteration method for solving nonlinear boundary value problems. *Applied Mathematics and Computation*, 183, 1351-1358.
57. Abushammala, M. B. H. (2014). *Iterative Methods For The Numerical Solutions Of Boundary Value Problems*, Master Thesis, American University, Collage of Arts and Sciences, Sharjah, United Arab Emirates, 14-17, 82, 94, 145, 166-170, 202.
58. Adomian, G. (1988). A review of the Decomposition Method in Applied Mathematics. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 135, 501-544.
59. Adomian, G. (1988). Solving the nonlinear equations of physics. *Computers and Mathematics with Applications*, 16 (10/11), 913-914.
60. Gabet, L. (1994). The theoretical foundation of the Adomian method. *Computers Mathematics Applications*, 27 (12), 41-52.
61. Wazwaz, A. (1999). A reliable modification of Adomian decomposition method. *Applied Mathematics and Computation*, 102, 77-86.
62. Wazwaz, A. (2001). A new algorithm for solving differential equations of Lane-Emden type. *Applied Mathematics and Computation*, 118, 287-310.
63. Wazwaz, A. (2001). The numerical solution of sixth-order boundary value problems by the modified decomposition method. *Applied Mathematics and Computation*, 118, 311-325.
64. Wazwaz, A. (2002). A new method for solving singular initial value problems in the second-order ordinary differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 128, 45-57.
65. Wazwaz, A., and El-Sayed, S.M. (2001). A new modification of the Adomian decomposition method for linear and nonlinear operators. *Applied Mathematics and Computation*, 122, 393-405.
66. Biazar, J., Babolian, E., and Islam, R. (2004). Solution of the system of ordinary differential equations by Adomian decomposition method. *Applied Mathematics and Computation*, 147, 713-719.
67. Chen, W., and Lu, Z. (2004). An algorithm for Adomian decomposition method. *Applied Mathematics and Computation*, 159, 221-235.
68. Azreg-Aïnou, M. (2009). A developed new algorithm for evaluating Adomian polynomials. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 42 (1), 1-18.
69. Hendi, F.A., Bakodah, H.O., Almazmumy, M. and Alzumi, H. (2012). A Simple Program For Solving Nonlinear Initial Value Problem Using Adomian Decomposition Method. *International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences*, 12 (3).
70. Luo, X.G. (2005). A two-step Adomian decomposition method. *Applied Mathematics and Computation*, 170, 570-583.

