GAZİ ÜNİVERSİTESİ

1926

PÜSKÜRTME SOĞUTMA ETKİSİ ALTINDA OKSİDASYON OLUŞUMUNUN ISI TRANSFERİ ÜZERİNDEKİ ETKİLERİNİN ANALİTİK YÖNTEMLE ARAŞTIRILMASI

Hande GEZER

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EKİM 2019

Hande GEZER tarafından hazırlanan “PÜSKÜRTME SOĞUTMA ETKİSİ ALTINDA OKSİDASYON OLUŞUMUNUN ISI TRANSFERİ ÜZERİNDEKİ ETKİLERİNİN ANALİTİK YÖNTEMLE ARAŞTIRILMASI” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Makine Mühendisliği Ana Bilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Atilla BIYIKOĞLU

Makine Mühendisliği Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ..…………………

Başkan: Doç. Dr. Özgür BAYER

Makine Mühendisliği Ana Bilim Dalı, Orta Doğu Teknik Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. …………………...

Üye: Doç. Dr. Tolga PIRASACI

Makine Mühendisliği Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. …………………...

Tez Savunma Tarihi: 17.10.2019

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

…………………….…….

Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Hande GEZER
17.10.2019

PÜSKÜRTME SOĞUTMA ETKİSİ ALTINDA OKSİDASYON OLUŞUMUNUN ISI TRANSFERİ ÜZERİNDEKİ ETKİLERİNİN ANALİTİK YÖNTEMLE ARAŞTIRILMASI

(Yüksek Lisans Tezi)

Hande GEZER

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ekim 2019

ÖZET

Bu tezde, püskürtme soğutma etkisi altında oksidasyon oluşumunun ısı transferi üzerindeki etkisi analitik yöntemle incelenmiştir. Çözüme yönelik olarak, öncelikle kartezyen koordinatlarda her iki tarafı konvektif sınır koşullarına maruz kalan n tabakalı bir boyutlu kompozit malzemenin zamana bağlı ısı difüzyon problemi, superpozisyon yöntemi uygulanarak zamana bağlı ve sürekli durum olmak üzere iki alt probleme dönüştürülmüştür. Zamana bağlı problem, değişkenlerin ayrıştırılması yöntemi kullanılarak konum ve zaman için iki alt probleme ayrılmıştır. Konuma bağlı problem, Sturm-Liouville karakteristik değer problemi olarak yapılanmış ve çözüm kapalı fonsiyonel formda elde edilmiştir. Konuma bağlı çözüm, zamana bağlı çözüm ile birleştirilerek değişken ayrıştırılması yapılmadan önceki zamana bağlı problem için analitik çözüm elde edilmiştir. Sürekli şartlardaki problemin genel çözümü ile zamana bağlı problemin genel çözümü birleştirilerek süperpozisyondan önceki orjinal problemin genel çözümüne ulaşılmıştır. Sonuçlar n-katmanlı bir ortam için genel halde ifade edilmiştir. Karakteristik değerlerin bulunmasına yönelik olarak kompozit malzemenin iç, arayüzey ve dış sınır şartları kullanılarak 2n x 2n boyutlu sınır şartları matrisi oluşturulmuştur. Her katman için sınır şartlarının uygulanmasıyla ortaya çıkan sabitler hesaplanarak karakteristik değerlere ulaşılmıştır. Sınır ve arayüzey şartlarının uygulanması sonucunda, her katman için elde edilen karakteristik değerler arasında ve genel çözümün içerdiği katsayılar arasında bir bağıntı olduğu tespit edilmiştir. Problemin modeli, Mathematica arayüzünde kurgulanmış ve çözülerek her katman için karakteristik değerler elde edilmiştir. Katsayı ve karakteristik değerler arasındaki bağıntılar kullanılarak elde edilen orjinal problemin katsayısı, başlangıç şartı kullanılarak fonksiyonların integrali şeklinde yazılmış ve Mathematica yazılımı kullanılarak sayısal olarak her bir katman için elde edilmiştir. Analitik modelin testi için, literatürde analitik çözümü mevcut olan problem kurgulanmış ve ± %1'den düşük sapma ile benzer sonuçlar elde edilmiştir. Su püskürtme soğutma etkisi altında oksidasyon sonucunda oluşan tabakanın 10 mm kalınlığına kadar yüzey sıcaklığına olan etkisinin alüminyum malzeme için 0,7°C olduğu ve bu sıcaklık farkının 0.2 mm oksit tabakası kalınlığı için östenit çelik kullanıldığında 100 °C'yi bulduğu tespit edilmiştir.

Bilim Kodu	:	91412
Anahtar Kelimeler	:	Isı difüzyon denklemi, çok katmanlı ortamlar, püskürtme soğutma,oksidasyon kalınlığı,analitik çözüm,değişkenlere ayırma
Sayfa Adedi	:	115
Danışman	:	Prof.Dr. Atilla BIYIKOĞLU

ANALYTICAL INVESTIGATION OF THE EFFECTS OF OXIDATION FORMATION ON HEAT TRANSFER UNDER THE EFFECT OF SPRAY COOLING

(M. Sc. Thesis)

Hande GEZER

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

October 2019

ABSTRACT

In this thesis the analytical solution of the effects of oxidation formation on heat transfer under spray cooling effect was investigated. In order to solve the problem, firstly, the time dependent heat diffusion problem in the n layered one dimensional composite material exposed to both sides convective boundary conditions, the transient and the steady state problems are separately formed by the superposition method for a layer. The transient problem was transformed into two sub-problems for position and time using the method of separation of variables. The position problem was structured as Sturm-Liouville characteristic value problem and the solution was obtained as implicit functional form. An analytical solution was obtained for the time-dependent problem before variable decomposition by combining the position-dependent solution with time-dependent solution. The general solutions of the steady-state and the transient problems were combined to get the general solution of the original problem before superposition. The results are expressed in general for an n-layered medium. The boundary conditions is formed by using internal, interface and external boundary conditions in order to find the characteristic values. This characteristic values is solved by the Mathematica software to obtain an infinite number of characteristic values for each layer. As a result of applying boundary and interface conditions for each layer, it is determined that there is a correlation between the characteristic values obtained for each layer and a different correlation between the coefficients included in the general solution. The coefficient of the original problem obtained using the correlation between coefficient and characteristic values were written as integral of functions using the initial condition and obtained numerically for each layer using Mathematica software. For the test of the analytical model, the problem with the analytical solution in the literature was constructed and similar results were obtained with deviation of less than ± 1%. It was found that the effect of insulation, layer formed as a result of oxidation under water spray cooling, was up to 0.7 ° C for aluminum material for 10 mm oxide layer thickness and 100 ° C for austenite steel for 0.2 mm oxide layer thickness.

Science Code	:	91412
Key Words	:	Heat diffusion equation, multilayered media, spray cooling, oxidation thickness, analytical solution, separation of variables
Page Number	:	115
Supervisor	:	Prof.Dr. Atilla BIYIKOĞLU

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde, değerli bilgilerini benimle paylaşan, kendisine ne zaman danışsam bana kıymetli zamanını ayırıp sabırla ve büyük bir ilgiyle bana faydalı olabilmek için elinden gelenden fazlasını sunan her sorun yaşadığımda yanına çekinmeden gidebildiğim, güler yüzünü ve samimiyetini benden esirgemeyen danışman statüsünü hakkıyla yerine getiren Prof. Dr. Atilla BIYIKOĞLU'na teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

Sayfa

Sayfa

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge **Sayfa**

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil **Sayfa**

Şekil **Sayfa**

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\boldsymbol{a_i}$	i'nci katman için katsayı
$\boldsymbol{b_i}$	i'nci katman için katsayı
$\boldsymbol{Bi}$	Biot sayısı
$\boldsymbol{c_{p,i}}$	i'nci katman için özgül ısı
$\boldsymbol{\rho_i}$	i'nci katmanın yoğunluğu
$\boldsymbol{DDm}$	Köke bağlı integral sabiti
$\boldsymbol{h}$	Taşınım katsayısı
$\boldsymbol{h_o}$	Efektif ısı transfer katsayısı
$\boldsymbol{i}$	Katman indisi
$\boldsymbol{k}$	Isı iletim katsayısı
$\boldsymbol{k_{oksit}}$	Oksit tabakası ısı iletim katsayısı
$\boldsymbol{\gamma}$	Boyutsuz uzunluk
$\boldsymbol{\delta}$	Boyutsuz ısıl geçirgenlik katsayısı
$\boldsymbol{\kappa}$	Boyutsuz ısı iletim katsayısı
$\boldsymbol{\Theta}$	Boyutsuz sıcaklık
$\boldsymbol{m}$	Denklemi sağlayan özdeğerler indisi
$\boldsymbol{n}$	Katman sayısı
$\boldsymbol{P}$	Larson-Miller parametresi
$\boldsymbol{p_i}$	i'nci katman için integrasyon sabiti
$\boldsymbol{q_i}$	i'nci katman için integrasyon sabiti
$\boldsymbol{q}''$	Isı akısı

Simgeler	**Açıklamalar**
$q_{Ç.Y.-O.Y.}$	Çelik yüzeyinden oksit yüzeyine olan ısı akısı
x	Uzunluk
X_0	İlk katman dış yüzey mesafesi
x_{oksit}	Oksit tabakası kalınlığı
X_n	Son katman dış yüzey mesafesi
$\mathcal{R}_i(x)$	x değişkenine bağlı fonksiyon
t	Zaman
τ	Boyutsuz zaman
T_{0_i}	i katmanın başlangıç durumundaki bilinen sıcaklığı
$T_i(x,t)$	i katmanındaki zamana bağlı sıcaklık dağılımının homojen olmayan çözümü
$\overline{T}_i(x,t)$	i katmanındaki zamana bağlı sıcaklık dağılımının homojen çözümü
$T_{ss,i}$	Sıcaklık dağılımının zamandan bağımsız homojen olmayan çözümü
T_0	Malzemenin ilk sıcaklığı
T_1	1’inci ortamın sıcaklığı
T_2	2’nci ortamın sıcaklığı
T_A	Soğutucu Akışkan Sıcaklığı
$T_Ç$	Çevre sıcaklığı
T_s	Yüzey sıcaklığı
T_{s1}	1’inci katman dış yüzey sıcaklığı
T_∞	Akışkan sıcaklığı
$T_{A.Y.}$	Alüminyum yüzey sıcaklığı
$T_{Ç.Y.}$	Çelik yüzey sıcaklığı
$T_{Ç.Y.,anltk.}$	Analitik hesaplanan çelik yüzey sıcaklıkları

Simgeler	Açıklamalar
$T_{Ç.Y.,den.}$	Deneysel ölçülen çelik yüzey sıcaklıkları
$T_{Ç.Y.,nüm.}$	Nümerik hesaplanan çelik yüzey sıcaklıkları
$T_{O.Y.}$	Oksit yüzey sıcaklığı
$T_{S.A.}$	Soğutucu akışkan sıcaklığı
Δx	İki yüzey arası mesafe
$\Gamma_i(t)$	t değişkenine bağlı fonksiyon
α_i	i'nci katmanın ısıl geçirgenlik katsayısı
λ_i	i’nci katman için özdeğer (eigenvalue)
ρ_i	i’nci katmanın yoğunluğu
Vs	Soğutucu akışkan çarpma yoğunluğu

Kısaltmalar	Açıklamalar
ANSYS	Analysis Of Systems
BC	Boundary Condition (Sınır Koşulu)
COMSOL	Computer Solutions
HVAC	Heating, Ventilating and Air Conditioning
JWKB	Jeffreys-Wentzel–Kramers-Brillouin yöntemi
MEMS	Mikro-Elektro-Mekanik Sistemler
PDE	Kısmi Diferansiyel Denklem
SCFB	Subcooled Flow Boiling

1. GİRİŞ

Püskürtme soğutma tıbbi, endüstriyel, tarımsal, elektronik ve iklimlendirme (HVAC) endüstrilerinde kullanılan bir yöntemdir. Püskürtme soğutma iki genel kategoriye ayrılabilir; bir gazın sıcaklığını düşürerek soğutmak veya püskürtme soğutma ile malzemenin ısı kaybını sağlamaktır.

Birincisi, bir sıvının (genellikle su) bir gazın (genellikle hava) içerisine püskürtülmesi yöntemidir. Gaz yeteri kadar düşük sıcaklıkta ise, sıvı bu gazdan ısı çekerek buharlaşır ve gazın sıcaklığı düşer. Bu işlem, HVAC sistemlerinde ve diğer endüstriyel işlemlerde yaygın olarak kullanılmaktadır.

Püskürtme soğutmanın ikinci kategorisi ise; bir cisimden veya yüzeyden ısının uzaklaştırılmasıdır. Bu kategori, iki alt kategoriye ayrılır; Soğutucu akışkanın Leidenfrost noktasının üstündeki yüzey sıcaklıkları ile soğutma uygulamaları ve Leidenfrost noktasının altındaki yüzey sıcaklıkları ile soğutma uygulamalarıdır (Glassman, 2005).

Leidenfrost noktası, sıvının tamamen buharlaşarak yüzey ile sıvıyı ayıran buhar filmi oluştuduğu minimum sıcaklık olarak tanımlanır. Atmosferde su için Leidenfrost noktası 250 ° C'dir (Incropera, DeWitt, Bergman ve Lavine, 2007).

Soğutucu akışkanın Leidenfrost noktasının üstündeki sıcaklığa sahip yüzeylerdeki püskürtme soğutma uygulamalarına örnek olarak genelde malzeme işleme süreçleri, özelde ise metal su verme ve malzeme temperleme işlemleri verilebilir (Hardin, Liu, Kapoor ve Beckermann, 2003).

Bu uygulamalarda püskürtme soğutma, temel olarak açık döngü sisteminde oluşur. Bu püskürtme soğutma sistemleri, metrekare cinsinden alanlara uygulanır ve asıl amaç, işlenen metali belirli bir oranda soğutarak temperlemektir. Özel püskürtme nozulları, Wheaton, Illinois Püskürtme Sistemleri gibi şirketler tarafından bu amaç için dizayn edilmiştir. Bu uygulamaların açık döngü olmasının ana nedeni büyük miktarda buhar oluşturmalarıdır. Sonuç olarak, bu buharı yeniden yoğunlaştırmak için bir sistemi çalıştırmak yerine atmosfere bırakmak çok daha ekonomiktir. Soğutucu akışkanların Leidenfrost noktası üzerindeki püskürtme soğutma uygulaması bu tezde ele alınmamıştır.

Soğutma Sistemleri Üzerine Araştırma

Püskürtme soğutma, en basit tanımı ile, ısı transfer etkinliğini artırmak için soğutulan yüzey üzerine sıvı püskürtmesi uygulanan bir faz değişim soğutma yöntemidir (Chow, Sehmbey ve Pais, 2013). Püskürtme soğutma, yüksek ısı akısı gerektiren soğutma uygulamalarında kullanılan bir soğutma tekniğidir.

Günümüzde piyasada birçok farklı soğutma sistemleri bulunmaktadır. Bir soğutma sistemi seçerken, maksimum ısı akısı, ısı yükleri, sıcaklık gereksinimleri, güvenilirlik, güç tüketimi, karmaşıklık, teknoloji, operasyonel ortamlar ve maliyet dikkate alınmalıdır. Bu yüzden soğutma sistemi seçimi başlı başına zor bir durumdur (Glassman, 2005).

Spray Soğutucularının Avantaj ve Dezavantajları

Püskürtme soğutma diğer soğutma teknolojilerine kıyasla çok yüksek ısı akılarına sahiptir. Sadece jet çarpma, mikrokanal soğutma ve soğutulmuş akış kaynaması (SCFB) benzer ısı akılarını sağlayabilmektedir. Bununla birlikte, püskürtme soğutmanın, diğer yüksek ısı akılı soğutma uygulamalarının çoğuna göre birkaç büyük avantajı vardır. Püskürtme soğutmanın sağlayacağı ilk büyük avantaj, soğutulmuş yüzey boyunca izotermal sıcaklık sağlayacak olmasıdır. İzotermal yüzeyler birçok soğutma uygulamasının çok etkili bir şekilde çalışmasına olanak sağlar. Örneğin bu avantaj, 1994 yılında M.R. Pais tarafından lazer diyotları dizileri için gösterilmiştir (Pais, Chang, Morgan ve Chow, 1994). Bugüne kadar, sprey püskürtme içeren yayınlarda, geniş alan izotermal püskürtme soğutma, 5 cm x 5 cm alandan daha büyük kare yüzeylere uygulanmamıştır.

Püskürtme soğutmanın diğer yüksek ısı akılı soğutma tekniklerine kıyasla ikinci avantajı akış hızları ile daha az ilişkili olmasıdır. Akış oranlarının kapalı devre sistem bileşenleri ile doğrudan ilişkisi vardır. Düşük ısı yüküne sahip olan sistemlerde debi oranlarının etkisi daha düşüktür. Örneğin, 250W'lık ısı yüküne sahip bir soğutma sistemi ele alındığında, SCFB bu durumda, soğutucu akışkanın 20 °C sıcaklık artışı için 0.048 galon/dk debide akışa gerek duyar. Oysa, püskürtme soğutmanın ihtiyacı olan debi 0.008 galon/dk’dır. İki akış oranı arasındaki pompa ölçülerinin farklılıkları ihmal edilebilir. Bu nedenle debi oranları, düşük ısı yüklerindeki sistemlerde düşük etkiye sahiptir.

Bunun tersine, 2,5 MW gibi yüksek ısı yüklerinde, 20 °C'lik sıcaklık farkını ihmal ederek çalışan SCFB 475 galon/dk akış hızına gerek duyarken, püskürtme soğutma 80 galon/dk debiye ihtiyaç duymaktadır. Dolayısıyla, yüksek debilerde pompa boyutlarındaki farklılıklar, genel soğutma sistemi boyutu, ağırlığı ve güç gereksinimi üzerinde büyük bir etki oluşturmaktadır.

Püskürtme soğutmanın diğer bir önemli avantajı, diğer yüksek ısı akılı soğutma tekniklerine göre daha yüksek bir ısı tahliye sıcaklığına sahip olmasıdır. Kapalı devre püskürtme soğutma sistemlerinde ısıyı tahliye etmek

için bir yoğuşturucu kullanılır. Ancak, tek fazlı jet çarpması, tek faz mikrokanal ve SCFB bu maksatla bir ısı değiştiricisi kullanır. Eşanjör yerine bir kondansatör kullanmanın avantajı, kondansatör kullanımında yüksek ısı redetme sıcaklığı nedeniyle küçük ölçülere sahip olmasıdır (Glassman, 2005).

Püskürtme soğutma sistemlerinin diğer avantajı, spreyin açık ve kapalı pozisyonlara dönebilme özelliğidir. Bu yetenek, Intel grubu tarafından inkjet desteği ile bir mikroişlemciye gerektiğinde soğutma sıvısı gönderen püskürtme soğutucusu uygulaması ile gösterilmiştir (Sharma, Bash ve Patel, 2004). Püskürtme soğutma açık döngü modunda da çalıştırılabilmektedir. Sonuç olarak püskürtme soğutma, doğrudan elektronik elemanların üzerine püskürtülebilen dielektrik soğutucuları kapsayan geniş bir alanda uygulanabilmektedir.

Püskürtme soğutma sistemlerinin bazı dezavantajları da vardır. Bunlardan biri yüksek işleme toleransları gerektiren ve imalatı zor olan basınçlı atomize püskürtme nozullarıdır. Şirketler böyle yüksek kaliteli püskürtme nozulları üretmektedir, ancak maliyetleri çok yüksektir. Ayrıca basınçlı atomize nozullar, soğutucu içerisindeki atıklardan dolayı tıkanma riski taşımakta ve bu da filtre kullanılarak engellenmektedir. Basınçlı atomize nozulların yanı sıra buhar atomize nozullar da üretilmektedir. Bu tip nozullar, nozul uçlarının daha geniş çaplarda olmasından dolayı tıkanma riski çok taşımazlar ve böylece hassas üretim gerektirmezler.

Püskürtme soğutma sistemlerinin bir başka dezavantajı, özellikle geniş alanlardaki sprey soğutma ve buhar atomize sistemlerinin karmaşık olmasıdır. Sistemlerin bu karmaşık yapıları en büyük dezavantajları olabilmektedir.

Püskürtme soğutmanın diğer bir dezavantajı, değişken ve mikro yerçekimi içeren ortamlarda çalışma özellikleri hakkında çok az bilgiye sahip olunmasıdır. Bu tarihe kadar sadece Baysinger ve Yerkes, mikro çekimin püskürtme soğutmanın ısı transfer özelliklerine etkisini incelemiştir (Michael., 2003).

Püskürtme soğutmanın en son dezavantajı ise doğrudan soğutma sprey uygulamasının zamanla çok küçük bir erozyon etkisi oluşturması nedeniyle hassas elektronik ekipmanlarda uygulanmasının zorluğudur. Zaman içinde küçük miktarda yabancı madde içeren bir soğutucu bir yüzeye püskürtülürse, bu yüzey yavaşça aşınır. Bu yabancı madde parçaları boruların içinde oksidasyon, dişli pompasının içerisinde ise küçük parçaların oluşumu gibi birçok probleme sebebiyet vermektedir.

Bu tez çalışmasında, püskürtme soğutma sistemlerinde malzeme üzerinde oluşan oksidasyonun ısıl geçirgenlik üzerine etkileri incelenmektedir. Yapılan çalışmada işlenen malzeme ile üzerinde oluşan oksidasyon iki ayrı katman olarak düşünülmüş ve iki katmanlı malzemede ısı difüzyonu analiz edilmiştir. Böylece oksidasyonun malzeme üzerindeki ısıl etkileri ortaya konulmuştur.

<u>Püskürtme Soğutma Esnasında Oluşan Oksidasyon Probleminin Tanımı</u>

Su püskürtme soğutma; metal işleme ve elektronik soğutma gibi birçok yüksek sıcaklıklı endüstriyel uygulamada kullanılan yaygın bir soğutma yöntemidir. Metal işleme prosesi süresince, ortam ile metal arasındaki sıcaklık farkına bağlı olarak metal yüzeyi üzerinde gözenekli bir yapıya sahip oksit tabakası oluşabilir. Oksit tabakası, metale göre çok düşük ısıl iletkenliğe sahiptir ve bir ısıl bariyer görevi görür. Konu ile ilgili olarak Chabicovsky ve arkadaşları yaptıkları çalışmada (Chabičovský, Hnízdil, Tseng ve Raudenský, 2015); yüksek sıcaklıklı östenit paslanmaz çeliğin işlenmesi sırasında su püskürtme ile soğutulması sonucu malzeme üzerinde oluşan oksit tabakasının sıcaklığını ve malzeme içerisindeki sıcaklık dağılımını sayısal ve deneysel olarak belirlemeye çalışmışlardır. Sayısal ve deneysel yöntemleri birlikte kullanarak, yüksek sıcaklıklarda yüzeylerin püskürtme ile soğutulması sırasında oksit tabakasının Leidenfrost sıcaklığı üzerindeki etkisini araştırmışlardır.

Bu çalışmada, Chabicovsky ve arkadaşlarının sayısal ve deneysel yöntemlerle birlikte inceldikleri problem, analitik yöntemlerle çözülmüş, sonuçlar sayısal ve deneysel yöntemlerle belirlenen çözümlerle kıyaslanmıştır.

Katmanlı Isı Difüzyon Probleminin Tanımı

Isı difüzyon analizi, mühendislik tasarım faaliyetlerinde bilinmesine ihtiyaç duyulan verilerin elde edilmesi için önemli bir bileşenidir. Bu analizler arasında farklı geometrilere sahip çok katmanlı ortamlar da bulunmaktadır. Çok katmanlı ortamlarda ısı difüzyonu, geniş uygulama alanlarına sahiptir.

Çok katmanlı ortamlarda zamana bağlı ısı iletimi, yakıt hücreleri, elektro-kimyasal reaktörler, yüksek yoğunluklu mikro-elektronik malzemeler, kompozit malzemeler, katılaşma işlemleri, termodinamik bilimi ve benzeri diğer birçok bilim ve mühendislik alanlarında uygulama alanı bulmaktadır (Lu, Tervola ve Viljanen, 2005). Endüstriyel uygulamalara örnek, çelik bobinler, yarı iletkenler ile elektrotlar ve jeolojik profiller, biyolojik uygulamalara örnek ise, canlı dokuya yerleştirilen ilaç taşıyıcıların etkinliğinin belirlenmesi, biyolojik dokunun kızılötesi ışıkla araştırılması ve kasın ısı üretiminin analiz edilmesi örnek olarak gösterilmektedir (Hickson, Barry ve Mercer, 2009). Çok katmanlı ortamlarda ısı difüzyonunun bir diğer uygulama alanı, mikroelektronik / mikro-elektro-mekanik sistemler (MEMS)'in soğutma işlemidir. Son yıllarda hızla gelişen bu sistemlerin, bileşenlere / cihazlara zarar verebilecek aşırı ısıdan kurtarılması için genellikle çok katmanlı ortamlar kullanılmaktadır (Feng, King ve Narumanchi, 2016).

Çözüm Yöntemleri

Isı difüzyonu problemlerinin çözümünde, bilişim sektöründeki gelişmelere paralel olarak sayısal tekniklerle çözüm yöntemlerini içeren paket programlar (COMSOL, ANSYS vb.) kullanılmaktadır. Ancak, analitik çözüm, sayısal çözümlerin doğrulanması açısından bir referans teşkil etmekle birlikte problemin kesin çözümüdür (Dias, 2016). Tek katmanlı ısı difüzyon problemleri de dâhil olmak üzere, çok katmanlı sistemlerdeki difüzyon problemlerinin çözümünde, problemin karmaşık olmasından ötürü, tek bir analitik yöntem geliştirilmemiştir. Problemin özelliğine göre değişkenlerin ayrılması, ortogonal açılım tekniği, Laplace transformasyonu, Green fonksiyonu gibi farklı analitik yöntemler geliştirilmek durumunda kalındığı, konu ile ilgili literatür araştırması sonucu tespit edilmiştir.

Genel olarak, çok katmanlı bir levha için zamana bağlı ısı iletimi denklemlerinin çözümünde özdeğerlerin (eigenvalue) belirlenmesi, önemli bir basamaktır. Özdeğerlerin hassas şekilde bulunamaması, problemin çözüme ulaşmasını engellemektedir. Özdeğerlerin belirlemesinde yaşanan bu zorlukların önüne geçmek amacıyla, bilim insanları farklı analitik yöntemler geliştirmeye çalışmaktadırlar.

Tek katmanlı bir levhada, genel olarak kullanılan yöntem olan değişkenlerin ayrılması (separation of variables) yöntemi uygulandığında, uzunluk ve zaman değişkenleri özdeğer ve özfonksiyonlar vasıtasıyla birbiriyle ilişkilendirilmektedir. Bununla birlikte, çok katmanlı ortamlarda ise katmanlar arasında da özfonksiyon problemleri ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle, özdeğer problemleri çok katmanlı ortamlarda kararlı durum ısı iletimi problemlerinde gözlenmektedir (Hahn ve Özışık, 2013).

Teorik olarak, silindirik ve kartezyen koordinatlarda ısı iletimi problemlerinin çözümünde kullanılan analitik yöntemler tamamen aynıdır. Genellikle, tek katmanlı bir malzemede ısı iletim probleminin çözümünde uygulanan ve yaygın olarak kullanılan yöntemler arasında, değişkenlere ayırma, sonlu integral transform, Green'in fonksiyonu ve Laplace transform metotları sayılabilir. İlk iki teknik olan değişkenlere ayırma ve sonlu integral transform teknikleri çok katmanlı levhada karmaşık hale gelebilecek özdeğer problemlerinin ortaya çıkmasına neden olmaktadır (Lu vd., 2005).

Değişkenlerin ayrılması yönteminde, genel ısı iletimi denklemindeki uzunluk ve zaman değişkenleri, ayrı kısmi diferansiyel denklemler şeklinde parçalanarak ele alınmaktadır. Bu yöntemde, ısı iletim denklemindeki ısıl geçirgenliğin (thermal diffusivity) hangi kısmi diferansiyel denklemde (uzunluk veya zaman değişkenine bağlı) yer aldığı önemlidir. Tek katmanlı ortamlar için ısıl geçirgenlik parametresi uzunluk tarafında değerlendirilmesi gerekirken, çok katmanlı sistemlerde bu durum ara yüzeylerde ısıl süreksizliğe neden olmaktadır (Hahn ve Özışık, 2013).

Ayrıca, değişkenlerin ayrılması yönteminin, tek katmanlı sistemlere uygulanması daha kolayken, ortamın ikiden fazla katmana sahip olduğu durumlarda, köklerin sayısal olarak bulunması, tespiti kolaylaştırmak adına çok hassas bir artışla yapılması gerektiği için çözümü zorlaştırmaktadır.

Monte, bir ve iki boyutlu olarak, yüzey sıcaklığını ve birim zamandaki ısı transfer miktarını yüksek doğrulukla tahmin edebilen yaklaşık bir çözüm geliştirdiklerini belirtmektedir (Monte, 2000). Ancak, katmanlı ortamlarda ısı iletimi probleminin analitik çözüm yöntemlerinde özdeğerlerin doğru belirlenmesi çok önemlidir. Doğru belirlenemeyen kökler çözüme ulaşılamamasına neden olmaktadır. Köklerin belirlenmesinde hassas davranılması gerekmektedir.

Tek ve çok katmanlı ortamlarda bir boyutlu zamana bağlı ısı difüzyon analiz yöntemleri ile çözüme yönelik analitik yaklaşımlar Özışık (Hahn ve Özışık, 2013) tarafından ele alınmıştır. Özışık, ısı difüzyon problemlerinin çözümünde kesin ve yaklaşık analitik çözüm yöntemlerini detaylı olarak açıklamaktadır. Özışık'ın açıkladığı kesin analitik çözüm yöntemleri aşağıda sunulmuştur:

1. Değişkenlerin ayrılması (Separation of Variables) yöntemi: Isı iletimi sorunlarının çözümünde yaygın olarak kullanılmaktadır. Homojen problemler, bu yöntemle kolayca çözülebilmektedir. Sınır koşullarından yalnızca birinin homojen olmadığı durumlarda, çok boyutlu kararlı ısı iletimi problemleri de çözülebilir; birden fazla homojen olmayan sınır koşulu içeren problemler, süperpozisyon ilkesi kullanılarak daha basit problemlere ayrılarak da çözülebilir.

2. Ortogonal açılım tekniği (Orthogonal Expansion Technique): Bu teknik, ısı üretimi olmayan sonlu kalınlıktaki çok katmanlı ortamın homojen problemini çözmek için kullanılmaktadır.

3. Laplace transformasyonu: Bu yöntem, sonsuz ve yarı sonsuz kalınlıktaki çok katmanlı ortamdaki homojen problemlerin çözümü için uygundur.

4. Green fonksiyonu (Green's Function): Enerji üretimi olan çok katmanlı ortamlarda ısı iletimi ile ilgili zamana bağlı homojen olmayan problemlerin çözümü için uygundur.

Kesin analitik çözümlerin elde edilmesi imkânsız ya da çok zor olduğunda veya elde edilen analitik çözümler hesaplama amacıyla çok karmaşıksa, yaklaşık analitik çözümler bu tür problemlerin çözümü için alternatif yöntemler olarak kullanılabilir. Mühendislik problemlerini yöneten kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için çok sayıda yaklaşık analitik yöntem vardır. Özışık'ın açıkladığı yaklaşık analitik çözüm yöntemleri:

1. İntegral metodu (Integral Method): Yöntem, basit, kolay ve belirli sınır koşulları için ısı iletiminin doğrusal ve doğrusal olmayan tek boyutlu zamana bağlı sınır koşulları olan problemlere uygulanabilir. Sonuçlar yaklaşıktır, ancak kesin yöntemlerle karşılaştırıldığında, bu yöntemle elde edilen çözümlerin birçok mühendislik uygulaması için genellikle kabul edilebilir olduğu doğrulanmıştır.

2. Galerkin metodu (Galerkin method); Yöntem, eliptik, hiperbolik ve parabolik denklemlere, doğrusal olmayan problemlere ve karmaşık sınır koşullarına uygulanabilen yaklaşık bir analitik metottur.

3. İntegral transform tekniği (Integral Transform Technique): Temelini değişkenlerin ayrılması klasik yönteminden alır. Isı iletimi için hem homojen hem de homojen olmayan, kararlı durum ve zamana bağlı sınır değer problemlerinin çözümüne yönelik sistematik, verimli ve basit bir yaklaşım sunar. Bu yöntemde, uzunluk değişkenlerine göre ikinci kısmi türevler, genel olarak integral dönüşümün uygulanmasıyla ısı iletiminin kısmi diferansiyel denkleminden çıkarılır. Örneğin, zamana bağlı problemlerde, uzunluk değişkenlerine göre kısmi türevler kaldırılır ve kısmi diferansiyel denklem, sıcaklığın dönüşümü için zaman değişkeninde birinci mertebeden adi diferansiyel denkleme indirgenir. Adi diferansiyel denklem, dönüştürülmüş başlangıç koşullarına tabi olarak çözülür ve sıcaklık için çözüm elde edilir. Prosedür, birden fazla uzunluk değişkeni içeren kararlı ısı iletimi problemlerinin çözümü için de geçerlidir. Bu gibi durumlarda, ısı iletiminin kısmi diferansiyel denklemi uzunluk değişkenlerinden birinde adi diferansiyel denkleme indirgenmiştir. Dönüştürülen sıcaklık için ortaya çıkan adi diferansiyel denklem çözülür ve sıcaklık dağılımını elde etmek için çözüm tekrar transform edilir. İntegral transform tekniğinin temeli, klasik değişkenlerin ayrılması yöntemine dayanmaktadır.

Çok katmanlı sistemler için geliştirilmiş olan çözüm yöntemleri birçok uygulama alanlarında kullanılmaktadır. Yakıt hücreleri, elektro-kimyasal reaktörler, yüksek yoğunluklu mikro-elektronik malzemeler, çelik bobinler, yarı iletkenler ile elektrotlar ve jeolojik profiller, canlı dokuya yerleştirilen ilaç taşıyıcıların etkinliğinin belirlenmesi, biyolojik dokunun kızılötesi ışıkla araştırılması, kasın ısı üretiminin analiz edilmesi, binaların yalıtım etkinliğinin değerlendirilmesi ve geliştirilmesi vb.

Kararlı Durum ve Zamana Bağlı Isı İletimi

Isı transferi problemleri genellikle kararlı (durağan olarak da adlandırılır) veya zamana bağlı (aynı zamanda dengesiz olarak da adlandırılır) olarak sınıflandırılır (Cengel ve Ghajar, 2014). Kararlı terimi, ortam içindeki herhangi bir noktada zamanla herhangi bir değişiklik olmadığı anlamına gelirken, geçici ise zamanla veya zamana bağlı olarak değişiklik gösterir. Bu nedenle, her iki durumda sıcaklık bir konumdan diğerine değişebilmesine rağmen, ısı akısı herhangi bir yerde bir ortam boyunca sabit ısı transferi sırasında zamanla değişmeden kalır. Örneğin, bir evin duvarları boyunca ısı transferi, evin içindeki ve dışındaki koşullar birkaç saat boyunca sabit kaldığında sabittir. Ancak bu durumda bile, evin içindeki ve dışındaki sıcaklıklar aynı değilse, duvarın iç ve dış yüzeylerindeki sıcaklıklar farklı olacaktır. Bir elmanın buzdolabında soğutulması diğer taraftan geçici bir ısı transfer işlemidir, çünkü elma içindeki herhangi bir sabit noktadaki sıcaklık soğutma sırasında zamanla değişecektir. Geçici ısı transferi sırasında, sıcaklık normalde zamanın yanı sıra pozisyona göre değişir. Ortam sıcaklığının konumdan bağımsız olarak sadece zamana bağlı olarak değiştiği ısı transfer sistemlerine yığılı (lumped) sistemler denir. Örneğin bir termokupl bağlantısı veya ince bir bakır tel gibi küçük bir metal nesne, ısıtma veya soğutma işlemi sırasında yığılı bir sistem olarak analiz edilebilir (Cengel ve Ghajar, 2014).

Pratikte karşılaşılan çoğu ısı transferi problemi, doğada geçici olmakla birlikte, kararlı süreçlerin analiz edilmesi daha kolay olduğundan ve sorularımıza cevaplar sağladıklarından, genellikle tahmin edilen bazı sabit koşullar altında analiz edilirler. Örneğin, tipik bir evin duvarları ve tavanı boyunca ısı geçişi asla sabit değildir, çünkü rüzgârın sıcaklığı, hızı ve yönü, güneşin yeri ve benzeri gibi dış koşullar sürekli olarak değişmektedir. Tipik bir evdeki koşullar da çok istikrarlı değildir. Bu nedenle, bir evin ısı transfer analizini doğru bir şekilde yapmak neredeyse imkânsızdır (Cengel ve Ghajar, 2014).

Değişkenlerin Ayrılması Yöntemi İçin Şartlar

Değişkenlerin ayrılması yöntemiyle kısmi diferansiyel denklem (PDE), özellikle ısı denkleminin çözümü için gereken şartlar aşağıda sunulmuştur:

1. Homojen PDE olması,
2. Kararlı durum (Steady State) problemleri için, homojen olmayan bir sınır koşulu haricindeki tüm sınır koşullarının homojen olması,
3. Zamana bağlı problemler için, tüm sınır koşullarının homojen olması ve bir başlangıç koşulunun homojen olmaması,
4. Lineer PDE ve lineer sınır koşulları olması gerekmektedir (Hahn ve Özışık, 2013).

Çok Katmanlı Malzemelerde Isı Transferi

Temas halindeki birkaç kattan oluşan kompozit bir ortamda geçici sıcaklık dağılımı, mühendislikte çok sayıda uygulamaya sahiptir. Tek boyutlu, geçici ısı iletiminin matematiksel formülasyonu, M paralel tabakadan oluşan levha, silindir veya küresel ortam için elde edilebilir. Problemin homojen olmayan sınır koşullarının homojen sınır koşullarına dönüştürülmesi gereklidir. Sonlu kalınlıktaki kompozit ortamın homojen problemini çözmek için değişkenlere ayırma yöntemi kullanılırken, Laplace dönüşümü, yarı-sonsuz ve sonsuz kalınlıktaki kompozit ortamın homojen problemini çözmek için kullanılabilmektedir. Green fonksiyon yaklaşımı ise, enerji üretiminin olduğu ortam için homojen olmayan yönetici diferansiyel denklemi çözmek için kullanılır.

Sturm-Liouville Problemi

Sturm-Liouville problemini ifade eden homojen adi diferansiyel denklem aşağıdaki gibi ifade edilmektedir (Hahn ve Özışık, 2013):

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dX(x)}{dx}\right]+[q(x)+\lambda\, w(x)]=0 \tag{1.1}$$

Söz konusu denkleme ilişkin sınır koşulları aşağıda belirtilmektedir:

x→a için

$$A_1 \frac{dX\ (x)}{dx} + A_2 X\ (x) = 0 \tag{1.2}$$

ve

x→b için

$$B_1 \frac{dX\ (x)}{dx} + B_2 X\ (x) = 0 \tag{1.3}$$

Bu denklemlerde yer alan $p\ (x), q(x), w(x)$ ve $dp\ (x)/dx$ fonksiyonlarının x→a aralığında sürekli ve gerçek değerde olduğu varsayılmaktadır. A_1, A_2, B_1 ve B_2 sabitleri gerçek ve λ parametresinden bağımsızdır. Yukarıda belirtilen genel adi diferansiyel denklemin belirtilen sınır şartlarında çözümünü sağlayacak sonsuz sayıda λ (λ_1 , λ_2 , …..) değeri mevcuttur. Bu değerlere özdeğerler veya karakteristik değerler denilmektedir. Bu tür problemler, özdeğer problemleri veya Sturm–Liouville problemleri olarak bilinir. İlk olarak İsviçreli matematikçi JCF Sturm (1803-1855) ve Fransız matematikçi J. Liouville (1809-1882) tarafından 1836-1838 yılları arasında Journal de Mathématique dergisinin ilk üç cildinde yayınlanmıştır (Kakaç., Yener ve Naveira-Cotta, 2018). Bu nedenle, bu tür problemler söz konusu iki bilim insanının soyadları ile anılmaktadır.

Yürütülen bu çalışma ile katmanlı sistemlerde, her bir katmanda kullanılan malzemelerin ısıl özelliklerinin bir araya gelerek sunduğu ısıl avantaj ve dezavantajlarının saptanarak katmanlı sistemlerde optimum tasarımı sağlamaya yönelik, kesit şekli, malzeme seçimi, katman sayısı ve katman kalınlıklarının belirlenmesi maksadıyla hem silindirik hem de kartezyen koordinatlarda değişkenlere ayırma yöntemi kullanılarak iki kod oluşturulmuştur. Oluşturulan bu kodlar ile deneysel incelemelerin getirdiği yüksek maliyet, uzun süre gibi istenmeyen durumların önüne geçilmesi, kısa bir zaman içerisinde incelemenin doğru bir şekilde yapılması ve nümerik çözüm yöntemlerini kullanan paket programlara göre daha doğru sonuçlara ulaşılması hedeflenmiştir.

