

T.C.
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLARI EĞİTİMİ
BÖLÜMÜ
MATEMATİK EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ ANAHTAR NOKTA
VE FİKİRLERLE DESTEKLENMİŞ İSPATLARI YAPABİLME
PERFORMANSLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hazırlayan
Özlem KARAOĞLU

Ankara
Haziran, 2010

T.C.
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLARI EĞİTİMİ
BÖLÜMÜ
MATEMATİK EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ ANAHTAR NOKTA
VE FİKİRLERLE DESTEKLENMİŞ İSPATLARI YAPABİLME
PERFORMANSLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Özlem KARAOĞLU

Danışman:Doç. Dr. Ahmet ARIKAN

Ankara
Haziran, 2010

Özlem KARAOĞLU'nun “**MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ ANAHTAR NOKTA VE FİKİRLERLE DESTEKLENMİŞ İSPATLARI YAPABİLME PERFORMANSLARI**” başlıklı tezi, tarihinde jürimiz tarafından Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Öğretmenliği Bilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Adı Soyadı

İmza

Üye (Tez Danışmanı) : Doç. Dr. Ahmet ARIKAN

.....

Üye : Prof. Dr. Ziya ARGÜN

.....

Üye : Doç. Dr. M. Fatih TAŞAR

.....

ÖNSÖZ

Araştırmanın planlanmasında ve yürütülmesinde fikirleriyle bana yol gösteren, çalışmamın her aşamasında yakın ilgi ve desteğini gördüğüm, çalışmalarımın yönlendirilmesi ve sonuçlandırılmasında büyük emeği geçen, tez danışmanım sayın Doç. Dr. Ahmet ARIKAN’a,

Yüksek lisans eğitimim süresince derslerine katılarak kendilerinden birçok bilgi ve deneyim kazandığım bölümümüz öğretim elemanları hocalarıma,

Çalışmalarım sırasında beni maddi açıdan destekleyen, bilim ve bilim insanının destekçisi olan, saygıdeğer kurum TUBİTAK’a,

Ayrıca en ümitsiz olduğum zamanlarda beni cesaretlendiren eşim İlyas KARAOĞLU’ na ve aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım

Özlem KARAOĞLU

ÖZET

MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ ANAHTAR NOKTA VE FİKİRLERLE DESTEKLENMİŞ İSPATLARI YAPABİLME PERFORMANSLARI

KARAOĞLU, Özlem

Yüksek Lisans, Matematik Öğretmenliği Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ahmet ARIKAN

Haziran-2010, 128 sayfa

Bu araştırmada, matematik öğretmen adaylarının anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmiş ispatları yapabilme performansları ile öğretmen adaylarının anahtar nokta ve fikirlere ilişkin görüşlerinin belirlenmiş ve teoremleri ispatlamada anahtar nokta ve fikir kullanımının etkililiği incelenmiştir.

Bu çalışmada veri toplama ve analizi için durum çalışması ve gömülü (grounded) teoremin teknikleri kullanılmıştır. Araştırmanın uygulaması 2008-2009 eğitim öğretim yılı bahar döneminde Ankara'daki bir üniversitenin Ortaöğretim Fen ve Matematik Eğitimi Bölümü, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı'nda 1. , 2. ve 3. yıldan birer matematik öğretmen adayı ile yürütülmüştür.

Uygulamanın ilk kısmında araştırmacı tarafından hazırlanan, anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmiş soruları içeren çalışma kâğıtları kullanılmıştır. Öğretmen adaylarının çalışma kâğıtlarında yer alan soruları yanıtlarken yaşanan süreç gözlemlenerek not tutulmuştur. Gözlem notlarından elde edilen veriler, nitel veri analiz yöntemlerinden olan betimsel analize göre analiz edilmiştir. Uygulamanın ikinci kısmında ise öğretmen adaylarının anahtar nokta ve fikirlerle ilgili görüşlerini almak için her biri ile görüşme yapılmış ve bu görüşmeler ses kayıt cihazı ile kaydedilmiştir. Görüşmelerden elde edilen veriler ise gömülü teoremin tekniklerine göre analiz edilmiştir.

Araştırma sonucunda, matematik öğretmen adaylarının, anahtar nokta ve fikirlerden yararlandıklarında ispat yapma performanslarının arttığı gözlemlenmiştir. Bulgulara göre öğretmen adayları, anahtar nokta ve fikirleri kullandıklarında; teoremi ispatlamak için daha istekli davranmaktadırlar. Ayrıca başarısız olma kaygıları azalmakta, sonuca daha kolay ulaşmakta ve özgüvenleri artmaktadır.

Araştırmada öğretmen adaylarının ortak görüşü matematik derslerine ispatların anahtar nokta ve fikirler üzerine vurgu yapılarak öğretilmesinin, ispat yapma performanslarını arttıracak yönündedir.

ABSTRACT

THE PERFORMANCE OF PRE-SERVICE MATHEMATICS TEACHERS IN PROVING THEOREMS SUPPORTED BY KEY POINTS AND ARGUMENTS

KARAOĞLU, Özlem

M. Sc. Thesis, The Department of Secondary Mathematics Teaching

Thesis Advisor: Doç. Dr. Ahmet ARIKAN

June – 2010, 128 pages

In the present thesis we determine the performance of preservice mathematics teachers in proving theorems supported by key points and arguments, and investigate the effectiveness of these key points and arguments.

In this work we have used the techniques of case study and grounded theory by collecting and analysing data. This research was carried out with three preservice mathematics teachers in 1st, 2nd and 3rd year in the department of secondary education of science and mathematics in a university in Ankara.

In the first half of the research we have used spreadsheets which contain some questions supported by key points and arguments. We have taken notes containing the observations of the process while participants were answering the questions. The data was analysed by descriptive analysis. In the second part, the researcher interviewed with pre-service mathematics teachers to reveal their views about key points and key arguments. All interviews were tape recorded. The data were analysed by using grounded theory techniques.

As a result of the research, it was concluded that when the pre-service mathematics teachers use the key points and arguments in proving theorems, their performance was increased. According to findings of this study we see that when the pre-service mathematics teachers use the key points and arguments, they behave more eager to prove the theorems, figure out the conclusion easier. We also see that their anxiety about being unsuccessful is decreasing and their self confidence is rising.

In this research the common idea of the pre-service mathematics teachers is that to prove the theorems emphasizing key points and arguments in instructions will increase their proving performance.