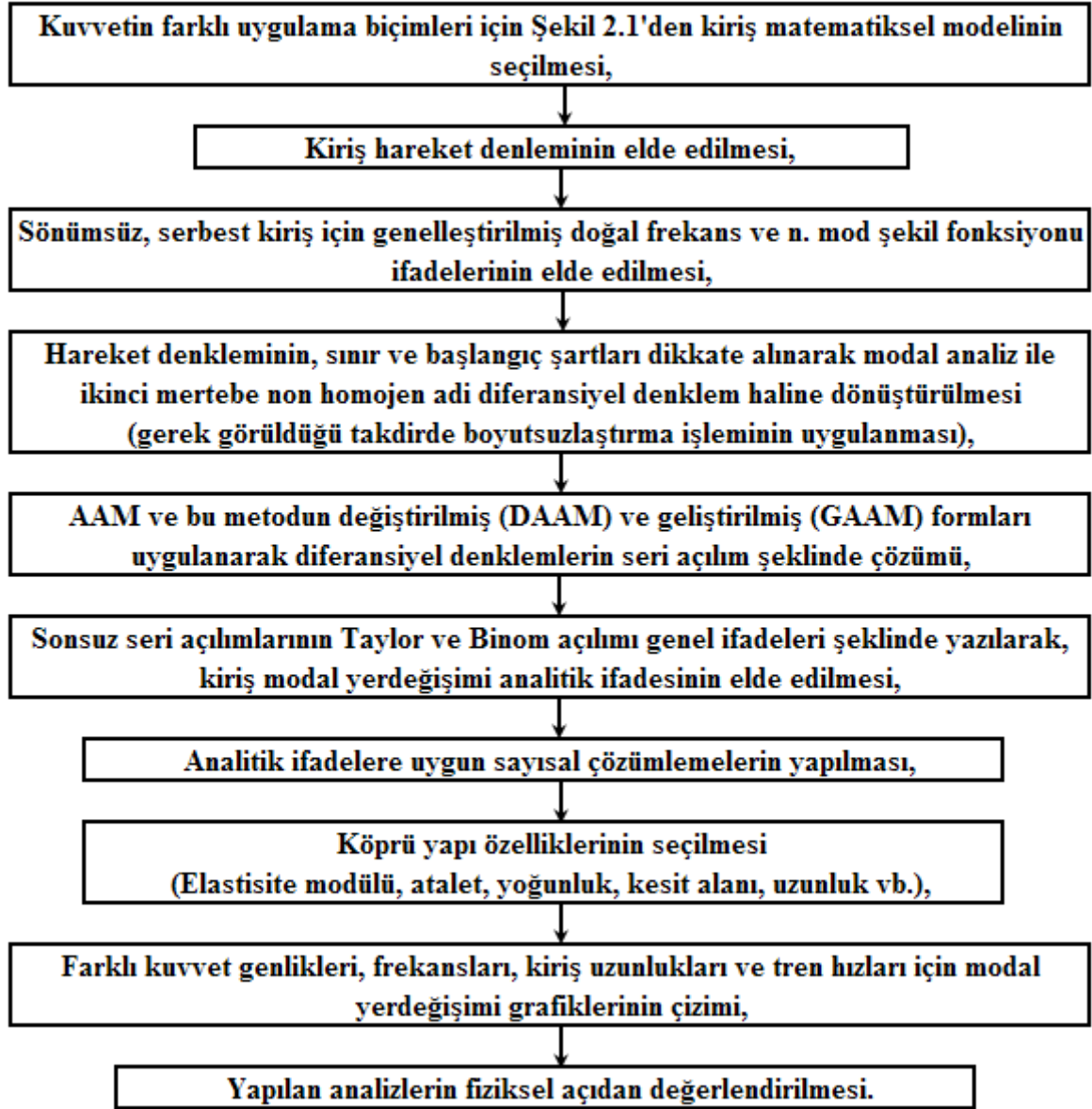
71. Hosseini, M.M., and Nasabzadeh, H. (2006). On the convergence of Adomian decomposition method. *Applied Mathematics and Computation*, 182, 536-543.
72. Hosseini, M.M., and Nasabzadeh, H. (2007). Modified Adomian decomposition method for specific second order ordinary differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 186, 117-123.
73. Jang, B. (2008). Two-point boundary value problems by the extended Adomian decomposition method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 209, 253-262.
74. Momani, S., Moadi, K., and Noor, M.A. (2006). Decomposition method for solving a system of fourth-order obstacle boundary value problems. *Applied Mathematics and Computation*, 175, 923-931.
75. Hasan, Y.Q., and Zhu, L.M. (2009). Solving singular boundary value problems of higher-order ordinary differential equations by modified Adomian decomposition method. *Commun Nonlinear Sci Numerical Simulation*, 14, 2592-2596.
76. Duan, J.S., and Rach, R. (2012). Higher-order numeric Wazwaz–El-Sayed modified Adomian decomposition algorithms. *Computers and Mathematics with Applications*, 63, 1557-1568.
77. Elsaid, A. (2012). Fractional differential transform method combined with the Adomian polynomials. *Applied Mathematics and Computation*, 218, 6899-6911.
78. Kumar, M., and Singh, N. (2010). Modified Adomian Decomposition Method and computer implementation for solving singular boundary value problems arising in various physical problems. *Computers and Chemical Engineering*, 34, 1750-1760.
79. Abassy, T.A. (2010). Improved Adomian decomposition method. *Computers and Mathematics with Applications*, 59, 42-54.
80. Abassy, T.A. (2011). Improved Adomian decomposition method (solving nonlinear non homogenous initial value problem). *Journal of the Franklin Institute*, 348, 1035-1051.
81. Al-Hayani, W., and Casasús, L. (2006). On the applicability of the Adomian method to initial value problems with discontinuities. *Applied Mathematics Letters*, 19, 22-31.
82. Das, S. (2009). A numerical solution of the vibration equation using modified decomposition method. *Journal of Sound and Vibration*, 320, 576-583.
83. Muhammad, G. (2009). *Adomian Decomposition Solutions Of Some Nonlinear And Nonlocal Problems*, Doctor of Philosophy, National College of Business Administration & Economics, Lahore, 49-51, 88, 89, 108.
84. Duan, J.S., and Rach, R. (2011). A new modification of the Adomian decomposition method for solving boundary value problems for higher order nonlinear differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 218, 4090-4118.