Bu tez kapsamında hem içten hem de dıştan taşınımla ısı transferi olan sınır şartlarına maruz kalan tek boyutlu içi boş silindirik geometri içerisindeki sıcaklık dağılımının analitik olarak tespit edilmesine yönelik süperpozisyon ve değişkenlere ayırma yöntemleri kullanılmıştır. Çalışmanın amacı, içi boş çok katmanlı silindirik ortamda zamana bağlı bir boyutlu ısı difüzyon problemini çözerek sıcaklık dağılımını bulmaktır. Önerilen model ile n sayıda farklı özelliklere sahip kompozit bir tabaka için formülasyon elde edilerek çözüm kapalı formda ifade edilmiştir.

Problemin yapısı gereği, her tabaka için sonsuz özdeğerin tespit edilmesi gerekmektedir. Özdeğerlerin tespit edilmesine yönelik olarak ilgili sınır şartı matrisinin çözümünde ve genel çözümde bulunan katsayıların belirlenmesinde Mathematica yazılımı kullanılmıştır.

Tezin giriş kısmında; konunun önemi, tezin amacı, uygulama alanları ve güncel durumu hakkında bilgi verilmiştir. Tezin ikinci bölümünde, literatürde yapılan çalışmalardan örnekler verilerek konunun güncel durumu vurgulanmış, üçüncü bölümde problemin analitik formülasyonu yapılmıştır. Dördüncü bölümde oluşturulan Matematik Model ve model doğrulama faaliyetleri sunulmuştur. Beşinci bölümde, matematik modelin gerçek mühendislik problemlerine uygulaması yapılmaya çalışılmıştır. Altıncı bölümde yapılan tüm araştırma neticesinde elde edilen sonuçlar ortaya konulmaktadır.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Çok katmanlı ortamlarda ısı difüzyonu ve püskürtme soğutma tekniği uygulanırken oluşan oksidasyonun ısı transferine etkileri konusunda yapılan bazı çalışmalar aşağıda sunulmaktadır.

Monte (Monte, 2000) çalışmasında, her iki tabakadaki ısı iletimi ve kompozit levha ile çevre akışkanı arasındaki ısı transferini ortaya koymaktadır. Tam kapalı form çözümü ilk katmanda ortaya çıkan ısıl difüzyonun bulunduğu üstel zamana bağlı form ile konuma bağlı sonsuz seri formların çözümüdür. Yazar, çalışmasında, zamana bağlı iki-tabakalı problemin çözümünü basitleştirmek için boyutsuz değişkenler ve gruplar oluşturmuştur. Sayısal bir örnekle, katman sıcaklık profili belirlenmiş ve zamana bağlı süreçte çevre akışkanı ile olan ısı transferinin hesaplanması sağlanmıştır. Yapılan çalışma ile elde edilen sonuçlar, çizelgeler halinde sunulmuştur. Makalede, sadece iki katmanlı kompozit plaka için çözümler sunulmasına rağmen, herhangi bir sayıda katı kompozit analizlerinin bu yöntemle yapılabileceği ifade edilmektedir. Monte'nin geliştirdiği bu yöntemle tek boyutlu çok katmanlı kompozit iletken levhaların, çevredeki sıvının sıcaklığının ani değişimlerine karşı, zamana bağlı ısı değişimleri analiz edilmiştir. Çözüm, ısı iletimi kısmi diferansiyel denklemlerinin değişkenlere ayrılması metodu kullanılarak sağlanmıştır Değişkenleri ayırırken, ısıl geçirgenliği zamana bağlı fonksiyonun toplandığı tarafta hesaba katmıştır. Bu da farklı bölgeler için özdeğerler arasındaki ilişkiyi vermekle birlikte, daha sonra özdeğerlerin belirlenmesi için geleneksel tekniklerin uygulanmasından daha az karmaşık bir denklem sağlamıştır. Yazar tarafından yeni bir ortogonalite ilişkisi geliştirilmiş ve ayrıca komple seri çözümün elde edilmesi için kullanılmıştır. Seri çözümdeki ihmal edilen terimlerden ortaya çıkan hatalar da araştırılmıştır. Sayısal bir örneğin hesaplanan sonuçları, boyutsuz olarak grafiksel bir biçimde gösterilmiştir.

Larson ve Koyama tarafından yapılan çalışmada (Larson ve Koyama, 1968), bir flaş lambası tarafından üretilen ısı darbesinin gerçek dalga formunu temsil eden deneye dayalı bir fonksiyon ile, matematiksel modele dahil edilmiş ve analitik çözüm elde edilmiştir. Çalışmalarında iki katlı bir kompozit numunenin katmanlarından birinde ısıl geçirgenlik, ısı kapasitesi ve ısıl iletkenliğin ölçülmesi için bir yöntem tarif edilmiştir. Sunulan analizde, ısı kayıpları için bir düzenleme yapılmadığı ve yöntemin uygulanabilmesi için örnek geometri, bu kayıpların etkilerini kabul edilebilir bir seviyeye indirecek şekilde seçildiği belirtilmektedir. Bu yüzden, analitik çözümün düşük kalınlık-çap oranlarına sahip örnekler kullanılarak yeterince düşük ortam sıcaklıkları için gerçekleştirildiği ifade edilmektedir. Araştırmacılar çalışmalarında ısıl geçirgenlik ölçümlerinde anlık etkileri ihmal ederek, flaş lambasından gelen darbenin anlık olmadığını kabul etmişlerdir. Tanımladıkları flash tekniğinin, iki katmanlı örneklerde ısıl geçirgenliği hesaplamak için tasarlanmış bir dijital bilgisayarın veri azaltma prosedürünün temelini oluşturmakta olduğunu belirtmişlerdir. Araştırmacılar, ısıl geçirgenlik ve ısıl iletkenliğin belirlenmesi için yöntemin, her katmanın homojen olduğu (ancak izotropik olmadığı) ve iki ortam arasındaki ara yüzeyde mükemmel ısıl temasın olduğu iki katmanlı numunelerle sınırlı olduğunu ifade etmektedirler. Bu kısıtlamaların, ısı kapasitesini ölçme yöntemini kullanırken geçerli olmadığı belirtilmektedir. Açıklanan veri azaltma yönteminin, tek bir deneysel sıcaklık geçişi üzerinden dağıtılan ve çeşitli noktalarda saklı kalan verilerin kullanılmasını sağlayarak ölçümlerde tekrarlanan verilerin dahil edilmesi için bir araç olduğu ifade edilmektedir. Bu prosedür ile deneysel iz üzerinde sadece bir nokta kullanılarak, bilinmeyen ısıl geçirgenlik değerlerinin daha kesin bir ölçümünün elde edilebileceği avantajına sahip olduğunu iddia etmektedirler. Deneysel olarak, ısıl geçirgenlik ve ısıl iletkenlik için tarif edilen yöntem, bimetalik kompozit numuneler için başarılı bir şekilde uygulandığı gösterilmektedir. Bu yöntem kullanılarak, birleştirilmiş paslanmaz çelik-bakır ve paslanmaz çelik-pirinç kompozitlerin bazı ticari numunelerinde paslanmaz çeliğin geçirgenliği ve iletkenliğinin belirlenebileceği gösterilmiştir. Sonuçların aynı paslanmaz çelikten tek katmanlı bir numune için elde edilen geçirgenlik ve iletkenlik değerleri ile karşılaştırıldığında uyumlu olduğu gösterilmiştir.

Fredman tarafından (Fredman, 2003) malzemenin sınır bölgeleri için bir sayısal çözüm ile katmanlar için yerel analitik çözümlere dayanarak, çok katmanlı silindirik geometrideki ortamlarda ısı difüzyonu problemleri için analitik bir çözüm yöntemi üzerinde çalışılmıştır. Tek katmanlı alt model, bir boyutlu geometri ve sabit malzeme özellikleri için formüle edilmiştir. Ortaya çıkan yerel Sturm-Liouville özdeğer problemleri için etkin bir algoritma, değişkenler hesabı ve kuantum mekaniğinde bilinen Jeffreys-Wentzel – Kramers-Brillouin yöntemi (JWKB, kuantum mekaniğinde doğru çözümler için kullanılan geleneksel yarı klasik yaklaşım yöntemidir) temelinde geliştirilmiştir. Çalışmada, bir kompozit malzemede sıcaklık profilinin hesaplamaları için iki örnek gerçekleştirilmiştir. Sonuçlar alternatif yöntemler kullanılarak daha önce yayımlanmış hesaplamalar ile tatmin edici bir uyum sağladığı belirtilmiştir. Çalışmada, çok katmanlı ortam için özdeğer spektrumunu bir defada hesaplayarak elde etmenin yararları ile birlikte, analitik çözüm gerektiren durumlar için sunulan tekniğin uygulanabilirliği gösterilmektedir. Metot, metalürjik bir potanın kaplanması için ısıl durum hesaplamasına da uygulanmış, sonuçların termokupl ölçümleri ile iyi bir tutarlılık gösterdiği ortaya konulmuştur.

Zhou ve arkadaşları yaptıkları araştırmada (Zhou, Bai, Lü ve Cui, 2010); zamana bağlı ısı iletim modelini boyutsuz forma dönüştürmüşler ve boyutsuz ısıl geçirgenliği, zamana bağlı fonksiyon tarafında değerlendirmişlerdir. Yazarlar, çalışmada tek boyutlu çift katmanlı kompozit ortamda zamana bağlı ısı iletim probleminin teorik çözüm modelini özfonksiyon genişleme metodunu kullanarak geliştirmişlerdir. Modelden elde edilen değerler sonlu elemanlar yönteminden elde edilen değerler ile kıyaslanarak geçerliliği doğrulanmış ve iki metot sonuçları arasında iyi bir uyum olduğu değerlendirilmiştir. Her iki yöntemde $t=0$ zamanında, maksimum hataların $\xi = 1$ ve $\xi = 4$ sınırlarında meydana geldiği, zamanın daha küçük olduğu durumlarda hatanın büyüdüğünü ortaya koymuşlardır.

Chabicovsky ve arkadaşları yaptıkları çalışmada (Chabičovský vd., 2015); yüksek sıcaklıklı metal işlemlerinde ortak bir soğutma yöntemi olarak kullanılan püskürtme ile soğutmayı incelemişlerdir. Sayısal ve deneysel yöntemleri birlikte kullanarak, yüksek sıcaklıklarda yüzeylerin spreyle soğutulması sırasında oksit tabakasının Leidenfrost sıcaklığı üzerindeki etkisini araştırmışlardır. Bir oksit tabakasının kapladığı metal yüzeyden ısı transferini, etkili ısı transfer katsayısı kavramı kullanarak açıklamışlar, bu konsepti Leidenfrost sıcaklığıyla ilişkilendirmişler ve etkili Leidenfrost sıcaklığını tanıtmışlardır. Etkili Leidenfrost sıcaklık tahmini, sayısal simülasyon ve çeşitli oksit tabakası kalınlıkları olan östenitik paslanmaz çelik bir plaka üzerinde gerçekleştirilen deney ile karşılaştırılmıştır. Deneyde, oksit tabakaları olan test plakası 1000°C'ye ısıtılmış ve sonra düz jet nozulları kullanılarak soğutulmuştur. Çalışmalarında, sıcak yüzeylerin sprey ile soğutulmasında suyun kullanılmasının, oksit tabakasının sadece yalıtım olarak işlev görmediği, aynı zamanda kısa süreli olarak, özellikle Leidenfrost sıcaklığının değişmesiyle, soğutma yoğunluğunu arttırabileceği bir durum yaratabileceğini doğrulamışlardır. Deneysel ve sayısal simülasyon sonuçları ile, etkili Leidenfrost sıcaklığının, artan oksit tabakası kalınlığıyla ve oksit tabakasının azalan ısıl iletkenliğiyle arttığını göstermişlerdir. Analitik sonuçların nümerik simülasyon ile kuvvetli bir şekilde uyuştuğu, ancak deneysel gözlemi öngörmede daha az tatmin edici olduğunu ortaya koymuşlardır. Çalışmalarında, kalın ve gözenekli oksit tabakalı bir test plakasına uygulandığında ölçülen etkili Leidenfrost sıcaklığı, analitik model ya da sayısal simülasyon ile tahmin edilen değerden daha yüksek çıktığı belirtilmiştir. Sayısal veya analitik simülasyonda, oksit tabakasının termofiziksel özelliklerinin sıcaklık değişimleri verilerinin güvenilirliği, oksit tabakasının kalınlığı ve oksit tabakasının gözenekliliği hakkındaki bilgilerin çok önemli olduğu sonucuna varmışlardır. Tahminleri iyileştirmek için güvenilir modelleme giriş verileri elde etmek gerektiğini ifade etmişlerdir.

Bond ve arkadaşları çalışmalarında (Bond, Clark ve Kimber, 2013); daha iyi yalıtım performansı için duvar katmanlarının yapılandırılmasına temel bir yaklaşım geliştirmeyi amaçladıklarını ifade etmektedirler. Çalışmada, otuz üç farklı duvar tipi, yalıtım hacmi ve ısıl kütle sabit tutulduğu dört ana konfigürasyona dayanarak incelendiği ifade edilmektedir. Katmanların dağılımı değiştirilerek, her bir malzemenin toplam hacminin, toplam ısıl direncinin çalışılan tüm konfigürasyonlar için eşdeğer olması sağlanmıştır. Bir elektriksel analojinin, duvar boyunca tek boyutlu ısı iletimini modellemek ve bir günlük bir süreye karşılık gelen frekansta değerlendirilen büyüklük oranını ve fazını belirlemek için kullanıldığı ifade edilmektedir. Duvar sistemi iletim fonksiyonunu ölçmek için kullanılan iki sıcaklık, duvarın iç ve dış yüzeyleridir (yani, sırasıyla, iç ve dış ortamlara maruz kalan iki yüzey). En iyi yalıtım performansı, yalıtım tabakaları, duvarın iç ve dış katmanlarına mümkün olduğu kadar yakın konumlandırıldığında (yani, iç ve dış ortamların yakınında) elde edildiğini, ayrıca hem yalıtım hem de ısıl kütle duvarın her tarafına eşit olarak dağıldığında optimal sonuçlar ortaya çıktığını ortaya koymaktadırlar. Bu optimize yapılandırmayı kullanarak, her malzeme daha sonra giderek daha ince katmanlara bölünmüştür. Sonuçlar, büyüklük oranının maksimize edileceği şekilde optimum sayıda katmanın var olduğunu göstermektedir. Çalışmalarında, çok katmanlı bir duvar için tek boyutlu ısı denkleminin çözümünü basitleştirmek ve hızlandırmak için RC (Resistor–Capacitor, direnç-kapasitör) modeli kullanmışlardır. Sonuçların, modelin yeterince doğru olduğunu ve literatürde bulunan kriterler ile makul bir uyuma sahip olduğunu gösterdiği ifade edilmiştir. Analizde, ilk kısmı dört temel konfigürasyondan geliştirilen çeşitli ağırlıklandırma düzenlemelerini araştırmak üzere toplam 33 konfigürasyon çalışıldığı belirtilmektedir. Frekans cevabı analizi sonuçları, hem iç hem de dış katmanlarda yalıtımın yerleştirilmesini ve termal kütlenin montajın ortasına doğru konumlandırılmasının en iyi yalıtım performansı ile sonuçlanacağını göstermektedir. Analizin ikinci bölümünde, ilk sonuç serisinden en iyi performansa sahip olan duvar kullanılarak, yalıtım ve kütle katmanları bölünerek artan sayıda bölüme ayrılmasıyla genişletilmiştir. Bu sonuçlar, ısıl performansın en üst düzeye çıkarıldığı optimum sayıda katman bulunduğunu göstermektedir. Sürekli olarak artan sayıda katman, bazı kritik noktalarda performansın düşmesine yol açacağını ortaya koymaktadırlar. Isıl kütlenin iç tabakalar arasında eşit olarak dağıtılmasının en iyi yöntem olduğunu veya bu tabakaların orta kısmına doğru ağırlıklandırılmasının aynı genel direnç için daha iyi ısıl performans sağlayıp sağlamadığı konusunda ilave çalışmalar yaptıklarını ifade etmektedirler. Daha eksiksiz bir optimizasyon prosedürü için, imalat ve işletme maliyetleri de dikkate alınması gerektiği ortaya koymuşlardır. Yaptıkları çalışmanın, kapsamlı analiz için ilk adımı oluşturduğunu ileri sürmüşlerdir.

Wang ve arkadaşları yaptıkları çalışmada (Wang, Dai ve Hewavitharana, 2008); ultra-darbeli lazerlere maruz kalan, ara yüzeyi kusurlu ısıl temasta (mükemmel olmayan) çift katmanlı ince film içerisinde oluşan ısıl deformasyonu araştırmak için sonlu bir fark yöntemi geliştirdiklerini belirtmektedirler. Parabolik iki aşamalı ısı aktarım denklemlerine dayanan yöntemde, kafes sıcaklığı ile gerilme oranı arasındaki ilişkinin etkisini ve momentum transferinde sıcak-elektronun artırıcı etkisini hesaba kattıklarını ifade etmektedirler. Araştırmacılar, bu yöntemde hız bileşenlerini dinamik hareket denklemleri içine katarak ve yüzeyde kademeli bir ağ yapısı kullanarak, çözümdeki fiziksel olmayan salınımlardan kaçınmışlardır. Nümerik sonuçlar, iki tabaka arasında, kusurlu ısıl temas mevcut olduğunda, ara yüzeyde elektron sıcaklığında keskin bir süreksizliğinin olduğunu ve kafes sıcaklığı için ara yüzeyde benzer sıcaklık süreksizliğinin gözlendiğini göstermektedir. Bu sonuçların, ara yüzeydeki kusurlu termal bağlantının, ara yüz boyunca ısıl enerji yayılımına engel olduğunu ortaya koymuşlardır.

Parsons ve arkadaşları (Parsons, Reichanadter, Vicksman ve Segur, 2016) yaptıkları çalışmada, genel ısı denkleminin, ısı iletimini veya diğer yayılma süreçlerini tanımlayan kısmi bir diferansiyel denklem olduğunu, bu denklemi çözmek için birincil yöntemin, zamandan bağımsız sınır şartları gerektirdiğini, ancak gerçekte bu varsayımın nadiren bir geçerliliğe sahip olduğunu ve bu nedenle, ısı denklemini zamana bağlı sınır şartları ile yönetmek için bir analitik yöntem oluşturmanın gerekliliğini ifade etmişlerdir. Yaptıkları çalışmada, merkezinde ısı üretimi olan ve silindir çeperi boyunca dış yüzeylerde soğutulan katı bir pirinç silindir sistemini analiz etmişlerdir. Özellikle, kısmi diferansiyel denklemi, sınır şartlarını sıfır alarak dönüştürmüşlerdir. Bu dönüşüm ile açık çözümü bulmak için değişken parametrelerin kullanımına dayanan bir Green fonksiyonunu oluşturmayı hedeflediklerini ifade etmişlerdir. Deneysel sonuçlar, bu analitik yöntemin başarısını doğruladığını göstermektedir. Açık bir çözüm oluşturmak için, iç ve dış termistör veri setlerinde polinom kalıpları kullanarak silindirin sınır koşullarının yaklaşık olarak belirlenmesi gerektiğini ortaya koymaktadırlar. Çalışmalarında, Green fonksiyonu oluşturarak ve daha sonra parametre değişimlerini kullanarak ısı geçirgenlik problemini doğru bir şekilde çözebilmek için bir yöntem geliştirmişlerdir.

Nakamura ve arkadaşları, termal analizin, şiddetli aerodinamik ısıtmaya maruz kalan atmosfere geri dönen kısmının yapısal tasarımda önemli bir rol oynadığını yaptıkları çalışmada ifade etmişler, ısı kalkanı kabuğunun ısıl tasarımının çok önemli olduğunu vurgulamışlardır. Bu tip çalışmalarda, termal analizlerde kullanılan öngörülen ısı akısı ve malzeme özelliklerindeki belirsizliklerin aracın dizayn güvenliğinin değerlendirmesini zorlaştırdığını belirtmişlerdir. Ancak, yaptıkları çalışmada, aracın olası sıcaklık tepkilerini göstermek için Monte Carlo tekniğini kullanmışlardır. Aracın gövdesindeki en yüksek ısının ısı kabuğunun dizaynı ile ilişkili olduğunu değerlendirmişlerdir. Bu çalışma göstermiştir ki, ısı kabuğunun termal dizaynı bu tür uygulamalarda önemlidir (Nakamura ve Fujii, 2006).

Ferraiuolo ve arkadaşları yaptıkları çalışmada yeni nesil yeniden kullanılabilen uzay araçlarının maruz kaldığı aerotermal yüklerin araca zarar vermemesi ve bozulmaya neden olmamasının gerekli olduğunu vurgulayarak bunun için ısıl koruma sistemlerinin kullanıldığını ifade etmişlerdir. Bu sistemler, bir kaç farklı malzemenin kullanıldığı katmanlardan oluşmaktadır. Araç atmosfere geri döndüğünde, çok katmanlı izolasyon (ısıl koruma sistemi) boyunca katı cismin iletimle ve radyasyonla ısı transferine maruz kaldığı ve dış ortama radyasyon vb. ısı alışverişinde bulunduğu belirtilmiştir. Ferraiuolo ve Manca, aerodinamik ısınmaya maruz kalan çok katmanlı ısıl koruma sisteminin, tek boyutlu, zaman ve konuma bağlı sıcaklık değişimini tahmin etmek için analitik çözüme dayalı bir prosedür çalışması yapmışlardır. Yapılan bu çalışmada, Green fonksiyonu ve integral metodu kullanılarak elde edilen analitik çözümler sunulmuş ve bu sonuçlar, nümerik yöntemlerle yapılan çalışmaların sonuçları ile kıyaslanmıştır. Çalışma sonucunda, analitik çözümler ile nümerik çözümlerin uyumlu olduğu, özellikle her iki analitik yöntemin kullanıldığı karma yaklaşımlarda doğruluk oranının çok daha iyi olduğu gözlemlenmiştir (Ferraiuolo ve Manca, 2012).

Gori ve arkadaşları havacılık endüstrisinde kullanılan malzemelerin, geri dönen kapsüllerin sürtünmeden kaynaklı güçlü sıcaklık artışlarına maruz kaldığı, yüksek sıcaklık ve ısı akılarına dayanıklı malzemeler olması gerektiğini vurgulamışlardır. Yaptıkları çalışmada katı roket motorları veya geri dönen uzay araçlarının ısı kabuklarını incelemişlerdir. Katı roket motorlarının yanma gazları ile açığa çıkan yüksek ısı akısına maruz kalan iç kısımlarında sıcaklık tepkileri üzerine inceleme yapmışlarıdır. Bu çalışmada, Avrupa'nın yeni roketi Vega'nın alt kapak ve flanşlı kavramasında uygulanan iki iç ısı koruma sistemi incelenmiştir. Zamana bağlı ısı analizi, sonlu elemanlar programı olan MSC Marc yazılımı kullanılarak yapılmıştır. Bu uygulama ile, yapı üzerindeki ısı dağılımı ölçülmüş ve ısıl korumanın gerekliliği ortaya konmuştur (Gori, De Stefanis, Worek ve Minkowycz, 2008).

Chen ve arkadaşları, çok katmanlı silah namlusundaki ısı akısı ve sıcaklık değişimlerini tahmin etmişlerdir. Yaptıkları bu çalışma ile atım yatağındaki ısı akısını doğru şekilde tahmin edebilmek için, silah namlusunun dış duvarındaki sıcaklık ölçümlerini simüle etmişlerdir. Tahmin metodu ile sonlu farklar yöntemini kullanarak yüzeylerdeki zamana bağlı ısı akısını hesaplamışlardır. Bu hesaplamalar efektif malzeme seçimi ile uzun ömürlü silah namlusu geliştirilmesi için değerli veriler sunmuştur (Chen, Liu, Jang ve Tuan, 2007).

Yang ve arkadaşları iç katmanda ısıl temas direnci olan çok katmanlı silah namlusu içerisindeki ısıl stresi çalışmışlardır. Çelik silindir ve krom kaplama arasındaki ısıl direnci sınır şartını göz önünde bulundurarak Laplace dönüşüm ve sonlu farkları içeren hibrit nümerik bir metod kullanmışlardır. Genel denklemin genel çözümü önce dönüşüm etki alanında çözülmüş, sonrasında gerçek etki alanına dönüşümü Fourier serileri tekniği ile sağlanmıştır. Silah namlusu için gerçek etki alanındaki zamana bağlı sıcaklık dağılımı ve ısıl stress numerik olarak hesaplanmıştır (Yang, Lee, Hsu ve Chu, 2008).

Kaynaklı ve arkadaşları ısıtma, soğutma ve yıllık enerji gereksinimlerini göz önünde bulundurarak dış duvarda optimum termal izolasyon kalınlığını belirlemişlerdir. Bu çalışmada dış duvarlara uygulanan yalıtım kalınlığının optimizasyonu, güneş radyasyonu etkisiyle birlikte hacimsel ısıtma, soğutma ve yıllık enerji gereksinimleri dikkate alınarak yapılmıştır. Çalışma, Türkiye'deki 4 derece-gün bölgesinde yer alan iller için yürütülmüştür: İskenderun (1. bölgede), İstanbul (2. bölgede), Ankara (3. bölgede) ve Ardahan (4. bölgede). Her bölge için güneş-hava sıcaklıkları belirlenerek sezonluk ve yıllık enerji tasarrufunu maksimize ederek optimum yalıtım kalınlıkları hesaplanmıştır. Güneş radyasyonunun ısıtma-soğutma enerji yüklerine etkisi, derece-gün bölgelerine göre optimum yalıtım kalınlıklarının ve geri ödeme sürelerinin değişimi, sezonluk ve yıllık analizler arasındaki farklar tablolar ve şekiller yardımıyla sunulmuştur (Kaynaklı ve Kaynaklı, 2016).

Agrawal ve arkadaşları kriyojenik itki tanklarının izolasyon performanslarını incelemek için sonlu farklar metodunu kullanarak zamana bağlı iki fazlı nümerik model geliştirmişlerdir. Model sıvı ve buhar arasında iki fazlı formülleri kullanarak taşınım ve radyasyonla ısı transferi ölçümleri için matematiksel modelleri içermektedir. Modelin LH2 tankının deneysel test dataları ile doğrulaması yapılmıştır. Farklı köpük izolasyon kalınlıklarında ısı kayıpları, buharlaşma oranı analiz edilmiş ve kriyojenik tankın basınç ve sıcaklık kayıpları değerlendirilmiştir. Yapılan analizler sonucunda düşük izolasyon kalınlıklarında tank basıncının önemli ölçüde arttığı görülmüştür. Çalışmada tank basınç artış oranı ile köpük izolasyon kalınlığının bağıntılı olduğunu ve bunun da LN2 buharlaşma oranının simülasyon şartları için tankın basınç artışında ihmal edilebilir bir etkisi olduğunu gösterdiği ortaya çıkarmıştır. Köpüğün dış yüzeyi üzerinde buz oluşumunun olmadığı durumlarda minimum köpük izolasyon kalınlığına ihtiyaç duyulduğu ileri sürülmüştür (Agrawal, Joseph, Agarwal ve Kumar, 2015) .

Karabulut ve arkadaşları tarafından yapılan çalışmada deneysel ve nümerik olarak farklı izolasyon kalınlıkları faklı çevre şartlarında analiz edilmiştir. Farklı izolasyon kalınlıklarının enerji tasarrufuna etkilerini incelemek için enerji evi adında iki odalı küçük bir bina inşa edilmiştir. Farklı kalınlıklardaki demonte dış duvar polisitren içeren izolasyon malzemesi deneysel olarak analiz edilmiştir. Deney sonucunda yalıtım malzemesinin kalınlığı arttıkça ısı kayıplarının azaldığı gözlemlenmiştir (Karabulut ve Caner, 2017).

Pirtini ve arkadaşları deri dokusundaki lezyonu tespit etmeye yönelik bir ısı transferi modeli çalışmışlardır. Çalışmalarında deri altındaki iyi ya da kötü huylu lezyonlar gibi yapıların özelliklerini yansıtan yüzey sıcaklık dağılımlarını belirlemişlerdir. Özellikle çok katmanlı bir model kullanarak yüzeydeki sıcaklık dağılımlarındaki değişikliklerin termofiziksel özelliklerin değişimlerinin fonksiyonuna bağlı (metabolik ısı üretimi, deri kalınlığı, kan akış dağılımı vb.) olarak hassas bir analiz yapmışlardır. Bu özelliklerin kişiden kişiye, bölgeden bölgeye, iç ve dış etkilere göre değiştiği ve bu etkilere literatürde ulaşılamadığı ifade edilmiştir. Bu parametrelerdeki değişimlerin yüzey sıcaklık dağılımına etkisinin az olduğu bu çalışmada gözlemlenmiştir. Bu çalışmadaki çok katmanlı modeli kullanarak zamana bağlı hassas ısıl tepkilerin analizi ile farklı ölçülerdeki lezyonlar tespit edilmiştir. Çalışmadaki sonuçlar lezyon tespitine yönelik kullanılan termal görüntüleme sistemleri ile doğrulanmıştır (Pirtini Çetingül ve Herman, 2010).

Raudenský ve arkadaşları tarafından yapılan çalışmada, soğutulan sıcak yüzey üzerindeki oksit tabakasının soğutmaya olan etkisine odaklanılmıştır. Örneğin, sürekli dökümde ikincil soğutma, sıcak haddeleme, kontrollü sıcaklık rejimlerinin gerekli olduğu iyileştirme ve diğer metalurjik işlemlerde bu etkinin belirlenmesine ihtiyaç duyulmuştur. Soğutma yoğunluğu, öncelikle, basınç ve soğutma sıvısı çarpması gibi püskürtme parametrelerinden etkilenmektedir. Çok sık bildirilmemesine rağmen ince oksit katmanları bile soğutma yoğunluğunu önemli ölçüde değiştirebilmektedir. Bu etki, çelik yüzeylerin yüksek yüzey sıcaklıklarında soğutulmasında daha yaygın olarak hissedilmektedir. Oksit tabaka kalınlığının soğutmaya etkisi deneysel ve nümerik analiz kullanılarak incelenmiştir. Temiz ve oksidasyonlu yüzeylerin soğutmaya etkisi karşılaştırılmış ve sonuçlarda oksidasyonun soğutmaya etkisi tespit edilmiştir (Raudenský, Chabičovský ve Hrabovský, 2014).

Chabicovsky ve arkadaşları tarafından sayısal ve deneysel yöntemleri bir arada kullanarak oksidasyon tabakasının, yüksek sıcaklıklarda soğutucu püskürtülmesi esnasında oluşan Leidenfrost sıcaklığı üzerindeki etkisi incelenmiştir. Bir oksit tabakası ile kaplanmış metal yüzeyden olan ısı transferi etkin ısı transfer katsayısı kavramı ile tanımlanmaktadır ve bu Leidenfrost sıcaklığına kadar uzanmaktadır. Efektif Leidenfrost sıcaklığı bulunmuştur. Bulunan bu sıcaklık ile östenitik paslanmaz çelik plaka üzerinde farklı oksidasyon kalınlıklarındaki durumlarda yapılan deneysel ve nümerik sonuçlar kıyaslanmıştır. Oksit katmanları olan test plakası 1000 ° C'ye ısıtılmış ve sonra düz jet nozulları kullanılarak soğutulmuştur. Bu çalışmada, sıcak yüzeylerin püskürtme soğutmasında su kullanıldığında, oksit tabakası yalıtım görevi yapmakla birlikte aynı zamanda kısa bir süre için Leidenfrost sıcaklığının değişim etkisiyle soğutmayı artırabileceği bir durum da oluşturabilmektedir (Chabičovský vd., 2015).

Wendelstorf ve diğerleri tarafından yapılan çalışmada püskürtme soğutma tekniğinin, sanayide 1800 K sıcaklığa kadar malzemelerin soğutulması için kullanılan önemli bir teknoloji olduğu belirtilmiştir. Kararlı film kaynama rejiminde ısı transfer katsayısının su çarpma yoğunluğunun bir fonksiyonu olduğu bilinmektedir. Belirli bir yüzey sıcaklığı altında ısı transfer katsayısı sıcaklığa bağlı belirgin bir değişim göstermektedir. Bu bulgular karmaşık iki fazlı kaynama ısı transfer olaylarında ortaya çıkmaktadır. Isı transfer katsayısı, temiz (oksitleyici olmayan) yüzey altında otomatik soğutma test standı (instatory yöntem) ile ölçülmüştür. Genel düşünce ile karşılaştırıldığında, yüksek sıcaklık rejiminde ek bir sıcaklık bağımlılığı bulunmuştur. Püskürtme suyuna malzemeden gelen ısı aktarımı, iki fazlı akış bölgesinin basit bir modeli ile açıklanmaktadır. Deneysel verilerden, değişken ısı transfer katsayısı α için ΔT sıcaklık ve su çarpma yoğunluğuna bağlı bir analitik bağıntı sağlanmaktadır (Wendelstorf, Spitzer ve Wendelstorf, 2008).

Viscorova ve arkadaşları tarafından yapılan çalışmada püskürtme soğutma tekniğinin, 1800 K sıcaklığa kadar ısıtılmış malzemelerin soğutulması için kullanılan önemli bir teknoloji olduğu belirtilmiştir. Sabit film kaynama rejiminde ısı transfer katsayısının su kütlesi akış yoğunluğunun bir fonksiyonu olduğu, belirli bir yüzey sıcaklığının altında, kaynamanın oluşturduğu film tabakasının kararsız hale geldiği ve ısı transfer katsayısının sıcaklığa bağlı olarak güçlü bir şekilde değiştiği ifade edilmiştir. Yaptıkları çalışmada başlangıç sıcaklıkları 1200 °C'ye kadar olan farklı malzemelerin püskürtme ile soğutulmaları incelenmiştir. Düşük alaşımlı AISI-1008 çeliği ve karşılaştırma için Nikel malzemeleri deneylerde kullanılmıştır. Isı transferi katsayısı otomatik bir soğutma testi ile ölçülmüştür (instatory yöntemi). Sadece bir deney gerçekleştirilerek yüzey sıcaklığına bağlı olarak ısı transfer katsayısı belirlenmiştir. İkinci parametre olan su kütle akış yoğunluğu 4 ila 30 kg $m^{-2}s^{-1}$ arasında değişmiştir. Ayrıca, çeliğin püskürtme suyla soğutulması esnasında oluşan oksit tabakaları ek etkiler yaratmıştır. Bu etkileri araştırmak için çelik numuneler havada farklı sıcaklıklarda ve belirli zamanlarda okside edilmiştir. Sonunda, ısı transfer katsayısı okside olmuş numuneler için ölçülmüştür. Yapılan çalışma sonucunda ısı transfer katsayısının yüzey sıcaklığı, su kütle akış yoğunluğu ve yüzey koşullarına bağlı olarak değişen kompleks bir fonksiyon olduğu tespit edildiği belirtilmiştir (Viscorova, Scholz, Spitzer ve Wendelstorf, 2006).

Takeda ve arkadaşları tarafından yapılan çalışmada, demir oksitlerin yüksek sıcaklıktaki fiziksel özellikleri, farklı çelik bileşenlerinin oksitlerinin dinamik davranışlarını açıklamak için ölçülmüştür. FeO, Fe_3O_4, Fe_2O_3 ve Fe_2SiO_4 malzemeleri Si içeren çeliklerde oluşan tipik oksit türleri olarak seçmişler ve her bir oksit türünün örnekleri incelenmiştir. Örnekler tek bir oksit türünden oluşmakta ve oda sıcaklığı ile 1000 °C arasındaki sıcaklıklarda sertlikleri, termal genleşme katsayıları ve ısıl iletkenlikleri ölçülmüştür. Sonuç olarak incelenen demir oksitlerin önemli ölçüde birbirinden farklı fiziksel özelliklere sahip olduğu bulunmuş, sentezlenen demir oksitlerinin kesitlerinde gözlemlenen oksit ölçüsünün doğal formdaki malzemelerindeki ile aynı sertliğe sahip olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca Si içeren çeliğin haddelendikten sonraki yüzey özellikleri ile yüksek sıcaklıktaki fiziksel özellikler arasındaki ilişki incelenmiştir. Haddelenmiş Si içeren çeliklerin yüksek sıcaklıktaki yapışma, yüzey sıcaklığı ve yüzey özelliklerini etkilediği ortaya konulmuştur (Takeda, Onishi, Nakakubo ve Fujimoto, 2009).

Behnamian arkadaşlarıyla yaptıkları çalışmada 500°C ve 25MPa'daki 310S paslanmaz çeliğin oksidasyon direncini incelemişlerdir. X-ray sonuçları ölçeklerin esas olarak 500°C’de süper kritik su reaktörlerine maruz kalan Fe_3O_4, $FeCr_2O_4$ ve Fe_2O_3/Cr_2O_3 fazlarından oluştuğunu göstermiştir. 500°C’de süper kritik su reaktörlerine 20.000 saat maruz kaldıktan sonra paslanmaz çelik alaşımı içerisinde demirin dışa doğru, oksijenin içeriye doğru yayıldığı gözlemlenmiştir. Elektron mikroskobu ile oksit kalınlığı ve Enerji Dağılımlı X-ışını Spektroskopisi elementel analizi gözlemlenmiş ve oksit tabakasının üç ayrı tabakadan oluştuğu belirlenmiştir. Bu katmanlar aslen granüler magnetitten (Fe_3O_4) oluşan bir dış katman, krom bakımından zengin ince tanelerden oluşan bir iç katman ve spinel oksit ($FeCr_2O_4$) ince bir geçiş katmanıdır. Oksit katmanının kalınlığı ve oksit kristalitlerinin boyutu, maruz kalma süresi ile parabolik bir artış göstermiştir (Behnamian vd., 2016).

Ying ve arkadaşları 22MnB5 yüksek mukavemetli çelik için sprey söndürme işlemi sırasında sıcaklığa bağlı arayüzey arası ısı transfer katsayısı üzerindeki etkisini araştırmışlardır. Akış alanının ve kaynama aşamalarının etkisi, tek noktalı püskürtme deney platformuna dayanarak analiz etmişlerdir. Beck’in doğrusal olmayan tahmin yöntemi, boş ve sıvı ortam arasındaki sıvı-katı temas yüzeyindeki ısı transfer katsayısını hesaplamak için kullanıldığı ifade edilmektedir. Enjeksiyon havası ve su basıncı, püskürtme yüksekliği, başlangıç sıcaklığı ve oksit tabakası dahil olmak üzere farklı işlem faktörünün etkisi araştırılmıştır. Sonuçlar, ısı transfer katsayısının en yüksek olduğu kabarcıklı kaynama safhasında göründüğünü, temas yüzeyindeki ısı transfer katsayısının, enjeksiyon basıncına pozitif bir üstel katsayı ile yüksek derecede bağıntılı olduğunu ve başlangıçtaki söndürme sıcaklığı ve püskürtme yüksekliği ile ters bağıntılı olduğunu göstermişlerdir. Ek olarak, araştırmacılar tarafından yüzey oksit tabakasının, çelik ve sıvı ortam arasındaki teması engelleyen temas yüzeyi ısı tansfer katsayısı üzerinde de önemli bir etkiye sahip olduğu ve ısı transfer verimliliğinin zayıflamasına neden olduğu belirtilmektedir (Ying, Gao, Dai, Yang ve Hu, 2017).

3. OKSİDASYON PROBLEMLERİNİN TANITIMI

Bu tezde üç farklı oksidasyon probleminin analizi yapılmıştır. İlk problem, Chabicovsky ve arkadaşları tarafından yapılan yüksek sıcaklıklı östenit paslanmaz çeliğin işlenmesi sırasında su püskürtme ile soğutulması sonucu malzeme üzerinde oluşan oksit tabakası sıcaklığının ve malzeme içerisindeki sıcaklık dağılımının belirlenmesi üzerinedir. sayısal ve deneysel olarak belirledikleri çalışmalar esas alınmıştır. Bu problem, tezde geliştirilen analitik model ile Mathematica yazılımı kullanılarak çözülmüştür. Çözüm sonuçları ile Chabicovsky'in gerçekleştirdiği sayısal ve deneysel sonuçlar ile kıyaslanmıştır.

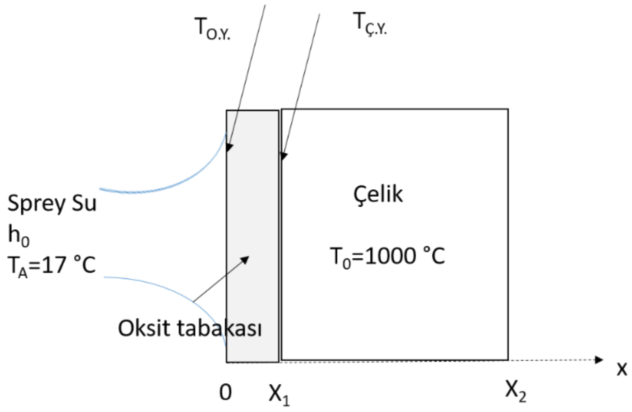
İkinci problem, alüminyum malzemenin su püskürtme ile soğutulması sonucu üzerinde oluşan değişik kalınlıklardaki oksit tabakasının (alumina) soğutma prosesine olan etkisi üzerinedir.

Üçüncü problem ise, sıcaklığa bağlı değişen oksit tabaka kalınlığının püskürtme soğutma prosesindeki yalıtım etkisinin belirlenmesi üzerinedir. Bu problem, Chabicovsky ve arkadaşlarının yaptığı çalışma parametreleri kullanılarak gerçekleştirilmiştir.

İncelenen oksidasyon problemleri ile ilgili yapılan analizler bu bölümde alt başlıklar halinde sunulmuştur.