İÇİNDEKİLER

JÜRİ ÜYELERİNİN İMZA SAYFASI.....	i
ÖNSÖZ.....	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT.....	v
İÇİNDEKİLER.....	vii
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	ix
 BÖLÜM 1 GİRİŞ.....	 1
1.1. Problem Durumu.....	1
1.1.1. İspat.....	2
1.1.2. Matematik Öğretmeni Yetiştirme ve İspat.....	5
1.2. Problem Cümlesi.....	12
1.3. Alt Problemler.....	12
1.4. Araştırmanın Amacı.....	13
1.5. Araştırmanın Önemi.....	13
1.6. Araştırmanın Varsayımları.....	15
1.7. Araştırmanın Sınırlılıkları.....	15
1.8. Tanımlar.....	16
 BÖLÜM 2 İLGİLİ ARAŞTIRMALAR.....	 17
 BÖLÜM 3 YÖNTEM.....	 25
3.1. Araştırmanın Modeli.....	25
3.2. Araştırmada Kullanılan Teknikler.....	27
3.2.1. Durum Çalışması.....	27
3.2.2. Gömülü Teori.....	27
3.3. Katılımcılar.....	32
3.4. Veri Toplama Araçları.....	33

3.4.1. Çalışma Kağıtları.....	33
3.4.1.1. Çalışma Kağıtlarının Hazırlanması.....	33
3.4.1.2. Çalışma Kağıtlarının Uygulanması.....	34
3.4.2. Gözlem Formu.....	35
3.4.3. Görüşme.....	35
3.5. Verilerin Toplanması.....	36
3.6. Verilerin Analizi.....	37
3.7. Araştırmada Geçerlik ve Güvenirlik Sağlama Çalışmaları.....	38
BÖLÜM 4 BULGULAR VE YORUMLAR.....	40
4.1. Öğretmen Adaylarının Anahtar Nokta ve Fikirlerle Desteklenmiş Soruları	
Çözerken Ortaya Koydukları Tepkiler.....	40
4.1.1. 1. Yıl Öğretmen Adayının Tepkileri.....	40
4.1.2. 2. Yıl Öğretmen Adayının Tepkileri.....	54
4.1.3. 3. Yıl Öğretmen Adayının Tepkileri.....	66
4.2. Öğretmen Adaylarının Anahtar Nokta ve Fikirlerle İlgili Görüşlerine	
İlişkin Bulgular ve Yorumlar.....	81
4.2.1. 1., 2. ve 3. Görüşme Sorularına Ait Bulgular ve Yorumlar.....	82
4.2.2. 4., 5., 6., 7., 8. ve 9. Görüşme Sorularına Ait Bulgular ve Yorumlar.....	92
4.2.3. 10. Görüşme Sorusuna Ait Bulgular ve Yorumlar.....	108
4.2.4. 11. Görüşme Sorusuna Ait Bulgular ve Yorumlar.....	111
BÖLÜM 5 SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	113
5.1. Sonuçlar.....	113
5.2. Öneriler.....	118
5.2.1. Öğretim Elemanlarına Öneriler.....	118
5.2.2. Araştırmacılara Öneriler.....	119
5.2.3. Matematik Öğretmen Adaylarına ve Öğrencilere Öneriler.....	120
KAYNAKÇA.....	121
EK-1.....	127
EK-2.....	128

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil-1	Raman (2002)'ın Çalışmasında Prof. B'nin ispatı.....	20
Şekil- 2	Raman (2002)'ın Çalışmasında Prof. A'nin ispatı.....	21
Şekil- 3	Araştırma Deseni.....	26
Şekil- 4	Çalışma Kağıdı Örneği.....	34
Şekil- 5	Çalışma Kağıdı-1	41
Şekil- 6	Birinci Yıl Öğretmen Adayının Cevap Kağıdından Bir Bölüm.....	43
Şekil-7	Birinci Yıl Öğretmen Adayının Cevap Kağıdında $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$ Eşitliğini Gösterdiği Bölüm.....	44
Şekil-8	Çalışma Kağıdı-2.....	45
Şekil-9	Birinci Yıl Öğretmen Adayının Cevap Kağıdından Bir Bölüm	46
Şekil-10	Birinci Yıl Öğretmen Adayının Cevap Kağıdından Bir Bölüm.....	47
Şekil-11	Çalışma Kağıdı-3.....	48
Şekil-12	Birinci Yıl Öğretmen Adayının Cevap Kağıdından Bir Bölüm.....	50
Şekil-13	Birinci Yıl Öğretmen Adayının Cevap Kağıdından Bir Bölüm	50
Şekil-14	Çalışma Kağıdı-4.....	51
Şekil-15	Birinci Yıl Öğretmen Adayının Cevap Kağıdından Bir Bölü.....	52
Şekil-16	Çalışma Kağıdı-5.....	53
Şekil-17	Çalışma Kağıdı-6.....	55
Şekil-18	İkinci Yıl Öğretmen Adayının Cevap Kağıdında Limit Tanımlarını Yazdığı Bölüm.....	56
Şekil-19	İkinci Yıl Öğretmen Adayının Cevap Kağıdından Bir Bölüm.....	56
Şekil-20	Çalışma Kağıdı-7.....	58
Şekil-21	İkinci Yıl Öğretmen Adayının Cevap Kağıdından Bir Bölüm.....	59
Şekil-22	İkinci Yıl Öğretmen Adayının Cevap Kağıdından Bir Bölüm.....	60
Şekil-23	Çalışma Kağıdı-8.....	61
Şekil-24	İkinci Yıl Öğretmen Adayının Cevap Kağıdında Diferansiyel Tanımını Yazdığı Bölüm.....	62
Şekil-25	İkinci Yıl Öğretmen Adayının Cevap Kağıdından Bir Bölüm	62
Şekil-26	Çalışma Kağıdı-9..	63