85. Khan, Y., Vázquez-Leal, H., and Faraz, N. (2013). An auxiliary parameter method using Adomian polynomials and Laplace transformation for nonlinear differential equations. *Applied Mathematical Modelling*, 37, 2702-2708.
86. Haddadpour, H. (2006). An exact solution for variable coefficients fourth-order wave equation using the Adomian method. *Mathematical and Computer Modelling*, 44, 1144-1152.
87. Lai, H.Y., Hsu, J.C., and Chen, C.K. (2008). An innovative eigenvalue problem solver for free vibration of Euler Bernoulli beam by using the Adomian decomposition method. *Computers and Mathematics with Applications*, 56, 3204-3220.
88. Hsu, J.C., Lai, H.Y., and Chen, C.K. (2008). Free vibration of non-uniform Euler–Bernoulli beams with general elastically end constraints using Adomian modified decomposition method. *Journal of Sound and Vibration*, 318, 965-981.
89. Hsu, J.C., Lai, H.Y., and Chen, C.K. (2009). An innovative eigenvalue problem solver for free vibration of uniform Timoshenko beams by using the Adomian modified decomposition method. *Journal of Sound and Vibration*, 325, 451–470.
90. Mao, Q., and Pietrzko, S. (2010). Free vibration analysis of stepped beams by using Adomian decomposition method. *Applied Mathematics and Computation*, 217, 3429-3441.
91. Mao, Q. (2011). Free vibration analysis of multiple-stepped beams by using Adomian decomposition method. *Mathematical and Computer Modelling*, 54, 756-764.
92. Mao, Q. (2012). Free vibration analysis of elastically connected multiple-beams by using the Adomian modified decomposition method. *Journal of Sound and Vibration*, 331, 2532-2542.
93. Coşkun, S.B., Atay, M.T., and Öztürk, B. (2011). Transverse Vibration Analysis of Euler-Bernoulli Beams Using Analytical Approximate Techniques. *Advances in Vibration Analysis Research*, 978-953-307-209-8.
94. Mao, Q., and Pietrzko, S. (2012). Free vibration analysis of a type of tapered beams by using Adomian decomposition method. *Applied Mathematics and Computation*, 219, 3264-3271.
95. Hassan, H.N., and El-Tawil, M.A. (2012). A new technique of using homotopy analysis method for second order nonlinear differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 219, 708-728.
96. Ağırseven, D. (2009). *Bazı lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerin homotopi pertürbasyon ve homotopi analiz metotları ile çözümlerinin analizi üzerine*, Doktora Tezi, Trakya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trakya, 7-9, 71,72.
97. Nik, H.S., Rebelo, P., and Zahedi, M.S. (2013). Solution of Infinite Horizon Nonlinear Optimal Control Problems by Piecewise Adomian Decomposition Method. *Mathematical Modelling and Analysis*, 18(4), 543-560.

98. Bilik, F., ve Karaçay, T. (2015, 24-28 Ağustos). *Kuvvet Uygulanmış Basit Mesnetli Euler-Bernoulli Kirişinin MADM (Modified Adomian Decomposition Method) Kullanılarak Titreşim Analizi*. XIX. Ulusal Mekanik Kongresi, KTÜ, Trabzon.
99. Spiegel, M.R., Lipschutz S., and Liu, J. (2009). *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*. (Third Edition). Schaum's Outline Series. 117, 138-140.
100. Poularikas, A. D. (1999). *Distributions, Delta Function*. The Handbook of Formulas and Tables for Signal Processing, Chapter 5.

EKLER

EK-1. Köprü dinamiği analitik çözümü işlem sırası



Şekil 1.1. Köprü dinamiği analitik çözümü işlem sırası

EK-2. Dirac Delta fonksiyonu özellikleri [100]

$$\delta\left(\frac{t-t_0}{a}\right) = |a|\delta(t-t_0)$$

$$\delta(at-t_0) = \frac{1}{|a|}\delta\left(t-\frac{t_0}{a}\right)$$

$$\delta(t-t_0)f(t) = \delta(t-t_0)f(t_0)$$

$$\delta(-t+t_0) = \delta(t-t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\delta(t-t_0)}{dt} f(t) dt = -\frac{df(t_0)}{dt}$$

$$\delta(t^2-a^2) = \frac{1}{2a}[\delta(t+a) + \delta(t-a)]$$

$$f(t) \frac{d^n \delta(t)}{dt^n} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{d^k f(0)}{dt^k} \frac{d^{n-k} \delta(t)}{dt^{n-k}}$$