3.1. Östenit Paslanmaz Çeliğin Püskürtme Soğutma Prosesi Sürecinde Oksit Tabaka Oluşumu ve Sıcaklık Dağılımına Etkileri

Problemin şematik gösterimi ve sınır şartları Şekil 3.1.'de sunulmuştur. 17^{o}C sıcaklıktaki su, ısıl işlem sonrası fırından çıkartılan 1000 ^{o}C sıcaklıktaki östenit paslanmaz çelik malzeme üzerine soğutma amaçlı püskürtülmektedir. Püskürtme soğutma prosesi sürecinde çelik yüzey üzerinde 50 μm kalınlıkta oksit tabakası oluştuğu kabul edilmektedir. Çelik malzeme ve oksit tabakası ile ilgili ısıl özellikler Çizelge 3.1'de verilmiştir. Şekil 3.1'de görülen çelik malzeme 2. Bölge ve çelik malzeme yüzeyi üzerinde oluşan oksit tabakası 1. Bölge olarak alınmıştır.



Şekil 3.1. Östenit Paslanmaz Çeliğin Püskürtme Soğutma Prosesi

Şekil 3.1.'de $T_{O.Y.}$ oksit tabakası üzerindeki sıcaklığı, $T_{Ç.Y.}$ çelik tabakasını yüzeyinde (Oksit tabakası) altındaki birleşim yüzeyindeki sıcaklığı temsil etmektedir. Şekilde oksit tabakasının kalınlığını X_1 (m) ile gösterilmiştir.

Bu çalışmada kullanılan malzeme ve oksit tabakasına ait püskürtme ile soğutma parametreleri Çizelge 3.1'de sunulmuştur. Çizelgede verilen parametrelerden oksit kalınlığı zaman ve sıcaklığa bağlı değişim göstermektedir. Parametreler içerisinde yer alan efektif ısı iletim katsayısı (h_0) sıcaklığa bağlı olarak 500-2.300 W/m^2K arasında değişim göstermektedir. Malzemenin termo-fiziksel özelliklerinin (yoğunluk, ısıl iletkenlik, özgül ısı vb.) sabit olduğu kabul edilmiştir. Malzemelerin ısıl difüzivitesi α_i olarak tanımlanmıştır.

Çizelge 3.1. Östenit paslanmaz çeliğin püskürtme soğutma prosesi parametreleri (Chabičovský vd., 2015)

Parametre	Değer
X_0	0 mm
X_2	25 mm
k_1	23,4 W/m K
k_2	0,2 W/m K
α_1	5,21774x10^{-6} m^2/s
α_2	4,35578x10^{-8} m^2/s
h_0	500-2.300 W/m^2 K
T_A	17 °C
T_0	1000 °C

Püskürtme soğutma etkisi altında oksidasyon oluşumunun ısı transferi üzerindeki etkileri incelenirken malzeme ve üzerinde oluşan oksidasyon iki ayrı katman olarak düşünülmüş ve oksidasyonun ısı transferi üzerine etkileri bu çalışmada geliştirilen katmanlı ısı difüzyon problemlerine yönelik oluşturulan model ile analiz edilmiştir.

3.2. Alüminyum Malzemenin Püskürtme Soğutma Prosesi Sürecinde Oksit Tabaka Oluşumu ve Sıcaklık Dağılımına Etkileri

Su püskürtme soğutma prosesi sürecinde oluşan oksit tabaka kalınlığının sıcaklık dağılımına etkisi incelenmiştir. Bu analiz sırasında kullanılan parametreler Çizelge 3.2'de sunulmuştur. Söz konusu parametrelerden fiziksel özellikler bir önceki başlıkta incelenen östenit paslanmaz çeliğin fiziksel özellikleri ile aynı değerler alınmıştır. Akışkanın çarpma yoğunluğunun (Vs) 30 [kg/(m^2K)] olduğu kabul edilmiştir.

Çizelge 3.2. Alüminyumun soğutulması problemi parametreleri (Incropera vd., 2007)

Parametre	Değer
X_0	0 mm
X_2	25 mm
k_1	36 W/m K
k_2	237 W/m K
α_1	1.19x10^{-5} m^2/s
α_2	9.711x10^{-5} m^2/s
Vs	30 kg/(m^2K)
T_A	17 °C
T_0	300 °C

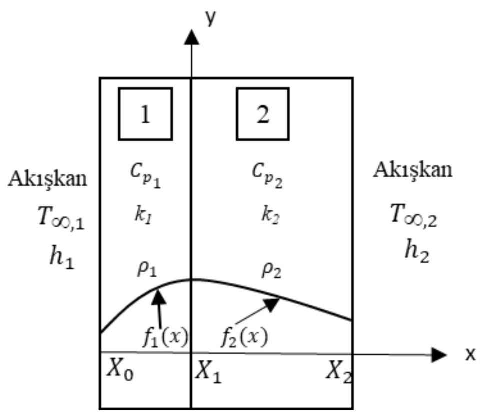
4. MATEMATİKSEL MODEL VE ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, bir boyutlu silindirik koordinat sisteminde çok katmanlı bir ortamda ısı iletimi probleminin matematiksel formülasyonu yapılmış ve çözüm için gerekli olan sınır şartları tanımlanmıştır. Matematiksel modelin analitik çözümü için süperposizyon ve değişkenlerin ayrılması yöntemleri kullanılmış ve çözüm kapalı formda elde edilmiştir.

4.1. Tek Boyutlu Isı İletim Denklemi

Bu bölümde, çok katmanlı malzemenin tek boyutlu ısı iletim denkleminin değişkenlere ayırma yöntemi kullanılarak analitik çözümü gerçekleştirilmiştir. Uygulamada karşılaşılan problem geometrilerinden bazıları püskürtme soğutma tekniğinin yanı sıra bir evin duvarı, pencere camı, metal plaka, buhar borusu, silindirik bir nükleer yakıt elemanı, elektrik direnç teli, metal top veya bir kabın duvarı olarak örneklendirilebilir. Bu örneklerden görüldüğü üzere, problemin geometrisine bağlı olarak ısı iletim denkleminin oluşturulması gerekmektedir.

Bu bölümde, Şekil 4.1'de şematik olarak gösterilen n sayıda katmandan oluşan kompozit malzeme incelenmiştir. Şekil 4.1.'de görüldüğü üzere, kartezyen koordinatlardaki yapının iç ve dış kısmında farklı akışkanların aktığı durum dikkate alınmıştır. Her katmanın sıcaklığı, i katman sayısı olmak üzere, $T_i(x,t)$ şeklinde ifade edilmiş, fiziksel olarak izotropik ısıl özelliklere sahip olduğu düşünülmüş ve ara yüzeylerdeki ısıl temas direnci göz önünde bulundurulmamıştır. Bu sebeple, ara yüzeylerde katman sıcaklıkları birbirine eşit alınmıştır. Malzemenin ilk katmanının yüzeyinde, $x = X_0$, akıştan dolayı taşınım ile ısı transferi gerçekleşmektedir. En dış katmanda ise dış ortamla katmanın dış yüzeyi, $x=X_n$, arasında da taşınım ile ısı transferi gerçekleşmektedir. Başlangıç anında ise, $t = 0$ her katman belirli ve bilinen bir sıcaklığa sahiptir.



Şekil 4.1. İç ve dış yüzeyleri taşınıma maruz n-katmanlı kartezyen yapının şematik görünümü

Isı üretiminin olmadığı, x yönünde zamana bağlı genel ısı iletim denklemi, diferansiyel bir kontrol hacmi üzerine enerji korunumu yazılarak aşağıdaki şekilde elde edilmektedir.

$$\frac{1}{\alpha_i}\frac{\partial T_i(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_i(x,t)}{\partial x^2} \tag{4.1}$$

Bu formülasyonda, malzemenin termo-fiziksel özelliklerinin; yoğunluk, ısıl iletkenlik, özgül ısı vb. sabit olduğu kabul edilmiştir. Eş. (4.1)'de geçen α_i , i tabakasının ısıl difüzivitesidir ve $\alpha_i = k_i/\rho_i c_{p,i}$ olarak tanımlanır. Burada geçen, k_i, i tabakasının ısıl iletkenliği, ρ_i, yoğunluğu ve $c_{p,i}$ise özgül ısısını temsil etmektedir.

4.2. Sınır Şartları

Birinci katmanın ilk yüzeyi ile yüzey üzerinden geçen akışkan arasında ve en dıştaki katmanın yüzeyi ile dış ortam arasında taşınım ile ısı transferi gerçekleşmektedir. Malzeme içinde ise, $X_0 \leq x \leq X_n$, iletim ile ısı transferi gözlenmektedir. Ara yüzeylerde katman sıcaklıkları ve iletim ile gerçekleşen ısı transferi miktarı eşittir. Bu sınır şartları da göz önünde bulundurularak çok katmanlı sistemlerde tek boyutlu ısı iletim denkleminin türetilmesi gerçekleştirilmiştir.

Birinci katmanın iç yüzeyi $x = X_0$ için enerjinin korunumundan;

Sınır şartı (1)
$$k_1\frac{\partial T_1(X_0,t)}{\partial x} = -h_{in}\left(T_{\infty_1} - T_1(X_0,t)\right) \tag{4.2}$$

Ara yüzeylerde $x = X_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n-1)$ için enerjinin korunumundan;

Sınır şartı (2) $$k_i \frac{\partial T_i(X_i,t)}{\partial x} = k_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}(X_{i+1},t)}{\partial x} \tag{4.3}$$

ve ara yüzeylerde sıfır direnç kabulü ile sıcaklık eşitliği,

Sınır şartı (3) $$T_i(X_i,t) = T_{i+1}(X_{i+1},t) \tag{4.4}$$

En dıştaki katmanın dış yüzeyi $x = X_n$ için;

Sınır şartı (4) $$k_n \frac{\partial T_n(X_n,t)}{\partial x} = h_{out}\left(T_{\infty_2} - T_n(X_n,t)\right) \tag{4.5}$$

Başlangıç anında, $(t = 0)$'da;

Başlangıç şartı (5) $$T_i(x, t = 0) = T_{0_i} \tag{4.6}$$

İç ve dış yüzeyde toplam iki ve her ara yüzeyde ise ikişer olmak üzere 2n adet sınır şartı mevcuttur. Çözümde kullanılacak metodun belirlenmesi açısından sınır şartlarının homojen olup olmadığı incelenmiştir.

Sınır şartı ifadeleri aşağıdaki gibi düzenlendiğinde ara yüzeylerdeki sınır şartlarının homojen olduğu, birinci katmanın iç yüzeyi ve dış katmanın dış yüzeyindeki sınır şartlarının ise homojen yapıda olmadığı görülmektedir.

Birinci katmanın iç yüzeyi $x = X_0$ için;

$$k_1 \frac{\partial T_1(X_0,t)}{\partial x} + h_{in}\, T_1(X_0,t) = -h_{in}\left(T_{\infty_1}\right) \tag{4.7}$$

Ara yüzeylerde $r = X_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n-1)$ için;

$$k_i \frac{\partial T_i(X_i,t)}{\partial x} - k_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}(X_{i+1},t)}{\partial x} = 0 \tag{4.8}$$

$$T_i(X_i, t) - T_{i+1}(X_{i+1}, t) = 0 \tag{4.9}$$

En dıştaki katmanın dış yüzeyi $x = X_n$ için;

$$k_n \frac{\partial T_n(X_n, t)}{\partial x} + h_{out}\, T_n(X_n, t) = h_{out}\left(T_{\infty_2}\right) \tag{4.10}$$

4.3. Değişkenlerin Ayrılması Yöntemi

Değişkenlerin ayrılması metodu sadece homojen denklemlere uygulanmaktadır. Uygulayacağımız sınır şartlarında bulunan homojen olmayan yapı nedeniyle değişkenlere ayrılması metodu kullanılamamaktadır. Bu yüzden Eş.(4.1)'de belirtilen genel denklemi aşağıdaki gibi iki kısma ayırarak, yani $T_i(x,t) = \bar{T}_i\,(x,t) + T_{ss_i}(x)$ şeklinde süperpoze ederek sınır şartları uygulanmaktadır.

Zamana bağlı homojen çözüm yöntemi;

$$\frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial \bar{T}_i(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \bar{T}_i(x,t)}{\partial x^2} \tag{4.11}$$

Zamandan bağımsız homojen olmayan çözüm yöntemi;

$$\frac{\partial^2 T_{ss_i}(x,t)}{\partial x^2} = 0 \tag{4.12}$$

Burada Eş.(4.11) denklemine homojenleştirilmiş sınır şartlarını, Eş.(4.12) denklemine ise homojen olmayan sınır şartlarını uygulayarak çözüm yapılmaktadır. Buradan bulunacak sıcaklık değerleri toplanarak her bir katman için sıcaklık dağılımı denklemleri elde edilmektedir.

4.4. Zamana Bağlı Homojen Çözüm

Zaman bağlı homojen çözüm için Eş.(4.11) kullanılacaktır. Bunun için homojen olmayan sınır şartlarını homojenleştirmek gerekmektedir.
Birinci katmanın iç yüzeyi $x = X_0$ için;

$$-k_1 \frac{\partial \overline{T}_1(X_0,t)}{\partial x} - h_{in} \ \overline{T}_1(X_0,t) = 0 \tag{4.13}$$

Ara yüzeylerde $x = X_i \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n-1)$ için;

$$k_i \frac{\partial \overline{T}_i(X_i,t)}{\partial x} - k_{i+1} \frac{\partial \overline{T}_{i+1}(X_{i+1},t)}{\partial x} = 0 \tag{4.14}$$

ve

$$\overline{T}_i(X_i,t) - \overline{T}_{i+1}(X_{i+1},t) = 0 \tag{4.15}$$

En dıştaki katmanın dış yüzeyi $x = X_n$ için;

$$k_n \frac{\partial \overline{T}_n(X_n,t)}{\partial x} + h_{out} \overline{T}_n(X_n,t) = 0 \tag{4.16}$$

Başlangıç Şartı $(t = 0)$'da;

$$\overline{T}_i(x,t=0) = T_{0_i} - T_{ss_i}(x) \tag{4.17}$$

homojen sınır şartları elde edilmiştir.

Eş. (4.11.)'de belirtilen x ve t değişkenlerine bağlı olan sıcaklık dağılımı fonksiyonu üzerine "Değişkenlerin Ayrılması Metodu" uygulanmaktadır.

$$\overline{T}_i(x,t) = \ \Re_i(x) \ \Gamma_i(t) \tag{4.18}$$

Eş. (4.11) eşitliliğinde $\overline{T}_i(x,t)$ yerine Eş. (4.18)'deki eşitlik yazılarak, elde edilen denklemde bulunan kısmi türev çözümlemesi yapıldıktan sonra ortaya çıkan denklemdeki her iki eşitlik $\Re_i(x)\ \Gamma_i(t)$'ye bölünerek,

$$\frac{\alpha_i}{\Re_i(x)} \frac{d^2\Re_i(x)}{dx^2} = \frac{1}{\Gamma_i(t)} \frac{d\ \Gamma_i(t)}{dt} \tag{4.19}$$

eşitliği elde edilmektedir. Bu eşitliğin herhangi bir sayı olan $-\lambda^2$ eşit olduğunu kabul ettiğimizde;

$$\frac{\alpha_i}{\Re_i(x)}\frac{d^2\Re_i(x)}{dx^2}=\frac{1}{\Gamma_i(t)}\frac{d\,\Gamma_i(t)}{dt}=-\lambda^2 \tag{4.20}$$

sonucuna ulaşılmaktadır. Eş. (4.20)'deki eşitlikler ayrı ayrı yazılarak;

$$\frac{1}{\Gamma_i(t)}\frac{d\,\Gamma_i(t)}{dt}=-\lambda^2 \tag{4.21}$$

ve

$$\frac{1}{\Re_i(x)}\frac{d^2\Re_i(x)}{dx^2}=\frac{-\lambda^2}{\alpha_i} \tag{4.22}$$

olmak üzere x ve t değişkenine bağlı iki ayrı eşitlik kurulmaktadır.

$$\frac{1}{\Gamma_i(t)}\frac{d\,\Gamma_i(t)}{dt}=-\lambda^2 \tag{4.23}$$

Eş. (4.23)'ün genel çözümü ise;

$$\Gamma_i(t)=e^{-\lambda^2 t+C} \tag{4.24}$$

olarak elde edilmektedir. Bu denklemdeki C sabit olup, $e^C=DD_m$ olarak yazılırsa denklem;

$$\Gamma_i(t)=DD_m\,e^{-\lambda^2 t} \tag{4.25}$$

olarak ifade edilmektedir. Eş. (4.22) aynı zamanda;

$$\frac{d^2\Re_i(x)}{dx^2}+\frac{\lambda^2}{\alpha_i}\Re_i(x)=0 \tag{4.26}$$

şeklinde yazılabilmektedir. Eş. (4.26)'nın genel çözüm denklemi;

$$\Re_i(x) = a_i\, sin\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha_i}}x\right) + b_i\, cos\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha_i}}x\right) \tag{4.27}$$

şeklinde ifade edilmektedir.

4.5. Genelleştirilmiş Sıcaklık Dağılımı Fonksiyonu

Hem x hem de t değişkenlerine bağlı fonksiyonların genel çözümlerinin elde edilmesinin ardından zamana bağlı homojen sınır şartlarında her bir katmana ait sıcaklık dağılımı olan $\bar{T}_i(x,t)$ fonksiyonunun genelleştirilmiş hali aşağıdaki şekilde olmaktadır.

$$\bar{T}_i(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \Re_i(x)\, \Gamma_i(t) \tag{4.28}$$

Bulduğumuz genel çözümler yerine yazıldığında;

$$\bar{T}_i(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(DD_m\, e^{-\lambda_m{}^2 t}\right)\left(a_{i,m}\, sin\left(\frac{\lambda_m}{\sqrt{\alpha_i}}x\right) + b_{i,m}\, cos\left(\frac{\lambda_m}{\sqrt{\alpha_i}}x\right)\right) \tag{4.29}$$

denklemi elde edilir. λ_m ifadesi sonsuz sayıda değer alacağı için sıcaklık fonksiyonu seri olarak ifade edilmektedir.

$a_{i,m}$, $b_{i,m}$ ve DD_m katsayıları her bir özdeğere göre farklı değerler alacağı için m alt indisi ile birlikte belirtilmiştir. Katsayılar ve her bir katmandaki özdeğerlerin bulunması için bir sonraki başlıkta sınır şartları uygulanacaktır.

4.6. Sınır Şartlarının Uygulanması

Homojenleştirilmiş sınır şartları daha önce belirlenmişti. Bir adet iç yüzey bir adet dış yüzey ve 2n-2 tane ara yüzey olmak üzere toplam n adet sınır şartı mevcuttur. Ara yüzeylerdeki sınır şartları bütün katmanlar için aynı olduğu için genelleştirilmiştir. Bu sınır şartlarının uygulanması ile sıcaklık fonksiyonundaki katsayılar bulunmuş olacaktır.

Birinci Katmanda Sınır Şartının Uygulanması

Birinci katmanın iç yüzeyi için bir adet sınır şartı mevcuttur.

$$-k_1 \frac{\partial \overline{T}_1(X_0,t)}{\partial x} + h_{in} \ \overline{T}_1(X_0,t) = 0 \tag{4.30}$$

Yukarıdaki sınır şartına $\overline{T}_i(x,t) = \Re_i(x)\,\Gamma_i(t)$ eşitliği uygulandığında ve gerekli sadeleştirmeler yapıldığında;

$$-k_1 \left(\frac{\lambda \mathrm{Cos}\left(\frac{X_0\lambda}{\sqrt{\alpha_1}}\right) a_1}{\sqrt{\alpha_1}} - \frac{\lambda \mathrm{Sin}\left(\frac{X_0\lambda}{\sqrt{\alpha_1}}\right) b_1}{\sqrt{\alpha_1}} \right) + h_{in} \ \left(a_1\, sin\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha_1}} X_0\right) + b_1\, cos\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha_1}} X_0\right) \right) = 0 \tag{4.31}$$

denklemine ulaşılmaktadır ve bu denklem a_1 ve b_1 katsayıları cinsinden yazıldığında;

$$a_1 \left(h_{in} \ sin\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha_1}} X_0\right) - k_1 \left(\frac{\lambda \mathrm{Cos}\left(\frac{X_0\lambda}{\sqrt{\alpha_1}}\right)}{\sqrt{\alpha_1}} \right) \right) + b_1 \left(h_{in} \ cos\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha_1}} X_0\right) + k_1 \left(\frac{\lambda \mathrm{Sin}\left(\frac{X_0\lambda}{\sqrt{\alpha_1}}\right)}{\sqrt{\alpha_1}} \right) \right) = 0 \tag{4.32}$$

elde edilir.

Ara Yüzeylerde Sınır Şartlarının Uygulanması

Ara yüzey sınır şartları $x = X_i$ (i=1,2,.., n-1) geçerlidir. Bu durumda $i = 1$ için sınır şartları;

$$k_1 \frac{\partial \overline{T}_1(X_1,t)}{\partial x} - k_2 \frac{\partial \overline{T}_2(X_1,t)}{\partial x} = 0 \tag{4.33}$$

ve

$$\overline{T}_1(X_1,t) - \overline{T}_2(X_1,t) = 0 \tag{4.34}$$

şeklinde yazılmaktadır. Eş. (4.33)'de $\overline{T}_i(x,t) = \ \Re_i(x)\ \Gamma_i(t)$ denklemi uygulandığında,

$$k_1 \frac{\partial\big(\Re_1(X_1)\ \Gamma_1(t)\big)}{\partial x} - k_2 \frac{\partial\big(\Re_2(X_1)\ \Gamma_2(t)\big)}{\partial x} = 0 \tag{4.35}$$

denklemine ulaşılmaktadır.

Bu denklemde zamana bağlı ifadeler çaptan bağımsız olduğundan;

$$\Gamma_1(t) = \Gamma_2(t) \tag{4.36}$$

yazılabilmektedir. Bu durumda eşitlik;

$$k_1 \frac{\partial \Re_1(X_1)}{\partial x} - k_2 \frac{\partial \Re_2(X_1)}{\partial x} = 0 \tag{4.37}$$

halini almaktadır.

$$\Re_1(x) = a_1\, sin\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha_1}} x\right) + b_1\, cos\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha_1}} x\right) \tag{4.38}$$

ve

$$\Re_2(x) = a_2\, sin\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha_2}} x\right) + b_2\, cos\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha_2}} x\right) \tag{4.39}$$

denklemleri Eşitlik (4.37)'de yerine yazıldığında;

$$k_1 \frac{d\left(a_1\, sin\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha_1}} X_1\right) + b_1\, cos\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha_1}} X_1\right)\right)}{dx} - k_2 \frac{d\left(a_2\, sin\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha_2}} X_1\right) + b_2\, cos\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha_2}} X_1\right)\right)}{dx} = 0 \tag{4.40}$$

bulunur ve gerekli işlemler yapıldığında;

$$k_1 \left(\frac{\lambda \mathrm{Cos}\left(\frac{X_1 \lambda}{\sqrt{\alpha_1}}\right) a_1}{\sqrt{\alpha_1}} - \frac{\lambda \mathrm{Sin}\left(\frac{X_1 \lambda}{\sqrt{\alpha_1}}\right) b_1}{\sqrt{\alpha_1}} \right) - k_2 \left(\frac{\lambda \mathrm{Cos}\left(\frac{X_1 \lambda}{\sqrt{\alpha_2}}\right) a_2}{\sqrt{\alpha_2}} - \frac{\lambda \mathrm{Sin}\left(\frac{X_1 \lambda}{\sqrt{\alpha_2}}\right) b_2}{\sqrt{\alpha_2}} \right) = 0 \tag{4.41}$$

ifadesi elde edilmektedir. Aynı şekilde Eşitlik (4.34)'de $\bar{T}_i(x,t) = \Re_i(x)\, \Gamma_i(t)$ denklemin uygulandığında;

$$\Re_1(X_1)\, \Gamma_1(t) - \Re_2(X_1)\, \Gamma_2(t) = 0 \tag{4.42}$$

eşitliği elde edilmektedir. Bu ifadede $\Gamma_1(t) = \Gamma_2(t)$ eşitliğini uyguladığımızda;

$$\Re_1(X_1) - \Re_2(X_1) = 0 \tag{4.43}$$

elde edilmektedir. Bu ifadede Eş. (4.38) ve Eş. (4.39) kullanılırsa;

$$a_1\, sin\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha_1}}X_1\right)+b_1\, cos\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha_1}}X_1\right)=a_2\, sin\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha_2}}X_1\right)+b_2\, cos\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha_2}}X_1\right) \tag{4.44}$$

sonucuna ulaşılmaktadır. Ara yüzey sınır şartlarını genelleştirmek için de $i=(n-1)$ ve $i=n$ değerleri aynı işlemlere uygulandığında,

$i=(n-1)$ için;

$$k_{n-1}\left(\frac{\lambda \mathrm{Cos}\left(\frac{X_{n-1}\lambda}{\sqrt{\alpha_{n-1}}}\right)a_{n-1}}{\sqrt{\alpha_{n-1}}}-\frac{\lambda \mathrm{Sin}\left(\frac{X_{n-1}\lambda}{\sqrt{\alpha_{n-1}}}\right)b_{n-1}}{\sqrt{\alpha_{n-1}}}\right)-k_n\left(\frac{\lambda \mathrm{Cos}\left(\frac{X_{n-1}\lambda}{\sqrt{\alpha_n}}\right)a_n}{\sqrt{\alpha_n}}-\frac{\lambda \mathrm{Sin}\left(\frac{X_{n-1}\lambda}{\sqrt{\alpha_n}}\right)b_n}{\sqrt{\alpha_n}}\right)=0 \tag{4.45}$$

ve

$$a_{n-1}\, sin\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha_{n-1}}}X_{n-1}\right)+b_{n-1}\, cos\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha_{n-1}}}X_{n-1}\right)=a_n\, sin\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha_n}}X_{n-1}\right)+b_n\, cos\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha_n}}X_{n-1}\right) \tag{4.46}$$

genelleştirilmiş denklemler elde edilmektedir

Son Katmanın Dış Yüzeyinde Sınır Şartının Uygulanması;

$$k_n\frac{\partial\overline{T_n}(X_n,t)}{\partial x}+h_{out}\,\overline{T_n}(X_n,t)=0 \tag{4.47}$$

Yukarıdaki sınır şartına $\bar{T}_i(x,t)=\Re_i(x)\,\Gamma_i(t)$ eşitliği uygulandığında ve gerekli sadeleştirmeler yapıldığında;

$$k_n\,\left(\frac{\lambda \mathrm{Cos}\left(\frac{X_n\lambda}{\sqrt{\alpha_n}}\right)a_n}{\sqrt{\alpha_n}}-\frac{\lambda \mathrm{Sin}\left(\frac{X_n\lambda}{\sqrt{\alpha_n}}\right)b_n}{\sqrt{\alpha_n}}\right)+h_{out}\ \left(a_n\, sin\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha_n}}X_n\right)+b_n\, cos\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha_n}}X_n\right)\right)=0 \tag{4.48}$$

denklemine ulaşılmaktadır ve bu denklem a_n ve b_n katsayısı cinsinden yazılırsa;

$$a_n\left(h_{out}\ sin\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha_n}}X_n\right)+k_n\frac{\lambda\mathrm{Cos}\left(\frac{X_n\lambda}{\sqrt{\alpha_n}}\right)}{\sqrt{\alpha_n}}\right)+b_n\left(h_{out}\ cos\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha_n}}X_n\right)+k_n\frac{\lambda\mathrm{Sin}\left(\frac{X_n\lambda}{\sqrt{\alpha_n}}\right)}{\sqrt{\alpha_n}}\right)=0 \tag{4.49}$$

olmaktadır.

4.7. Özdeğerlerin Bulunması

Isı iletimi problemlerinde oluşturulan öz fonksiyonların hesaplanabilmesi için λ_n özdeğerlerin (köklerin) bulunması gerekmektedir. $sin\,\lambda_n L = 0$ veya $cos\,\lambda_n\, L = 0$ gibi özdeğer denklemlerinin bazıları basit ifadelerdir; bu nedenle λ_n özdeğerleri kolayca hesaplanabilmektedir.

Transandantal denklemin grafiksel gösterimi, köklerin bulunduğu bölgeleri belirlemek için kullanılır, ancak köklerin doğru değerleri, transandantal denklemlerin sayısal yöntemlerle çözümü ile belirlenir.

Transandantal denklemlerin köklerinin belirlenmesinde çeşitli sayısal yöntemler bulunmaktadır. Örnek olarak Yarıya Bölme Metodu, Newton-Raphson ve Sekant yöntemleri gösterilebilir. Bu yöntemlere ilişkin özet bilgiler “Mühendisler İçin Sayısal Yöntemler” (Chapra, Canale, Heperkan ve Kesgin, 2003). kitabında belirtildiği şekliyle aşağıda ele alınmıştır.

Yarıya Bölme Metodu: Yöntemin esası, $F(x) = 0$ şeklindeki transandantal bir denklemin $x_i \le x \le x_{i+1}$ aralığındaki kökünü bulmak için, konum değişken değeri adım adım artırılır ve arama yöntemlerine dayanarak fonksiyonun işaret değiştirdiği bir aralık bulunur. Daha sonra aralık daha küçük aralıklara bölünerek işaretin nerede değiştiği (dolayısıyla kökün yeri) hassas olarak belirlenir Süreç tekrarlanır ve aralık daha ince aralıklara bölünerek kök için yapılan tahmin iyileştirilir.

Newton-Raphson: Köklerin yerlerini belirlemek için en sık kullanılan formül Newton Raphson denklemidir. Eğer kökün ilk tahmini x_i ise $x_i, f\ (x_i)$ noktasındaki teğet uzatılabilir. Uzatılan teğetin x eksenini kestiği nokta çoğunlukla kökün daha iyi bir tahminidir. Bu yöntem pratikte hızlı yakınsama nedeniyle yaygın olarak kullanılır. Bununla birlikte, yakınsama zorluklarına yol açabilecek durumlar vardır. Örneğin, kökün ilk tahmini, kökün tam değerine yeterince yakın değilse yakınsama zorlukları ortaya çıkabilmektedir.

Sekant Yöntemi: Newton-Raphson yöntemi, her yineleme için fonksiyonun türevini gerektirmektedir. Polinomlar ve birçok başka fonksiyonlar için bu sorun olmasa da türevlerinin hesaplanması son derece zor veya zaman alıcı olan belirli fonksiyonlar vardır. Böyle durumlarda türev, geriye doğru sonlu fark yaklaşımıyla yaklaşık olarak ifade edilir. Buna sekant yöntemi denilmektedir ve yaklaşımın iki adet ilk tahmine gereksinimi vardır. Sekant yöntemi, Newton-Raphson kadar hızlı bir şekilde yakınsama yapmayabilir (Chapra vd., 2003).

Bu çalışmada özdeğerlerin bulunmasında Newton Metodu kullanılmaktadır. Newton yönteminde eşitliği gerçekleyebilecek özdeğerin bulunmasına yönelik ilk değer için bir tahmin yapılmaktadır. Metodun formülasyonu Eş. (4.50)'de sunulmaktadır.

$$\lambda = \lambda_{tahmin} - \frac{Det\ [matris]}{Det'\ [matris]} \tag{4.50}$$

Özdeğerlerin bulunması için uygulanmış olan sınır şartlarından faydalanılmaktadır. Bu ifadelerden özdeğerleri bulabilmek için; n adet katman için birer adet iç yüzey ve dış yüzey ile 2n-2 adet ara yüzey eşitliği olmak üzere toplam 2n eşitlik sistemi oluşturulmaktadır. Söz konusu eşitlik sistemi katsayılara ayrılarak 2n x 2n bir matris şeklinde yazılır

Katsayılar matrisi

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ a_n \\ b_n \end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\begin{pmatrix} h_0 sin\left(\frac{\lambda X_0}{\sqrt{\alpha_1}}\right) \\ -k_1\, sin'\left(\frac{\lambda X_0}{\sqrt{\alpha_1}}\right) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} h_0\ cos\left(\frac{\lambda X_0}{\sqrt{\alpha_1}}\right) \\ -k_1 cos'\left(\frac{\lambda X_0}{\sqrt{\alpha_1}}\right) \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ -sin\left(\frac{\lambda X_1}{\sqrt{\alpha_2}}\right) \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ -cos\left(\frac{\lambda X_1}{\sqrt{\alpha_2}}\right) \end{matrix} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
sin\left(\frac{\lambda X_1}{\sqrt{\alpha_1}}\right) & cos\left(\frac{\lambda X_1}{\sqrt{\alpha_1}}\right) & k_2\, sin'\left(\frac{\lambda X_1}{\sqrt{\alpha_2}}\right) & k_2 cos'\left(\frac{\lambda X_1}{\sqrt{\alpha_2}}\right) & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\,k_1\, sin'\left(\frac{\lambda X_1}{\sqrt{\alpha_1}}\right) & -\,k_1 cos'\left(\frac{\lambda X_1}{\sqrt{\alpha_1}}\right) & sin\left(\frac{\lambda X_2}{\sqrt{\alpha_2}}\right) & cos\left(\frac{\lambda X_2}{\sqrt{\alpha_2}}\right) & \cdots & -sin\left(\frac{\lambda X_{n-2}}{\sqrt{\alpha_{n-1}}}\right) & -cos\left(\frac{\lambda X_{n-2}}{\sqrt{\alpha_{n-1}}}\right) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & k_{n-1} sin'\left(\frac{\lambda X_{n-2}}{\sqrt{\alpha_{n-1}}}\right) & k_{n-1} cos'\left(\frac{\lambda X_{n-2}}{\sqrt{\alpha_{n-1}}}\right) & -sin\left(\frac{\lambda X_{n-1}}{\sqrt{\alpha_n}}\right) & cos\left(\frac{\lambda R_{n-1}}{\sqrt{\alpha_n}}\right) \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & sin\left(\frac{\lambda X_{n-1}}{\sqrt{\alpha_{n-1}}}\right) & cos\left(\frac{\lambda X_{n-1}}{\sqrt{\alpha_{n-1}}}\right) & k_n\, sin'\left(\frac{\lambda X_{n-1}}{\sqrt{\alpha_n}}\right) & k_n cos\left(\frac{\lambda R_{n-1}}{\sqrt{\alpha_n}}\right) \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & k_{n-1}\, sin'\left(\frac{\lambda X_{n-1}}{\sqrt{\alpha_{n-1}}}\right) & k_{n-1} cos'\left(\frac{\lambda X_{n-1}}{\sqrt{\alpha_{n-1}}}\right) & \begin{pmatrix} h_2\ sin\left(\frac{\lambda X}{\sqrt{\alpha_n}}\right) \\ +k_n sin'\left(\frac{\lambda X_n}{\sqrt{\alpha_n}}\right) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} h_{out}\ cos\left(\frac{\lambda R_n}{\sqrt{\alpha_n}}\right) \\ -k_n cos'\left(\frac{\lambda R_n}{\sqrt{\alpha_n}}\right) \end{pmatrix} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & &
\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.51}$$

λ'yı bulmak için matrisin determinantını alarak sıfıra eşitlemek gerekmektedir.

$$\begin{vmatrix}
\begin{pmatrix} h_0 sin\left(\frac{\lambda X_0}{\sqrt{\alpha_1}}\right) \\ -k_1\, sin'\left(\frac{\lambda X_0}{\sqrt{\alpha_1}}\right) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} h_0 cos\left(\frac{\lambda X_0}{\sqrt{\alpha_1}}\right) \\ -k_1 cos'\left(\frac{\lambda X_0}{\sqrt{\alpha_1}}\right) \end{pmatrix} & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
sin\left(\frac{\lambda X_1}{\sqrt{\alpha_1}}\right) & cos\left(\frac{\lambda X_1}{\sqrt{\alpha_1}}\right) & -sin\left(\frac{\lambda X_1}{\sqrt{\alpha_2}}\right) & -cos\left(\frac{\lambda X_1}{\sqrt{\alpha_2}}\right) & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-k_1\, sin'\left(\frac{\lambda X_1}{\sqrt{\alpha_1}}\right) & -k_1 cos'\left(\frac{\lambda X_1}{\sqrt{\alpha_1}}\right) & k_2\, sin'\left(\frac{\lambda X_1}{\sqrt{\alpha_2}}\right) & k_2 cos'\left(\frac{\lambda X}{\sqrt{\alpha_2}}\right) & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & sin\left(\frac{\lambda X_2}{\sqrt{\alpha_2}}\right) & cos\left(\frac{\lambda X_2}{\sqrt{\alpha_2}}\right) & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & . & -sin\left(\frac{\lambda X_{n-2}}{\sqrt{\alpha_{n-1}}}\right) & -cos\left(\frac{\lambda X_{n-2}}{\sqrt{\alpha_{n-1}}}\right) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & . & k_{n-1} sin'\left(\frac{\lambda X_{n-2}}{\sqrt{\alpha_{n-1}}}\right) & k_{n-1} cos'\left(\frac{\lambda X_{n-2}}{\sqrt{\alpha_{n-1}}}\right) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & . & sin\left(\frac{\lambda X_{n-1}}{\sqrt{\alpha_{n-1}}}\right) & cos\left(\frac{\lambda X_{n-1}}{\sqrt{\alpha_{n-1}}}\right) & -sin\left(\frac{\lambda X_{n-1}}{\sqrt{\alpha_n}}\right) & -cos\left(\frac{\lambda X_{n-1}}{\sqrt{\alpha_n}}\right) \\
0 & 0 & 0 & 0 & . & k_{n-1} sin'\left(\frac{\lambda X_{n-1}}{\sqrt{\alpha_{n-1}}}\right) & k_{n-1} cos'\left(\frac{\lambda X_{n-1}}{\sqrt{\alpha_{n-1}}}\right) & k_n\, sin'\left(\frac{\lambda X_{n-1}}{\sqrt{\alpha_n}}\right) & k_n cos'\left(\frac{\lambda X_{n-1}}{\sqrt{\alpha_n}}\right) \\
 & & 0 & 0 & & 0 & 0 & \begin{pmatrix} h_2\; sin\left(\frac{\lambda X_n}{\sqrt{\alpha_n}}\right) \\ +k_n\, sin'\left(\frac{\lambda X_n}{\sqrt{\alpha_n}}\right) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} h_2\; cos\left(\frac{\lambda X_n}{\sqrt{\alpha_n}}\right) \\ -k_n cos'\left(\frac{\lambda X_n}{\sqrt{\alpha_n}}\right) \end{pmatrix}
\end{vmatrix} = 0 \qquad (4.52)$$

Bu determinanttan bütün katmanlara ait özdeğerler λ cinsinden bulunur. Ancak bu determinantın sıfıra eşit olmasını sağlayacak sonsuz sayıda özdeğer bulunmaktadır. Bu nedenle özdeğerler m indisi ile ifade edilecektir. Özdeğerler sonsuz sayıda değer alacağı için, $m = (1, 2, \ldots.., \infty)$ aralığında olmak üzere m alt indisi (λ_m) olarak ifade edilecektir.

4.8. Katsayıların Bulunması

Katsayılar her özdeğere karşılık gelen bir değer alır. Böylelikle, her özdeğere bağlı 2n adet katsayı ($a_{i,m}$ ve $b_{i,m}$) için 2n sayıda denklem sistemi elde edilmiştir. Bu denklem sistemini çözdüğümüz takdirde tüm katsayılar $a_{i,m}$ değerine bağlı bulunabilir. Ancak, burada dikkat edilmesi gereken önemli bir husus, Özışık tarafından ifade edilen $a_{1,m}=1$ kabulü yapılarak denklem sisteminin çözümü yapılmış ve katsayılar bulunmuştur (Hahn ve Özışık, 2013).

4.9. Homojen Şartlar İçin Sıcaklık Dağılımı

$$\overline{T_i}(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(DD_m\, e^{-\lambda_m{}^2 t}\right)\left(a_{i,m}\, sin\left(\frac{\lambda_m}{\sqrt{\alpha_i}}x\right) + b_{i,m}\, cos\left(\frac{\lambda_m}{\sqrt{\alpha_i}}x\right)\right) \qquad (4.53)$$

Materyalin başlangıç (t=0) anında her bir katmanın bilinen bir sıcaklığa sahip olduğu kabul edilmiş ve katman numarasına göre i=1,2,..,n değerler atanmıştır. Homojen şartlar için sıcaklık dağılımı genel çözümden elde edilmiş ve Eşitlik (4.51)’de sunulmuştur.