Şekil-27	İkinci Yıl Öğretmen Adayının Cevap Kağıdında Limit Tanımlarını Yazdığı Bölüm.....	64
Şekil-28	Çalışma Kağıdı-10.....	65
Şekil-29	Çalışma Kağıdı-11.....	67
Şekil-30	Üçüncü Yıl Öğretmen Adayının Cevap Kağıdından Bir Bölüm.....	68
Şekil-31	Üçüncü Yıl Öğretmen Adayının Cevap Kağıdından Bir Bölü.....	69
Şekil-32	Çalışma Kağıdı-12.....	70
Şekil-33	Üçüncü Yıl Öğretmen Adayının Cevap Kağıdından Bir Bölüm.....	71
Şekil-34	Üçüncü Yıl Öğretmen Adayının Cevap Kağıdından Bir Bölüm.....	71
Şekil-35	Çalışma Kağıdı-13	72
Şekil-36	Üçüncü Yıl Öğretmen Adayının Cevap Kağıdında Homomorfizma Tanımını Yazdığı Bölüm.....	73
Şekil-37	Üçüncü Yıl Öğretmen Adayının Cevap Kağıdından Bir Bölüm	73
Şekil-38	Üçüncü Yıl Öğretmen Adayının Cevap Kağıdından Bir Bölüm.....	74
Şekil-39	Üçüncü Yıl Öğretmen Adayının Cevap Kağıdından Bir Bölüm.....	74
Şekil-40	Çalışma Kağıdı-14.....	75
Şekil-41	Üçüncü Yıl Öğretmen Adayının Cevap Kağıdından Bir Bölüm.....	76
Şekil-42	Üçüncü Yıl Öğretmen Adayının Cevap Kağıdından Bir Bölüm	76
Şekil-43	Çalışma Kağıdı-15.....	78
Şekil-44	Anahtar Nokta ve Fikir Kullanımının Öğretmen Adaylarının Davranışlarına Etkileri.....	80
Şekil-45	İspat Yapma Kategorisine Ait Şema.....	88
Şekil-46	İspat Yapma Kategorisine Ait Boyutların Eksen Üzerinde Gösterimi.....	89
Şekil-47	Kavramsal Bilgi Kategorisine Ait Şema	90
Şekil-48	Kavramsal Bilgi Kategorisine Ait Boyutların Eksen Üzerinde Gösterimi.....	91
Şekil-49	İspat Yapma ve Kavramsal Bilgi Kategorilerinin İlişkisini Gösteren Yapı	91
Şekil-50	Anahtar Nokta Kategorisine Ait Boyutların Eksen Üzerinde Gösterimi.....	102
Şekil-51	İspat Yapma Performansı Kategorisine Ait Şema	103
Şekil-52	İspat Yapma Performansı Kategorisine Ait Boyutların Eksen Üzerinde Gösterimi.....	103

Şekil-53	Öğrenci Tutumları Kategorisine Ait Şema	105
Şekil-54	Öğrenci Tutumları Kategorisine Ait Boyutların Eksen Üzerinde Gösterimi.....	105
Şekil-55	Anahtar Nokta ve İspat Yapma Performansı Kategorilerinin İlişkisini Gösteren Yapı.....	106
Şekil-56	Anahtar Nokta ve Öğrenci Tutumları Kategorilerinin İlişkisini Gösteren Yapı.....	107
Şekil-57	Anahtar Nokta Belirleme Kategorisine Ait Şema.....	110
Şekil-58	Kavramsal Bilgi ve İspat Yapma Kategorileri Arasındaki İlişkiyi Özetleyen Yapı.....	114
Şekil-59	İspat Yapma performansı ve Anahtar Nokta Kategorileri Arasındaki İlişkiyi Özetleyen Yapı.....	115
Şekil-60	Öğrenci Tutumları İle Anahtar Nokta Kategorileri Arasındaki İlişkiyi Özetleyen Yapı.....	117

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bu bölümde “Problem Durumu”, “Problem Cümlesi”, “Alt Problemler”, “Araştırmanın Önemi”, “Varsayımlar”, “Sınırlamalar” ve “Tanımlar” alt başlıkları ele alınmıştır.

1.1 Problem Durumu

İnsanları diğer canlılardan ayıran en önemli özellik düşünebilme yetenekleridir. Bu özellik sayesinde insanlar karşılaştırma yapabilme ve muhakeme yapabilme gibi davranışları gerçekleştirmektedirler. Ayrıca yine düşünebilme ve muhakeme becerisi sayesinde insanlar birçok faktörü birlikte düşünüp akılcı sonuçlara vararak, verilen hükümlerin doğruluğunu gösterebilmektedirler. Bu becerilere sahip olabilmek için bireyin yeterli bilgi birikimine sahip olması gerekmektedir.

Düşünmeyi geliştirdiği bilinen en önemli disiplinlerden biri matematiktir (Umay, 2003). Matematik, insanlar tarafından yaşamın ve dünyanın anlaşılması, yaşam ve dünya hakkında fikirler üretilebilmesi için yardımcı bir eleman olarak görülmüştür (Ernest, 1991). Matematiğin ne olduğuna dair bugüne kadar kesin bir tanım verilememiştir. Zira yapılan matematik tanımları, insanların matematikteki beklentileri, matematiğe yönelik tutumları ve geçirmiş oldukları tecrübeler gibi nedenlerden dolayı, matematiğin sadece bir yönünü yansıtmaktadır. Bu nedenledir ki, matematiğin ne olduğu ile ilgili yapılan tanımlara tarihsel bir süzgeç içinde bakıldığında iki farklı görüş ortaya çıkmaktadır. Birinci görüşe göre matematik, “insan hayatının devamını sağlayan bir bilim dalı” iken ikinci bir görüşe göre matematik, “düşünme ve doğaya ulaşma aracı”dır (Hardy, 1997, s. 107).

Matematiğin genel amacı; veriye dayalı akıl yürütme, bilgiyi düzenleme, genellemelere varma, kanıtlama ve problem çözme becerilerini geliştirmektir (Toluk, 2003; Nasibov ve Kaçar, 2005). Matematik eğitiminin genel amaçlarına ayrıntılı olarak bakıldığında en önemli amaçlarından birinin öğrencilerin aldıkları matematik eğitimi

sonunda mantıksal tümevarım ve tümdengelimle ilgili çıkarımlar yapabilmelerine katkıda bulunmak olduğu fark edilmektedir (MEB, 2005). NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (2000) standartlarında matematiğin amaçları ile ilgili olarak şu bilgilerden bahsedilmektedir:

- Matematiğin esas bakışı olarak muhakemeyi ve ispatı tanımak
- Matematiksel varsayımlar oluşturmak ve incelemek
- Matematiksel iddialar, ispatlar geliştirmek ve değerlendirmek
- Muhakemenin değişik tiplerini ve ispat metotlarını seçip kullanmak

Matematik ispat yapma disiplini ve bu özelliği matematik ile diğer disiplinler arasındaki temel farkı açıklar. Aksiyomlar, tanımlar, varsayımlar, teoremler ve teoremin ispatları bilimsel bir disiplin olarak matematiğin yapı iskeletini oluşturur (Heinze&Reiss, 2003).