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega t d\omega$$

$$f(t) \frac{d\delta(t)}{dt} = -\frac{df(0)}{dt} \delta(t) + f(0) \frac{d\delta(t)}{dt}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n \delta(t)}{dt^n} f(t) dt = (-1)^n \frac{d^n f(0)}{dt^n}$$

$$\delta(t-t_0) = \frac{du(t-t_0)}{dt}$$

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$$

$$\delta(-t) = \delta(t)$$

$$t\delta(t) = 0$$

$$f(t) * \frac{d\delta(t)}{dt} = \frac{df(t)}{dt}$$

$$t \frac{d\delta(t)}{dt} = -\delta(t)$$

$$\delta(\sin t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n\pi)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) f(t) dt = f(t_0)$$

$$\frac{d \operatorname{sgn}(t)}{dt} = 2\delta(t)$$

$$(\sin at) \frac{d\delta(t)}{dt} = -a\delta(t)$$

$$t^n \frac{d^m \delta(t)}{dt^m} = \begin{cases} (-1)^n n! \delta(t) & m = n \\ (-1)^n \frac{n!}{m-n!} \frac{d^{m-n} \delta(t)}{dt^{m-n}} & m > n \\ 0, & m < n \end{cases}$$

$$m = n$$

$$m > n$$

$$m < n$$

EK-3. Binom ve Taylor seri açılımları [99]

Binom seri açılımı;

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3 + \dots$$

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots \quad -1 < x < 1$$

$$(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \dots \quad -1 < x < 1$$

$$(1+x)^{-3} = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + 15x^4 - \dots \quad -1 < x < 1$$

Taylor seri açılımı;

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)(x-a)^{(n-1)}}{(n-1)!}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \dots \quad -\infty < x < \infty$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots \quad -1 < x \leq 1$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots \quad -\infty < x < \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots \quad -\infty < x < \infty$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} \dots \quad -\infty < x < \infty$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} \dots \quad -\infty < x < \infty$$

EK-4. Doğrusal, homojen, ikinci mertebe diferansiyel denklem çözümü

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = 0 \quad , \quad a, b \in \mathbb{R}$$

m_1 ve m_2 , $m^2 + am + b = 0$ denkleminin kökleri olmak üzere,

Durum 1: m_1 ve m_2 , reel ve tanımlı ise $y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$

Durum 2: m_1 ve m_2 , reel ve eşit ise $y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x}$

Durum 3: $m_1 = p + qi$ ve $m_2 = p - qi$, ise $y = e^{px}(c_1 \cos qx + c_2 \sin qx)$,

Burada, $p = -a/2$, $q = \sqrt{b - a^2/4}$ ’dir [99].

EK-5. Doğrusal, homojen olmayan, ikinci mertebe diferansiyel denklem çözümü

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = P(x) \quad , \quad a, b \in R$$

m_1 ve m_2 , $m^2 + am + b = 0$ denkleminin kökleri olmak üzere,

Durum 1: m_1 ve m_2 , reel ve tanımlı ise

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \frac{e^{m_1 x}}{m_1 - m_2} \int e^{-m_1 x} P(x) dx + \frac{e^{m_2 x}}{m_2 - m_1} \int e^{-m_2 x} P(x) dx$$

Durum 2: m_1 ve m_2 , reel ve eşit ise

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x} + x e^{m_1 x} \int e^{-m_1 x} P(x) dx - e^{m_1 x} \int x e^{-m_1 x} P(x) dx$$

Durum 3: $m_1 = p + qi$ ve $m_2 = p - qi$, ise

$$y = e^{px} (c_1 \cos qx + c_2 \sin qx) + \frac{e^{px} \sin qx}{q} \int e^{-px} \cos qx P(x) dx - \frac{e^{px} \cos qx}{q} \int e^{-px} \sin qx P(x) dx$$

Burada, $p = -a/2$, $q = \sqrt{b - a^2/4}$ dir [99].

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : BİLİK, Ferda
 Uyuğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 13.03.1981, Erzincan
 Medeni hali : Bekâr
 Telefon : 0 (312) 280 07 35
 e-mail : ferda.bilik@hotmail.com



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek lisans	Hasan Kalyoncu Ü. /İşletme	2013
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi /Makine Müh.	2006
Lisans	Gazi Üniversitesi /Makine Müh.	2003
Lise	Eryaman Lisesi	1998

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2012-Halen	Sağlık Bakanlığı	Mühendis
2011-2012	İlbank A.Ş.	Teknik Uzm. Yrd.
2004-2008	Hidromek	Mühendis

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Bilik, F., and Karaçay, T. (2015, March). *Vibration Analysis of a High Speed Railway Bridge Modelled as Simply Supported Euler-Bernoulli Beam*. First International Congress On Advanced Railway Engineering, İstanbul, Turkey.
2. Bilik, F., ve Karaçay, T. (2015, 24-28 Ağustos). *Kuvvet Uygulanmış Basit Mesnetli Euler-Bernoulli Kirişinin MADM (Modified Adomian Decomposition Method) Kullanılarak Titreşim Analizi*. XIX. Ulusal Mekanik Kongresi, KTÜ, Trabzon.



GAZİ GELECEKTİR..