Başlangıç şartının genel çözümden elde edilen sıcaklık dağılımına Eş. (4.51) uygulanması ile DD_m katsayısı aşağıda açıklandığı üzere bulunmaktadır. Eş.4.51, $t = 0$ için düzenlendiğinde;

$$\bar{T}_i(x, t = 0) = \sum_{m=1}^{\infty} DD_m \left(a_{i,m} \, sin\left(\frac{\lambda_m}{\sqrt{\alpha_i}}x\right) + b_{i,m} \, cos\left(\frac{\lambda_m}{\sqrt{\alpha_i}}x\right)\right) \tag{4.54}$$

elde edilir. Başlangıç şartı Eşitlik (4.53)'de verilmektedir.

$$\bar{T}_i(x, t = 0) = T_{0_i} - T_{ss_i}(x) \tag{4.55}$$

Başlangıç şartının genel sıcaklık çözümüne uygulanması ile;

$$T_{0_i} - T_{ss_i}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} DD_m \left(a_{i,m} \, sin\left(\frac{\lambda_m}{\sqrt{\alpha_i}}x\right) + b_{i,m} \, cos\left(\frac{\lambda_m}{\sqrt{\alpha_i}}x\right)\right) \tag{4.56}$$

eşitliği elde edilir. Burada T_{0_i}, her bir katmana ait t=0 anında kendi içinde sahip olduğu homojen sıcaklığı göstermektedir. $T_{ss_i}(x)$ ise bir sonraki kısımda bulacağımız her bir katmana ait zamandan bağımsız sıcaklık dağılım fonksiyonudur. Eş. (4.54)'den her bir katman için (i=1,2,…, n) DD_m değeri;

$$DD_m = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{\alpha_i} \int_{X_{i-1}}^{X_i} T_{0_i} - T_{ss_i}(x) \left(a_{i,m} \, sin\left(\frac{\lambda_m}{\sqrt{\alpha_i}}x\right) + b_{i,m} \, cos\left(\frac{\lambda_m}{\sqrt{\alpha_i}}x\right)\right) dx}{\sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{\alpha_i} \int_{X_{i-1}}^{X_i} \left(a_{i,m} \, sin\left(\frac{\lambda_m}{\sqrt{\alpha_i}}x\right) + b_{i,m} \, cos\left(\frac{\lambda_m}{\sqrt{\alpha_i}}x\right)\right)^2 dx} \tag{4.57}$$

olarak elde edilir.

4.10. Zamandan Bağımsız Sıcaklık Dağılım Fonksiyonunun Bulunması

Kompozit bir malzeme sisteminde sıcaklık dağılımı fonksiyonu ve bilinmeyenlere ilişkin ifadeler elde edilmiştir. Ancak homojen olmayan denklemlerin çözümünün etkisine ilişkin ifade $T_{ss_i}(x)$ halen bilinmemektedir. Zamandan bağımsız homojen olmayan sınır şartlarının uygulanacağı genel eşitlik olan Eş. (4.12)'den genelleştirilmiş zamandan bağımsız sıcaklık denklemini elde ederek çözüme gidilecektir.

4.11. Genelleştirilmiş Zamandan Bağımsız Sıcaklık Denklemi

Eş. (4.12)'de verilen genel denklem kullanılarak sıcaklık dağılımının zamandan bağımsız genelleştirilmiş hali $i = 1,2,\dots,n$ olmak üzere;

$$\frac{\partial^2 T_{ss_i}(x,t)}{\partial x^2} = 0 \tag{4.58}$$

Her iki integral alma işlemi yapıldığında;

$$T_{ss_i}(x) = p_i\, x + q_i \tag{4.59}$$

sonucuna ulaşılmaktadır. p_i ve q_i integrasyon sabiti olmak üzere sınır şartlarının uygulanması ile bulunmaktadır

4.12. Zamandan Bağımsız Homojen Olmayan Sınır Şartları

Her iki yüzeyinde taşınımla ısı transferinin olması ve her iki yüzeydeki akışkanın sıcaklığının sıfırdan farklı olması durumunda, bu sınır şartları homojen olmayan sınır şartının ifade etmektedir. Bu durumda sınır şartı ifadeleri aşağıdaki gibi düzenlenmektedir. Birinci katmanın iç yüzeyi $(x = X_0)$'da;

$$k_1 \frac{\partial T_{ss_1}(X_0)}{\partial x} + h_{in}\, T_{ss_1}(X_0) = -h_{in}\left(T_{\infty_1}\right) \tag{4.60}$$

Ara yüzeylerde $(x = X_i)$ $(i = 1,2,\dots.,n-1)$;

$$k_i \frac{\partial T_{ss_i}(X_i)}{\partial x} - k_{i+1} \frac{\partial T_{ss_{i+1}}(X_i)}{\partial x} = 0 \tag{4.61}$$

ve

$$T_{ss_i}(X_i) - T_{ss_{i+1}}(X_i) = 0 \tag{4.62}$$

En dıştaki katmanın dış yüzeyi $(x = X_n)$'de

$$k_n \frac{dT_{ss_n}(X_n)}{dx} + h_{out} T_{ss_n}(X_n) = h_{out}(T_{\infty_2}) \tag{4.63}$$

p_i ve q_i integrasyon sabiti olmak üzere sınır şartlarının uygulanması ile bulunur. Birinci katmanın iç yüzeyi $(x = X_0)$'da;

$$k_1 \frac{d(p_i\, x + q_i)}{dx} + h_{in}\,(p_i\, x + q_i) = -h_{in}(T_{\infty_1}) \tag{4.64}$$

olur ve ara işlemler yapıldıktan sonra;

$$\frac{p_1(k_1 + h_{in}\ X_0)}{-h_{in}} - (T_{\infty_1}) = q_1 \tag{4.65}$$

Ara yüzeylerde $(x = X_i)$ $(\,i = 1,2, \ldots., n-1)$;

$$k_i \frac{d(p_i\, x + q_i)}{dx} - k_{i+1} \frac{d((p_{i+1}\, x + q_{i+1}))}{dx} = 0 \tag{4.66}$$

için;

$$k_i \frac{p_i}{x_i} = k_{i+1} \frac{p_{i+1}}{x_i} \rightarrow k_i p_i = k_{i+1} p_{i+1} \rightarrow k_i \frac{p_i}{k_{i+1}} = p_{i+1} \rightarrow p_i = \frac{p_{i+1} k_{i+1}}{k_i} \tag{4.67}$$

ve

$T_{ss_i}(X_i) = T_{ss_{i+1}}(X_i)$ için, (4.68)

$$(p_i\, x + q_i) - (p_{i+1}\, x + q_{i+1}) = 0 \tag{4.69}$$

Eşleneği bulunmaktadır. En dıştaki katmanın dış yüzeyi $(x = X_n)$'de

$$k_n \frac{d(p_i\, x + q_i)}{dx} + h_{out}(p_i\, x + q_i) = h_{out}(T_{\infty_2}) \tag{4.70}$$

olur ve ara işlemler yapıldıktan sonra;

$$\frac{p_n\left(k_n + h_{out}\ (X_n)\right) - h_{out}\left(T_{\infty_2}\right)}{-h_{out}} = q_n \tag{4.71}$$

şeklinde yazılır. Burada gerekli işlemler yapılırsa 2 n sayıda sabit [$\mathrm{p_i}$ve $\mathrm{q_i}$] için aynı sayıda denklem elde edilmekte, çözüm yapıldığında [$\mathrm{p_i}$ve $\mathrm{q_i}$] sabitleri belirlenmektedir.

4.13. Sıcaklık Dağılımı

Yapılan analitik hesaplamalar sonucu, hem zamana bağlı homojen sınır şartlarındaki sıcaklık dağılımı hem de zamandan bağımsız homojen olmayan sınır şartlarındaki sıcaklık dağılımı fonksiyonları elde edilmiştir.

Herhangi bir t anında ve x mesafesinde sıcaklık hesaplanacağı zaman bu sıcaklık;

$$T_i(x,t) = \overline{T}_i(x,t) + T_{ss_i}(x) \tag{4.72}$$

olarak ifade edilmektedir.

Bulduğumuz zamana bağlı ve konuma bağlı sıcaklık denklemleri ile zamandan bağımsız denklemleri tek bir formül altında topladığımızda genel denklem;

$$T_i(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(DD_m\, e^{-\lambda_m{}^2 t}\right)\left(a_{i,m} \sin\left(\frac{\lambda_m}{\sqrt{\alpha_i}}x\right) + b_{i,m} \cos\left(\frac{\lambda_m}{\sqrt{\alpha_i}}x\right)\right) + T_{ss_i}(x) \tag{4.73}$$

halini almaktadır. Katsayılar ve özdeğerler belirlendikten sonra genel denklemde yerine yazarak sıcaklık değerleri bulunabilmektedir.

4.14. Çözümde Uygulanan Kabuller

Bu çalışmada yapılan analitik çözüm yönteminde aşağıdaki kabuller yapılmıştır:

- Düzlemsel paralel katı plakaların içinde enerji üretimi yoktur.
- Isıl iletkenlik, ısıl geçirgenlik, özgül ısı ve yoğunluk gibi malzemelerin termal fiziksel özellikleri sıcaklıktan bağımsızdır ve her tabaka içinde homojendir.

- İki katmanlı duvar, y ve z yönlerinde, x yönündeki kalınlığına kıyasla yeterince büyüktür.

- Akışkan sıcaklıkları sabittir.

- Isı transfer katsayıları her bir katman boyunca sabittir.

- Akışkan sıcaklıkları $t > 0$ süreleri için sabit tutulmaktadır.

- Ara yüzeylerde yüzey temasının mükemmel olduğu kabul edilmiştir.

5. MODEL SONUÇLARININ DOĞRULANMASI

Matematiksel modelin analitik çözümü sonucunda elde edilen denklemler Mathematica programında sayısal olarak çözülmüştür. Matematica programı için kurgulanan model EK-1'de algoritma olarak sunulmuştur. Geliştirilen matematik modelin doğrulanması maksadıyla, Monte'un iki katmanlı kompozit malzemede tek boyutlu kartezyen koordinatlardaki analitik çözümünde sunulan sonuçlar ile bu tez çalışmasında hazırlanan algoritmadan elde edilen sonuçların kıyaslamaları yapılmış ve kıyaslama neticesinde elde edilen sonuçların uyumlu olduğu değerlendirilmiştir.

Söz konusu doğrulama modelleri, kıyaslama grafikleri ve ulaşılan sonuçlar bu bölümde sunulmuştur.

5.1. İki Katmanlı Düzlemsel Kompozit Malzeme

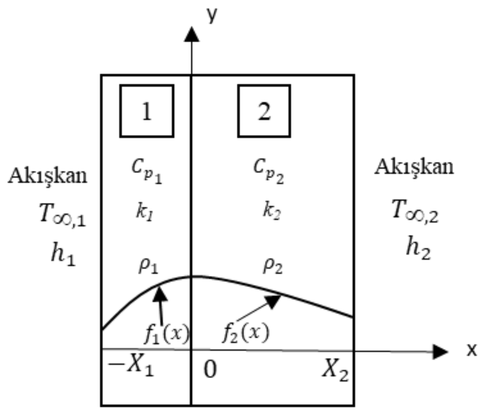
Hazırlanan matematik modelin doğrulanması maksadıyla Monte'un iki katmanlı kompozit materyalinde tek boyutlu kartezyen koordinatlardaki çözümünde sunulan sonuçlar ile bu çalışmada hazırlanan algoritmadan elde edilen sonuçlar kıyaslanmıştır.

İki katmanlı düzlemsel kompozit malzemenin soğutulması ile ilgili zamana bağlı ısı iletim probleminin matematiksel formülasyonunu türetmek için bu çalışmada kullanılan kabuller, Monte'nin çalışmasında kullandığı kabulleri baz alarak oluşturulmuş ve Çizelge 5.1.'de sunulmuştur.

Çizelge 5.1. Matematiksel formülasyon kabulleri

S.N.	Kabuller
1	Düzlemsel paralel katı plakaların içinde enerji üretimi yoktur,
2	Isıl iletkenlik ve ısıl geçirgenlik sıcaklıktan bağımsız ve her tabaka içinde homojendir,
3	Iki katmanlı duvar, y ve z yönlerinde, x yönündeki kalınlığına kıyasla yeterince büyüktür,
4	Akışkan sıcaklıkları zamana göre değişmemektedir ;
5	Yüzeylerdeki ısı transfer katsayıları zamanla değişmemektedir.

Monte'nin yaptığı çalışmadaki örneğin şematik gösterimi Şekil 5.1.'de sunulmuştur.



Şekil 5.1. Monte'nin çalışmasının şematik gösterimi.

Monte çalışmasında katmanlar arasında mükemmel termal temasın olduğu çok katmanlı kompozit bir malzemenin bir boyutlu zamana bağlı ısı iletim problemini çözmek için analitik yaklaşım geliştirildiğini belirtmektedir. Monte zamana bağlı problemin çözümünü basitleştirmek için boyutsuz değişkenler ve gruplar ile çalışmıştır. Bu tezde ele alınan analitik çözümde parametreler boyutsuzlaştırılmamıştır. Monte'nin çalışmasında belirtilen boyutsuz parametrelerin değerleri esas alınarak bu çalışmada kullanılan parametrelerin değerleri elde edilmiş ve Çizelge 5.2.'de karşılaştırmalı olarak sunulmuştur.

Çizelge 5.2. Monte'nin çalışması ile mevcut çalışmada kullanılan parametre değerleri

Monte'nin Çalışması		Mevcut Çalışma	
Parametre	Değer	Parametre	Değer
$\gamma = L_2 / L_1$	2	X_0 (mm)	0,001
$\kappa = k_2 / k_1$	2	X_1 (mm)	0,002
$\delta = \alpha_2 / \alpha_1$	1	X_2 (mm)	0,004
$Bi_1 = h.L_1 / k_1$	1	k_1 (W/m K)	15
$Bi_2 = h.L_2 / k_2$	2	k_2 (W/m K)	30
$T_\infty = T_{\infty 1} = T_{\infty 2}$	1	α_1 (m^2/s)	4 x 10^{-6}
T_0	0	α_2 (m^2/s)	4 x 10^{-6}

Çizelge 5.2. (devam) Monte'nin çalışması ile mevcut çalışmada kullanılan parametre değerleri

	T_∞ (°C)	300
	h (W/m^2 K)	15.000
	T_0 (°C)	273

5.1.1. Doğrulama modelinin özdeğerleri ve katsayıları

Analitik çözümleme için Mathematica programında oluşturulan kodun doğrulanması maksadıyla Monte'nin çalışmasında kullanılan değerler koda girilmiştir. Ulaşılan özdeğerler ve her bir özdeğere denk gelen katsayı değerleri Çizelge 5.3.'te sunulmuştur.

Çizelge 5.3. Özdeğer ve katsayılar

S.No	Kök	Katsayılar				
		1. Katman		2. Katman		DDm
		a	b	a	b	
1	1,05798	1	-0,0424463	0,870568	0,187427	-33,3472
2	2,93532	1	-0,539788	0,575078	-0,6287	-0,677422
3	4,47067	1	-1,89483	0,751156	-0,885493	-3,03304
4	6,52439	1	2,25105	0,789606	2,30281	-0,00844249
5	8,82371	1	0,0777945	0,641767	-0,167848	1,60076
6	10,478	1	-0,868642	0,690854	-0,325659	0,25511
7	12,6919	1	4,49197	0,786761	4,51888	-0,114953
8	15,0106	1	0,219635	0,65213	-0,0717827	-0,123523
9	16,6821	1	-0,693559	0,680964	-0,223862	-0,418894
10	18,9339	1	6,7347	0,786187	6,75278	-4,68413E-05
11	21,2523	1	0,282796	0,656372	-0,0302503	0,286747
12	22,9289	1	-0,621212	0,676842	-0,180836	0,0577643
13	25,1962	1	8,97804	0,785981	8,99163	-0,0150123
14	27,5125	1	0,318521	0,658691	-0,00708382	-0,038959
15	29,1912	1	-0,581703	0,674571	-0,157066	-0,143314
16	31,4667	1	11,2216	0,785886	11,2325	-3,73868E-06

Çizelge 5.3. (devam) Özdeğer ve katsayılar

17	33,7811	1	0,341495	0,660155	0,00769329	0,113269
18	35,461	1	-0,556813	0,673131	-0,141986	0,0243617
19	37,7415	1	13,4653	0,785833	13,4744	-0,00448515
20	40,0542	1	0,35751	0,661164	0,0179396	-0,0186641
21	41,7347	1	-0,539696	0,672135	-0,131566	-0,0711519
22	44,0186	1	15,7091	0,785802	15,7169	-7,0021E-7
23	46,3301	1	0,369312	0,661902	0,025462	0,0600526
24	48,011	1	-0,527203	0,671406	-0,123935	0,0133128
25	50,2973	1	17,953	0,785781	17,9598	-0,0018977

5.1.2. Optimum kök sayısının tayini

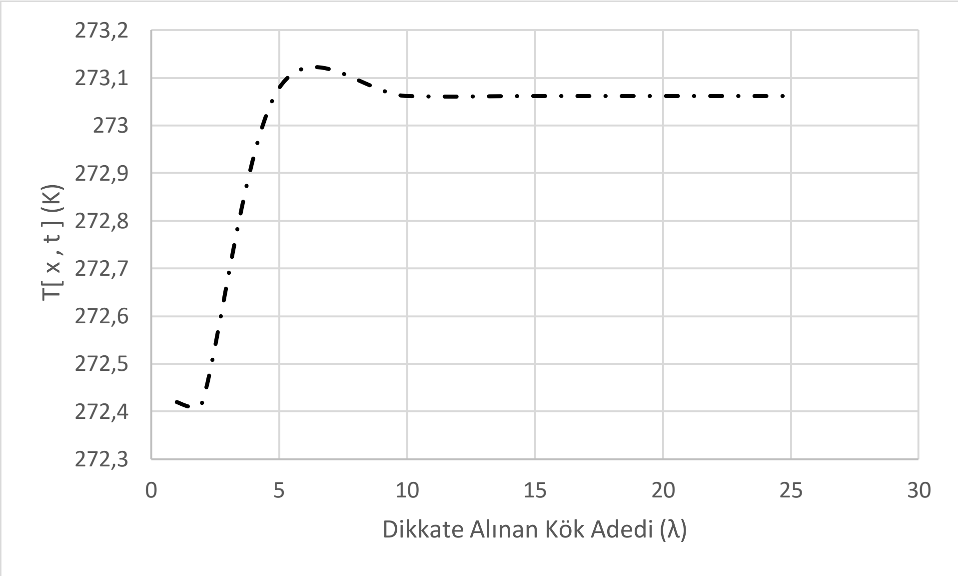
Optimum kök sayısının tayini için kök sayılarına karşılık gelen sıcaklık değerleri, t=0,025 s'de ve x=0,002 m noktasında hesaplanmıştır. Hesaplanan kök sayılarıi Çizelge 5.4'de, kök sayılarına göre sıcaklık değişimi Şekil 5.2'de sunulmuştur.

Çizelge 5.4. Kök sayısına karşılık analitik çözümden elde edilen sıcaklık değerleri

Kök Sayısı	$T[x = 0{,}002\,; t = 0{,}025]$ (K)
1	272,419493564407000
2	272,419493564407000
5	273,078661659776000
10	273,062036373130000
15	273,062037967786000
20	273,062037967786000
25	273,062037967786000

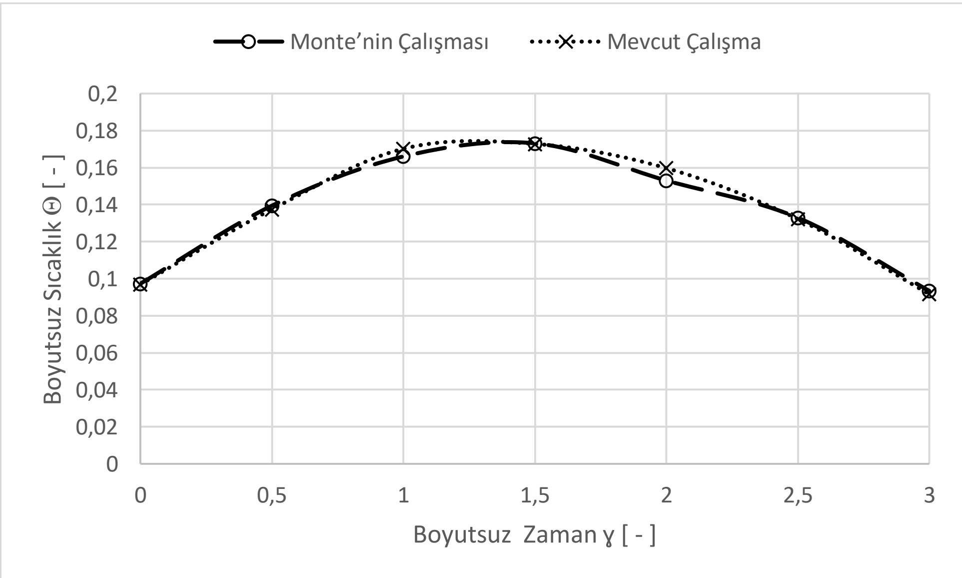
Şekil 5.2.'de görüldüğü gibi sıcaklık değeri, 10 ve 15 adet kök ile yapılan hesaplamalarda elde edilen iç katman sıcaklık profilinin kararlı olduğu ve bu durumda en az 15 adet özdeğer

kullanarak yapılan hesaplamalardaki hatanın ihmal edilecek derecede küçük olduğu belirlenmiştir.



Şekil 5.2. Kök miktarının sıcaklık profilinin hassasiyetine etkisi.

Mevcut çalışma ile Monte'nin yaptığı çözümlerin kıyaslanması Şekil 5.4 - 5.10 arasında grafik olarak Tablo 5.5 – 5.10 arasında değer olarak sunulmuştur.

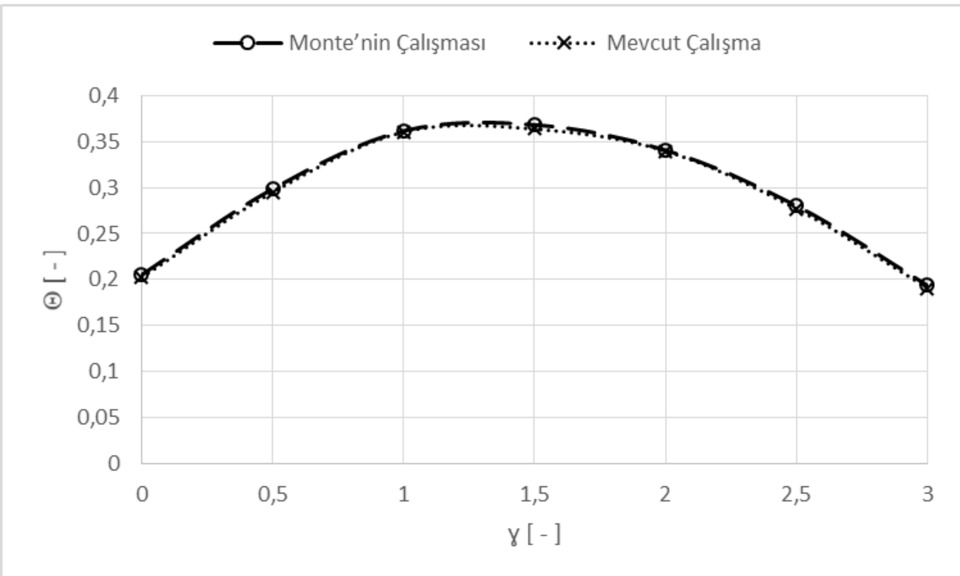


Şekil 5.3. τ=0,1 için Monte ile mevcut çalışmanın kıyaslanması

Şekil 5.3.'te verilen grafikte τ $[\alpha_1 t/x_1{}^2]$ boyutsuz zamanı, Θ $[T_\infty\text{-}T_i/T_\infty\text{-}T_0]$ boyutsuz sıcaklığı ve γ $[x_i/x_1]$ boyutsuz uzunluğu temsil etmektedir. τ= 0,1 için Monte ve bu tez kapsamında geliştirilen algoritmanın konuma bağlı sıcaklık profili kıyaslaması Şekil 5.3.'te ve Çizelge 5.5.'de ise karşılaştırma tablosu verilmektedir. Burada γ boyunca küçük farklılar olduğu gözlenmektedir.

Çizelge 5.5. τ=0,1 için Monte ile mevcut çalışmanın sıcaklık karşılaştırması

γ	Θ (Monte'nin Çalışması)	Θ (Mevcut Çalışma)	Fark
0	0,0973	0,09685864	-0,0004
0,5	0,1394	0,13743455	-0,0020
1,0	0,1660	0,17015707	0,0041
1,5	0,1731	0,17277487	-0,0004
2,0	0,1530	0,15968586	0,0066
2,5	0,1329	0,13219895	-0,0007
3,0	0,0934	0,09162304	-0,0018

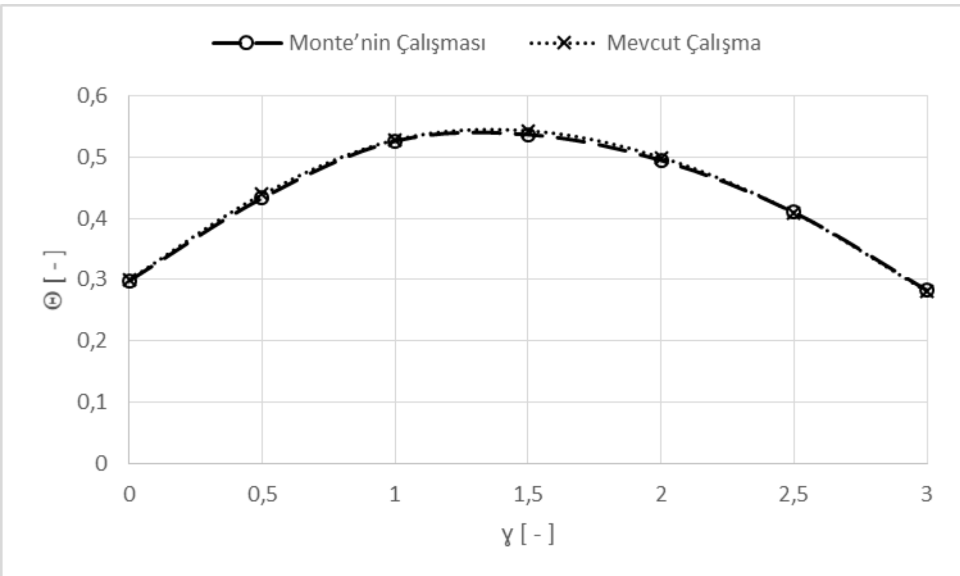


Şekil 5.4. τ=0,5 için Monte ile mevcut çalışmanın kıyaslanması

Şekil 5.4.'te verilen grafikte τ=0,5 için Monte ve hazırladığımız algoritmanın konuma bağlı sıcaklık profili kıyaslaması, Çizelge 5.6.'da ise karşılaştırma tablosu verilmektedir. Burada γ boyunca küçük farklılar olduğu gözlenmektedir.

Çizelge 5.6. τ=0,5 için Monte ile mevcut çalışmanın sıcaklık karşılaştırma tablosu

γ	Θ (Monte'nin Çalışması)	Θ (Mevcut Çalışma)	Fark
0	0,205497382	0,2023	0,0032
0,5	0,298429319	0,2951	0,0034
1,0	0,361256545	0,3606	0,0007
1,5	0,367801047	0,3638	0,0040
2,0	0,340314136	0,3398	0,0005
2,5	0,280104712	0,2769	0,0032
3,0	0,193717277	0,1907	0,0031

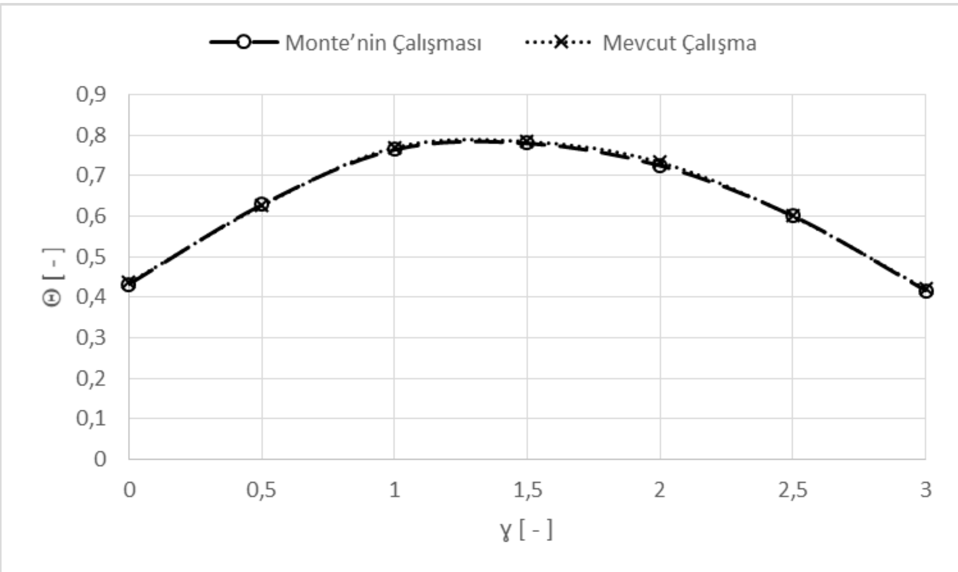


Şekil 5.5. τ=1 için Monte ile mevcut çalışmanın kıyaslanması

Şekil 5.5.'te verilen grafikte τ=1 için Monte ve hazırladığımız algoritmanın konuma bağlı sıcaklık profili kıyaslaması, Çizelge 5.7.'de ise karşılaştırma tablosu verilmektedir. Burada γ=1,5 civarında küçük farklılar olduğu gözlenmektedir.

Çizelge 5.7. τ=1 için Monte ile mevcut çalışmanın sıcaklık karşılaştırma tablosu

γ	Θ (Monte'nin Çalışması)	Θ (Mevcut Çalışma)	Fark
0	0,298429319	0,299613358	-0,001184039
0,5	0,433246073	0,439037883	-0,00579181
1,0	0,52617801	0,527873226	-0,001695215
1,5	0,536649215	0,542797957	-0,006148742
2,0	0,494764398	0,499345353	-0,004580955
2,5	0,409685864	0,409200716	0,000485148
3,0	0,282722513	0,280158345	0,002564168

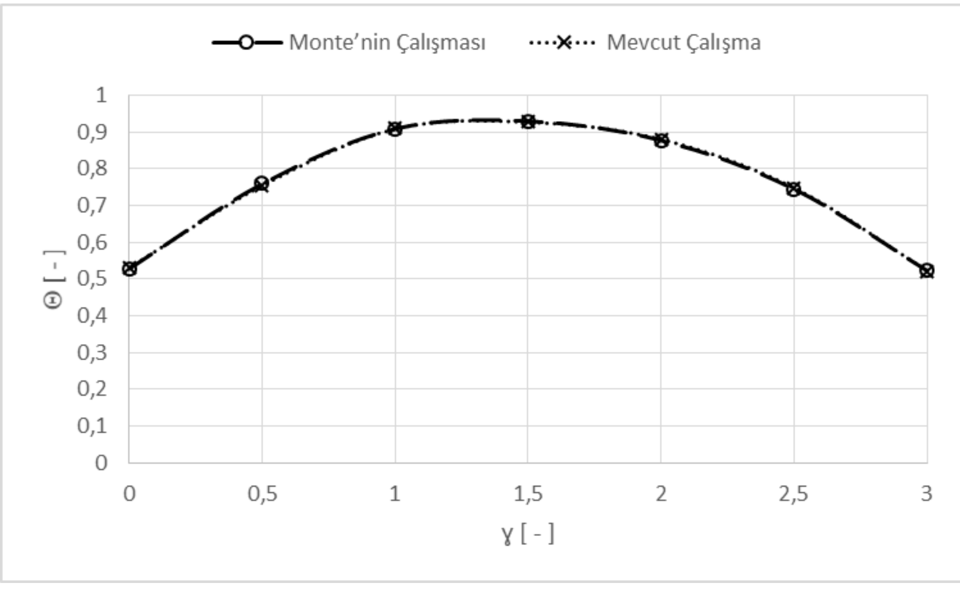


Şekil 5.6. τ=2 için Monte ile mevcut çalışmanın kıyaslanması

Şekil 5.6.’da verilen grafikte τ=2 için Monte ve hazırladığımız algoritmanın konuma bağlı sıcaklık profili kıyaslaması, Çizelge 5.8.’de ise karşılaştırma tablosu verilmektedir. Burada γ=1-2 arasında küçük farklılar olduğu gözlenmektedir.

Çizelge 5.8. τ=2 için Monte ile mevcut çalışmanın sıcaklık karşılaştırma tablosu

γ	Θ (Monte’nin Çalışması)	Θ (Mevcut Çalışma)	Fark
0	0,431937173	0,435798455	-0,003861282
0,5	0,628272251	0,625806015	0,002466236
1,0	0,764397906	0,769121543	-0,004723637
1,5	0,780104712	0,784040127	-0,003935415
2,0	0,72513089	0,732811664	-0,007680774
2,5	0,60078534	0,599865997	0,000919343
3,0	0,416230366	0,420228297	-0,00399793

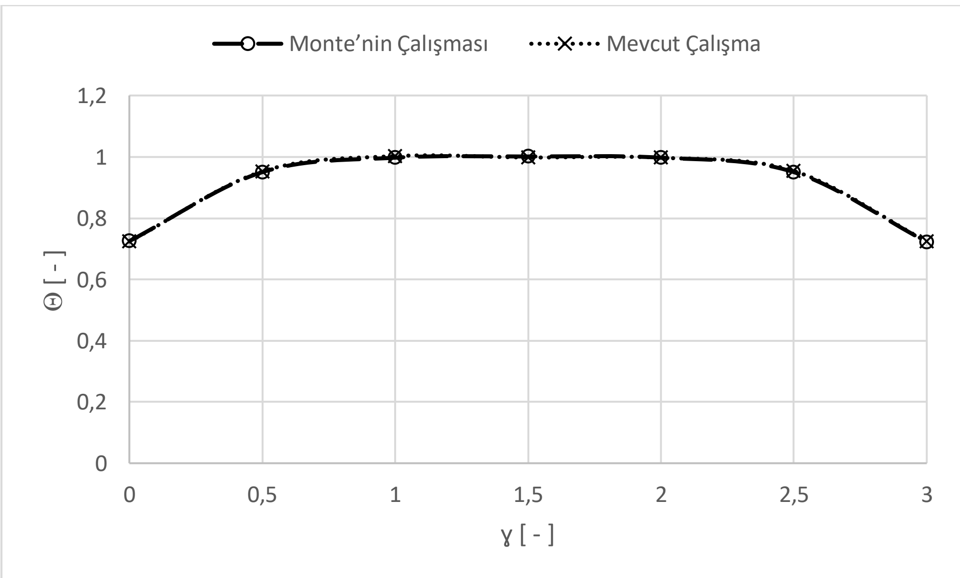


Şekil 5.7. τ=3 için Monte ile mevcut çalışmanın kıyaslanması

Şekil 5.7.'te verilen grafikte τ=3 için Monte ve hazırladığımız algoritmanın konuma bağlı sıcaklık profili kıyaslaması, Çizelge 5.9.'da ise karşılaştırma tablosu verilmektedir. Burada γ boyunca sıcaklık profilinin uyumlu olduğu gözlenmektedir.

Çizelge 5.9. τ=3 için Monte ile mevcut çalışmanın sıcaklık karşılaştırma tablosu

γ	Θ (Monte'nin Çalışması)	Θ (Mevcut Çalışma)	Fark
0	0,528795812	0,529182521	-0,000386709
0,5	0,759162304	0,754209106	0,004953198
1,0	0,908376963	0,909197642	-0,000820679
1,5	0,929319372	0,928007229	0,001312143
2,0	0,876963351	0,880669769	-0,003706418
2,5	0,744764398	0,747724101	-0,002959704
3,0	0,523560209	0,521400515	0,002159694



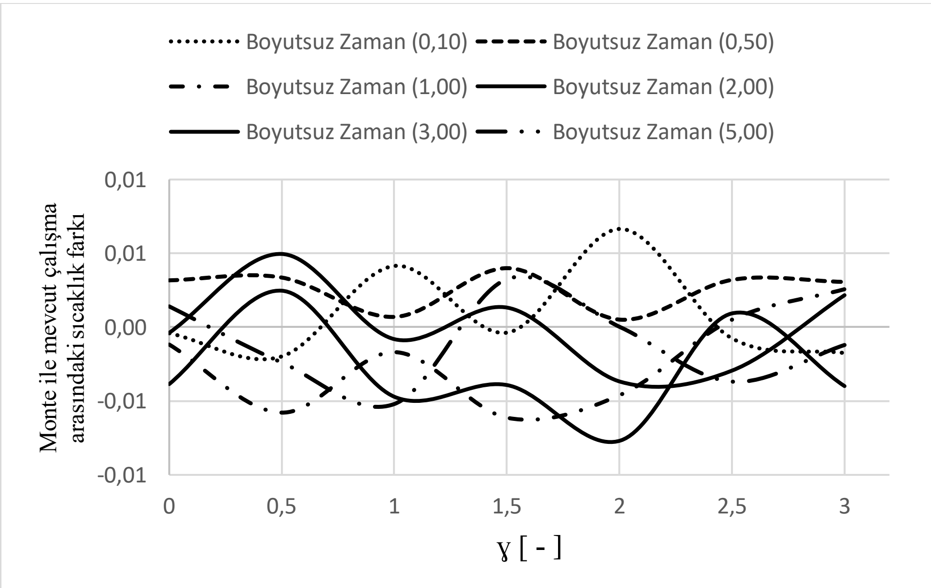
Şekil 5.8. τ=5 için Monte ile mevcut çalışmanın kıyaslanması

Şekil 5.8.'te verilen grafikte τ=5 için Monte ve hazırladığımız algoritmanın konuma bağlı sıcaklık profili kıyaslaması, Çizelge 5.10.'da ise karşılaştırma tablosu verilmektedir. Burada γ boyunca küçük farklılar olduğu gözlenmektedir.

Çizelge 5.10. τ=5 için Monte ile mevcut çalışmanın sıcaklık karşılaştırma tablosu

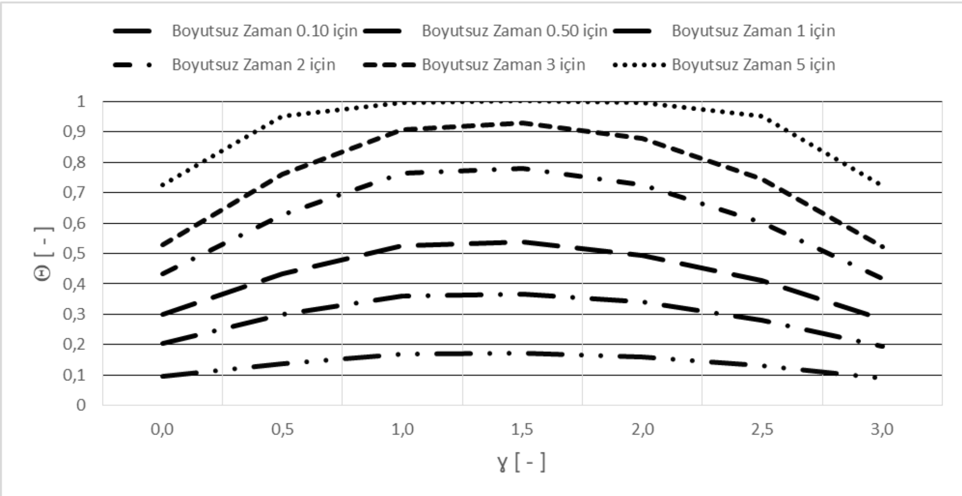
γ	Θ (Monte'nin Çalışması)	Θ (Mevcut Çalışma)	Fark
0	0,72513089	0,723732658	0,001398232
0,5	0,95026178	0,952650246	-0,002388466
1,0	0,997382199	1,002587855	-0,005205656
1,5	1,001308901	0,998045278	0,003263622
2,0	0,997382199	0,997399851	-1,76523E-05
2,5	0,95026178	0,953953394	-0,003691614
3,0	0,722513089	0,723726511	-0,001213422

Her iki çözüm sonuçlarının fark grafiği Şekil 5.9.'de gösterilmektedir.



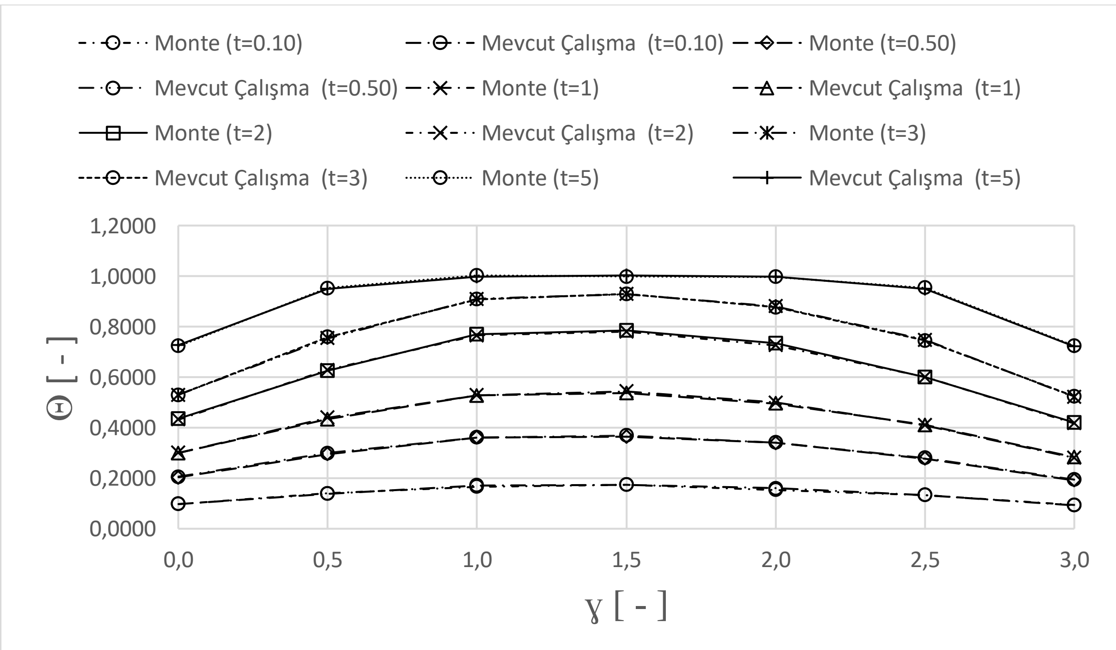
Şekil 5.9. Bağıl Fark Grafiği

Şekil 5.9.'daki grafikler incelendiğinde mevcut çalışma ile Monte çalışmasının birebir örtüştüğü görülmektedir. Aradaki farklılıklar grafik üzerinden okuma hataları olduğu değerlendirilmiş ve yazılan çözüm algoritmasının doğrulanmış olduğuna kanaat getirilmiştir. Zamana göre sıcaklık dağılımlarını veren problemin çözümü, Şekil 5.10'da sunulmuştur.