1.1.1 İspat

Matematiksel doğrulamada ve diğer bilim alanlarında bir şeyin kesin doğruluğunun belirlenmesinde, bireysel deneyimler ya da otoriteye danışmak yeterli olmamaktadır. Örneğin, tarihi bir bilginin doğruluğu için bu konudaki otoriteye gönderme yapılabilir. Ancak matematikte, bir önerme ya da teorem ya da bir ifadenin doğruluğuna ya da yanlışlığına karar verme, ispat yapma adı verilen bir süreç sonrasında olur. İspat yapma süreci evrensel olarak kabul gören yöntemlerden oluşur (Moralı, Uğurel, Tüknüklü ve Yeşildere, 2006).

İspat süreci üç farklı, fakat, birbirleri ile ilişkili aşamalardan oluşmaktadır. Bu aşamalar; ispat yapılacak şeyin araştırılması, ispatın düzenlenmesi (organizasyonu), diğer kişilere açıklanması (anlatılması, sunulması) olarak sıralanabilir. Matematikçi, önce eldeki problem ya da ifadeyi analiz eder, daha önce yapılmış ispata da bakarak ifadenin doğru olup olmadığını araştırır ve daha önceden ispatlanmış teoremlerden hareketle nasıl türetilbileceğini inceler. Bu süreç, ispatın yapılması ya da ifadenin yanlış olduğunun gösterilmesiyle biter. Fakat bir ispat ancak matematik dünyası tarafından kabul gördükten sonra bir ispat olur (Lee, 2002).

Matematiğin gelişimi incelendiğinde yeni bir teoremin aşağıda verilen bazı faktörlerin bir araya gelmesi sonucu matematikçiler tarafından kabul edildiğini ortaya koymuşlardır;

- Teorem anlaşılabilirliği, içindeki kavramlar ve mantıksal içeriği anlaşılmalı ayrıca yanlış olduğunu gösteren bir delil olmamalıdır.
- Teorem, matematiğin bir veya daha çok dalında uygulamaları olacak kadar önemli olmalıdır.
- Teorem, birbiriyle tutarlı matematiksel sonuçlardan oluşan bir iskelete sahip olmalıdır.
- Teorem sahibi, teoremin konusu olan alanda güvenilir, itibar sahibi birisi olmalıdır.
- Teorem hakkında ikna edici bir matematiksel argüman olmalı, bu argüman da matematikçilerin aşına olduğu bir tarzda olmalıdır (Hanna, 1991).

Bugün anlaşıldığı anlamıyla ispatın yazılı kaynağını M.Ö. IV. yüzyılda yayınlanan, Euclid'in "Elements"i oluşturmaktadır. Matematiksel ispat; bir sonucu doğrulamak, başkalarını bilgilendirmek ve bu bilgiye ikna etmek, bir sonuç bulmak ve sonuçları tımdengelimsel bir sistem içine yerleştirmek için kullanılır. İspat bugün anladığımız anlamına, 19. yy. da Abel, Bolzano, Cauchy, Lagrange, Wierstrasse gibi matematikçiler tarafından getirilmiştir (Almeida, 2003). 1950-1960 arasındaki yeni matematik hareketi sırasında ispatın önemi geometri dışındaki alanlarda da vurgulanmıştır (Lee, 2002).

İspatla ilgili olarak; Knuth (2002) ispatın öğrenmede bir araç olduğunu belirtirken; Ross (1998) matematik öğretiminde ispatın bilimsel doğrularından çok eğitimsel değerleri üzerinde durulması gerektiğini belirtmektedir. İspatın gelişimi, bireylerin değişik mantıksal düşünme yollarını kazanmasına bağlıdır. Farklı muhakemeler, bilgilerin farklı açılarla inşa edilmesini sağlar. İspat Oxford Amerikan sözlüğünde bir şeyin doğruluğunun gösterimi olarak tanımlanır (Oxford American Dictionary, 1980). Bir ispat iki şekilde de yapılabilir. Birincisi bir ifadenin doğruluğunun gösterimidir. İkincisi ise bir ifadenin neden doğru olduğunun açıklanmasıdır. Matematikçiler bir ifadenin doğru olup olmamasından çok niçin doğru

olduğuyla ilgilenirler. Diğer bir deyişle matematiksel ispat bir ifadenin niçin doğru olduğunun bir mantıksal bir açıklamasıdır (Öziş ve Altınparmak, 2005).

Bilimsel açıdan ispatlar geometrik ifadelerin genelleşmesine ve kökleşmesine katkıda bulunurlar. Eğitimsel açıdan ise ispatlar öğrencilerin çeşitli yöntemleri kullanarak muhakeme etme becerilerinin gelişmesine ve yaratıcılıklarının arttırmalarına fırsat verir. Edwards (1999) çalışmasında bir öğrencinin ispatı öğrenirken izleyeceği aşamaları şöyle tarif etmiştir:

- Öğrenci ispata ilişkin gösterim ve sembolleri tanır.
- Öğrenci kendine ait oluşturduğu ispat yazım fikrini belirler ve bunu değişik kelimelerle yeniden adlandırır.
- Öğrenci kendine özgün bir ispat yapar, bu onun düşüncesi haline gelir ve sonradan bunu yeni durumlar için kullanabilir.
- Öğrenci bir başkası tarafından verilen bir önermeyi kendi başına ispatlayabilir.
- Bir öğrencinin çözdüğü problemi matematiksel ilişkiler içinde gösterebilir.

Matematiğin temeli muhakemedir. Bilim gözlemle sonuca ulaşırken, matematik mantıksal muhakeme ile sonuca ulaşır. Böylece matematiğin özü ispatlarda yatar ve iddia ile ispat arasındaki fark vurgulanmalıdır. Matematiksel sonuçların yalnızca dikkatli şekilde yapılan bir ispattan sonra geçerli olduğu önemlidir. Geçerli fikirlerin ve ispatların oluşumu ve fikirlerin kritik edilmesi ispat yapmanın ayrılmaz parçalarıdır. Eğer muhakeme becerisi öğrencilerde geliştirilmez ise o zaman matematik basit olarak bir işlem dizisini takip etmek ve ne anlam ifade ettiği düşünülmeden örnekleri taklit etmek olur (Ross, 1998).