Şekil 5.10. Zamana göre sıcaklık dağılımlarını veren problemin çözümü

Monte'nin çözümleri ile mevcut çözümün karşılaştırması Şekil 5.11'de sunulmuştur.



Şekil 5.11. Monte'nin çözümleri ile mevcut çözümün karşılaştırması

Şekil 5.11 incelendiğinde Monte'nin çözümleri ile mevcut çözümün karşılaştırması yapılmış ve aynı t (boyutsuz zaman) için üst üste çakışan sıcaklık profillerinin bulunduğu gözlenmektedir. Bu sonuçlarla geliştirdiğimiz analitik çözüm yöntemi ve algoritma doğrulanmıştır. Kartezyen koordinat sistemi için Mathematica programında yazılan algortima EK-1'de ve silindirik koordinat sistemi için yazılan algortima EK-2'de sunulmaktadır.

5.2. Östenit Paslanmaz Çeliğin Soğutulması Problemi

Östenit paslanmaz çeliğin soğutulması ile ilgili olarak Chabičovský ve arkadaşları yaptıkları çalışmada (Chabičovský vd., 2015); yüksek sıcaklıklı östenit paslanmaz çeliğin işlenmesi sırasında su püskürtme ile soğutulması sonucu malzeme üzerinde oluşan oksit tabakasının sıcaklığını ve malzeme içerisindeki sıcaklık dağılımını sayısal ve deneysel olarak belirlemeye çalışmışlardır. Sayısal ve deneysel yöntemleri birlikte kullanarak, yüksek sıcaklıklarda yüzeylerin püskürtme ile soğutulması sırasında oksit tabakasının Leidenfrost sıcaklığı üzerindeki etkisini araştırmışlardır.

Chabičovský ve arkadaşları, yaptıkları deneysel ve sayısal simülasyon çalışma neticesinde düşük ısıl iletkenliğe sahip oksit tabakası oluşumu ve zamanla oksit tabaka kalınlığının artması sonucu Leidenfrost sıcaklığının arttığını ortaya koymuşlardır.

Chabičovský ve diğerlerinin yapmış oldukları bu çalışmada su püskürtmeye tabi olan çelik plaka üzerinde düzenli oksit tabakasının olduğu bölge ile homojen olmayan nispeten daha ince kalınlıklı oksit tabakasının olduğu yüzeylerin 2 mm altına yerleştirilen termokupuldan okunan sıcaklık değerleri grafik olarak bulunmaktadır.

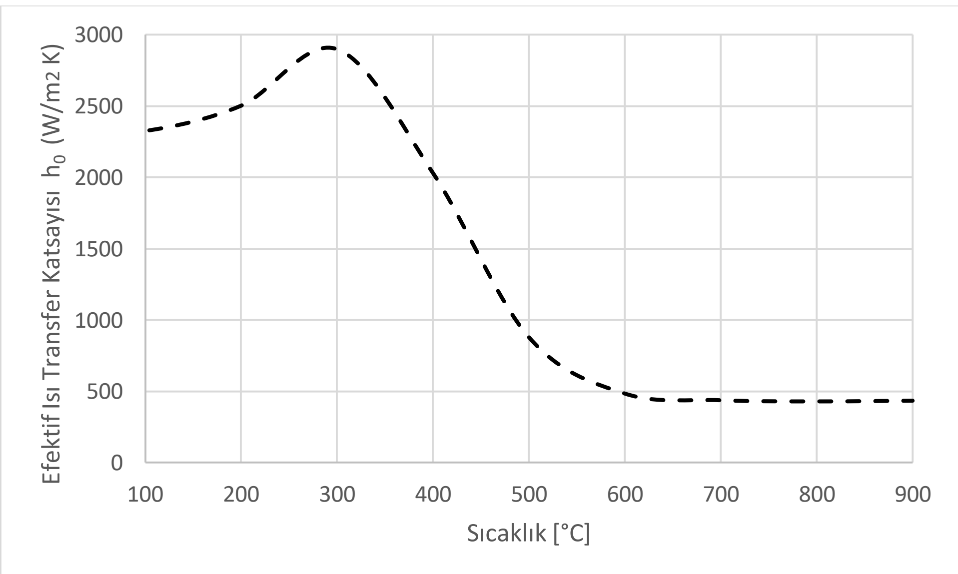
Chabičovský ve diğerlerinin yaptıkları çalışmada yer alan parametreler kullanılarak bu tez kapsamında geliştirilen analitik çözüm yapılmış ve sonuçlar Chabičovský'in sonuçları ile kıyaslanarak doğrulanması sağlanmıştır. Referans makalede yer alan parametreler tezin 3. Bölümünde detaylı olarak anlatılmaktadır. Hem deneysel hem de nümerik olsun elde edilen sonuçlar oksit tabakasının yüzeyi ve oksit tabakası altındaki çelik yüzeyi için belirlenmiştir.

Deneysel çalışmada, 1200 ° C'deki çelik levha soğutularak üzerinde oksit tabakası teşkil edilmiş, plaka iki bölge olarak incelenmiştir. Levhanın bir bölümü kimyasallarla temizlenmiş ve diğer bölüm ise temizlenmeden bırakılmıştır. Levhalar 1000 °C'ye ısıtılmış ve 17 °C'de sprey su ile soğutulmaya başlanmıştır. Levhanın yüzeyi temizlenmiş bölüm ile temizlenmemiş bölümün altında 2 mm derinliğinde yerleştirimiş termokupllar vasıtasıyla ölçüm alınmıştır. Aynı çalışmada ayrıca nümerik olarak yüzeylerdeki zamana bağlı sıcaklık dağılımı hesaplanmıştır. Çalışma sonucunda nümerik analiz ile deneysel sonuçların uyumlu olmadığı tespit edilmiştir.

Deneysel ve nümerik yapılan bu çalışmada h ısı iletim katsayısı sıcaklığa bağlı olarak değişmektedir. Bu tez kapsamında yapılan analitik çözümde de h ısı iletim katsayısı makalede olduğu gibi değişim göstermektedir. Chabičovský ve arkadaşları yaptıkları çalışmada sıcaklığa bağlı olarak değişen ısı iletim katsayısını hesaplamışlar ve Şekil 5.12.'de gösterildiği gibi yaptıkları çalışmada kullanmışlardır.

Bu tez kapsamında ısı iletim katsayısının (h) makalede verildiği gibi sıcaklığa bağlı olarak değişimi göz önünde bulundurulmuştur. Makalede tanımlanan grafikten herbir sıcaklığa denk gelen ısı iletim katsayısı okunmuş ve interpolasyon yöntemi ile programa dahil edilmiştir.

Söz konusu ısı iletim katsayısının sıcaklıkla değişim grafiği Şekil 5.12.'de, her bir 100 °C'lik sıcaklık artışına denk gelen ısı iletim katsayısının sayısal değeri Çizelge 5.11.'de sunulmuştur.



Şekil 5.12. Efektif ısı transfer katsayısı sıcaklığa bağlı değişim grafiği.

Çizelge 5.11. Sıcaklığa Bağlı Efektif Isı Transfer Katsayısı

$T_{O.Y.}$ (°C)	h_o (W/m^2 K)
17	2325
100	2325
200	2502
300	2898
400	2030
500	879
600	484
700	437
800	429
900	434

Bu tez çalışmasında sıcaklığa bağlı değişen ısı transfer katsayısı makaleden okutularak interpolasyon yöntemi ile hesaplanarak programa dahil edilmiştir. Çizelgede gösterilen $T_{O.Y.}$ oksit yüzey sıcaklığını, h_o ısı transfer katsayısını temsil etmektedir.

Genel olarak efektif ısı transfer katsayısını belirlemek için öncelikle ısı akısı aşağıdaki eşitlik ile ifade edilmektedir.

$$q = h_0 \left(T_{Ç.Y.} - T_{S.A.}\right) \tag{6.1}$$

Bu denklemde $T_{Ç.Y.}$ çelik yüzey sıcaklığını, $T_{S.A.}$ soğutucu akışkan sıcaklığını, h_0 efektif ısı transfer katsayısını temsil etmektedir. Bu eşitlikten de görüleceği üzere h_0 efektif ısı transfer katsayısı $\left(T_{Ç.Y.} - T_{S.A.}\right)$ sıcaklıklar farkı ile orantılıdır. Soğutma prosesinde bu hesaplamaya oksit yüzeyi de dahildir. Bu durumda oksit tabakasının etkisinin de dahil edilebilmesi için aşağıdaki eşitlik yazılmaktadır.

$$q_{O.Y.-S.A.} = h\,(T_{O.Y.} - T_{S.A.}) \tag{6.2}$$

Bu denklemde, $q_{O.Y.-S.A.}$ oksit yüzeyinden soğutucu akışkana olan ısı akısını, $T_{O.Y.}$ oksit yüzey sıcaklığını, $T_{S.A.}$ soğutucu akışkan sıcaklığını, h konveksiyonla ısı transfer katsayısını temsil etmektedir. Diğer taraftan oksit tabakası içerisindeki ısı akısı ise aşağıdaki eşitlik ile ifade edilmektedir.

$$q_{Ç.Y.-O.Y.} = k_{oksit}\,\frac{\left(T_{Ç.Y.} - T_{O.Y.}\right)}{x_{oksit}} \tag{6.3}$$

Bu denklemde, $q_{Ç.Y.-O.Y.}$ çelik yüzeyinden oksit yüzeyine olan ısı akısını, $T_{Ç.Y.}$ çelik yüzey sıcaklığını $T_{O.Y.}$ oksit yüzey sıcaklığını, k_{oksit} oksit tabakası ısı iletim katsayısını, x_{oksit} oksit tabakası kalınlığını temsil etmektedir. Bu durumda efektif ısı iletim katsayısı h_0 ince bir oksit tabakası ve homojen bir soğutma yapıldığı kabulü ile aşağıdaki eşitlikle ifade edilmektedir.

$$h_0 = \left(\frac{1}{h} + \frac{x_{oksit}}{k_{oksit}}\right)^{-1} \tag{6.4}$$

Bu denklemde h konveksiyonla ısı transfer katsayısı aşağıdaki eşitlik ile bulunmaktadır.

$$\begin{aligned} \mathrm{h} = 190 + \tanh\left[\frac{\mathrm{Vs}}{8}\right](140\ \mathrm{Vs}\ (1 - \frac{\mathrm{Vs}\ (T_{O.Y.} - T_{S.A.})}{72000}) \\ + 3,26\ (T_{O.Y.} - T_{S.A.})^2\ \left[1 - \tanh[\frac{(T_{O.Y.} - T_{S.A.})}{128}]\right] \end{aligned} \tag{6.5}$$

Burada Vs akışkanın çarpma yoğunluğudur.

Bu tez kapsamında ise makalede verilen değerler ile analitik çözüm sonucunda geliştirilen program kullanılarak çözüm araştırılmıştır. Elde edilen sonuçların nümerik ve deneysel sonuçlarla kıyaslanması aşağıda maddeler halinde sunulmuştur.

5.2.1. Analitik Çözümde Yapılması Gereken Düzenlemeler

Östenit paslanmaz çeliğin soğutulması problemi çözülürken bu tez kapsamında oluşturulan analitik modelde tanımlanan özdeğerlerin ve katsayıların bulunması yöntemlerinde birtakım düzenlemeler yapılmıştır. Bunun sebebi analitik çözümün, n katmanlı olması ve sınır şartları konveksiyonla ısı transferi olan problemler için genel bir çözümü içermesidir. Püskürtme soğutma prosesinde ise sınır şartlarından bir yüzeyin konveksiyonla ısı transferi, diğer yüzeyinin yalıtım olması ve iki katmanlı bir model olması nedeniyle özdeğer ve katsayıların bulunmasında bazı sadeleştirmeler yapılmıştır.

Homojenleştirilmiş sınır şartları daha önce belirlenmişti. Bir adet iç yüzey bir adet dış yüzey ve 2n-2 tane ara yüzey olmak üzere toplam n adet sınır şartı mevcuttur. Ara yüzeylerdeki sınır şartları bütün katmanlar için aynı olduğu için genelleştirilmiştir. Bu sınır şartlarının uygulanması ile sıcaklık fonksiyonundaki katsayılar bulunmuş olacaktır.

Birinci Katmanda Sınır Şartının Uygulanması

Birinci katmanın iç yüzeyi için bir adet sınır şartı mevcuttur. Bölüm 4.6.'da sunulan Eş. (4.32)'deki denklemde ilk katman için $X_0 = 0$ ve $a_1 = 1$ kabulü yapıldığında (Hahn ve Özışık, 2013) b_1 katsayısı cinsinden;

$$b_1 h_{in} = \frac{\lambda k_1}{\sqrt{\alpha_1}} \tag{6.6}$$

eşitliği oluşmaktadır.

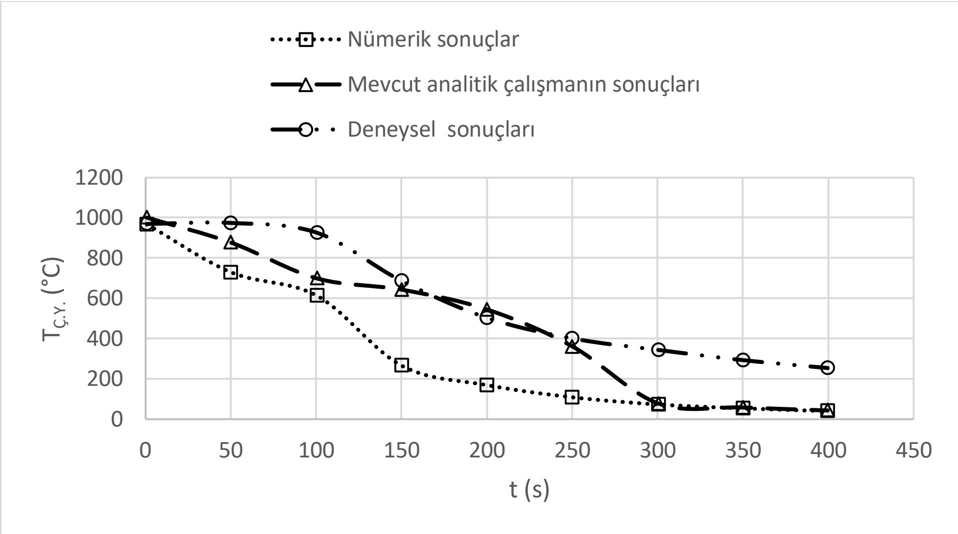
Ara Yüzeylerde Sınır Şartlarının Uygulanması

Bölüm 4.6.'da sunulan Eş. (4.45) ve Eş. (4.46)'da belirtilen genel denklemlerde Eş.(4.45)'deki b_n katsayısı bir önceki katmanda hesaplanan a_{n-1} ve b_{n-1} kullanılarak hesaplanabilmektedir. a_n katsayısı ise Eş.(4.46)'da b_n'e bağlı olarak bulunabilmektedir. İlk $a_1 = 1$ kabulü yapılmış, ilk b_1 Eş.(5.6) olan $b_1 h_{in} = \frac{\lambda k_1}{\sqrt{\alpha_1}}$ bağıntısından hesaplanmış ve Eş.(4.45) ve Eş.(4.46) kullanılarak ara katmanlardaki a ve b katsayıları hesaplanmıştır.
Son Katmanın Dış Yüzeyinde Sınır Şartının Uygulanması;

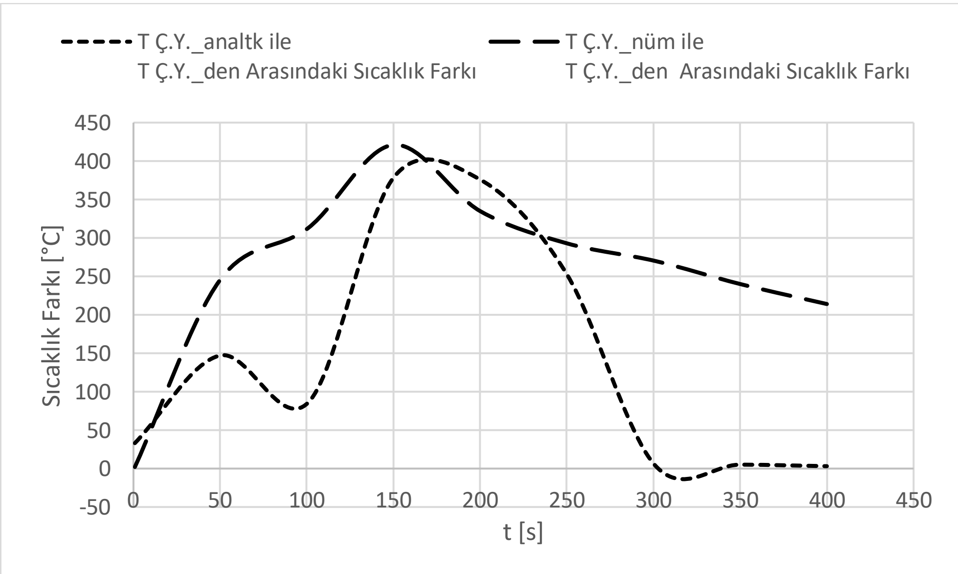
Bölüm 4.6.'da sunulan Eş. (4.48) ve Eş. (4.49)'da belirtilen genel denklemlerden a_n ve b_n katsayıları, ara sınır şartlarının uygulanması ile bulunan a_{n-1} ve b_{n-1} katsayılarından hesaplanabilmektedir. Bu yüzden Eş. (4.49)'da bilinmeyen sadece λ değeri bulunmaktadır. Eş. (4.49) çözdürüldüğünde λ_n özdeğer (kök) bulunmaktadır.

5.2.2. Oksit tabakasının altındaki çelik yüzeyi için çözüm ve sonuçlar

Oksit tabakasının altındaki çelik yüzeyin sıcaklık profilinin tespiti için makalede 0,025 mm oksit kalınlığı için grafiksel olarak verilen deneysel ve nümerik sonuçlar 50 s'lik aralıklar okunmuştur. Bu tez çalışmasında geliştirilen analitik modelin kullanıldığı program ile zamana bağlı sıcaklık değişimi çözümü yapılmıştır. Makaleden alınan deneysel ve nümerik sonuçlarla mevcut analitik sonuçlarının karşılaştırma grafikleri Şekil 5.13'te, M. Chabičovský ve arkadaşlarının yapmış oldukları nümerik çözüm ile deneysel çalışma sonuçlarının bağıl farkı ile mevcut çalışmada yapılan analitik çözüm ve deneysel çalışma sonuçlarının bağıl fark gösterimleri Şekil 5.14'te sunulmuştur.



Şekil 5.13. X_{oksit} =0,025 mm için zamana bağlı değişen $T_{Ç.Y.}$ için nümerik, analitik ve deneysel sonuçları.



Şekil 5.14. X_{oksit}= 0,025 mm için zamana bağlı değişen $T_{Ç.Y.}$'nin nümerik, analitik ve deneysel sonuçlarının bağıl fark grafiği

Makaleden alınan deneysel ($T_{Ç.Y.,den.}$) ve nümerik ($T_{Ç.Y.,nüm.}$) zamana bağlı çelik yüzey sıcaklık değişimleri sonuçları ve mevcut analitik ($T_{Ç.Y.,anltk.}$) sonuçlar ile Chabičovský ve arkadaşlarının yapmış oldukları nümerik çözüm ile deneysel çalışma sonuçları farkı ve mevcut analitik sonuçlar ile deneysel çalışma sonuçları bağıl fark gösterimleri Çizelge 5.12.’de sunulmuştur.

Çizelge 5.12. X_{oksit}= 0,025 mm için $T_{Ç.Y.}$ (°C) nümerik, analitik ve deneysel sonuçları ile bağıl fark sayısal değerleri.

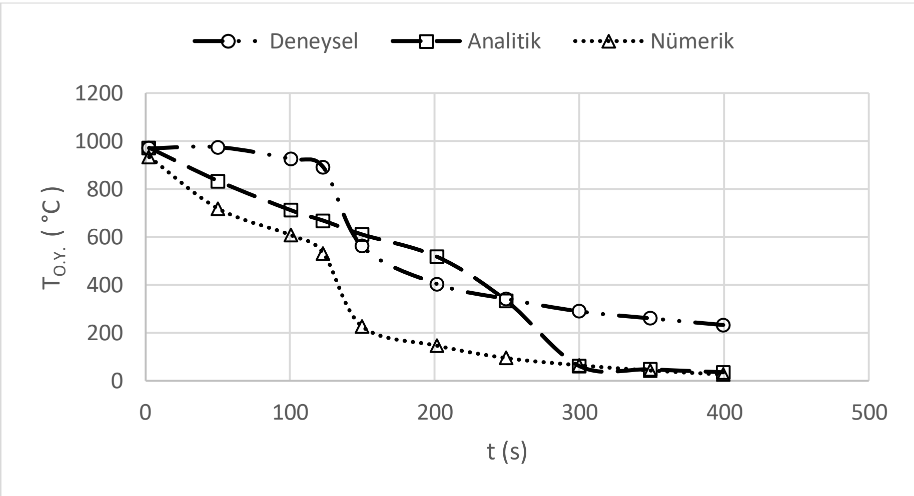
t(s)	$T_{Ç.Y.,den.}$. (°C)	$T_{Ç.Y.,anltk.}$ (°C)	$T_{Ç.Y.,nüm.}$ (°C)	$T_{Ç.Y.,anltk.}$ ile $T_{Ç.Y.,den.}$ Sıcaklık Farkı (°C)	$T_{Ç.Y.,nüm.}$ ile $T_{Ç.Y.,den.}$ Sıcaklık Farkı (°C)
1	967	1000	969	33	2
50	729	876	974	147	245
101	612	698	925	86	313
150	264	642	685	378	421
200	168	544	503	376	335
250	107	360	400	253	293
301	72	76	342	4	270
350	52	57	292	5	240
400	39	42	253	3	214

Şekil 5.13.’de 0,025 mm oksit tabakası olan çelik yüzeyin zamana göre sıcaklık değişiminde deneysel sonuçlar ile analitik sonuçların uyumlu olduğu tespit edilmiştir. Ancak t=150 s öncesi soğutma döneminde deneysel verilerde ilave bir yalıtım etkisi gözlenmektedir. Bunun teorik olarak nedeni soğutma esnasında suyun kendi buharlaşma sıcaklığından daha yüksek sıcaklığa sahip bir yüzeye çarpması ve bu esnada buharlaşması, buharın da ilave bir yalıtım sağlaması olabileceği değerlendirilmektedir.

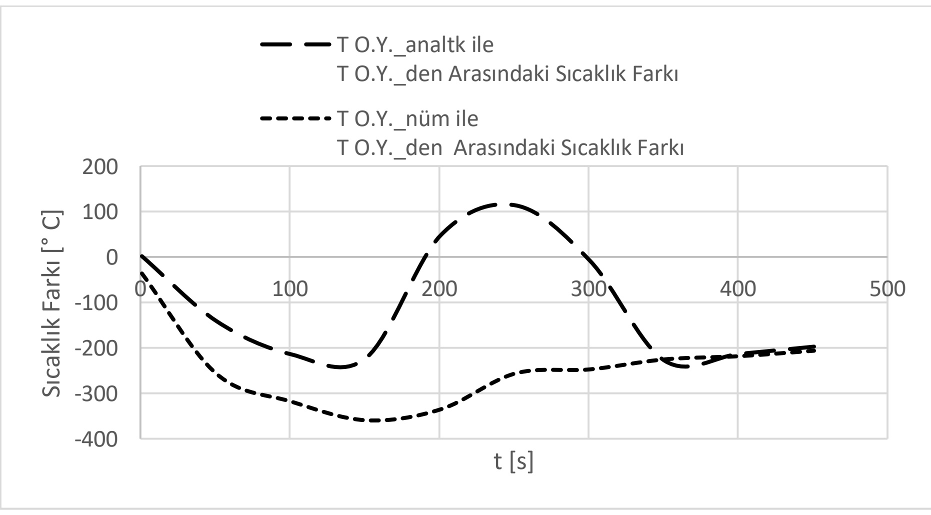
Şekil 5.14.’de analitik ve nümerik çözüm yöntemlerinin bağıl fark grafikleri tanımlanmıştır. Analitik çözüm yöntemi ve deneysel yöntemle çözümün sonuçlarının bağıl fark grafiğinde yaklaşık t=170’inci saniyede minimum hatanın olduğu, t=200’üncü saniyeden sonra bağıl farkın arttığı ve t=400’üncü saniyede en yüksek seviyeye ulaştığı tespit edilmiştir. Nümerik yöntemle deneysel yöntemin bağıl farkı ile kıyaslandığında t=300’üncü saniyeden sonra aynı bağil farka ulaşıldığı, ancak 300’üncü saniyeye kadar geçen sürede deneysel yöntemle elde edilen sonuçlara daha fazla yaklaşıldığı belirlenmiştir.

5.2.3. Oksit tabakası yüzeyi için çözüm ve sonuçlar

Oksit tabakasının üst yüzeyindeki sıcaklık profilinin tespiti için makalede 0,025 mm oksit kalınlığı için grafiksel olarak verilen deneysel ve nümerik sonuçlar 50 s'lik aralıklar okunmuştur. Bu tez çalışmasında geliştirilen analitik modelin kullanıldığı program ile zamana bağlı sıcaklık değişimi çözümü yapılmıştır. Makaleden alınan deneysel ve nümerik sonuçlarla mevcut analitik sonuçlarının karşılaştırma grafikleri Şekil 5.15'te, Chabičovský ve arkadaşlarının yapmış oldukları nümerik çözüm ile deneysel çalışma sonuçlarının bağıl farkı ile mevcut çalışmada yapılan analitik çözüm ve deneysel çalışma sonuçlarının bağıl fark gösterimleri Şekil 5.16'da sunulmuştur.



Şekil 5.15. Oksit kalınlığı 0,025 mm için zamana bağlı değişen oksit tabakası yüzey sıcaklığının (°C) nümerik, analitik ve deneysel sonuçları.



Şekil 5.16. X_{oksit} =0,025 mm için zamana bağlı değişen $T_{O.Y.}$ nümerik, analitik ve deneysel sonuçlarının bağıl fark grafiği.

Makaleden alınan deneysel ($T_{O.Y.,den.}$) ve nümerik ($T_{O.Y.,nüm.}$) zamana bağlı değişen oksit tabakası yüzey sıcaklık değişimleri sonuçları ve mevcut analitik ($T_{O.Y.,anltk.}$) sonuçlar ile Chabičovský ve arkadaşlarının yapmış oldukları nümerik çözüm ile deneysel çalışma sonuçları bağıl farkı ve mevcut analitik sonuçlar ile deneysel çalışma sonuçları bağıl fark gösterimleri Çizelge 5.13.'de sunulmuştur.

Çizelge 5.13. X_{oksit} =0,025 mm için zamana bağlı değişen T $_{O.Y.}$ °C nümerik, analitik ve deneysel sonuçları ile bağıl fark sayısal sayısal değerleri.

t (s)	$T_{O.Y.,den.}$ (°C)	$T_{O.Y.,anltk.}$ (°C)	$T_{O.Y.,nüm.}$ (°C)	$T_{O.Y.,anltk.}$ ile $T_{O.Y.,den.}$ Sıcaklık Farkı	$T_{O.Y.,nüm.}$ ile $T_{O.Y.,den.}$ Sıcaklık Farkı
1	969	971	933	2	-36
51	974	833	717	-141	-257
101	925	711	607	-214	-318
151	890	668	531	-222	-359
201	562	610	227	48	-335
251	403	517	147	114	-256
301	342	334	95	-8	-247
351	290	62	65	-228	-225
401	261	48	43	-213	-218
451	233	36	27	-197	-206

Şekil 5.15. incelendiğinde deneysel ve analitik sonuçların birbiri ile uyumlu bir profil izlediği görülmektedir. Yine t=150 s öncesi soğutma döneminde deneysel verilerde bir yalıtım etkisi gözlenmektedir. Bunun nedeninin daha önce açıklandığı gibi soğutma esnasında suyun kendi buharlaşma sıcaklığından daha yüksek sıcaklığa sahip bir yüzeye çarpması ve bu esnada buharlaşması, buharın da ilave bir yalıtım sağlaması olabileceği değerlendirilmektedir.

Bu uygulamada 1000 °C'de çelik 17 °C su ile soğutulmakta, bu işlem esnasında ısı iletkenlik katsayısı çok düşük olan oksit tabakasının etkisi incelenmiştir. Deneysel çalışma sonuçlarında özellikle buharlaşmanın olduğu dönemde ölçülen sıcaklıkların oksit tabakasının haricinde ilave bir yalıtım yaptığı gözlenmektedir. Analitik sonuçlarda deneysel sonuçlara göre sapmalar olsa dahi, proses bütüncül olarak incelendiğinde zaman ve sıcaklık profili olarak uyumlu sonuçlar elde edilmiştir. Geliştirilen analitik çözümün oksit tabakasının etkilerinin incelenmesinde kullanılabileceği sonucuna varılmıştır.

6. PÜSKÜRTME SOĞUTMA ETKİSİ ALTINDA OKSİDASYON OLUŞUMUNUN ISI TRANSFERİ ÜZERİNE ETKİLERİ

Su püskürtme soğutma; metal işleme ve elektronik soğutma gibi birçok yüksek sıcaklıklı endüstriyel uygulamada kullanılan yaygın bir soğutma yöntemidir. Metal işleme prosesi süresince, ortam ile metal arasındaki sıcaklık farkına bağlı olarak metal yüzeyi üzerinde gözenekli bir yapıya sahip oksit tabakası oluşabilir. Oksit tabakası, metale göre çok düşük ısıl iletkenliğe sahiptir ve bir ısıl bariyer görevi görür.

Bu bölümde, su püskürtme yöntemi ile soğutma esnasında oluşan ve zamana ve sıcaklığa bağlı olarak kalınlığı değişen oksit tabakası ile sıcaklığa bağlı değişen taşınımla ısı transferi katsayısının prosese etkileri hazırlanan analitik yöntem ve buna bağlı olarak oluşturulan program kullanılarak hesaplanmıştır.

Hesaplamada öncelikle bu tezin 3.1. bölümünde detayları aktarılan deneysel çalışmadaki parametreler kullanılarak hesaplama yapılmıştır. Daha sonra Aluminyum ve Alumina kaplı katmanlı bir malzemede aynı problemin çözümü bulunmuştur.

6.1. Östenit Paslanmaz Çeliğin Soğutulmasında Oksit Tabaka Kalınlığının Etkisi

Bölüm 5.2'de ele alınan makaledeki parametreler ve yine makaleden alınan sıcaklığa bağlı ısı transfer katsayısı değişimi kullanılarak sabit kalınlıktaki oksit tabakasının ısı transferine etkisi incelenmişti.

Bu tez kapsamında geliştirilen analitik çözüm ve buna bağlı oluşturulan programa oksit tabakasının zamana ve sıcaklığa bağlı değişimi de ilave edilerek çözüm yapılmış ve elde edilen sonuçlar aşağıda grafikler halinde sunulmuştur.

Oksit tabakasının kalınlığının püskürtme soğutma prosesindeki yalıtım etkisini belirlemek üzere değişen oksit kalınlığının belirlenmesi için Larson – Miller parametresine bağlı olarak Eş. (6.1.)'de ifade edilmiştir (Wendelstorf vd., 2008).

$$\mathrm{Log}\left(\frac{X_{oksit}}{0{,}0254}\right) = 0{,}00022\,P - 7{,}25 \tag{6.1}$$

Bu eşitlikte X oksidasyon kalınlığını (mm) ve P ise Larson-Miller parametresini ifade etmektedir. Larson –Miller parametresi Eş. (6.2.)'de verilmiştir.

$$P = (T_{O.Y.}+273)(20+\text{Log t}) \tag{6.2}$$

Bu iki eşitlik birleştirilerek;

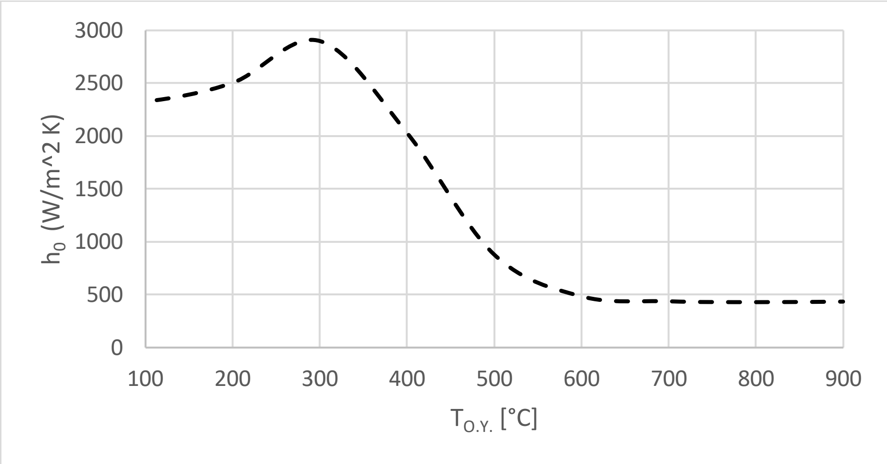
$$X_{oksit} = 0{,}0254\, e\,((0{,}00022\,(T_{O.Y.} + 273)(20 + \text{Log t}) - 7{,}25)) \tag{6.3}$$

eşitliği elde edilmektedir.

Bu eşitlikte $T_{O.Y.}$ °C cinsinden oksit yüzey sıcaklığı, t saat cinsinden süreyi ifade etmektedir. Hazırladığımız programda oksit kalınlığının değişiminin de etkisi ilave edilmiştir. Bununla birlikte sıcaklığa bağlı Efektif Isı Transfer Katsayısı (h)'nın da etkisini dahil etmek üzere makalede verilen grafikten değerler alınmıştır. Alınan değerler sayısal olarak Çizelge 6.1'de, grafik olarak Şekil 6.1'de sunulmuştur.

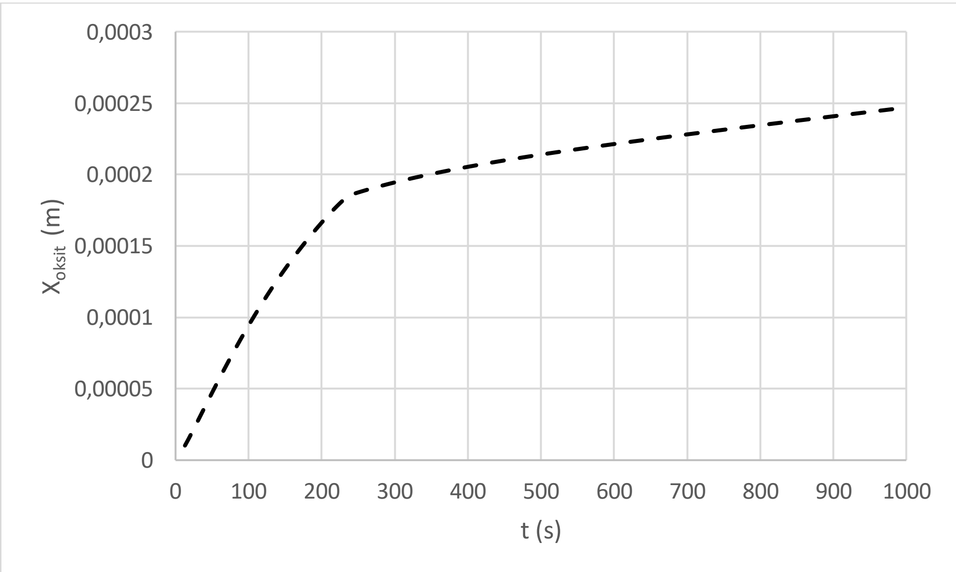
Çizelge 6.1. Sıcaklığa Bağlı Efektif Isı Transfer Katsayısı

$T_{O.Y.}$ (°C)	h (W/m^2 K)
17	2325
100	2325
200	2502
300	2898
400	2030
500	879
600	484
700	437
800	429
900	434



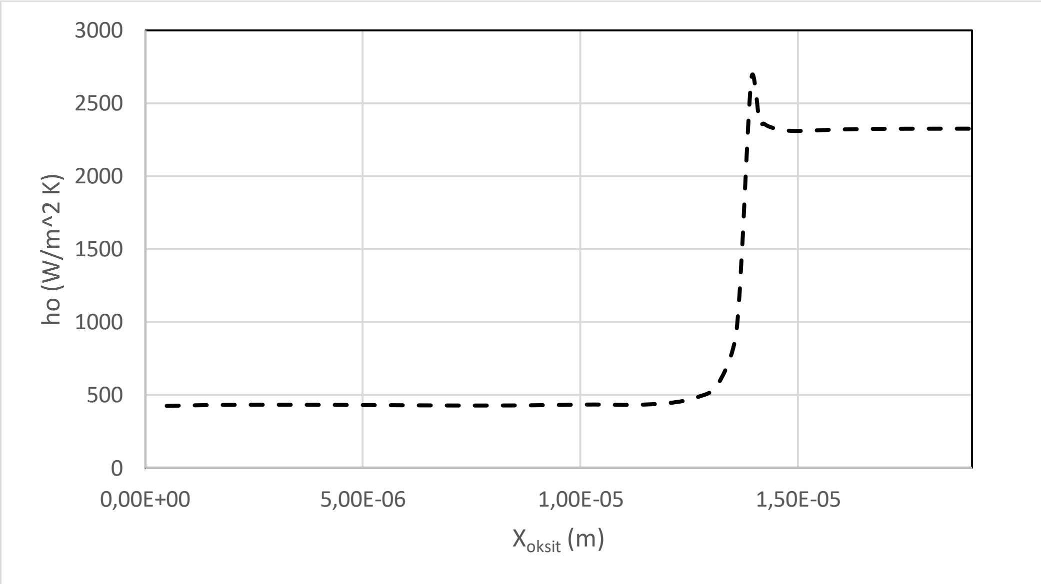
Şekil 6.1. Efektif ısı transfer katsayısı sıcaklığa bağlı değişim grafiği.

Şekil 6.1.'de görüldüğü gibi efektif ısı transfer katsayısı yaklaşık 300°C'de en fazla değerlere ulaşmaktadır. Yapılan çözümlerden elde edilen sonuçlar grafikler halinde sunulmuştur.



Şekil 6.2. Östenit paslanmaz çeliğin soğutulmasında oksidasyon kalınlığının zamana bağlı değişimi grafiği.

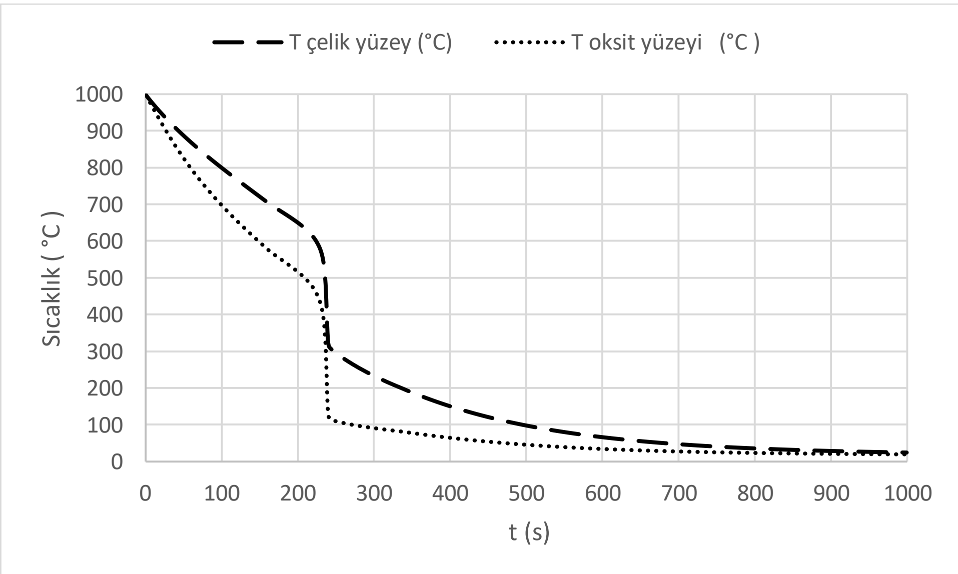
Şekil 6.2. incelendiğinde oksidasyon oluşumunun yaklaşık ilk 220 s içerisinde daha hızlı olduğu, bundan sonraki zaman içerisinde oksidasyon kalınlığı artış hızının düştüğü görülmektedir.



Şekil 6.3. Östenit paslanmaz çeliğin soğutulmasında h_o-X_{oksit} değişimi grafiği.

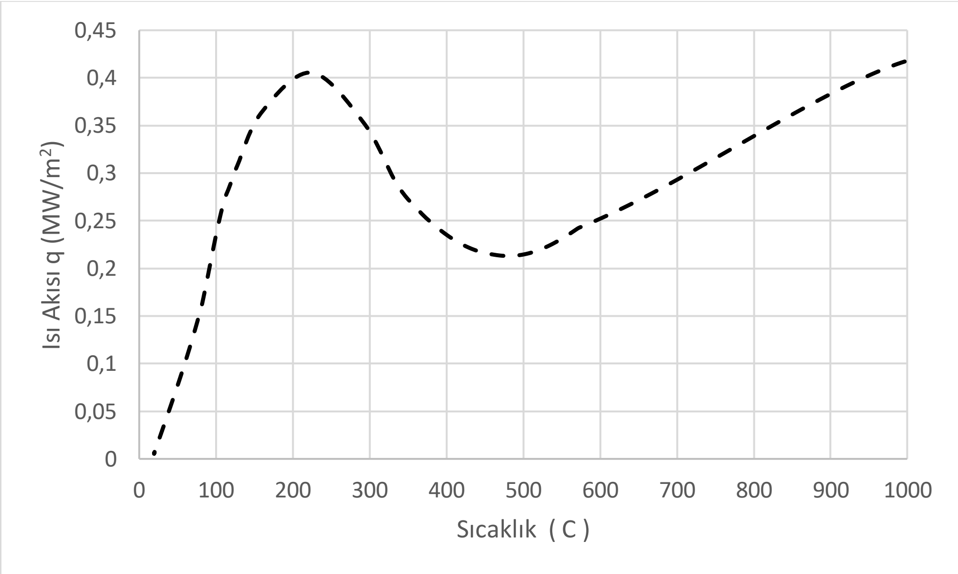
Şekil 6.3. incelendiğinde X_{oksit} =1,2E-05 olduğunda h_o'ın yükselmeye başladığı ve 1,4E-05 değerine ulaştığında ise maksimum değerine geldiği görülmektedir.

Yapılan çözüm sonucunda oluşan oksidasyon tabakasının yüzeyindeki sıcaklık ile oksidasyon tabakasının altında kalan çelik yüzeyindeki sıcaklık değişimi Şekil 6.4.'de gösterilmektedir.



Şekil 6.4. Östenit paslanmaz çeliğin soğutulmasında çelik ve oksit yüzeyi sıcaklıklarının zamana bağlı değişimi.

Şekil 6.4 incelendiğinde oksit tabakasından dolayı oksit yüzeyinde sıcaklığın hızlı düştüğü oksit tabakasının altındaki çelik yüzeyindeki sıcaklığın oksit tabakasının izolasyon etkisine bağlı olarak daha yavaş düştüğü gözlenmektedir. t=230 s'de çelik ve oksit yüzeyde hızlı bir düşüş görülmektedir. Bu problemde oksit yüzeyinden suya doğru geçen ısı akısının yüzey sıcaklığına bağlı olarak değişimi Şekil 6.5.'de görülmektedir.



Şekil 6.5. Oksit yüzeyinden suya doğru geçen ısı akısının yüzey sıcaklığına bağlı olarak değişimi

Analitik çözüm sonucunda elde edilen tüm sayısal değerler Çizelge 6.2.'de sunulmuştur. Çizelge 6.2.'de sunulan değerlerden h sıcaklığa bağlı değişen ısı transfer katsayısını, Xoksit zamana ve sıcaklığa bağlı değişen oksidasyon kalınlığını, $T_{Ç.Y.}$ çelik yüzey sıcaklığını, $T_{O.Y.}$ oksit tabakası yüzey sıcaklığını ve q oksit tabakası ile soğutucu akışkan arasındaki ısı akısını ifade etmektedir.

Çizelge 6.2. Analitik çözüm sonucunda elde edilen sayısal değerler

t (s)	Kök λ	h_o (W/m^2 K)	Xoksit (m)	$T_{Ç.Y.}$ (°C)	$T_{O.Y.}$ (°C)	q (W/m^2)
1	0,057271541	426,0957588	4,92936E-07	997,1611396	996,4007861	0,41731852
11	0,057284484	431,6551379	1,44923E-06	966,2323355	964,066384	0,40880607
21	0,057564033	433,971231	2,48475E-06	935,7389608	932,1039318	0,39712878
31	0,057655403	434,0309418	3,52434E-06	906,2496967	901,2410767	0,38378799
41	0,057619146	432,8244935	4,53686E-06	878,0154481	871,7819353	0,36997056
51	0,057512822	431,1658527	5,50855E-06	851,0508443	843,7509305	0,35646677
61	0,057382846	429,6693924	6,43366E-06	825,2222821	817,0039823	0,34373722
71	0,0572641	428,7948182	7,31033E-06	800,3204189	791,3136586	0,33202168
81	0,057182691	428,9078326	8,13847E-06	776,1018381	766,4170594	0,32143085
91	0,05715929	430,3366301	8,91878E-06	752,3061118	742,0354842	0,31200933

Çizelge 6.2. (devam) Analitik çözüm sonucunda elde edilen sayısal değerler

101	0,057212103	433,4229808	9,65224E-06	728,657432	717,8768835	0,30377615
111	0,057359421	435,6037896	1,03398E-05	704,8564755	693,6277509	0,29474161
121	0,057456632	433,1925562	1,09821E-05	682,0558885	670,4797488	0,28308256
131	0,057298616	436,6785103	1,15831E-05	662,2595311	650,4890645	0,27663106
141	0,057471192	450,0198359	1,21505E-05	639,9982063	627,9939216	0,27495938
151	0,058183325	484,9325007	1,26804E-05	612,7327223	600,4052273	0,28291216
161	0,060005007	578,0186553	1,31654E-05	573,9527437	561,090249	0,31449431
171	0,064433838	952,6197551	1,35901E-05	507,2075485	493,3517793	0,45378212
181	0,077754062	2663,11511	1,39245E-05	353,9157997	338,1418193	0,85523763
191	0,104376257	2357,312277	1,41142E-05	147,5040439	131,5581243	0,27004927
201	0,101511724	2360,022937	1,42021E-05	147,9703217	133,5240019	0,27499932
211	0,101520925	2345,265289	1,42905E-05	135,143209	122,0262339	0,24631438
221	0,101354057	2334,975122	1,43751E-05	124,3715714	112,4544765	0,22288383
231	0,101232448	2327,059683	1,44566E-05	114,4483902	103,6205748	0,20157125
241	0,101135281	2321,131665	1,45354E-05	105,3833804	95,54499858	0,18231328
251	0,101058795	2316,795078	1,46118E-05	97,11133416	88,17242001	0,16489191
261	0,100999025	2313,724888	1,4686E-05	89,57363154	81,45275346	0,14912594
271	0,100952662	2311,653234	1,47584E-05	82,71401018	75,33725317	0,1348555
281	0,100916945	2310,360895	1,48291E-05	76,47882433	69,77896449	0,12193846
291	0,10088959	2309,669662	1,48983E-05	70,81716794	64,73299066	0,11024744
301	0,100868728	2309,435669	1,49661E-05	65,68099792	60,15672203	0,09966767
311	0,10085284	2309,543594	1,50328E-05	61,02522367	56,01000472	0,09009531
321	0,100840703	2309,901668	1,50985E-05	56,80775006	52,25524368	0,08143615
331	0,10083134	2310,437431	1,51632E-05	52,98947125	48,85744352	0,07360463
341	0,100823978	2311,094138	1,52272E-05	49,53421921	45,78419477	0,06652298
351	0,100818009	2311,827759	1,52904E-05	46,408674	43,00561559	0,0601205
361	0,10081296	2312,604493	1,5353E-05	43,58224427	40,4942594	0,05433293
371	0,100808464	2313,398709	1,5415E-05	41,02692649	38,22499785	0,04910188
381	0,100804245	2314,191276	1,54765E-05	38,71715035	36,17488791	0,04437436
391	0,100800094	2314,968192	1,55375E-05	36,62961705	34,32302971	0,04010226
401	0,100795856	2315,719481	1,55982E-05	34,74313535	32,65042092	0,03624198
411	0,100791419	2316,438307	1,56585E-05	33,03845968	31,13981174	0,032754
421	0,100786706	2317,120258	1,57185E-05	31,49813306	29,77556356	0,02960252
431	0,100781665	2317,762782	1,57783E-05	30,10633696	28,54351355	0,02675513
441	0,100776264	2318,364731	1,58378E-05	28,84874941	27,43084633	0,02418251
451	0,100770487	2318,926011	1,58971E-05	27,71241214	26,42597389	0,02185814
461	0,100764327	2319,447295	1,59562E-05	26,68560706	25,51842368	0,01975803
471	0,100757787	2319,929808	1,60152E-05	25,75774207	24,6987354	0,01786053
481	0,100750877	2320,375156	1,6074E-05	24,91924608	23,95836597	0,01614602
491	0,10074361	2320,785191	1,61327E-05	24,16147281	23,28960255	0,01459682
501	0,100736003	2321,161915	1,61913E-05	23,47661294	22,68548315	0,01319693
511	0,100728072	2321,507399	1,62499E-05	22,85761403	22,13972435	0,01193191
521	0,100719837	2321,823731	1,63084E-05	22,29810781	21,64665563	0,01078872
531	0,100711318	2322,11297	1,63668E-05	21,79234411	21,20115987	0,00975557
541	0,100702533	2322,377114	1,64251E-05	21,33513103	20,79861937	0,00882183
551	0,100693501	2322,618087	1,64835E-05	20,92178076	20,43486714	0,00797788
561	0,100684241	2322,837715	1,65417E-05	20,54806057	20,1061428	0,00721507
571	0,10067477	2323,037727	1,66E-05	20,21014851	19,80905274	0,00652554
581	0,100665105	2323,219744	1,66583E-05	19,90459343	19,54053423	0,00590222
591	0,10065526	2323,38528	1,67165E-05	19,62827881	19,29782297	0,00533873

Çizelge 6.2. (devam) Analitik çözüm sonucunda elde edilen sayısal değerler

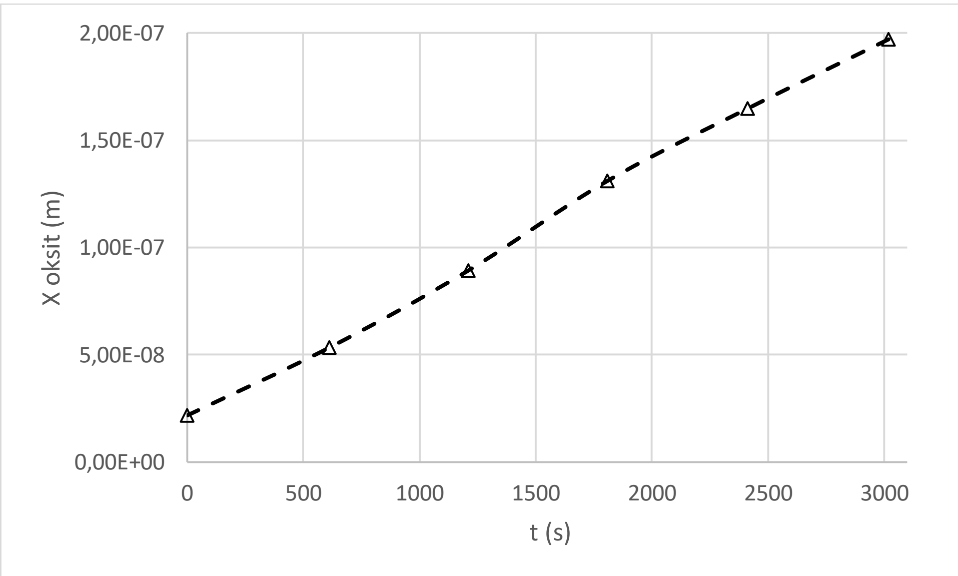
601	0,10064525	2323,535743	1,67748E-05	19,37839016	19,07842384	0,00482929
611	0,100635089	2323,672438	1,68331E-05	19,15238558	18,88008454	0,0043687
621	0,100624789	2323,796573	1,68913E-05	18,9479692	18,70077178	0,00395225
631	0,100614363	2323,909257	1,69496E-05	18,76306722	18,53864986	0,00357568
641	0,10060382	2324,011513	1,70079E-05	18,5958063	18,39206133	0,00323517
651	0,10059317	2324,104279	1,70662E-05	18,44449402	18,25950954	0,00292723
661	0,100582424	2324,188414	1,71245E-05	18,30760134	18,13964297	0,00264874
671	0,100571588	2324,264702	1,71829E-05	18,18374669	18,03124102	0,00239688
681	0,10056067	2324,333863	1,72413E-05	18,07168164	17,93320125	0,00216907
691	0,100549679	2324,396551	1,72997E-05	17,97027803	17,84452789	0,00196302
701	0,100538619	2324,453364	1,73581E-05	17,87851626	17,76432139	0,00177663
711	0,100527496	2324,504845	1,74166E-05	17,79547482	17,69176911	0,00160802
721	0,100516317	2324,551489	1,74751E-05	17,72032075	17,62613687	0,00145549
731	0,100505086	2324,593747	1,75337E-05	17,6523011	17,56676128	0,00131749
741	0,100493807	2324,632029	1,75922E-05	17,59073519	17,51304291	0,00119264
751	0,100482484	2324,666705	1,76508E-05	17,53500765	17,46444006	0,00107967
761	0,100471121	2324,698114	1,77095E-05	17,48456208	17,42046321	0,00097745
771	0,100459722	2324,726562	1,77682E-05	17,43889539	17,38066989	0,00088495
781	0,100448288	2324,752327	1,78269E-05	17,39755267	17,3446602	0,00080125
791	0,100436824	2324,775662	1,78857E-05	17,36012252	17,31207266	0,0007255
801	0,100425331	2324,796795	1,79444E-05	17,32623288	17,2825805	0,00065694
811	0,100413813	2324,815934	1,80033E-05	17,29554728	17,2558883	0,00059489
821	0,10040227	2324,833267	1,80622E-05	17,26776134	17,23172898	0,00053873
831	0,100390705	2324,848964	1,81211E-05	17,24259978	17,20986108	0,0004879
841	0,100379119	2324,86318	1,818E-05	17,21981355	17,19006623	0,00044188
851	0,100367515	2324,876054	1,8239E-05	17,19917737	17,17214702	0,00040022
861	0,100355893	2324,887713	1,8298E-05	17,18048742	17,1559249	0,00036251
871	0,100344255	2324,898273	1,83571E-05	17,1635593	17,14123839	0,00032836
881	0,100332602	2324,907836	1,84162E-05	17,14822616	17,12794147	0,00029745
891	0,100320936	2324,916497	1,84754E-05	17,13433703	17,11590206	0,00026946
901	0,100309256	2324,924342	1,85346E-05	17,12175528	17,1050007	0,00024412
911	0,100297564	2324,931447	1,85938E-05	17,1103573	17,09512931	0,00022117
921	0,100285861	2324,937883	1,8653E-05	17,1000312	17,08619015	0,00020039
931	0,100274147	2324,943712	1,87123E-05	17,09067571	17,07809478	0,00018157
941	0,100262424	2324,948992	1,87717E-05	17,08219919	17,0707632	0,00016452
951	0,100250692	2324,953775	1,88311E-05	17,07451868	17,06412301	0,00014908
961	0,100238951	2324,958108	1,88905E-05	17,06755909	17,05810872	0,0001351
971	0,100227202	2324,962033	1,89499E-05	17,06125244	17,05266107	0,00012243
981	0,100215445	2324,965589	1,90094E-05	17,0555372	17,04772644	0,00011096
991	0,100203681	2324,96881	1,90689E-05	17,05035766	17,04325629	0,00010057

6.2. Alüminyum Oksit Tabakasının Isıl Etkileri

Su püskürtme soğutmada oksit tabakasının ısıl etkilerinin araştırılması konusunda 3. Bölümde problem tanımı yapılmış olan Alüminyum Nitrit'in oksidasyonu esnasında oluşan oksit tabakası kalınlığına ilişkin Korbutowicz ve arkadaşları tarafından yapılan çalışmadaki verileri kullanılmıştır. Alüminyumun oksidi olan alüminanın yüzey üzerinde zamana bağlı olarak değişimi Korbutowicz ve arkadaşları tarafından yapılan çalışmadaki Şekil 6.6'da verildiği lineer değişim kabul edilerek analitik hesaplamaları yapılmış ve ısıl etkisi incelenmiştir. Burada. Söz konusu veriler yeniden düzenlerek Çizelge 6.3. ve Şekil 6.6'de sunulmuştur. (Korbutowicz, Zakrzewski, Rac-Rumijowska, Stafiniak ve Vincze, 2017)

Çizelge 6.3. Oksidasyon kalınlığı değişimi sayısal değerleri

t (s)	Xoksit (m)
1	2,17E-08
612	5,33E-08
1210	8,92E-08
1809	1,31E-07
2413	1,65E-07
3018	1,97E-07



Şekil 6.6. Oksit tabakası kalınlığının zamana göre değişimi.

Problemin çözümünde zamana bağlı ihtiyaç duyulan diğer veriler Çizelge 6.3.'te sunulan verilerin interpolasyonu alınarak bulunmaktadır. Araştırmamızda Efektif Isı Transfer Katsayısı (h_0)'nın değişimi ile ilgili olarak ise Wendelsorf tarafından verilen eşitlikler kullanılmıştır. (Wendelstorf vd., 2008)

$$h_0 = \left(\frac{1}{h} + \frac{X_{oksit}}{k_{oksit}}\right)^{-1} \tag{6.4}$$

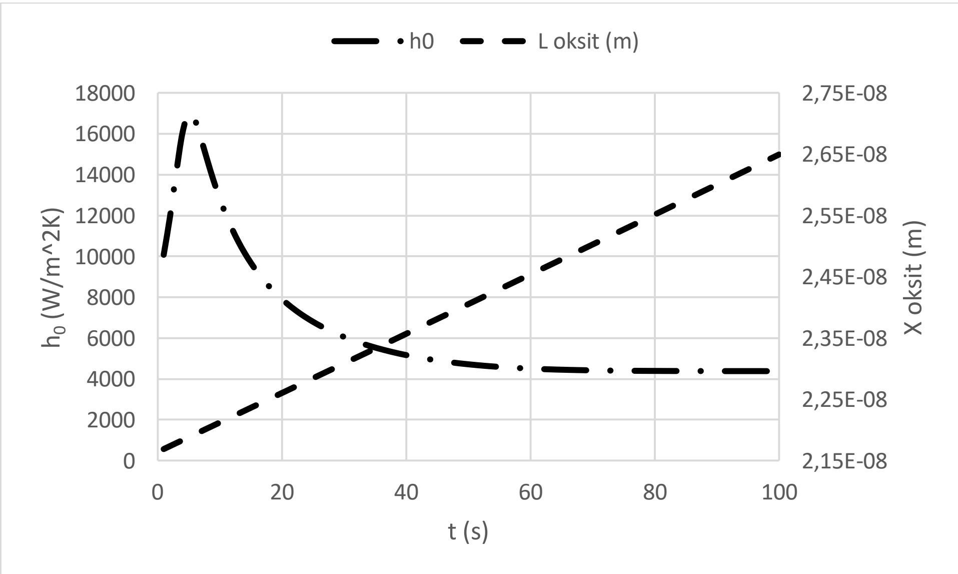
Bu denklemde h konveksiyonla ısı transfer katsayısı aşağıdaki eşitlik ile bulunmaktadır.

$$\begin{aligned} \mathrm{h} = 190 + \tanh\left[\frac{\mathrm{Vs}}{8}\right](140\ \mathrm{Vs}\ (1 - \frac{\mathrm{Vs}\ (T_{O.Y.} - T_{S.A.})}{72000}) \\ + 3{,}26\ (T_{O.Y.} - T_{S.A.})^2 \quad \left[1 - \tanh[\frac{(T_{O.Y.} - T_{S.A.})}{128}]\right] \end{aligned} \tag{6.5}$$

Bu denklemde, $T_{A.Y.}$ aluminyum yüzey sıcaklığını $T_{O.Y.}$ oksit yüzey sıcaklığını, $T_{S.A.}$ soğutucu akışkan sıcaklığını, k_{oksit} oksit tabakası ısı iletim katsayısını, X_{oksit} oksit tabakası kalınlığını ve Vs akışkanın çarpma yoğunluğunu temsil etmektedir. Bu durumda efektif ısı iletim katsayısı h_0 ince bir oksit tabakası ve homojen bir soğutma yapıldığı kabulü ile aşağıdaki eşitlikle ifade edilmektedir.

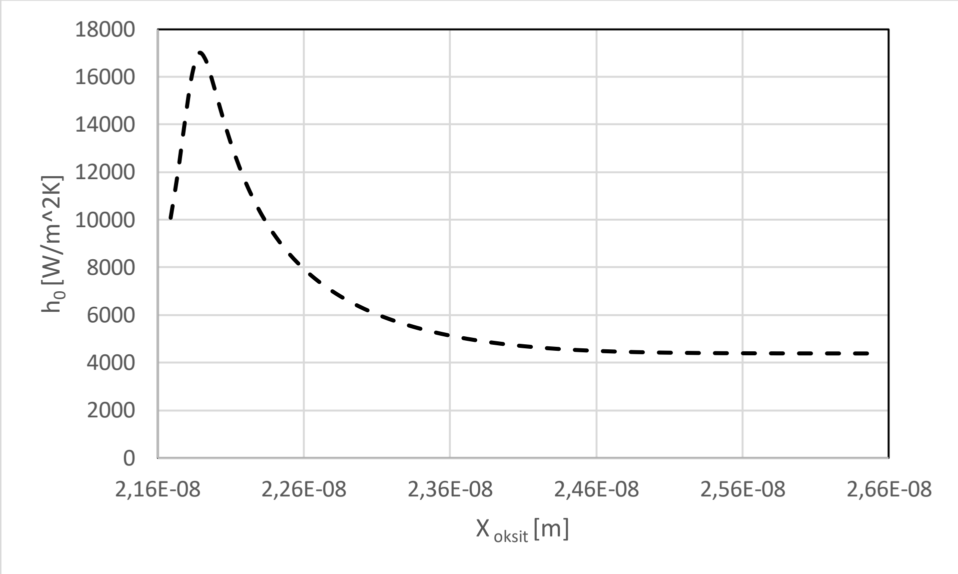
<u>Sonuçlar</u>

Oksidasyon tabakası kalınlığı ile Efektif Isı Transfer Katsayısının (h_0) zamana göre değişimi Şekil 6.7.'de sunulmuştur.

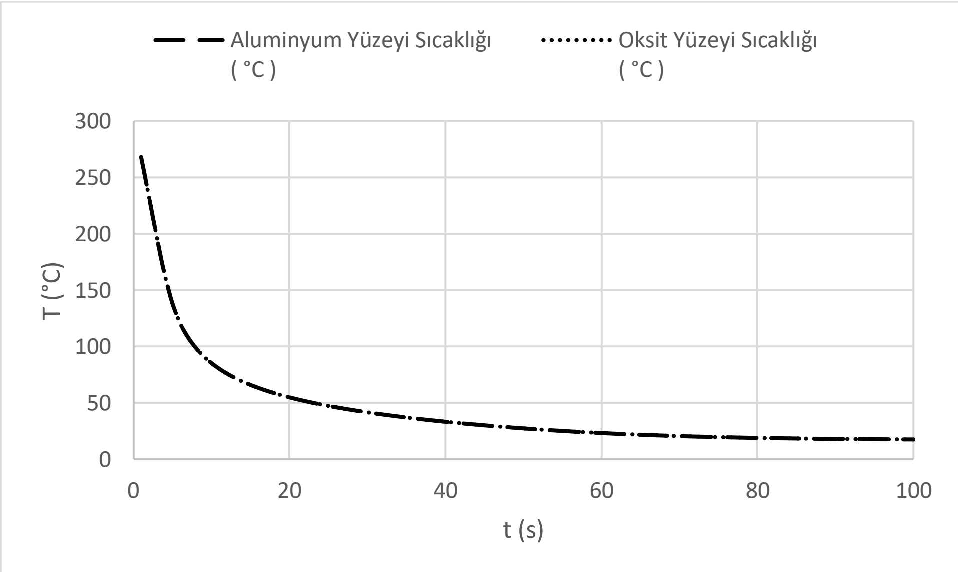


Şekil 6.7. X_{oksit} ile h_0 zamana göre değişimi.

h_0'ın X_{oksit} ile değişimi Şekil 6.8.'da sunulmuştur.

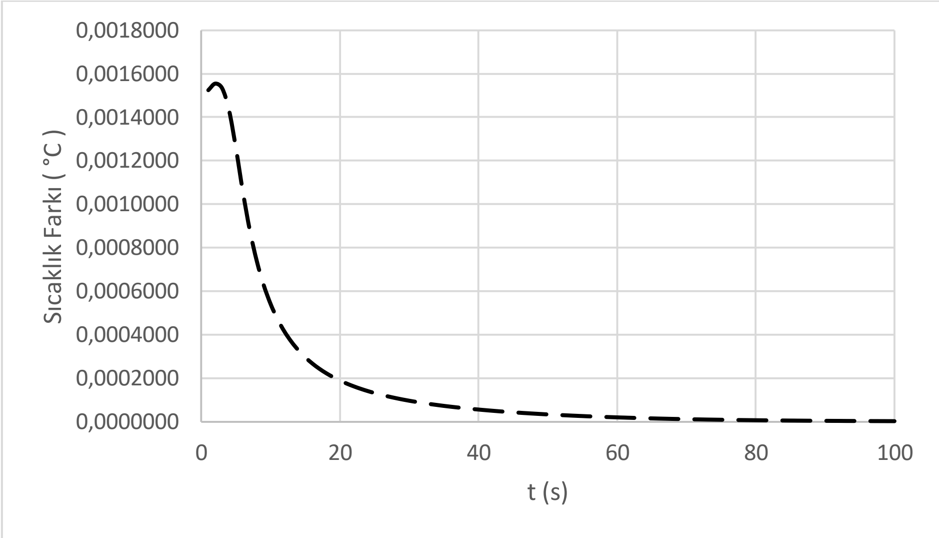


Şekil 6.8. Efektif ısı transfer katsayısının oksit kalınlığı ile değişimi.



Şekil 6.9. Sıcaklık değişimi grafiği.

Şekil 6.9. incelendiğinde Alüminyum yüzeyi sıcaklığındaki değişim ile püskürtme suyunun çarptığı oksit tabakası yüzeyindeki sıcaklık değişiminin hemen aynı olduğu gözlenmektedir. Bu durumda Alümina (Alüminyum Oksit) tabakasının sprey soğutma es nasında ısıyı ilettiği ve belirgin bir yalıtım etkisi yaratmadığı gözlenmektedir. Püskürtme esnasında Alüminyum yüzeyi sıcaklığı ile oksit tabakası yüzeyi sıcaklığı arasındaki farkın grafiksel gösterimi Şekil 6.10.'da yapılmıştır.



Şekil 6.10. Alümina tabakasının iki yüzeyi arasındaki sıcaklık farkının zamanla değişimi grafiği.

Şekil 6.10. incelendiğinde oksit tabakasının ısı transferinde yalıtım etkisinin üçüncü saniyede (3. s) 0,00155 °C olarak belirlenmiştir. Grafiğe göre alüminanın yalıtım etkisinin prosesin başlangıcında yüksek olduğu ve giderek azaldığı görülmektedir. Detaylı inceleme için elde edilen sonuçlar Çizelge 6.4.'de yer almaktadır. Çizelge 6.4.'de oksit tabakasının altında ve üstündeki yüzey için hesaplanan sıcaklık değerleri ile arasındaki sıcaklık farkı verilmektedir.

Çizelge 6.4. Alümina tabakasının iki yüzeyinin sıcaklıkları ile aralarındaki sıcaklık farkının zamanla değişimi zamana bağlı sıcaklık değerleri.

t (s)	$T_{A.Y.}$ (°C)	$T_{O.Y.}$ (°C)	Fark
1	267,9396	267,9380	0,0015242
2	232,9816	232,9800	0,0015543
3	197,0869	197,0854	0,0015325
4	164,2233	164,2218	0,0014305
5	138,4588	138,4576	0,0012541
6	120,6113	120,6103	0,0010539
7	108,1896	108,1888	0,0008777
8	98,8105	98,8098	0,0007372
9	91,4067	91,4061	0,0006268
10	85,3619	85,3614	0,0005395
11	80,3031	80,3026	0,0004698
12	75,9821	75,9817	0,0004132
13	72,2320	72,2317	0,0003666
14	68,9320	68,9317	0,0003278
15	65,9957	65,9954	0,0002951

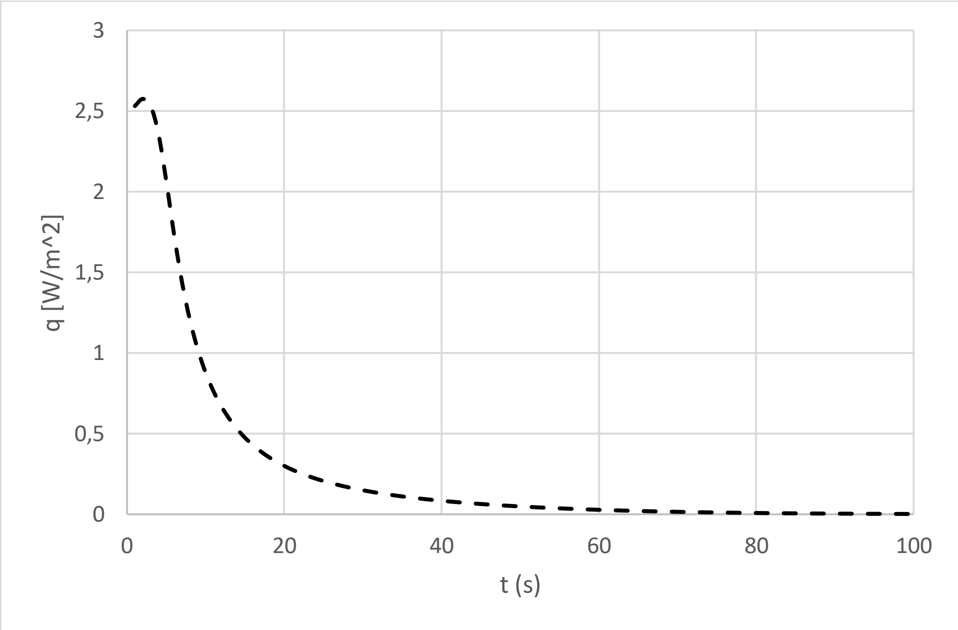
Çizelge 6.4. (devam) Alümina tabakasının iki yüzeyinin sıcaklıkları ile aralarındaki sıcaklık farkının zamanla değişimi zamana bağlı sıcaklık değerleri.

16	63,3567	63,3564	0,0002673
17	60,9657	60,9654	0,0002434
18	58,7826	58,7824	0,0002226
19	56,7774	56,7772	0,0002045
20	54,9243	54,9241	0,0001885
21	53,2039	53,2037	0,0001744
22	51,5986	51,5984	0,0001618
23	50,0957	50,0955	0,0001505
24	48,6823	48,6821	0,0001403
25	47,3499	47,3498	0,0001311
26	46,0889	46,0888	0,0001227
27	44,8935	44,8933	0,0001151
28	43,7561	43,7560	0,0001081
29	42,6729	42,6728	0,0001017
30	41,6378	41,6377	0,00009578
31	40,6482	40,6481	0,00009032
32	39,6992	39,6992	0,00008526
33	38,7889	38,7888	0,00008055
34	37,9136	37,9136	0,00007617
35	37,0717	37,0716	0,00007209
36	36,2604	36,2603	0,00006826
37	35,4783	35,4782	0,00006468
38	34,7234	34,7233	0,00006131
39	33,9944	33,9944	0,00005815
40	33,2899	33,2899	0,00005516
41	32,6089	32,6089	0,00005235
42	31,9503	31,9502	0,00004968
43	31,3131	31,3130	0,00004717
44	30,6966	30,6966	0,00004478
45	30,1001	30,1001	0,00004252
46	29,5230	29,5229	0,00004037
47	28,9647	28,9646	0,00003834
48	28,4247	28,4247	0,00003640
49	27,9027	27,9026	0,00003455
50	27,3982	27,3982	0,00003280
51	26,9109	26,9109	0,00003113
52	26,4406	26,4406	0,00002953
53	25,9869	25,9868	0,00002802
54	25,5495	25,5495	0,00002657
55	25,1283	25,1283	0,00002520
56	24,7229	24,7229	0,00002388
57	24,3332	24,3332	0,00002263
58	23,9589	23,9588	0,00002144
59	23,5996	23,5996	0,00002031
60	23,2553	23,2553	0,00001922
61	22,9255	22,9255	0,00001820

Çizelge 6.4. (devam) Alümina tabakasının iki yüzeyinin sıcaklıkları ile aralarındaki sıcaklık farkının zamanla değişimi zamana bağlı sıcaklık değerleri.

62	22,6100	22,6100	0,00001722
63	22,3085	22,3085	0,00001629
64	22,0207	22,0207	0,00001540
65	21,7461	21,7461	0,00001456
66	21,4845	21,4845	0,00001376
67	21,2355	21,2355	0,00001300
68	20,9987	20,9986	0,00001228
69	20,7736	20,7736	0,00001160
70	20,5599	20,5599	0,00001095
71	20,3572	20,3572	0,00001033
72	20,1651	20,1651	0,00000975
73	19,9831	19,9831	0,00000920
74	19,8108	19,8108	0,00000868
75	19,6478	19,6478	0,00000819
76	19,4937	19,4937	0,00000772
77	19,3481	19,3481	0,00000728
78	19,2105	19,2105	0,00000687
79	19,0807	19,0807	0,00000647
80	18,9582	18,9582	0,00000610
81	18,8426	18,8426	0,00000575
82	18,7337	18,7337	0,00000542
83	18,6309	18,6309	0,00000511
84	18,5342	18,5341	0,00000481
85	18,4430	18,4430	0,00000453
86	18,3571	18,3571	0,00000427
87	18,2762	18,2762	0,00000402
88	18,2001	18,2001	0,00000379
89	18,1284	18,1284	0,00000357
90	18,0610	18,0610	0,00000336
91	17,9975	17,9975	0,00000317
92	17,9378	17,9378	0,00000298
93	17,8817	17,8817	0,00000281
94	17,8288	17,8288	0,00000265
95	17,7791	17,7791	0,00000249
96	17,7324	17,7324	0,00000235
97	17,6885	17,6885	0,00000221
98	17,6471	17,6471	0,00000208
99	17,6083	17,6083	0,00000196
100	17,5717	17,5717	0,00000185

Alümina tabakasından suya aktarılan ısı akısının zamanla değişimi grafiği Şekil 6.11.'de sunulmuştur.



Şekil 6.11. Alümina tabakasından suya aktarılan ısı akısının zamanla değişimi grafiği.

Şekil 6.11. incelendiğinde ısı akısının prosesin başlangıç aşamasında yüksek olduğu daha sonra azaldığı gözlenmektedir. Isı akısının değişimi sayısal olarak Çizelge 6.5.'de sunulmuştur.

Diğer değerler

Newton Yöntemi kullanılarak elde edilen ilk pozitif kök hesaplamalarda kullanılmış olup oksit kalınlığı ile h_0 zamana göre değişimi, hesaplanan kök değerleri ve ısı akısı Çizelge 6.5.'de sunulmuştur.

Çizelge 6.5. Bulunan diğer değerler çizelgesi

t (s)	h_0 (W/m^2 K)	X_{0ksit} (m)	Kök λ	q (W/m^2)
1	10081,56185	2,16901E-08	0,346753217	2,529847
2	11918,24454	2,17381E-08	0,367598543	2,574103
3	14062,39667	2,17861E-08	0,388163071	2,532432
4	16021,17526	2,18341E-08	0,404197225	2,358667
5	16986,75704	2,18821E-08	0,411309262	2,063171
6	16697,43514	2,19302E-08	0,409227971	1,730026
7	15764,96134	2,19782E-08	0,40222778	1,437587
8	14727,09371	2,20263E-08	0,393866395	1,20482
9	13737,82663	2,20743E-08	0,385271209	1,022178

Çizelge 6.5. (devam) Bulunan diğer değerler çizelgesi

10	12843,71388	2,21224E-08	0,37691307	0,878014
11	12049,97326	2,21705E-08	0,368968619	0,762795
12	11349,56222	2,22186E-08	0,361503297	0,669417
13	10731,13444	2,22667E-08	0,354521034	0,592698
14	10183,71336	2,23148E-08	0,348005975	0,528858
15	9697,056672	2,2363E-08	0,341927522	0,475112
16	9262,637162	2,24111E-08	0,336255464	0,429383
17	8872,988675	2,24593E-08	0,330955913	0,390105
18	8522,101337	2,25075E-08	0,326000178	0,356073
19	8204,703441	2,25556E-08	0,321358193	0,32636
20	7916,619282	2,26038E-08	0,317006186	0,30023
21	7654,090365	2,2652E-08	0,312918862	0,277107
22	7414,197948	2,27003E-08	0,309077491	0,25652
23	7194,201539	2,27485E-08	0,305460959	0,238096
24	6992,040013	2,27967E-08	0,302054889	0,221523
25	6805,662818	2,2845E-08	0,298841521	0,20655
26	6633,599257	2,28932E-08	0,295810011	0,192963
27	6474,277259	2,29415E-08	0,29294526	0,180589
28	6326,635111	2,29898E-08	0,290239159	0,169276
29	6189,444678	2,30381E-08	0,287678808	0,1589
30	6061,926091	2,30864E-08	0,285258086	0,149352
31	5943,109982	2,31347E-08	0,282966026	0,140543
32	5832,407235	2,31831E-08	0,280797826	0,132391
33	5729,051844	2,32314E-08	0,278744306	0,124829
34	5632,581003	2,32798E-08	0,276801433	0,117797
35	5542,392502	2,33281E-08	0,274961686	0,111245
36	5458,106916	2,33765E-08	0,273221427	0,105125
37	5379,253272	2,34249E-08	0,271574605	0,099399
38	5305,509872	2,34733E-08	0,270017786	0,094031
39	5236,507636	2,35217E-08	0,268546126	0,088991
40	5171,968965	2,35702E-08	0,267156346	0,084251
41	5111,60063	2,36186E-08	0,265844508	0,079786
42	5055,161908	2,3667E-08	0,264607513	0,075576
43	5002,414153	2,37155E-08	0,26344205	0,0716
44	4953,148446	2,3764E-08	0,262345225	0,067841
45	4907,16496	2,38125E-08	0,261314139	0,064284
46	4864,281636	2,3861E-08	0,260346099	0,060915
47	4824,326562	2,39095E-08	0,25943847	0,057721
48	4787,139527	2,3958E-08	0,258588731	0,054691
49	4752,569153	2,40065E-08	0,257794418	0,051816
50	4720,472461	2,40551E-08	0,257053139	0,049084
51	4690,713538	2,41036E-08	0,256362547	0,046489
52	4663,162834	2,41522E-08	0,255720338	0,044023
53	4637,696388	2,42008E-08	0,255124247	0,041678
54	4614,195246	2,42493E-08	0,254572038	0,039449
55	4592,545002	2,4298E-08	0,254061506	0,037329
56	4572,635415	2,43466E-08	0,253590475	0,035314
57	4554,360149	2,43952E-08	0,253156798	0,033398
58	4537,616581	2,44438E-08	0,25275836	0,031577
59	4522,3057	2,44925E-08	0,252393082	0,029845

Çizelge 6.5. (devam) Bulunan diğer değerler çizelgesi

60	4508,332044	2,45411E-08	0,252058926	0,028201
61	4495,603707	2,45898E-08	0,251753897	0,026639
62	4484,032372	2,46385E-08	0,251476054	0,025155
63	4473,533372	2,46872E-08	0,251223511	0,023748
64	4464,025758	2,47359E-08	0,250994445	0,022412
65	4455,432374	2,47846E-08	0,250787104	0,021146
66	4447,679924	2,48333E-08	0,250599805	0,019946
67	4440,699024	2,48821E-08	0,250430945	0,018808
68	4434,424228	2,49308E-08	0,250279002	0,017732
69	4428,794039	2,49796E-08	0,250142537	0,016712
70	4423,750884	2,50284E-08	0,250020194	0,015748
71	4419,241066	2,50772E-08	0,249910704	0,014836
72	4415,214686	2,5126E-08	0,249812883	0,013975
73	4411,625544	2,51748E-08	0,249725632	0,01316
74	4408,431011	2,52236E-08	0,249647929	0,012391
75	4405,591889	2,52724E-08	0,249578838	0,011665
76	4403,072249	2,53213E-08	0,249517495	0,01098
77	4400,839261	2,53701E-08	0,249463109	0,010333
78	4398,863013	2,5419E-08	0,24941496	0,009724
79	4397,116329	2,54679E-08	0,249372391	0,009149
80	4395,574581	2,55168E-08	0,249334807	0,008607
81	4394,215508	2,55657E-08	0,249301667	0,008097
82	4393,019029	2,56146E-08	0,249272486	0,007616
83	4391,967075	2,56635E-08	0,249246826	0,007163
84	4391,043415	2,57125E-08	0,249224291	0,006737
85	4390,233499	2,57614E-08	0,249204528	0,006335
86	4389,524304	2,58104E-08	0,249187221	0,005957
87	4388,904197	2,58594E-08	0,249172086	0,005601
88	4388,362797	2,59083E-08	0,249158871	0,005266
89	4387,890858	2,59573E-08	0,24914735	0,004951
90	4387,480152	2,60064E-08	0,249137323	0,004655
91	4387,12337	2,60554E-08	0,249128612	0,004376
92	4386,814023	2,61044E-08	0,249121059	0,004114
93	4386,546359	2,61535E-08	0,249114523	0,003867
94	4386,315283	2,62025E-08	0,24910888	0,003635
95	4386,116289	2,62516E-08	0,24910402	0,003417
96	4385,945391	2,63007E-08	0,249099847	0,003212
97	4385,799073	2,63498E-08	0,249096273	0,003019
98	4385,674228	2,63989E-08	0,249093224	0,002838
99	4385,568122	2,6448E-08	0,249090632	0,002668
100	4385,478342	2,64971E-08	0,249088439	0,002507

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Yapılan bu tezde püskürtme soğutma etkisi altında oksidasyon oluşumunun ısı transferi üzerindeki etkileri incelenmiştir. Bu inceleme yapılırken malzeme ve üzerinde oluşan oksidasyon iki ayrı katman olarak düşünülmüş ve oksidasyonun ısı transferi üzerine etkileri bu çalışmada geliştirilen katmanlı ısı difüzyon problemlerine yönelik oluşturulan model ile analiz edilmiştir.