Muhakeme etmek sadece matematiksel değil, aynı zamanda temel bir yetenektir. Bunu başarabilmek için öğretmenlerin, matematiğin her öğrencinin eğitiminde okul yılları boyunca esaslı bir role sahip olması gereken, canlı, heyecan verici, keyifli bir alan olduğunun farkında olması gerekir (Ross, 1998).

Öğrenciler düşüncelerini geliştirdikçe, keşifler yaptıkça, sonuçları değerlendirdikçe, tüm matematiksel alanlarda matematik önermelerini kullandıkça, matematiğin anlamlı olduğunu göreceklardır. Öğretmenler öğrencilerin muhakeme

becerilerini geliştirme de yardımcı olmalıdır. Ortaokulun bitiminde öğrenciler matematiksel ispatları anlayabilmeli ve yapabilmelidir. Lise bitiminde cebirsel ispatlar öğrenciler tarafından yapılmalıdır (NCTM, 2000).

Muhakeme ve kanıtlama sadece matematikteki mantık konusunun içinde ya da geometrideki “ispat teknikleri” adı altında işlenerek öğretilemez. İspat öğrenciler için gayet zor bir alandır. Bu yüzden muhakeme ve kanıtlama öğrencilerin anaokulundan 12. sınıfa kadar öğrenecekleri matematiğin bir parçası olmalıdır. Öğrencilerin matematikle olan en erken deneyimlerinde matematikteki her bilginin bir nedeninin olduğu vurgulanmalıdır. “Neden bunun doğru olduğunu düşünüyorsun?” ya da “yanıtın farklı olduğunu düşünen var mı ve neden bu şekilde düşünüyorsun?” gibi sorular öğrencilerin önerdikleri yanıtları desteklemeleri gerektiğini öğrenmelerini sağlar. Bu şekilde öğrenciler matematik dersindeki bir tartışmada nelerin geçerli destekler olduğunu öğrenmelidirler. Öğrencilerin, ilk değerlendirme ve muhakeme çabaları deneme-yanılma yönteminden yada olası seçeneklerin rasgele denenmesinden oluşacaktır. Bir miktar yönlendirmeye öğrenciler sistemli değerlendirme yöntemlerini keşfedecek ve kullanacaklardır. Öğrenciler muhakeme ve ispatı birbirlerinin iddialarını sınıfta tartışarak da öğrenebilirler. Yıllar geçtikçe öğrenciler muhakemeyi, ispatlama yöntemlerini ve cebirsel gösterimi öğrenirler (NCTM, 2000).

Literatürde ispat kavramıyla ilgili olarak ispat yazma ve ispat yapma ifadelerinin kullanıldığı göze çarpmaktadır. Yakından incelendiğinde bu iki ifadenin araştırmalarda aynı anlamda kullanılmış olduğu görülmektedir (Senk, 1983; Güven, Çelik ve Karataş, 2005).

1.1.2 Matematik Öğretmeni Yetiştirme ve İspat

Matematik eğitiminde, ispatın öğretimi ve öğrenimine yönelik büyüyen bir ilgi vardır. Bu iddiamıza delil olarak M. A. Mariotti’nin ispat ile ilgili elektronik bültenini gösterebiliriz (URL: <http://www.didactique.imag.fr/preuve>). Matematikte ispatlamanın rolünün önemine rağmen öğrencilerin matematiksel ispatı anlama ve oluşturmadaki düşük performansları, matematik eğitiminde ispatın öğretimi ve öğrenimine yönelik ilgiyi haklı çıkarmaktadır (Recio ve Godino, 2001, s. 83).

Thomas Thucker'ın (1999) araştırma sonuçlarına göre ispatın başlıca faydaları şunlardır:

- İspatlar, öğrencilerin kavramları daha iyi anlamasını ve sonuçlara inanmasını sağlar.
- Genel Matematik dersinde ispatın görülmesi ilerdeki matematik dersleri için faydalı olacaktır.
- İspatlar, matematikçilerin yaptıkları şeyleri öğrencilerin görmelerini sağlayan bir araçtır.
- İspat matematiksel düşünce yapısını geliştirir.

Matematik, sıkça değinildiği gibi, her aşamasında daha önceki bilgilerin ve edinilmiş becerilerin kullanımını gerektiren, bilgilerin sadece üst üste yığıldığı değil aynı zamanda iç içe de geçtiği bir bilim dalıdır. Matematik öğretmen adaylarının, üniversite eğitimleri göz önüne alındığında, üst düzeyde ispat yapma becerilerinin olması gereği ortaya çıkmaktadır (Moralı, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere, 2006).

Matematik öğretmeni yetiştirmede alan bilgisinin oluşmasını sağlayan birçok temel derste yer alan konuların temellerini, tarih boyunca değişmeyen tanım ve teoremler oluşturmaktadır. Bunların en bilinenlerinden birkaçı; birden büyük her tam sayının asal sayıların çarpımı olarak ve tek şekilde yazılabileceğini ifade eden ve matematiğin temel taşlarını oluşturan sayıların yapısı hakkında çok önemli bilgi veren Aritmetiğin Temel Teoremi; kompleks katsayılı n . dereceden bir polinomun en az bir kompleks kökü bulunacağını ifade eden Cebirin Temel Teoremi; bir dik üçgende dik kenarların kareleri toplamının hipotenüsün karesine eşit olduğunu ifade eden ve geometride ilk ve orta öğretimde de sürekli kullanılan Pisagor Teoremi, analizde Ortalama Değer Teoremi olarak sıralanabilir. Bu temel teoremlerin ispatlarını yapıldıkları şekliyle çalışıp, tüm aşamalarındaki düşünme süreçlerini takip edebilmek de daha sonra karşılaşılan bir problemin üstesinden gelebilmek için gereken beceriye katkısı olacak çağrışımların yapılabilmesini kolaylaştıran önemli bir çalışmadır. Aslında ispatın amacı sadece bir önermenin doğruluğunu bütün şüphelerden arındırmak değil, aynı zamanda bize doğrulamaların birbirine olan bağımlılığını göstermek şeklinde de ifade edilebilir (Lee, 2002).

İlköğretim ve orta öğretim matematik öğretmenliği bölümleri programları incelendiğinde, birinci sınıfın ilk döneminde yer alan Soyut Matematik derslerinde matematiksel ispat başlı başına bir ders konusu olarak öğrencilerin karşısına, hem de dersin ilk birkaç haftası içinde, çıkmaktadır ve bu konunun içinde ispatın tanımı ve kısaca tarihçesi de verilerek matematik dünyasında günümüzde kabul edildiği şekliyle sınıflandırılması verilmekte, bu sınıflandırmada yer alan her bir yöntem isimleri ve kullanılma gerekçeleri de açıklanarak örneklendirilmektedir (DEÜ, 2002).