Değişkenlere ayırma yöntemi kullanarak çok katmanlı sistemlerin ısı iletimi problemlerinin çözümüne yönelik analitik bir matematiksel model oluşturulmuş ve Mathematica programında kodu hazırlanmıştır. Hazırlanan kod kullanılarak literatürde farklı analitik yöntem ile yapılan iki çalışmanın sonuçları kıyaslanarak doğrulanmıştır. Doğrulamada ilk olarak her iki dış yüzeyinde konveksiyonla ısı transferi olan iki katmanlı duvar problemi ele alınmıştır. Kıyaslamada hazırlanan kodla elde edilen sonuçların literatürdeki çalışmanın sonuçlarıyla tam uyum içerisinde olduğu belirlenerek kod doğrulanmıştır.

Söz konusu kod kullanılarak yine literatürde yer alan püskürtmeli soğutma sistemlerinde oksidasyon oluşumunun ısı transferi üzerindeki etkilerinin ortaya konulduğu bir çalışmadaki parametreler kullanılarak incelemeler yapılmıştır. Yapılan incelemede kullanılan çelik üzerinde oluşan oksidasyonun ısı transferi üzerine etkileri incelenmiş ve literatürdeki çalışma ile uyumlu olduğu değerlendirilmiştir. Literatürdeki çalışmalarda deneysel ve nümerik yöntemler kullanılmış, deneysel yöntemle bulunan sonuçlarda Leidenfrost etkisi gözlemlenmiştir. Teorik olarak soğutma esnasında suyun kendi buharlaşma sıcaklığından daha yüksek sıcaklığa sahip bir yüzeye çarpması ve bu esnada buharlaşması, buharın da ilave bir yalıtım sağlaması Leidenfrost etkisi olarak tanımlanmaktadır. Analitik yöntemle yapılan incelemede Leidenfrost etkisi ihmal edilmiş, sadece Leidenfrost etkisinden ziyade oksit tabakasının çeliğin soğutulmasına etkisi araştırılmıştır. Deneysel ve analitik inceleme sonuçlarında, yüksek sıcaklıklarda belirgin olarak ortaya çıkan sıcaklık dağılımındaki farklılıkların nedeninin Leidenfrost etkisi yani oksit tabakasının haricinde buhar filminin oluşturduğu yalıtım etkisi olabileceği sonucuna varılmıştır. Diğer taraftan Leidenfrost etkisi altında olan yüksek sıcaklıkların dışında kalan daha düşük sıcaklık bölgelerinde analitik ve deneysel sonuçlarda tam bir uyum olduğu gözlemlenmiştir.

Yapılan bu araştırma neticesinde oksit tabakası temizlenmiş yüzeyde sıcaklık profilinin daha hızlı bir şekilde düştüğü hesaplanmıştır. Deneysel verilerdeki karakteristik soğuma grafiğine benzer bir profil elde edilmiştir. Burada deneysel verilerden farklı olarak soğutma prosesinin tamamı boyunca Leidenfrost etkisinin ihmal edilmesinden dolayı aynı oranda bir hızlı soğuma veya oksit tabakası boyunca geç soğuma olmaktadır.

Çeliğin deneysel çözümünde deneysel ve analitik sonuçlar birbiri ile uyumlu bir profil izlemektedir. Ancak t=550 s öncesi soğutma döneminde deneysel verilerde bir yalıtım etkisi gözlenmektedir. Bunun teorik olarak nedeni soğutma esnasında suyun kendi buharlaşma sıcaklığından daha yüksek sıcaklığa sahip bir yüzeye çarpması ve bu esnada buharlaşması, buharın da ilave bir yalıtım sağlaması olabileceği değerlendirilmektedir.

Analitik sonuçlarda deneysel sonuçlara göre sapmalar olsa dahi, proses bütüncül olarak incelendiğinde zaman ve sıcaklık profili olarak uyumlu sonuçlar elde edilmiştir.

Su püskürtme soğutmada oksit tabakasının etkilerinin araştırılması konusunda alüminyum ve onun oksidi olan Aluminanın değişik kalınlıklarda etkisi incelenmiştir. 1 mm ile 10 mm oksit tabakası oluşması durumunda soğutma prosesine etkisi 0-400 s arasında belirgin olarak görülmekte ve ilerleyen aşamada farkın giderek azaldığı gözlenmiştir.

Oksit tabaka kalınlığının püskürtme soğutma prosesindeki yalıtım etkisini belirlemek üzere, deneysel ve nümerik çalışmalarda sabit oksidasyon kalınlıklarının soğuma prosesine etkileri incelenmiştir. Yapılan bu çalışmada sıcaklığa bağlı olarak değişen oksidasyon kalınlığının etkisi de sürece dahil edilmiş, sıcaklık ve zamana bağlı değişen oksidasyon kalınlığının yalıtım etkisi incelenmiştir. Yapılan inceleme neticesinde oksit tabakasından dolayı oksit yüzeyinde sıcaklığın hızlı düştüğü oksit tabakasının altındaki çelik yüzeyindeki sıcaklığın oksit tabakasının izolasyon etkisine bağlı olarak daha yavaş düştüğü gözlenmektedir.

Farklı malzemelerin de su püskürtme soğutma prosesleri esnasında oluşan oksidasyonlarının ısıl etkilerinin bu tezde oluşturulan analitik modele dayalı yazılan kod ile kolayca hesaplanabileceği değerlendirilmektedir.

Böylelikle, yapılan bu çalışmada geliştirilmiş olan analitik yaklaşım ile oluşturulan kod kullanılarak farklı malzemelerin oksit tabakalarının ısı transferi üzerine etkilerinin incelenmesinde deneysel yöntemlere göre zaman ve maliyet açısından avantaj sağlayacağı tespit edilmiştir.

Ayrıca söz konusu kod kullanılarak malzemelerin üzerinde kaplamaların ısıl etkilerinin hesaplanması gibi katmanlı sistemlerin farklı uygulamalarında da kullanılabileceği değerlendirilmiştir.

KAYNAKLAR

Behnamian, Y., Mostafaei, A., Kohandehghan, A., Amirkhiz, B. S., Serate, D., Zheng, W., Luo, J. L. (2016). Characterization of oxide scales grown on alloy 310S stainless steel after long term exposure to supercritical water at 500 °C. *Materials Characterization*, *120*, 273–284.

Bond, D. E. M., Clark, W. W., and Kimber, M. (2013). Configuring wall layers for improved insulation performance. *Applied Energy*, *112*, 235–245.

Cengel, Y. A., and Ghajar, A. J. (2014). *Heat and Mass Transfer Fundamentals and Applications* (5. Edition). New York: McGraw-Hill Science Engineering Math.

Chabičovský, M., Hnízdil, M., Tseng, a. a., and Raudenský, M. (2015). Effects of oxide layer on Leidenfrost temperature during spray cooling of steel at high temperatures. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, *88*, 236–246.

Chapra, S. C., Canale, R. P., Heperkan, H., and Kesgin, U. (2003). *Yazılım ve Programlama Uygulamalarıyla Mühendisler İçin Sayısal Yöntemler*. İstanbul: Literatür Yayıncılık.

Chen, T. C., Liu, C. C., Jang, H. Y., and Tuan, P. C. (2007). Inverse estimation of heat flux and temperature in multi-layer gun barrel. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, *50*(11–12), 2060–2068.

Chow, L. C., Sehmbey, M. S., and Pais, M. R. (2013). High Heat Flux Spray Cooling. *Annual Review of Heat Transfer*, *8*(8), 291–318.

Dias, C. J. (2016). Transient heat diffusion in multilayered materials with thermal contact resistance. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, *97*, 1001–1009.

Feng, X., King, C., and Narumanchi, S. (2016). General multilayer heat transfer model for optical-based thermal characterization techniques. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, *93*, 695–706.

Ferraiuolo, M., and Manca, O. (2012). Heat transfer in a multi-layered thermal protection system under aerodynamic heating. *International Journal of Thermal Sciences*, *53*, 56–70.

Fredman, T. P. (2003). An analytical solution method for composite layer diffusion problems with an application in metallurgy. *Heat and Mass Transfer/Waerme- und Stoffuebertragung*, *39*(4), 285–295.

Glassman, B. (2005). *Spray cooling for land, sea, air and space based applications, a fluid management system for multiple nozzle spray cooling and a guide to high heat flux heater design*.

Gori, F., De Stefanis, M., Worek, W. M., and Minkowycz, W. J. (2008). Transient thermal analysis of Vega launcher structures. *Applied Thermal Engineering*, *28*(17–18), 2159–2166.

Hahn, W. D., and Özışık, M. N. (2013). *Heat Conduction* (3. Edition), New Jersey; John Wiley & Sons, Inc.

Hardin, R. A., Liu, K., Kapoor, A., and Beckermann, C. (2003). A transient simulation and dynamic spray cooling control model for continuous steel casting. *Metallurgical and Materials Transactions B: Process Metallurgy and Materials Processing Science*, *34*(3), 297–306.

Incropera, F. P., DeWitt, D. P., Bergman, T. L., and Lavine, A. S. (2007). Fundamentals of Heat and Mass Transfer 6th Edition. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer,* Jeferson City; John Wiley & Sons, Inc..

Joseph, J., Agrawal, G., Agarwal, D. K., Pisharady, J. C., and Sunil Kumar, S. (2017). Effect of insulation thickness on pressure evolution and thermal stratification in a cryogenic tank. Içinde *Applied Thermal Engineering*.

Kakaç., S., Yener, Y., and Naveira-Cotta, C. P. (2018). *Heat Conduction,* Fifth Edition. Chapman and Hall/CRC.

Karabulut, K., and Caner, M. (2017). *Investigation of the Effect of Insulation Thickness on Energy Saving by Using Thermography Investigation of the Effect of Insulation Thickness on Energy Saving by Using Thermography*.

Kaynaklı, Ö., and Kaynaklı, F. (2016). Determination Of Optimum Thermal Insulation Thicknesses For External Walls Considering The Heating, Cooling And Annual Energy Requirements. *Uludağ University Journal of The Faculty of Engineering*, *21*(1), 229.

Korbutowicz, R., Zakrzewski, A., Rac-Rumijowska, O., Stafiniak, A., & Vincze, A. (2017). Oxidation rates of aluminium nitride thin films: effect of composition of the atmosphere. *Journal of Materials Science: Materials in Electronics, 28*(18), 13937–13949.

Larson, K. B., and Koyama, K. (1968). Measurement by the flash method of thermal diffusivity, heart capacity, and thermal conductivity in two-layer composite samples. *Journal of Applied Physics*, *39*(9), 4408–4416.

Lu, X., Tervola, P., and Viljanen, M. (2005). An efficient analytical solution to transient heat conduction in a one-dimensional hollow composite cylinder. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, *38*(47), 10145–10155.

Michael., K. (2003). *New Power Technologies Clear Path to Tactical Directed Energy Weapons*.

Monte, F. De. (2000). Transient heat conduction in one-dimensional composite slab . A natural analytic approach. Içinde *International Journal of Heat and Mass Transfer*.

Nakamura, T., and Fujii, K. (2006). Probabilistic transient thermal analysis of an atmospheric reentry vehicle structure. *Aerospace Science and Technology*, *10*(4), 346–354.

Pais, M. R., Chang, M. J., Morgan, M. J., and Chow, L. C. (1994). Spray cooling of a high power laser diode. *SAE Technical Papers*.

Parsons, K., Reichanadter, T., Vicksman, A., and Segur, H. (2016). Explicit Solution for Cylindrical Heat Conduction. *American Journal of Undergraduate Research www.ajuronline.org*, *13*(2), 105–123.

Pirtini Çetingül, M., and Herman, C. (2010). A heat transfer model of skin tissue for the detection of lesions: Sensitivity analysis. *Physics in Medicine and Biology*, *55*(19), 5933–5951. https://doi.org/10.1088/0031-9155/55/19/020

Raudenský, M., Chabičovský, M., and Hrabovský, J. (2014). *Impact of oxide scale on heat treatment of steels*. METAL 2014 - 23rd International Conference on Metallurgy and Materials, Conference Proceedings, 553–558.

Sharma, R. K., Bash, C. E., and Patel, C. D. (2004). *Experimental investigation of heat transfer characteristics of inkjet assisted spray cooling*. Proceedings of the ASME Heat Transfer/Fluids Engineering Summer Conference 2004, HT/FED 2004.

Takeda, M., Onishi, T., Nakakubo, S., and Fujimoto, S. (2009). Physical properties of iron-oxide scales on Si-containing steels at high temperature. *Materials Transactions,* 50(9), 2242–2246.

Viscorova, R., Scholz, R., Spitzer, K. H., and Wendelstorf, J. (2006). Spray water cooling heat transfer under oxide scale formation conditions. *WIT Transactions on Engineering Sciences*, 53, 163–172.

Wang, H., Dai, W., and Hewavitharana, L. G. (2008). A finite difference method for studying thermal deformation in a double-layered thin film with imperfect interfacial contact exposed to ultrashort pulsed lasers. *International Journal of Thermal Sciences, 47(1)*, 7–24.

Wendelstorf, R., Spitzer, K. H., & Wendelstorf, J. (2008). Effect of oxide layers on spray water cooling heat transfer at high surface temperatures. I*nternational Journal of Heat and Mass Transfer, 51(19–20)*, 4892–4901.

Yang, Y. C., Lee, H. L., Hsu, J. C., and Chu, S. S. (2008). Thermal stresses in multilayer gun barrel with interlayer thermal contact resistance. *Journal of Thermal Stresses, 31(7),* 624–637.

Ying, L., Gao, T., Dai, M., Yang, Y., and Hu, P. (2017). Experimental investigation of temperature-dependent interfacial heat transfer mechanism with spray quenching for 22MnB5 steel. *Applied Thermal Engineering, 121*, 48–66.

Zhou, L., Bai, M., Lü, J., and Cui, W. (2010). Theoretical solution of transient heat conduction problem in one-dimensional double-layer composite medium. *Journal of Central South University of Technology, 17(6),* 1403–1408.

EKLER

EK-1. Kartezyen Koordinatlar İçin Çözüm Algoritması

■ Steady State Cozum

Katman Sayisi

```
In[1]:= n = 2;
```

Genel cozum denklemi

```
In[2]:= Table[T_ssi[x_] = p_i x + q_i, {i, 1, n}];
        sabitler = Table[{p_i, q_i}, {i, 1, n}] // Flatten;
        Table[BC_i = -k_i T_ssi'[x] + h_0 T_ssi[x] == h_0 T_A /. x → X_(i-1), {i, 1}];
        Table[BC_(2 i) = k_i T_ssi'[x] + h_2 T_ssi[x] == h_2 T_B /. x → X_i, {i, n, n}];
        Table[BC_(2 i-2) = T_ssi-1[x] - T_ssi[x] == 0 /. x → X_(i-1), {i, 2, n}];
        Table[BC_(2 i-1) = (k_(i-1) T_ssi-1'[x] - k_i T_ssi'[x]) == 0 /. x → X_(i-1), {i, 2, n}];
        denklem = Table[BC_i, {i, 1, 2 n}] // Flatten;
        cozum = Simplify[Solve[denklem, sabitler]]; Table[T_ssi[x] = T_ssi[x] /. cozum, {i, 1, n}];
```

```
In[10]:= R_i_[x_] := R_i[x] = a_(i,m) Sin[λ/Sqrt[α_i] x] + b_(i,m) Cos[λ/Sqrt[α_i] x];

sabitler2 = Table[{a_(i,m), b_(i,m)}, {i, 1, n}] // Flatten
Table[BCR_i = -k_i R_i'[x] + h_0 R_i[x] == 0 /. x → X_0, {i, 1}];
Table[BCR_(2 i) = k_i R_i'[x] + h_2 R_i[x] == 0 /. x → X_i, {i, n, n}];
Table[BCR_(2 i-1) = k_(i-1) R_(i-1)'[x] - k_i R_i'[x] == 0 /. x → X_(i-1), {i, 2, n}];
Table[BCR_(2 i-2) = R_(i-1)[x] - R_i[x] == 0 /. x → X_(i-1), {i, 2, n}];
denklem2 = Table[BCR_i, {i, 1, 2 n}] // Flatten;
Matris := Coefficient[First@#, sabitler2] & /@ denklem2
MatrixForm [Matris]
```

Out[11]= $\{a_{1,m}, b_{1,m}, a_{2,m}, b_{2,m}\}$

Out[18]//MatrixForm=

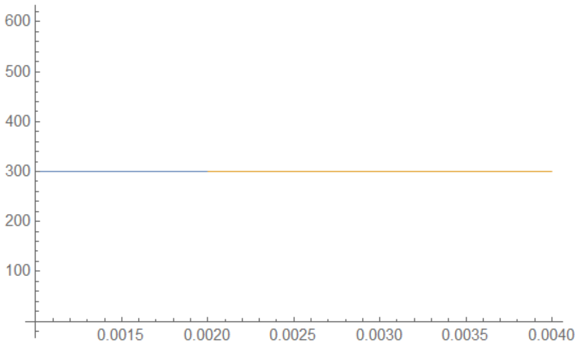
$$\begin{pmatrix}
\mathrm{Sin}\left[\frac{\lambda X_0}{\sqrt{\alpha_1}}\right] h_0 - \frac{\lambda \mathrm{Cos}\left[\frac{\lambda X_0}{\sqrt{\alpha_1}}\right] k_1}{\sqrt{\alpha_1}} & \mathrm{Cos}\left[\frac{\lambda X_0}{\sqrt{\alpha_1}}\right] h_0 + \frac{\lambda \mathrm{Sin}\left[\frac{\lambda X_0}{\sqrt{\alpha_1}}\right] k_1}{\sqrt{\alpha_1}} & 0 & 0 \\
\mathrm{Sin}\left[\frac{\lambda X_1}{\sqrt{\alpha_1}}\right] & \mathrm{Cos}\left[\frac{\lambda X_1}{\sqrt{\alpha_1}}\right] & -\mathrm{Sin}\left[\frac{\lambda X_1}{\sqrt{\alpha_2}}\right] & -\mathrm{Cos}\left[\frac{\lambda X_1}{\sqrt{\alpha_2}}\right] \\
\frac{\lambda \mathrm{Cos}\left[\frac{\lambda X_1}{\sqrt{\alpha_1}}\right] k_1}{\sqrt{\alpha_1}} & -\frac{\lambda \mathrm{Sin}\left[\frac{\lambda X_1}{\sqrt{\alpha_1}}\right] k_1}{\sqrt{\alpha_1}} & -\frac{\lambda \mathrm{Cos}\left[\frac{\lambda X_1}{\sqrt{\alpha_2}}\right] k_2}{\sqrt{\alpha_2}} & \frac{\lambda \mathrm{Sin}\left[\frac{\lambda X_1}{\sqrt{\alpha_2}}\right] k_2}{\sqrt{\alpha_2}} \\
0 & 0 & \mathrm{Sin}\left[\frac{\lambda X_2}{\sqrt{\alpha_2}}\right] h_2 + \frac{\lambda \mathrm{Cos}\left[\frac{\lambda X_2}{\sqrt{\alpha_2}}\right] k_2}{\sqrt{\alpha_2}} & \mathrm{Cos}\left[\frac{\lambda X_2}{\sqrt{\alpha_2}}\right] h_2 - \frac{\lambda \mathrm{Sin}\left[\frac{\lambda X_2}{\sqrt{\alpha_2}}\right] k_2}{\sqrt{\alpha_2}}
\end{pmatrix}$$

```
In[20]:= X_0 = 0.001; X_1 = 2 X_0; X_2 = 4 X_0; (*  x in units of m *);
         h_0 = k_1 / X_0; h_2 = 1 k_1 / X_0 (* h in units W/(m^2·K) *) ;
         k_1 = 15; k_2 = 2 k_1;        (* k in units W/(m·K) *) ;
         Cp_1 = 500;
         ρ_1 = 3000;

In[24]:= α_1 = 4 × 10^-6; α_2 = 1 α_1;  (* α in units m^2/s *) ;

In[25]:= T_A = 300; T_B = 300;  T_01 = 273;  T_02 = 273; T_03 = 273;
         λ_2 = λ_1 Sqrt[α_1/α_2];  λ_3 = λ_1 Sqrt[α_1/α_3];
```

EK-1. (devam) Kartezyen Koordinatlar İçin Çözüm Algoritması

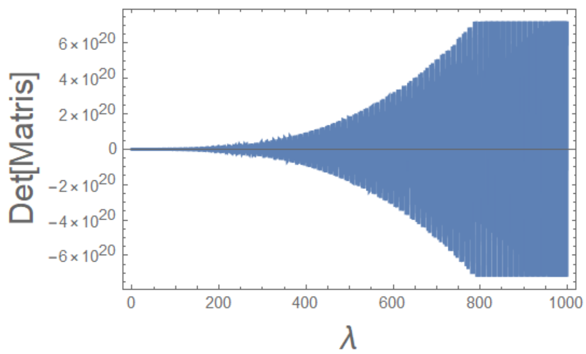
```
In[27]:= ct = ConditionalExpression[#, #2] & @@@ Table[{T_ssi[x] /. cozum, X_{i-1} < x ≤ X_i}, {i, n}];
         Plot[ct, {x, X_0, X_n}, PlotStyle → Thickness[.001]]
```

Out[28]=




```
In[29]:= Plot[Evaluate[Det[Matris] == 0], {λ, 0, 1000}, Frame -> True,
          FrameLabel -> {Style["λ", 20], Style[ "Det[Matris]", 20]}, PlotStyle -> Thick,
          ImageSize -> Medium ]
```

Out[29]=



Rootlarin belirlenmesi ve listelenmesi

```
In[30]:= Clear[root, tahmin, rootlist];
         tahmin = 1; rootlist = {}; nn = 25;
         Do[{root = FindRoot[Evaluate[Det[Matris] == 0], {λ, tahmin}];
            AppendTo[rootlist, root[[1, 2]]];
            tahmin = 2 + root[[1, 2]]}, {i, 1, nn}];
         rootlist
Out[33]= {1.05798, 2.93532, 4.47067, 6.52439, 8.82371, 10.478, 12.6919,
          15.0106, 16.6821, 18.9339, 21.2523, 22.9289, 25.1962, 27.5125, 29.1912, 31.4667,
          33.7811, 35.461, 37.7415, 40.0542, 41.7347, 44.0186, 46.3301, 48.011, 50.2973}
```

EK-1. (devam) Kartezyen Koordinatlar İçin Çözüm Algoritması

Genel cozum denklemlerinin root ve sabitlerle tablo olarak olusturulmasi

```
In[34]:= Table[{λ = rootlist[[m]];
    λ, cozum2[m] = Solve[denklem2, sabitler2] /. a1,m → 1 // Evaluate}, {m, 1, nn}]

Out[34]= {{1.05798, {{b1,1 → -0.0424463, a2,1 → 0.870568, b2,1 → 0.187427}}},
  {2.93532, {{b1,2 → -0.539788, a2,2 → 0.575078, b2,2 → -0.6287}}},
  {4.47067, {{b1,3 → -1.89483, a2,3 → 0.751156, b2,3 → -0.885493}}},
  {6.52439, {{b1,4 → 2.25105, a2,4 → 0.789606, b2,4 → 2.30281}}},
  {8.82371, {{b1,5 → 0.0777945, a2,5 → 0.641767, b2,5 → -0.167848}}},
  {10.478, {{b1,6 → -0.868642, a2,6 → 0.690854, b2,6 → -0.325659}}},
  {12.6919, {{b1,7 → 4.49197, a2,7 → 0.786761, b2,7 → 4.51888}}},
  {15.0106, {{b1,8 → 0.219635, a2,8 → 0.65213, b2,8 → -0.0717827}}},
  {16.6821, {{b1,9 → -0.693559, a2,9 → 0.680964, b2,9 → -0.223862}}},
  {18.9339, {{b1,10 → 6.7347, a2,10 → 0.786187, b2,10 → 6.75278}}},
  {21.2523, {{b1,11 → 0.282796, a2,11 → 0.656372, b2,11 → -0.0302503}}},
  {22.9289, {{b1,12 → -0.621212, a2,12 → 0.676842, b2,12 → -0.180836}}},
  {25.1962, {{b1,13 → 8.97804, a2,13 → 0.785981, b2,13 → 8.99163}}},
  {27.5125, {{b1,14 → 0.318521, a2,14 → 0.658691, b2,14 → -0.00708382}}},
  {29.1912, {{b1,15 → -0.581703, a2,15 → 0.674571, b2,15 → -0.157066}}},
  {31.4667, {{b1,16 → 11.2216, a2,16 → 0.785886, b2,16 → 11.2325}}},
  {33.7811, {{b1,17 → 0.341495, a2,17 → 0.660155, b2,17 → 0.00769329}}},
  {35.461, {{b1,18 → -0.556813, a2,18 → 0.673131, b2,18 → -0.141986}}},
  {37.7415, {{b1,19 → 13.4653, a2,19 → 0.785833, b2,19 → 13.4744}}},
  {40.0542, {{b1,20 → 0.35751, a2,20 → 0.661164, b2,20 → 0.0179396}}},
  {41.7347, {{b1,21 → -0.539696, a2,21 → 0.672135, b2,21 → -0.131566}}},
  {44.0186, {{b1,22 → 15.7091, a2,22 → 0.785802, b2,22 → 15.7169}}},
  {46.3301, {{b1,23 → 0.369312, a2,23 → 0.661902, b2,23 → 0.025462}}},
  {48.011, {{b1,24 → -0.527203, a2,24 → 0.671406, b2,24 → -0.123935}}},
  {50.2973, {{b1,25 → 17.953, a2,25 → 0.785781, b2,25 → 17.9598}}}}
```

```
In[35]:= Table[{λm = rootlist[[m]];
    i, m, λm, a1,m → 1, R[i, m, x] = ai,m N[Sin[λm/Sqrt[αi] * x]] + bi,m N[Cos[λm/Sqrt[αi] * x]] /. cozum2[m] /. a1,m → 1},
   {i, 1, n}, {m, 1, nn}]

Out[35]= {{{1, 1, 1.05798, a1,1 → 1, {-0.0424463 Cos[528.992 x] + Sin[528.992 x]}},
  {1, 2, 2.93532, a1,2 → 1, {-0.539788 Cos[1467.66 x] + Sin[1467.66 x]}},
  {1, 3, 4.47067, a1,3 → 1, {-1.89483 Cos[2235.33 x] + Sin[2235.33 x]}},
  {1, 4, 6.52439, a1,4 → 1, {2.25105 Cos[3262.2 x] + Sin[3262.2 x]}},
  {1, 5, 8.82371, a1,5 → 1, {0.0777945 Cos[4411.85 x] + Sin[4411.85 x]}},
  {1, 6, 10.478, a1,6 → 1, {-0.868642 Cos[5239. x] + Sin[5239. x]}},
  {1, 7, 12.6919, a1,7 → 1, {4.49197 Cos[6345.94 x] + Sin[6345.94 x]}},
  {1, 8, 15.0106, a1,8 → 1, {0.219635 Cos[7505.32 x] + Sin[7505.32 x]}},
  {1, 9, 16.6821, a1,9 → 1, {-0.693559 Cos[8341.05 x] + Sin[8341.05 x]}},
  {1, 10, 18.9339, a1,10 → 1, {6.7347 Cos[9466.95 x] + Sin[9466.95 x]}},
  {1, 11, 21.2523, a1,11 → 1, {0.282796 Cos[10626.1 x] + Sin[10626.1 x]}},
  {1, 12, 22.9289, a1,12 → 1, {-0.621212 Cos[11464.4 x] + Sin[11464.4 x]}},
  {1, 13, 25.1962, a1,13 → 1, {8.97804 Cos[12598.1 x] + Sin[12598.1 x]}},
  {1, 14, 27.5125, a1,14 → 1, {0.318521 Cos[13756.2 x] + Sin[13756.2 x]}},
  {1, 15, 29.1912, a1,15 → 1, {-0.581703 Cos[14595.6 x] + Sin[14595.6 x]}},
  {1, 16, 31.4667, a1,16 → 1, {11.2216 Cos[15733.4 x] + Sin[15733.4 x]}},
  {1, 17, 33.7811, a1,17 → 1, {0.341495 Cos[16890.5 x] + Sin[16890.5 x]}},
  {1, 18, 35.461, a1,18 → 1, {-0.556813 Cos[17730.5 x] + Sin[17730.5 x]}},
```

EK-1. (devam) Kartezyen Koordinatlar İçin Çözüm Algoritması

```
{1, 19, 37.7415, a1,19 → 1, {13.4653 Cos[18870.7 x] + Sin[18870.7 x]}},
{1, 20, 40.0542, a1,20 → 1, {0.35751 Cos[20027.1 x] + Sin[20027.1 x]}},
{1, 21, 41.7347, a1,21 → 1, {-0.539696 Cos[20867.4 x] + Sin[20867.4 x]}},
{1, 22, 44.0186, a1,22 → 1, {15.7091 Cos[22009.3 x] + Sin[22009.3 x]}},
{1, 23, 46.3301, a1,23 → 1, {0.369312 Cos[23165. x] + Sin[23165. x]}},
{1, 24, 48.011, a1,24 → 1, {-0.527203 Cos[24005.5 x] + Sin[24005.5 x]}},
{1, 25, 50.2973, a1,25 → 1, {17.953 Cos[25148.6 x] + Sin[25148.6 x]}}},
{{2, 1, 1.05798, a1,1 → 1, {0.187427 Cos[528.992 x] + 0.870568 Sin[528.992 x]}},
{2, 2, 2.93532, a1,2 → 1, {-0.6287 Cos[1467.66 x] + 0.575078 Sin[1467.66 x]}},
{2, 3, 4.47067, a1,3 → 1, {-0.885493 Cos[2235.33 x] + 0.751156 Sin[2235.33 x]}},
{2, 4, 6.52439, a1,4 → 1, {2.30281 Cos[3262.2 x] + 0.789606 Sin[3262.2 x]}},
{2, 5, 8.82371, a1,5 → 1, {-0.167848 Cos[4411.85 x] + 0.641767 Sin[4411.85 x]}},
{2, 6, 10.478, a1,6 → 1, {-0.325659 Cos[5239. x] + 0.690854 Sin[5239. x]}},
{2, 7, 12.6919, a1,7 → 1, {4.51888 Cos[6345.94 x] + 0.786761 Sin[6345.94 x]}},
{2, 8, 15.0106, a1,8 → 1, {-0.0717827 Cos[7505.32 x] + 0.65213 Sin[7505.32 x]}},
{2, 9, 16.6821, a1,9 → 1, {-0.223862 Cos[8341.05 x] + 0.680964 Sin[8341.05 x]}},
{2, 10, 18.9339, a1,10 → 1, {6.75278 Cos[9466.95 x] + 0.786187 Sin[9466.95 x]}},
{2, 11, 21.2523, a1,11 → 1, {-0.0302503 Cos[10626.1 x] + 0.656372 Sin[10626.1 x]}},
{2, 12, 22.9289, a1,12 → 1, {-0.180836 Cos[11464.4 x] + 0.676842 Sin[11464.4 x]}},
{2, 13, 25.1962, a1,13 → 1, {8.99163 Cos[12598.1 x] + 0.785981 Sin[12598.1 x]}},
{2, 14, 27.5125, a1,14 → 1, {-0.00708382 Cos[13756.2 x] + 0.658691 Sin[13756.2 x]}},
{2, 15, 29.1912, a1,15 → 1, {-0.157066 Cos[14595.6 x] + 0.674571 Sin[14595.6 x]}},
{2, 16, 31.4667, a1,16 → 1, {11.2325 Cos[15733.4 x] + 0.785886 Sin[15733.4 x]}},
{2, 17, 33.7811, a1,17 → 1, {0.00769329 Cos[16890.5 x] + 0.660155 Sin[16890.5 x]}},
{2, 18, 35.461, a1,18 → 1, {-0.141986 Cos[17730.5 x] + 0.673131 Sin[17730.5 x]}},
{2, 19, 37.7415, a1,19 → 1, {13.4744 Cos[18870.7 x] + 0.785833 Sin[18870.7 x]}},
{2, 20, 40.0542, a1,20 → 1, {0.0179396 Cos[20027.1 x] + 0.661164 Sin[20027.1 x]}},
{2, 21, 41.7347, a1,21 → 1, {-0.131566 Cos[20867.4 x] + 0.672135 Sin[20867.4 x]}},
{2, 22, 44.0186, a1,22 → 1, {15.7169 Cos[22009.3 x] + 0.785802 Sin[22009.3 x]}},
{2, 23, 46.3301, a1,23 → 1, {0.025462 Cos[23165. x] + 0.661902 Sin[23165. x]}},
{2, 24, 48.011, a1,24 → 1, {-0.123935 Cos[24005.5 x] + 0.671406 Sin[24005.5 x]}},
{2, 25, 50.2973, a1,25 → 1, {17.9598 Cos[25148.6 x] + 0.785781 Sin[25148.6 x]}}}}
```

D_{im}'nin Bulunması

In[36]:= $DD_m = \text{Table}\left[DD_m = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{\alpha_i}\left(\int_{X_{(i-1)}}^{X_i} ((T_{0_i} - T_{ss_i}[x]))\ (R[i, m, x])\, dx\right)}{\sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{\alpha_i}\left(\int_{X_{(i-1)}}^{X_i} ((R[i, m, x])^2)\, dx\right)}, \{m, 1, nn\}\right]\ //\ N$

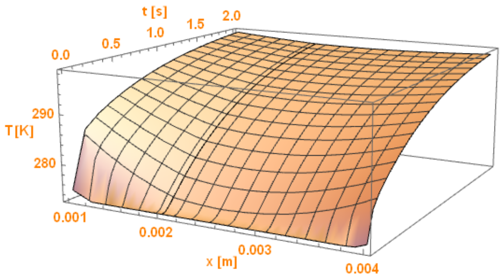
Out[36]= {{-33.3472}, {-0.677422}, {-3.03304}, {-0.00844249}, {1.60076}, {0.25511}, {-0.114953}, {-0.123523}, {-0.418894}, {-0.0000468413}, {0.286747}, {0.0577643}, {-0.0150123}, {-0.038959}, {-0.143314}, $\{-3.73868\times10^{-6}\}$, {0.113269}, {0.0243617}, {-0.00448515}, {-0.0186641}, {-0.0711519}, $\{-7.0021\times10^{-7}\}$, {0.0600526}, {0.0133128}, {-0.0018977}}

In[37]:= $\text{Table}\left[\left\{TT_i[x\_, t\_] = \left(\sum_{m=1}^{nn} \left(DD_m\ \text{Exp}[-\lambda_m^2\ t]\ R[i, m, x]\right)\right)\right\}, \{i, 1, n\}\right]\ //\ N\ //\ \text{Chop};$

EK-1. (devam) Kartezyen Koordinatlar İçin Çözüm Algoritması

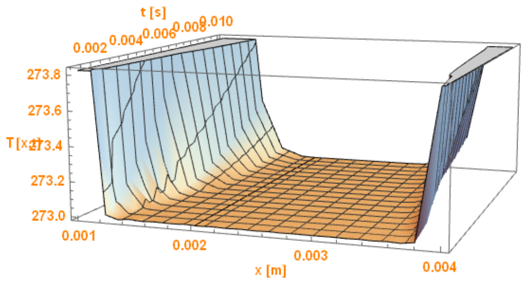
In[38]:=
```
ctt = ConditionalExpression[#, #2] & @@@ Table[{TT_i[x, t] + T_ss_i[x] /. cozum, X_{i-1} < x ≤ X_i}, {i, n}];
Plot3D[ctt, {x, X_0, X_n}, {t, 0.001, 2}, PlotStyle → Thickness[.02], AxesLabel → {"x [m]", "t [s]", "T[K]"},
 PlotStyle → Thick, LabelStyle → Directive[Bold, Orange]]
```

Out[39]=



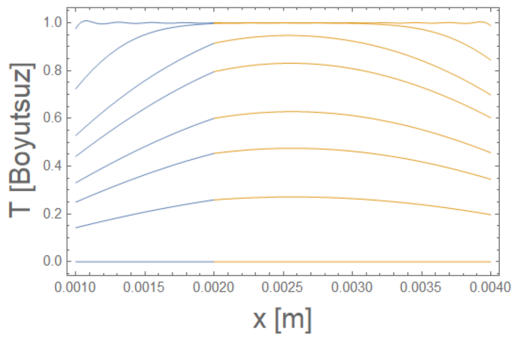
In[40]:=
```
cttt = ConditionalExpression[#, #2] & @@@ Table[{TT_i[x, t] + T_ss_i[x] /. cozum, X_{i-1} < x ≤ X_i}, {i, n}];
Plot3D[cttt, {x, X_0, X_n}, {t, 0.001, 0.01}, PlotStyle → Thickness[.02],
 AxesLabel → {"x [m]", "t [s]", "T[x,t]"}, PlotStyle → Thick, LabelStyle → Directive[Bold, Orange]]
```

Out[41]=



In[42]:=
```
ctttt = ConditionalExpression[#, #2] & @@@
  Table[{1/(T_A - T_01) (T_A - (TT_i[x, {0, 0.025, 0.125, 0.25, 0.5, 0.75, 1.25, 25}] + T_ss_i[x] /. cozum)), X_{i-1} < x ≤ X_i},
   {i, n}];
Plot[ctttt, {x, X_0, X_n}, Frame → True, FrameLabel → {Style["x [m]", 20], Style[ "T [Boyutsuz]", 20]},
 PlotStyle → Thickness[.001]]
```

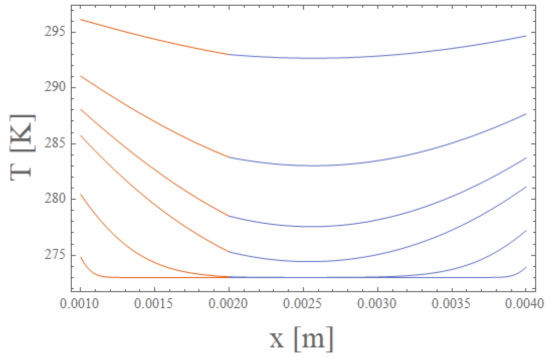
Out[43]=



EK-1. (devam) Kartezyen Koordinatlar İçin Çözüm Algoritması

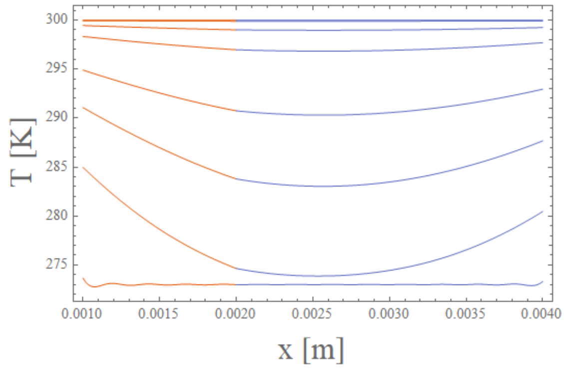
In[44]:=
```
ctttt = ConditionalExpression[#, #2] & @@@
    Table[{TT_i[x, {0.001, 0.025, 0.125, 0.25, 0.5, 1.25}] + T_ssi[x] /. cozum, X_{i-1} < x ≤ X_i}, {i, n}];
Plot[ctttt, {x, X_0, X_n}, PlotTheme → "Scientific", Frame → True,
 FrameLabel → {Style["x  [m]", 20], Style[ "T  [K]",  20]}, PlotStyle → Thickness[.001]]
```

Out[45]=

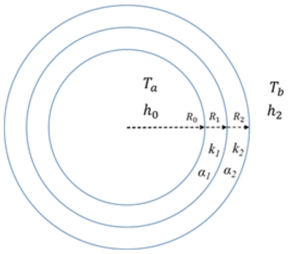


In[47]:=
```
ctttt = ConditionalExpression[#, #2] & @@@
    Table[{TT_i[x, {0, 0.1, 0.5, 1., 2., 3., 5., 100}] + T_ssi[x] /. cozum, X_{i-1} < x ≤ X_i}, {i, n}];
Plot[ctttt, {x, X_0, X_n}, PlotTheme → "Scientific", Frame → True,
 FrameLabel → {Style["x  [m]", 20], Style[ "T  [K]",  20]}, PlotStyle → Thickness[.001]]
```

Out[48]=



EK-2. Silindirik Koordinatlar İçin Çözüm Algoritması



Katman Sayisi

```
n = 2;
```

Genel cozum denklemi

$$\frac{1}{\alpha_i}\frac{\partial T_i(r,t)}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial T_i(r,t)}{\partial r}\right]$$