Üniversitede okutulan matematik dersleri genellikle insanların ilk bakışta zor anlayacağı ispatlarla doludur. Bu yüzden öğrencilerin çoğu dersi geçebilmek için ispatı anlamadan ezberlerler. Çoğu zaman, temel teoremlerin ispatları verilir ve uygun yorumlar, detaylı bir şekilde ele alınabilir. Bu durumun bir sonucu olarak testlerde ve sınavlarda öğrencinin teorik kısma hakimiyetini ölçmeye, değerlendirmeye çalışmak gerekir. Genellikle öğrencilerden birtakım anlaşılması zor sonuçların ispatı istenir. Öğrencinin kabiliyeti ne olursa olsun yukarıdaki tip sorulara cevap vermek için bazı ezberlenmiş bilgiler gereklidir. En iyi öğrenciler bile temel bir sonucun ispatını kendi kendine nadiren yapabileceklerdir. Bundan dolayı ispatın temel yapısını ve hesaplama sırasındaki bir takım incelikleri ezberlemeleri gerekebilir. Öte yandan zayıf öğrenciler muhtemelen bütün ispatı (büyük olasılıkla hiçbir şey anlamadan) kelime kelime ezberlemeye çalışacaklardır (Condradie ve Firth, 2000).

Matematikçiler için matematik alanında ileri düzey ispat oluşturabilme yeteneği çok önemlidir. Bu yetenek üniversite öğrencilerin aldıkları matematik derslerinde temel amaç olarak görülmekte ve öğrenciler çoğu zaman ispat yapabilme performanslarına göre değerlendirilmektedirler. İspatın matematik eğitiminde bu kadar önemli olmasına rağmen, araştırmalar her seviyeden öğrencinin ispat oluşturma görevlerinde büyük zorluklar yaşadığını göstermektedir. Frazier (1970); Williams (1980); Baylis (1983); Senk (1985); Schonfeld (1985); Selden ve Selden (1987); Martin ve Harel (1989); Moore (1994); Hart (1994); Thompson (1996); Harel ve Sowder (1998), çalışmaları yukarıdaki iddiamıza delil olarak gösterilebilir.

Öğrencilerin ileri düzey matematik derslerinde ispat yapamamalarının nedeni olan eksiklikleri tanımlamak doğal olacaktır. Bu konuda yapılan çok sayıda araştırma

vardır ve bu araştırmalarda öğrencilerin ispat yaparken zorlanmalarının nedenleri iki temel kategori çerçevesinde toplanmıştır. Öğrencilerin zorlanmalarının ilk nedeni, matematiksel bir ispatı nelerin oluşturduğuna dair yeterli düzeyde algıya sahip olmamalarıdır (örn. Senk, 1985; Martin ve Harel, 1989; Knuth ve Elliot, 1998; Harel ve Sowder, 1998). Örneğin, bazı öğrenciler, genel bir teoremi özel bir veya birkaç özel örnek için gerçekleştirdiğinde teoremi ispatladıklarına inanmakta ve bunun teoremin ispatı için yeterli olduğunu düşünmekte. Bazı öğrenciler ise ispatları, lise geometri derslerinde öğretilen geleneksel forma göre yapmadıkça geçerli bir ispat yapmadıklarını düşünüyorlar (Harel ve Sowder, 1998).

Araştırmalar, öğrencilerin teoremleri ispatlamada zorluk yaşamalarının ikinci nedeni olarak, öğrencilerin bir teoremi ya da kavramı anlamada eksik kaldıklarını ve böylece sistematik olarak yanlış uygulamalar yaptıklarını ortaya koymaktadır (örn. Moore, 1994; Hazan ve Leron, 1994; Asiala, Dubinsky, Mathews, Morics ve Oktac, 1997; Harel, 1998). Öğrencinin bir teoremi basitçe anlaması ve doğruluğuna inanması onu uygulayabileceğine dair garanti vermez. Örneğin, soyut cebirde herhangi altı elemanlı bir grubun üç elemanının bir alt grup oluşturacağını gösterirken Lagrange teoremini yanlış bir şekilde kullanmaktadırlar (Hazan ve Leron, 1994). Bazı öğrenciler ise lineer cebirdeki teoremleri, formülleri kullanarak ispatlamaya çalışırlar fakat bu formüllerdeki sembollerin ne ifade ettiğini bilmemektedirler (Harel, 1998).

Yukarıdaki araştırmaları özetlemek gerekirse Weber (2001), öğrencilerin ileri matematik konularında kanıt yapma ile ilgili yaşadıkları güçlükleri, yapılan çalışmalar doğrultusunda, iki açıdan değerlendirmektedir. Bunlardan ilki, öğrencilerin matematiksel kanıtın nelerden oluştuğuna hakkında doğru bir fikre sahip olmadıkları düşüncesidir. Örneğin, bazı öğrencilere göre, teoremin bir veya birkaç örnek için doğruluğunu göstermek yeterli bir kanıttır. İkinci olarak, öğrenciler bir kavramı veya teoremi anlamada ve sistematik olarak bunu uygulamada eksik kalabilmektedirler. Öğrencilerin bir gerçeğiy veya teoremi hatırlaması, bunu uygun şekilde uygulamalarını sağlamamaktadır.

Yapılan çeşitli araştırmalarda, üniversite düzeyindeki öğrencilerin ispat yapma sürecinde çeşitli sorunlar yaşadıkları ortaya konulmuştur ve öğretmenlerin, öğrencilere ispatın ve ispat yapmanın doğasından oldukça yoksun etkinlikleri sundukları

görülmüştür (Jones, 2000). Knuth ve Elliott (1998)'un yaptığı bir araştırmada matematik öğretmen adaylarının ispata ilişkin yorumlarının, değerlendirmelerinin matematik camiasının kabul ettiği normlardan farklı olduğunu ortaya koymuştur (Jones, 2000). Ayrıca pek çok öğretmenin, öğretmenliğe başladıkları ilk yıllarda, öğrencilerin ispat yapma becerilerine ilişkin sınırlı beklentileri olduğunu tespit edilmiştir (Jones, 2000). İspat sürecinde öğrencilerin yaşadığı sorunları şu şekilde özetlemek mümkün olacaktır:

- Anlama, takdir etme ve ispatı oluşturmada zorluklar,
- Akıl yürütme adımlarını takip edememe,
- Çoğunluğunun yarı-formal düzeyde olduğu, formalleştirme yapamadıkları,
- En basit ispatların bile öğrenci için temel zorluk oluşturmaları,
- Öğrencilere bir ispat formal olarak verildikten sonra verilen bir probleme öğrencilerin kayda değer bir yüzdesi az önce ispatladıklarına tamamen aykırı sonuçlar bulabilmeleri.

Jones (2000), matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya ilişkin kavramsallaştırmaları üzerine bir araştırma yapmıştır. Diğer çalışmalardan farklı bir sonuca ulaşmamış, öğretmen adaylarının ispat yapmaya ilişkin becerilerinin yeterli düzeyde olmadığı sonucuna ulaşmıştır. Ancak bu araştırmada diğer çalışmalardan farklı olarak, matematik öğretmen adaylarının yüksek seviyede olanları da dahil olmak üzere, etkili matematik öğretimi için gerekli matematiksel bilgiye sahip olmadıkları ve bu şekilde mezun oldukları tespit edilmiştir. Bu araştırma üst düzeydeki öğretmen adaylarının teknik açıdan ispatı daha akıcı bir şekilde yapabildiklerini ancak, bunun onların kavramsal açıdan derinlemesine matematiksel bilgiyle ilişkilendirmelerini garantilemediğini ortaya koymuştur.

Moore (1994) ise matematik veya matematik eğitimi okuyan üniversite öğrencileri ile yaptığı çalışmasında, öğrencilerin ispat yaparken karşılaştıkları güçlüklerin kaynağını belirlemeye çalışmış ve bunların en önemlilerinin

- 1) kavramı anlama
- 2) matematiksel dil ve notasyon
- 3) ispata başlama

olduğunu görmüştür.

Öğretmen adaylarının yaşadığı en büyük zorluk matematiksel ispatı nelerin oluşturduğu konusunda yeterli bir görüşe sahip olmamalarıdır. Örnek olarak birçok öğretmen adayının genel bir teoremin bir ya da birkaç özel örnekle doğru bir ispatın yapılabileceği görüşüne sahip olduğu görülmektedir. Diğerleri ise ispatın geçerli olabilmesi için geleneksel formatta olması gerektiğine inanıyorlar. Bu eksikliklerle geçerli bir ispatın nasıl olduğunu anlayana kadar ispat yapamayacaklardır.

Öğretmen adaylarının zorlandıkları bir başka husus da nasıl kanıtlayacağını, kanıtlamaya nereden başlaması gerektiğini, kanıtlama sürecinde kullanması gereken kavramsal bilgileri ve bunların nasıl kullanılması gerektiğini bilmemeleridir (Weber, 2001).

Bu çalışmalar gösteriyor ki öğretmen adayları ve üniversite öğrencileri lisans derslerinde karşılaştıkları ispatları yapmada ve anlamada zorluk çekmekte. Oysa ileride öğretmen olacak bir insanın ispatları anlaması ve kavraması önemlidir. Ortaya konan bu durum sonucunda, öğrencilerin ispat yapma ve anlama özelliklerini geliştirmenin gerekli olduğunu vurgulayan ve çeşitli öneriler sunan bazı çalışmalar yapılmıştır. Ne yazık ki bu alanda ülkemizde yapılan çalışmaların sayısı azdır. Yurtdışında ise bu çalışmalar devam etmektedir.

Matematiksel ispatın matematiksel çalışmaların merkezinde yer almasına rağmen çeşitli araştırmalar öğrencilerin ispat yaparken zorlandıklarını ortaya koymuştur. Bu durumda öğrencilere ispat kavramının anlamlı bir şekilde öğretilmesi yollar geliştirilmelidir. Britanya Birleşik Krallığının Ulusal Matematik Müfredatı'nda matematiksel ispatlama sürecini içeren bir model yer almaktadır (DFE, 1995). Bu, erken yıllarda öğrencilere basit örüntüleri tanıtmayı ve öğrencilerin bu örüntüler hakkında tahminlerde bulunmasını içerir. Öğrenciye tahmin yürütmesi için “*bu durumda ne olurdu*” gibi sorular yöneltilir ve *2 bütün çift sayıları böler* şeklindeki genel bir durumu anlamaları beklenir. Bunun devamında öğrencilerden varsayımlarda bulunmaları, genellemeleri oluşturmaları ve test etmeleri, matematiksel bir genelleme ile deneysel bir örnek arasındaki farkı anlamaları beklenir (Jones, 1997).

Ko, Knuth ve Shy (2007) çalışmalarında Tayvan’ da bir üniversitede genel matematik dersi alan 36 öğrencinin ispat yapma performanslarını incelemişler ve bazı sonuçlar elde etmişlerdir. Ko, Knuth ve Shy’a göre, üniversite öğrencilerinin kavramları ve tanımları anlamalarını geliştirmek için matematik öğretmenlerinin derslerde formal kavramlara vurgu yapmaları gerekmektedir. Öğrencilerin ispat yazmaları ve karşı örnek vermeleri öğretmenler tarafından desteklenmelidir. Matematik öğretmenleri, öğrencilerin yazılı çalışmalarına daha fazla önem vermelidirler. Her ne kadar matematik öğretmenlerinin pedagojik yaklaşımlarını değiştirmek güç bir süreç olsa da, bu tür bir iyileştirme öğrencilerin ispat yazma performanslarına katkı sağlayabilir.

Almedia (2003) çalışmasında öğrencilerin gerek programdan gerekse öğretim biçiminden kaynaklanan ispat yapma yetersizliklerinin uygun eğitim ile geliştirilebileceğini, öğrencilerin bu konuda bir potansiyellerinin olduğunu ortaya koymuştur.

Condraie ve Firth (2000) öğrencilerin matematiksel ispatı anlamalarını kolaylaştırmak için kavrama testlerini geliştirmişlerdir. Bu yöntemin en önemli özelliği; öğrenciye bazı teoremlerin ve ispatların verilmesi ve daha sonra onlardan ispatın bazı önemli noktaları üzerine sorulan sorulara cevaplar istenmesidir. Felsefesi ise şudur; öğretmen bu yöntemi kullanarak öğrencinin konuyu anlayıp anlamadığını daha iyi değerlendirebilir ve öğrencinin ezberlemesinin önüne geçebilir.