Superposizyon

$$T_i(r, t) = \bar{T}_i(r, t) + T_{ss\,i}(r)$$

Sürekli Kısmın (Zamandan bagimsiz) Çözümü

$$T_{ss\,i}[r\_] = p_i \,\mathrm{Log}[r] + q_i$$

Iki katman için denklem ve sabitlerin oluşturulması

```
Table[Tssi[r_] = pi Log[r] + qi, {i, 1, n}];
sabitler = Table[{pi, qi}, {i, 1, n}] // Flatten;
```

Sınır şartları oluşturulması

```
Table[BCi = -ki Tssi'[r] + h0 Tssi[r] == h0 TA /. r → Ri-1, {i, 1}];
Table[BC2 i = ki Tssi'[r] + h2 Tssi[r] == h2 TB /. r → Ri, {i, n, n}];
Table[BC2 i-2 = Tssi-1[r] - Tssi[r] == 0 /. r → Ri-1, {i, 2, n}];
Table[BC2 i-1 = (ki-1 Tssi-1'[r] - ki Tssi'[r]) == 0 /. r → Ri-1, {i, 2, n}];
```

Katsayıların bulunması

```
denklem = Table[BCi, {i, 1, 2 n}] // Flatten;
cozum = Simplify[Solve[denklem, sabitler]];
Table[Tssi[r] = Tssi[r] /. cozum, {i, 1, n}];
```

EK-2. (devam) Silindirik Koordinatlar İçin Çözüm Algoritması

Homojen kısım için degişkenlere ayırma

$$\overline{T}_i(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \Re_i(r)\,\Gamma_i(t)$$

Çap'a baglı denklemin çözümü

$$\mathcal{R}_i[r\_] = a_i\,\mathrm{BesselJ}\left[0, \frac{\lambda}{\sqrt{\alpha_i}}\, r\right] + b_i\,\mathrm{BesselY}\left[0, \frac{\lambda}{\sqrt{\alpha_i}}\, r\right]$$

$$\mathcal{R}_{i}\_[r\_] := \mathcal{R}_i[r] = a_{i,m}\,\mathrm{BesselJ}\left[0, \frac{\lambda}{\sqrt{\alpha_i}}\, r\right] + b_{i,m}\,\mathrm{BesselY}\left[0, \frac{\lambda}{\sqrt{\alpha_i}}\, r\right];$$

$$\mathrm{sabitler2} = \mathrm{Table}[\{a_{i,m}, b_{i,m}\}, \{i, 1, n\}]\ //\ \mathrm{Flatten}$$

Çap'a baglı denklem için sınır şartları

$$\mathrm{Table}[\mathrm{BCR}_i = -k_i\,\mathcal{R}_i{}'[r] + h_0\,\mathcal{R}_i[r] == 0\ /.\ r \to R_0, \{i, 1\}];$$
$$\mathrm{Table}[\mathrm{BCR}_{2\,i} = k_i\,\mathcal{R}_i{}'[r] + h_2\,\mathcal{R}_i[r] == 0\ /.\ r \to R_i, \{i, n, n\}];$$
$$\mathrm{Table}[\mathrm{BCR}_{2\,i-1} = k_{i-1}\,\mathcal{R}_{i-1}{}'[r] - k_i\,\mathcal{R}_i{}'[r] == 0\ /.\ r \to R_{i-1}, \{i, 2, n\}];$$
$$\mathrm{Table}[\mathrm{BCR}_{2\,i-2} = \mathcal{R}_{i-1}[r] - \mathcal{R}_i[r] == 0\ /.\ r \to R_{i-1}, \{i, 2, n\}];$$

Çap'a baglı denklemden sabitlerin çekilmesi

$$\mathrm{denklem2} = \mathrm{Table}[\mathrm{BCR}_i, \{i, 1, 2\,n\}]\ //\ \mathrm{Flatten};$$
$$\mathrm{Matris} := \mathrm{Coefficient}[\mathrm{First}@\#, \mathrm{sabitler2}]\ \&\ /@\ \mathrm{denklem2}$$
$$\mathrm{MatrixForm}\ [\mathrm{Matris}]$$

$$\{a_{1,m}, b_{1,m}, a_{2,m}, b_{2,m}\}$$

$$\begin{pmatrix}
\mathrm{BesselJ}\left[0, \frac{\lambda R_0}{\sqrt{\alpha_1}}\right] h_0 + \frac{\lambda\,\mathrm{BesselJ}\left[1, \frac{\lambda R_0}{\sqrt{\alpha_1}}\right] k_1}{\sqrt{\alpha_1}} & \mathrm{BesselY}\left[0, \frac{\lambda R_0}{\sqrt{\alpha_1}}\right] h_0 + \frac{\lambda\,\mathrm{BesselY}\left[1, \frac{\lambda R_0}{\sqrt{\alpha_1}}\right] k_1}{\sqrt{\alpha_1}} & 0 \\
\mathrm{BesselJ}\left[0, \frac{\lambda R_1}{\sqrt{\alpha_1}}\right] & \mathrm{BesselY}\left[0, \frac{\lambda R_1}{\sqrt{\alpha_1}}\right] & -\mathrm{BesselJ}\left[0, \frac{\lambda R_1}{\sqrt{\alpha_2}}\right] \\
-\frac{\lambda\,\mathrm{BesselJ}\left[1, \frac{\lambda R_1}{\sqrt{\alpha_1}}\right] k_1}{\sqrt{\alpha_1}} & -\frac{\lambda\,\mathrm{BesselY}\left[1, \frac{\lambda R_1}{\sqrt{\alpha_1}}\right] k_1}{\sqrt{\alpha_1}} & \frac{\lambda\,\mathrm{BesselJ}\left[1, \frac{\lambda R_1}{\sqrt{\alpha_2}}\right] k_2}{\sqrt{\alpha_2}} \\
0 & 0 & \mathrm{BesselJ}\left[0, \frac{\lambda R_2}{\sqrt{\alpha_2}}\right] h_2 - \frac{\lambda\,\mathrm{BesselJ}[1}{\sqrt{\alpha}}
\end{pmatrix}$$

Sayısal degerler

$$R_0 = 0.001;\ R_1 = 2\,R_0;\ R_2 = 4\,R_0;\ (*\ \ r\ \mathrm{in\ units\ of}\ m\ *);$$
$$h_0 = k_1 / R_0;\ h_2 = 1\ k_1 / R_0\ (*\ h\ \mathrm{in\ units}\ W/(m^2 \cdot K)\ *)\ ;$$
$$k_1 = 10;\ k_2 = 2\,k_1;\qquad (*\ k\ \mathrm{in\ units}\ W/(m \cdot K)\ *)\ ;$$
$$Cp_1 = 500;$$
$$\rho_1 = 3000;$$

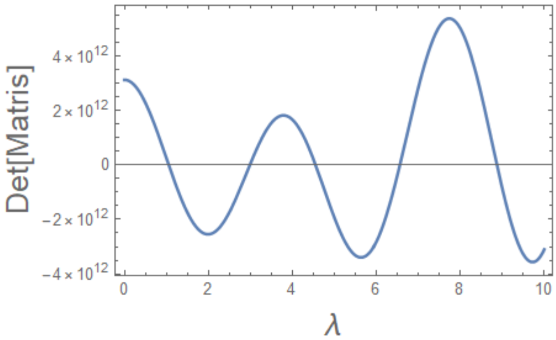
EK-2. (devam) Silindirik Koordinatlar İçin Çözüm Algoritması

```
α1 = 4×10^-6; α2 = 1 α1;  (* α in units m^2/s *) ;

TA = 300; TB = 300; T01 = 273; T02 = 273; T03 = 273;
```

Sürekli Kısmın Çözümün Grafik Gösterimi

Rootlarin belirlenmesi için Grafik Gösterimi

```
Plot[Evaluate[Det[Matris] == 0], {λ, 0, 10}, Frame -> True,
 FrameLabel -> {Style["λ", 20], Style[ "Det[Matris]", 20]}, PlotStyle -> Thick,
 ImageSize -> Medium ]
```



Rootlarin belirlenmesi

```
Clear[root, tahmin, rootlist];
tahmin = 1; rootlist = {}; nn = 25;
Do[{root = FindRoot[Evaluate[Det[Matris] == 0], {λ, tahmin}];
  AppendTo[rootlist, root[[1, 2]]];
  tahmin = 2 + root[[1, 2]]}, {i, 1, nn}];
rootlist

{1.05555, 2.98579, 4.5528, 6.56016, 8.87371, 10.5307, 12.7139,
 15.0448, 16.7169, 18.9492, 21.2776, 22.9544, 25.2079, 27.5325, 29.2113, 31.4762,
 33.7976, 35.4775, 37.7494, 40.0682, 41.7488, 44.0254, 46.3422, 48.0232, 50.3032}
```

Genel cozum denklemlerinin root ve sabitlerle tablo olarak olusturulmasi

```
Table[{λ = rootlist[[m]];
  λ, cozum2[m] = Solve[denklem2, sabitler2] /. a1,m → 1 // Evaluate}, {m, 1, nn}]


Table[{λm = rootlist[[m]];
  i, m, λm, a1,m → 1,
  R[i, m, r] = ai,m N[BesselJ[0, λm/Sqrt[αi] * r]] + bi,m N[BesselY[0, λm/Sqrt[αi] * r]] /. cozum2[m] /. a1,m → 1},
 {i, 1, n}, {m, 1, nn}]

{{{1, 1, 1.05555, a1,1 → 1, {BesselJ[0., 527.773 r] + 0.929929 BesselY[0., 527.773 r]}},
  {1, 2, 2.98579, a1,2 → 1, {BesselJ[0., 1492.89 r] + 5.5439 BesselY[0., 1492.89 r]}},
  {1, 3, 4.5528, a1,3 → 1, {BesselJ[0., 2276.4 r] - 2.13721 BesselY[0., 2276.4 r]}},
  {1, 4, 6.56016, a1,4 → 1, {BesselJ[0., 3280.08 r] - 0.266954 BesselY[0., 3280.08 r]}},
  {1, 5, 8.87371, a1,5 → 1, {BesselJ[0., 4436.86 r] + 1.04092 BesselY[0., 4436.86 r]}},
  {1, 6, 10.5307, a1,6 → 1, {BesselJ[0., 5265.36 r] - 50.1743 BesselY[0., 5265.36 r]}},
  {1, 7, 12.7139, a1,7 → 1, {BesselJ[0., 6356.95 r] - 0.546862 BesselY[0., 6356.95 r]}},
```

EK-2. (devam) Silindirik Koordinatlar İçin Çözüm Algoritması

```
TTi[r_, t_] = (∑_{m=1}^{nn} (DDm Exp[- λm^2 t] ℝ[i, m, r])
```

Ilk şart için DDm nin bulunması

```
DDm =
 Table[DDm = (∑_{i=1}^{n} ki/αi (∫_{R(i-1)}^{Ri} r ((T0i - Tssi[r])) (ℝ[i, m, r]) dr))/ (∑_{i=1}^{n} ki/αi (∫_{R(i-1)}^{Ri} (r (ℝ[i, m, r])^2) dr)),
   {m, 1, nn}] // N
{{-35.0492}, {1.325}, {6.71764}, {-2.2741}, {3.92368}, {0.00784856},
 {-2.18801}, {0.315}, {-0.300203}, {-0.387026}, {1.41317}, {-0.0245201}, {-0.725222},
 {0.121265}, {-0.242394}, {-0.170472}, {0.748413}, {-0.0179221}, {-0.381968},
 {0.0674046}, {-0.167765}, {-0.100207}, {0.477434}, {-0.0130879}, {-0.243474}}
```

Zamana baglı kısım için çözüm

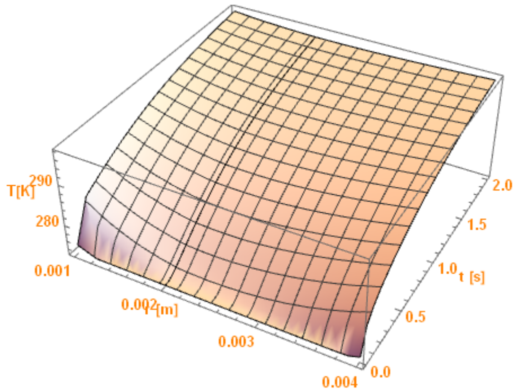
```
Table[{TTi[r_, t_] = (∑_{m=1}^{nn} (DDm Exp[- λm^2 t] ℝ[i, m, r]))}, {i, 1, n}] // N // Chop;
```

Genel çözüm

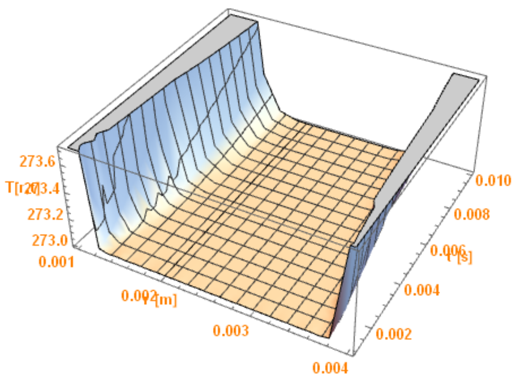
```
TTi[r, t] + Tssi[r] /. cozum
```

Genel çözümün grafik gösterimi

```
toplot1 = ConditionalExpression[#, #2] & @@@ Table[{TTi[r, t] + Tssi[r] /. cozum, Ri-1 < r ≤ Ri}, {i, n}];
Plot3D[toplot1, {r, R0, Rn}, {t, 0.001, 2}, PlotStyle → Thickness[.02],
 AxesLabel → {"r  [m]", "t  [s]", "T[K]"}, PlotStyle → Thick, LabelStyle → Directive[Bold, Orange]]
```

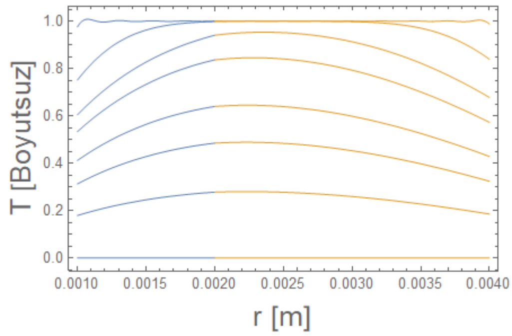



```
toplot2 = ConditionalExpression[#, #2] & @@@ Table[{TTi[r, t] + Tssi[r] /. cozum, Ri-1 < r ≤ Ri}, {i, n}];
Plot3D[toplot2, {r, R0, Rn}, {t, 0.001, 0.01}, PlotStyle → Thickness[.02],
 AxesLabel → {"r  [m]", "t  [s]", "T[r,t]"}, PlotStyle → Thick, LabelStyle → Directive[Bold, Orange]]
```

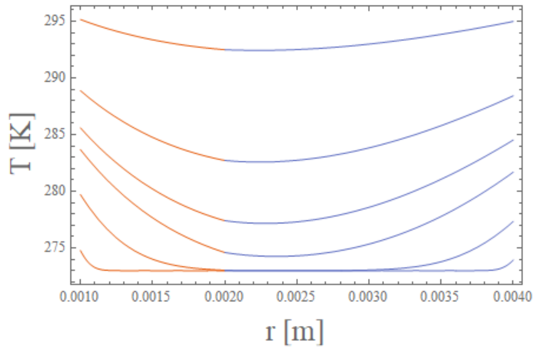


EK-2. (devam) Silindirik Koordinatlar İçin Çözüm Algoritması

```
toplot3 = ConditionalExpression[#, #2] & @@@
   Table[{1/(TA - T01) (TA - (TTi[r, {0, 0.025, 0.125, 0.25, 0.5, 0.75, 1.25, 25}] + Tssi[r] /. cozum)),
     Ri-1 < r ≤ Ri}, {i, n}];
Plot[toplot3, {r, R0, Rn}, Frame → True, FrameLabel → {Style["r [m]", 20], Style[ "T [Boyutsuz]", 20]},
 PlotStyle → Thickness[.001]]
```




```
toplot4 = ConditionalExpression[#, #2] & @@@
   Table[{TTi[r, {0.001, 0.025, 0.125, 0.25, 0.5, 1.25}] + Tssi[r] /. cozum, Ri-1 < r ≤ Ri}, {i, n}];
Plot[toplot4, {r, R0, Rn}, PlotTheme → "Scientific", Frame → True,
 FrameLabel → {Style["r [m]", 20], Style[ "T [K]", 20]}, PlotStyle → Thickness[.001]]
```



EK-3. İki Katmanlı Demir Oksit Tabakalı Zamana Bağlı Isı İletimi Problemi Çözüm Algoritması

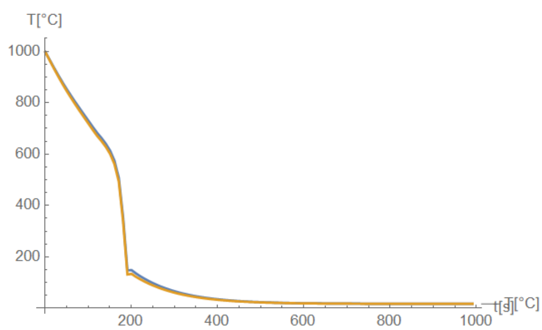
```
In[1]:= X0 = 0.; X2 = 25 × 10^-3 + X0;
        h2 = 0 ; k1 = 0.27; k2 = 23.4;
        Cp1 = 883; Cp2 = 594; ρ1 = 5200; ρ2 = 7550;
        T∞ = 17;
        α1 = k1/(ρ1 Cp1) // N;
        α2 = k2/(ρ2 Cp2) // N; T01 = 1000; T02 = 1000;
        Xoxi0 = 0;

In[5]:= Tss1[x_] := p1 x + q1;
        Tss2[x_] := p2 x + q2;
        BC1 = k1 Tss1'[X0] - h0 (Tss1[X0] - T∞) == 0 /. x → X0;
        BC2 = Tss1[X1] - Tss2[X1] == 0 /. x → X1;
        BC3 = k1 Tss1'[X1] - k2 Tss2'[X1] ==  0 /. x → X1;
        BC4 = -k2 Tss2'[X2] - h2 (Tss2[X2] - TB) == 0 /. x → X2;
        eqns = Flatten[{BC1, BC2, BC3, BC4}];
        var = {p1, q1, p2, q2};
        soln = Simplify[Solve[eqns, var]];
        Tss1[x_] := Tss1[x] = p1 x + q1 /. soln;
        Tss2[x_] := Tss2[x] = p2 x + q2 /. soln;

In[14]:= TOY = 1000;
         TCY = 1000;
         data = {{17, 2325}, {101, 2325}, {201, 2502}, {300, 2898}, {400, 2030}, {501, 879}, {601, 484},
           {700, 437}, {800, 429}, {900, 434}};
         cond = Interpolation[N[data]];
         h0[TOY] = cond[TOY];
         datalist = {};
         datalist1 = {};
         datalist2 = {};
         datalist3 = {};
         datalist4 = {};
         datalist5 = {};
         datalist6 = {};

In[17]:= For[t = 1, t < 1000, t = t + 10,
         h0 := cond[TOY]; Xoxi = Xoxi0 + (0.0254 Exp[0.00022 ((TCY + 273) (20 + Log[t/3600]))] - 7.25]) 10^-3 ;
           X1 = Xoxi + X0;
           R1[x_] := a1 N[Sin[λ/Sqrt[α1] * x]] + b1 N[Cos[λ/Sqrt[α1] * x]];
           R2[x_] := a2 N[Sin[λ/Sqrt[α2] * x]] + b2 N[Cos[λ/Sqrt[α2] * x]];
           BCR1 = Simplify[k1 R1'[x] - h0 (R1[x]) == 0 /. x → 0 /. a1 → 1];
           soln11 = Solve[b1 h0 == (λ k1)/Sqrt[α1], b1];
           BCR2 = Simplify[R1[x] - R2[x] == 0 /. x → X1 /. a1 → 1 /. soln11];
           soln22 = Solve[{Sin[(λ X1)/Sqrt[α1]] + (λ Cos[(λ X1)/Sqrt[α1]] k1)/(h0 Sqrt[α1]) == Sin[(λ X1)/Sqrt[α2]] a2 + Cos[(λ X1)/Sqrt[α2]] b2}, a2];
           BCR3 = Simplify[k1 R1'[x] - k2 R2'[x] == 0 /. x → X1 /. a1 → 1 /. soln11 /. soln22];
```

EK-3. (devam) İki Katmanlı Demir Oksit Tabakalı Zamana Bağlı Isı İletimi Problemi Çözüm Algoritması

```
soln33 =
 Solve[
  {1/(h0 Sqrt[α1] Sqrt[α2]) λ ((Cot[(λ X1)/Sqrt[α2]] Sin[(λ X1)/Sqrt[α1]] - Csc[(λ X1)/Sqrt[α2]] b2) h0 k2 α1 +
       Cos[(λ X1)/Sqrt[α1]] k1 Sqrt[α1] (λ Cot[(λ X1)/Sqrt[α2]] k2 - h0 Sqrt[α2]) + λ Sin[(λ X1)/Sqrt[α1]] k1^2 Sqrt[α2]) == 0}, b2];
BCR4 = Simplify[-k2 R2'[x] - h2 (R2[x]) == 0 /. x → X2 /. a1 → 1 /. soln11 /. soln22 /. soln33];
root = FindRoot[BCR4, {λ, 0.1}];
λ = root[[1, 2]];
R1[x_] := a1 N[Sin[λ/Sqrt[α1] * x]] + b1 N[Cos[λ/Sqrt[α1] * x]] /. a1 → 1 /. soln11 /. soln22 /. soln33;
R2[x_] := a2 N[Sin[λ/Sqrt[α2] * x]] + b2 N[Cos[λ/Sqrt[α2] * x]] /. a1 → 1 /. soln11 /. soln22 /. soln33;
D1 = (∫_X0^X1 ((T01 - (Tss1[x])) (R1[x])) dx) / (∫_X0^X1 ((R1[x])^2) dx);


D2 = (∫_X1^X2 ((T02 - (Tss2[x])) (R2[x])) dx) / (∫_X1^X2 (R2[x])^2 dx);
TCY = Tss1[Xoxi] + D1 * Exp[-λ^2 t] * R1[Xoxi];
TCY = TCY[[1, 1, 1]];
TOY = Tss1[0] + D1 * Exp[-λ^2 t] * R1[0];
TOY = TOY[[1, 1, 1]];
q = h0 (TOY - T∞) 10^-6;
Xoxi0 = Xoxi;
AppendTo[datalist1, {t, TCY}];
AppendTo[datalist2, {t, TOY}];
AppendTo[datalist3, {t, Xoxi}];
AppendTo[datalist4, {t, h0}];
AppendTo[datalist5, {Xoxi, h0}];
AppendTo[datalist6, {t, q}];
AppendTo[datalist, {t, λ, h0, Xoxi, TCY, TOY, q}];
Print[{" t=", t, " λ=", λ, "  h0=", h0, " Xoxi=", Xoxi, " TCY=", TCY, " TOY=", TOY, " q=", q }] //
 TableForm;

ClearAll[λ, BCR1, BCR2, BCR3, BCR4]] // N
```

```
In[19]:= ListLinePlot[{datalist1, datalist2}, AxesLabel → {"t[s]", "T[°C]"}, PlotRange → Full,
          PlotLabels → "T[°C]"]
```

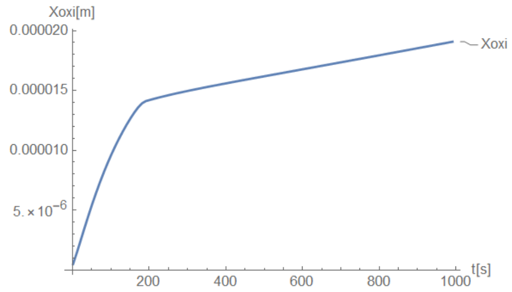
Out[19]=



EK-3. (devam) İki Katmanlı Demir Oksit Tabakalı Zamana Bağlı Isı İletimi Problemi Çözüm Algoritması

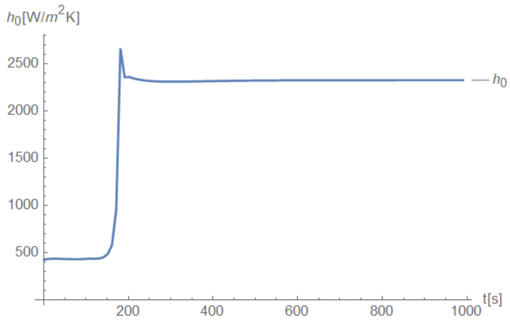
```
In[20]:= ListLinePlot[{datalist3}, AxesLabel → {"t[s]", "Xoxi[m]"}, PlotRange → Full, PlotLabels → "Xoxi"]
```

Out[20]=



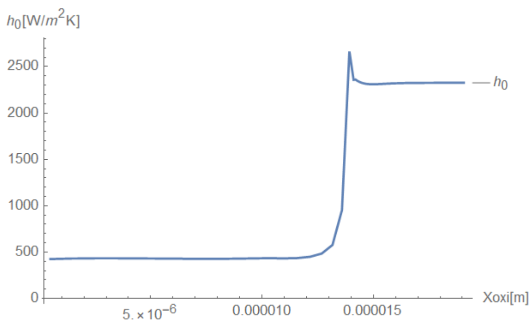

```
In[21]:= ListLinePlot[{datalist4}, AxesLabel → {"t[s]", "h₀[W/m²K]"}, PlotRange → Full,
 PlotLabels → "h₀"]
```

Out[21]=



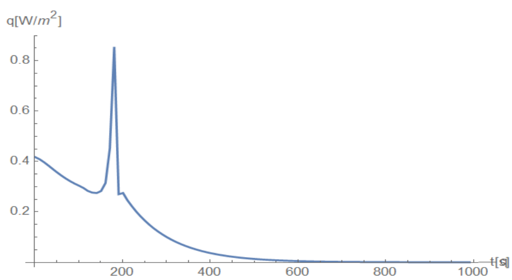

```
In[22]:= ListLinePlot[{datalist5}, AxesLabel → {"Xoxi[m]", "h₀[W/m²K]"}, PlotRange → Full,
 PlotLabels → "h₀"]
```

Out[22]=




```
In[23]:= ListLinePlot[{datalist6}, AxesLabel → {"t[s]", "q[W/m²]"}, PlotRange → Full, PlotLabels → "q"]
```

Out[23]=



EK-4. İki Katmanlı Al Oksit Tabakalı Zamana Bağlı Isı İletimi Problemi Çözüm Algoritması

```
In[1]:= X0 = 0.; X2 = 25 × 10^-3 + X0;
        h2 = 0 ; k1 = 36; k2 = 237;
        Cp1 = 883; Cp2 = 594; ρ1 = 5200; ρ2 = 7550;
        T∞ = 17; α1 = 1.19 × 10^-5;
        α2 = 9.711 × 10^-5; T01 = 300; T02 = 300;
        Xoxi0 = 0; Vs = 30;
        (*QQ=180; k0=7.5 10^-8;
        Xuni=8.314472 ;*)

In[6]:= Tss1[x_] := p1 x + q1;
        Tss2[x_] := p2 x + q2;
        BC1 = k1 Tss1'[X0] - h0 (Tss1[X0] - T∞) == 0 /. x → X0;
        BC2 = Tss1[X1] - Tss2[X1] == 0 /. x → X1;
        BC3 = k1 Tss1'[X1] - k2 Tss2'[X1] == 0 /. x → X1;
        BC4 = -k2 Tss2'[X2] - h2 (Tss2[X2] - TB) == 0 /. x → X2;
        eqns = Flatten[{BC1, BC2, BC3, BC4}];
        var = {p1, q1, p2, q2};
        soln = Simplify[Solve[eqns, var]];
        Tss1[x_] := Tss1[x] = p1 x + q1 /. soln;
        Tss2[x_] := Tss2[x] = p2 x + q2 /. soln;

In[15]:= TOY = 300;
         TAlY = 300;

         data = {{1, 2.16901 × 10^-8}, {612, 5.32958 × 10^-8}, {1210, 8.92394 × 10^-8},
           {1809, 1.3107 × 10^-7}, {2413, 1.64845 × 10^-7}, {3018, 1.9707 × 10^-7}};
         cond = Interpolation[N[data]];
         Xoxi = cond[t];
         datalist = {};
         datalist1 = {};
         datalist2 = {};
         datalist3 = {};
         datalist4 = {};
         datalist5 = {};
         datalist6 = {};

In[18]:= For [t = 1, t < 101, t = t + 2,
         (*h0:=cond[TOY];*)
           (*Xoxi=Xoxi0+(0.0254Exp[0.00022((TAlY+273)(20+Log[t/3600]))-7.25]) 10^-3 ;*)
           Xoxi = cond[t];
           hh =
            190 +
              Tanh[Vs / 8] (140 Vs (1 - Vs (TOY - T∞)/72000) + 3.26 (TOY - T∞)^2 (1 - Tanh[(TOY - T∞)/128]))) // N;
```

EK-4. (devam) İki Katmanlı Al Oksit Tabakalı Zamana Bağlı Isı İletimi Problemi Çözüm Algoritması

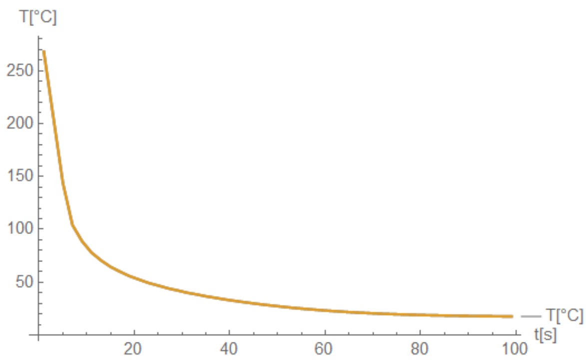
```
h0 = (1/hh + Xoxi/k1)^-1 // N;
X1 = Xoxi + X0;
R1[x_] := a1 N[Sin[λ/Sqrt[α1] * x]] + b1 N[Cos[λ/Sqrt[α1] * x]];
R2[x_] := a2 N[Sin[λ/Sqrt[α2] * x]] + b2 N[Cos[λ/Sqrt[α2] * x]];
BCR1 = Simplify[k1 R1'[x] - h0 (R1[x]) == 0 /. x → 0 /. a1 → 1];
soln11 = Solve[b1 h0 == (λ k1)/Sqrt[α1], b1];
BCR2 = Simplify[R1[x] - R2[x] == 0 /. x → X1 /. a1 → 1 /. soln11];
soln22 = Solve[{Sin[(λ X1)/Sqrt[α1]] + (λ Cos[(λ X1)/Sqrt[α1]] k1)/(h0 Sqrt[α1]) == Sin[(λ X1)/Sqrt[α2]] a2 + Cos[(λ X1)/Sqrt[α2]] b2}, a2];
BCR3 = Simplify[k1 R1'[x] - k2 R2'[x] == 0 /. x → X1 /. a1 → 1 /. soln11 /. soln22];

soln33 =
 Solve[
  {1/(h0 Sqrt[α1] Sqrt[α2]) λ ((Cot[(λ X1)/Sqrt[α2]] Sin[(λ X1)/Sqrt[α1]] - Csc[(λ X1)/Sqrt[α2]] b2) h0 k2 α1 +
      Cos[(λ X1)/Sqrt[α1]] k1 Sqrt[α1] (λ Cot[(λ X1)/Sqrt[α2]] k2 - h0 Sqrt[α2]) + λ Sin[(λ X1)/Sqrt[α1]] k1^2 Sqrt[α2]) == 0}, b2];
BCR4 = Simplify[-k2 R2'[x] - h2 (R2[x]) == 0 /. x → X2 /. a1 → 1 /. soln11 /. soln22 /.
    soln33];
root = FindRoot[BCR4, {λ, 0.5}];
λ = root[[1, 2]];
R1[x_] := a1 N[Sin[λ/Sqrt[α1] * x]] + b1 N[Cos[λ/Sqrt[α1] * x]] /. a1 → 1 /. soln11 /. soln22 /.
   soln33;
R2[x_] := a2 N[Sin[λ/Sqrt[α2] * x]] + b2 N[Cos[λ/Sqrt[α2] * x]] /. a1 → 1 /. soln11 /. soln22 /.
   soln33;
D1 = (∫_{X0}^{X1} ((T01 - (Tss1[x])) (R1[x])) dx) / (∫_{X0}^{X1} ((R1[x])^2) dx);
```

EK-4. (devam) İki Katmanlı Al Oksit Tabakalı Zamana Bağlı Isı İletimi Problemi Çözüm Algoritması

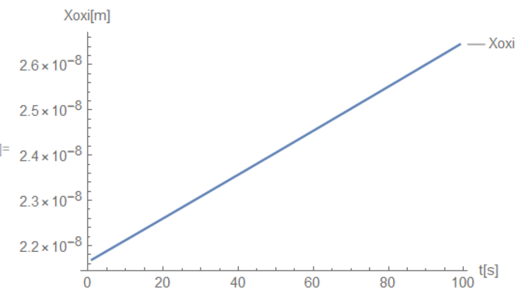
$$D_2 = \left(\int_{x_1}^{x_2} ((T_{02} - (T_{ss2}[x]))\ (R_2[x]))\, dx\right) \Big/ \left(\int_{x_1}^{x_2} (R_2[x])^2\, dx\right);$$

```
T_AlY = T_ss1[Xoxi] + D_1 * Exp[- λ^2 t] * R_1[Xoxi];
T_AlY = T_AlY[[1, 1, 1]];
T_OY = T_ss1[0] + D_1 * Exp[- λ^2 t] * R_1[0];
T_OY = T_OY[[1, 1, 1]];
q = h_0 (T_OY - T_∞) 10^-6;
Xoxi0 = Xoxi;
AppendTo[datalist1, {t, T_AlY}];
AppendTo[datalist2, {t, T_OY}];
AppendTo[datalist3, {t, Xoxi}];
AppendTo[datalist4, {t, h_0}];
AppendTo[datalist5, {Xoxi, h_0}];
AppendTo[datalist6, {t, q}];
AppendTo[datalist, {t, h_0, Xoxi, T_AlY, T_OY, λ, hh, Xoxi, q}];

 Print[{" t=", t, " λ=", λ, "  h_0=", h_0, " Xoxi=", Xoxi, " T_AlY=", T_AlY,
    " T_OY=", T_OY }] // TableForm;
 ClearAll[λ, BCR1, BCR2, BCR3, BCR4]] // N
```

```
In[20]:= ListLinePlot[{datalist1, datalist2}, AxesLabel → {"t[s]", "T[°C]"},
          PlotRange → Full, PlotLabels → "T[°C]"]
```

Out[20]=


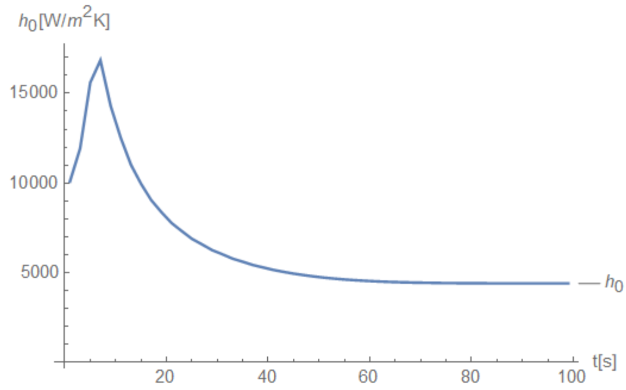

```
In[21]:= ListLinePlot[{datalist3}, AxesLabel → {"t[s]", "Xoxi[m]"}, PlotRange → Full,
          PlotLabels → "Xoxi"]
```

Out[21]=


EK-4. (devam) İki Katmanlı Al Oksit Tabakalı Zamana Bağlı Isı İletimi Problemi Çözüm Algoritması

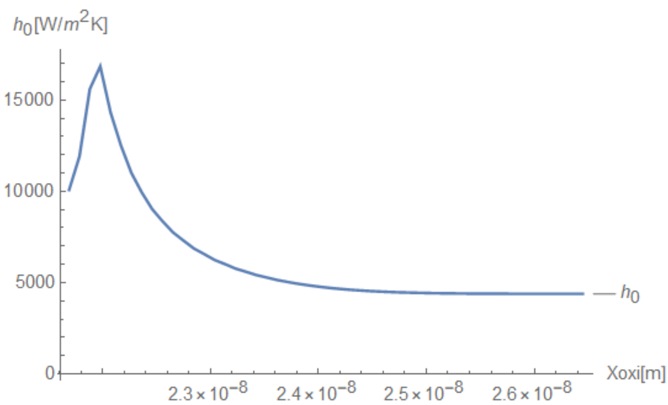
```
In[22]:= ListLinePlot[{datalist4}, AxesLabel → {"t[s]", "h0[W/m2K]"}, PlotRange → Full,
  PlotLabels → "h0"]
```

Out[22]=



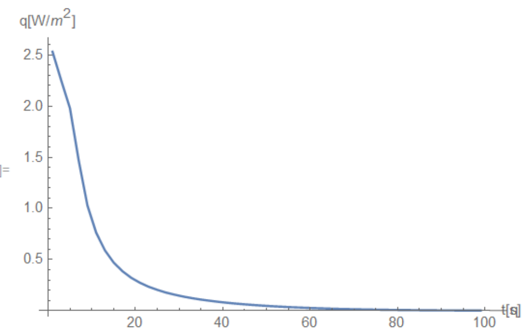

```
In[23]:= ListLinePlot[{datalist5}, AxesLabel → {"Xoxi[m]", "h0[W/m2K]"},
  PlotRange → Full, PlotLabels → "h0"]
```

Out[23]=




```
In[24]:= ListLinePlot[{datalist6}, AxesLabel → {"t[s]", "q[W/m2]"}, PlotRange → Full,
  PlotLabels → "q"]
```

Out[24]=



EK-5. Matematica Algoritmasında Kullanılan Terimler İle Denklemlerde Kullanılan Matematiksel Terimlerin Karşılıkları

Algoritmada Kullanılan Terimler	Denklemlerde Kullanılan Matematiksel Gösterimi	Açıklama
Kartezyen Koordinatlar İçin Çözüm Algoritması		
BC	Homojen Olmayan Sınır Şartı	-
BCR	Homojen Sınır Şartı	-
T_A	T_{∞_1}	İlk katman dış yüzeyden geçen akışkanın sıcaklık değeri
T_B	T_{∞_2}	Son katman dış yüzeyden geçen akışkanın sıcaklık değeri
h_0	h_{in}	Birinci katman dış yüzeyi ile ortam arasındaki taşınım ısı transferi katsayısı
h_2	h_{out}	Son katman dış yüzeyi ile ortam arasındaki taşınım ısı transferi katsayısı
İki Katmanlı Demir Oksit Tabakalı Zamana Bağlı Isı İletimi Problemi Çözüm Algoritması		
BC	Homojen Olmayan Sınır Şartı	-
BCR	Homojen Sınır Şartı	-
T_A	T_{∞_1}	İlk katman dış yüzeyden geçen akışkanın sıcaklık değeri
T_B	T_{∞_2}	Son katman dış yüzeyden geçen akışkanın sıcaklık değeri
h_0	h_{in}	Birinci katman dış yüzeyi ile ortam arasındaki taşınım ısı transferi katsayısı
h_2	h_{out}	Son katman dış yüzeyi ile ortam arasındaki taşınım ısı transferi katsayısı
X_{oxi}	X_{oxit}	Oksidasyon kalınlığı
İki Katmanlı Al Oksit Tabakalı Zamana Bağlı Isı İletimi Problemi Çözüm Algoritması		
BC	Homojen Olmayan Sınır Şartı	-
BCR	Homojen Sınır Şartı	-
T_A	T_{∞_1}	İlk katman dış yüzeyden geçen akışkanın sıcaklık değeri
T_B	T_{∞_2}	Son katman dış yüzeyden geçen akışkanın sıcaklık değeri
h_0	h_{in}	Birinci katman dış yüzeyi ile ortam arasındaki taşınım ısı transferi katsayısı

EK-5. (devam) Matematica Algoritmasında Kullanılan Terimler İle Denklemlerde Kullanılan Matematiksel Terimlerin Karşılıkları

h_2	h_{out}	Son katman dış yüzeyi ile ortam arasındaki taşınım ısı transferi katsayısı
X_{oxi}	X_{oxit}	Oksidasyon kalınlığı
X_{oxi0}	-	
hh	h	Konveksiyonla ısı transfer katsayısı
T_∞	$T_{S.A.}$	Soğutucu akışkan sıcaklığı

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: GEZER, Hande
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 11.02.1976, Kozan
Medeni hali	: Evli
Telefon	: 0 (530) 607 12 20
e-mail	: gezer.hande@gmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi / Makina Mühendisliği	Devam ediyor
Lisans	Karadeniz Teknik Üniversitesi / Makina Mühendisliği	1998
Lise	Ankara Kız Lisesi	1994

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2015-Halen	Kara Kuvvetleri Komutanlığı	Proje Sorumlusu
2011-2015	52 nci Bakım Merkezi Koumtanlığı	Kalite Yönetim Mühendisi
2005-2011	1’inci Ana Bakım Merkez K.lığı	Şartname Hazırlama Uzmanı
2003-2005	MSB Teknik Hizmetler Dairesi Bşk.lığı	NATO Kodlandırma Uzmanı
2001-2002	Tepe Savunma A.Ş.	Proje Lideri
1999-2001	Hande Otomotiv Ltd.Şti	Şirket Sahibi
1998-1999	Karden A.Ş.	Makine Mühendisi

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Yüzme, Kitap Okuma, Gezmek

DİZİN

GAZİ GELECEKTİR...