İspatın doğasını anlarken formal yapısını da hesaba katarak öğrencilere ispatı nasıl öğretmemiz gerektiğini düşünmemiz gerekiyor. Bu NTCM standartlarında tavsiye edilmiştir. Öğrencilerin ispatın doğası ile ilgili zorlandıkları herkes tarafından kabul görürken ispatın doğasının ne olduğu konusunda çok az kişi hemfikirdir. Bu konu yüzyıllardır matematikçiler, filozoflar ve tarihçiler tarafından tartışılıyor. Matematikçilere göre ispat anahtar düşüncelerle doludur ancak bu durum birçok öğrenci için böyle değildir. Çünkü öğrencilerin o konu hakkındaki bilgisi anahtar fikir oluşturacak düzeyde değildir. Matematikçiler öğretim esnasında anahtar fikirlere gerekli vurguyu yapmıyorlar daha da önemlisi değerlendirme de kullanmıyorlar. Anahtar fikirleri müfredatın bir parçası yaparsak öğrencilerin olgun bir matematiksel ispat görüşüne sahip olmaları konusunda önemli bir adım atmış olacağız (Raman, 2003).

Matematik öğretmen adaylarının lisans eğitimleri süresince aldıkları alan derslerinin hemen hepsinde ispatla karşılaşmaları kaçınılmazdır. Öğretmen adaylarının lisans eğitimlerini başarı ile tamamlamaları için ispat yapma yönüyle zorluk yaşamamaları ve ispat yapabilme performanslarının artırılması gerekmektedir. Bu yönde çeşitli çalışmalar yapılmış ve bazı önerilerde bulunulmuştur. Fakat ülkemizde yapılan çalışma sayısı oldukça sınırlıdır. Raman (2003), çalışmasında öğrencilerin olgun bir ispat görüşüne sahip olmaları için anahtar fikirleri müfredatın bir parçası yapmak gerektiğini dile getirmektedir. Bizim çalışmamızın amacı anahtar nokta ve fikirlerin öğretmen adaylarının ispat yapma performanslarına etkisini belirlemektir. İspat yaparken anahtar nokta ve fikirlerin kullanımı çalışmada odak noktayı oluşturmaktadır.

1.2 Problem Cümlesi

Bu araştırmada aşağıdaki soruya cevap aranmaktadır.

Matematik öğretmen adaylarının anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmiş ispatları yapabilme performansları nasıldır?

1.3 Alt Problemler

Araştırmada problem cümlesine bağlı olarak aşağıdaki alt problemlere cevap aranmıştır.

1. Araştırmaya katılan öğretmen adayları anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmiş soruları cevaplarken ne tür tepkiler ortaya koymaktadırlar?
2. Araştırmaya katılan öğretmen adaylarının anahtar nokta ve fikirlere ilişkin görüşleri nelerdir?
3. Araştırmaya katılan öğretmen adayları, anahtar nokta ve fikirleri kendileri belirlediklerinde ele aldıkları kriterler nelerdir?

1.4 Araştırmanın Amacı

Yapılan çalışmalar gösteriyor ki matematik öğretmen adayları, teoremleri ispatlamada güçlük yaşıyorlar oysa öğretmen adayları lisans derslerinin birçoğunda teorem ispatları ile karşılaşılıyorlar. Bu bağlamda öğretmen adaylarının ispat yapma performanslarını artırıcı uygulamalar geliştirmek önemli olmaktadır. Buradan hareketle bu araştırmada ispat yapmaya yönelik alternatif bir uygulamaya yer verilmiştir. Bu alternatif metot, ispatların anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmesidir. Bu çalışmanın amacı;

- Öğretmen adaylarının, çalışma kağıtlarındaki anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmiş soruları çözerken göstermiş oldukları davranışları belirlemek,
- Öğretmen adaylarının ispat yaparken anahtar nokta ve fikirlerden nasıl yararlandıklarını ortaya koymak,
- Öğretmen adaylarının, anahtar nokta ve fikirlerin ispat yapmadaki rolü hakkındaki görüşlerini almak,
- Öğretmen adaylarının, anahtar nokta ve fikirleri belirlerken ne gibi kriterleri göz önüne aldıklarını belirlemek,
- Öğretmen adaylarının davranışları ve görüşleri aracılığı ile anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmiş ispatları yapabilme performanslarının nasıl olduğunu belirlemektir.

1.5 Araştırmanın Önemi

Son yıllarda, matematik derslerinde akıl yürütme, ispat ve muhakeme gibi konular, matematik eğitimi araştırmalarında ön plana çıkmaktadır (Heinze&Reis, 2003). Yurtdışında, öğrencilerin, öğretmen adaylarının ve öğretmenlerin ispat ile ilgili görüşlerini, kabullenmelerini ve ispatlama süreçlerini ortaya çıkarmaya yönelik çok sayıda araştırma yapılmıştır (örn. Jones, 1997; Harel & Sowder, 1998; Almeida, 2000; Jones, 2001; Recio & Godino, 2001; Raman, 2001; Weber, 2001; Knuth, 2002; Raman, 2002; Almeida, 2003; Raman, 2003; Solomon, 2006; Stylianides and

Philippou, 2007). Öğrencilerin ispat yapmada karşılaştıkları güçlüklerin nedenlerini belirlemeye yönelik çalışmalar, lise ve üniversite düzeyinde, öğrencilerin sadece ispat yapmada değil, ispatın ne olduğunu hatırlamada bile zorluk yaşadığını göstermektedir (örn. Chazan, 1993, Moore, 1994; akt. Raman, 2003). Ülkemizde ise bu alanda yapılmış sınırlı sayıda çalışma bulunmaktadır. Özer ve Arıkan (2002) çalışmalarında, çalışmaya katılan 10. sınıf öğrencilerinin kanıtlama becerilerinin istenilen düzeyde olmadığını gözlemişlerdir. Benzer şekilde Güven, Çelik ve Karataş (2005) ortaöğretimde öğrenim gören çocukların farklı geometri konularında ispat yapma becerilerinin yetersiz olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Öğretmen adayları ile yapılan çalışmada ise öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşlerinin tam oluşmadığı, ispat yapmanın matematik ve matematik öğretimi açısından önemini bilmedikleri görülmüştür (Moralı, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere, 2006).

İspatın müfredattaki durumu son çeyrek yüzyılda değişikliğe uğramıştır. İngiltere’de Polya ‘dan sonra birçok kişi öğrencilerin kendi iddialarını incelemeleri, test etmeleri fırsatına sahip olmaları, geçerliliğin delilleri ve genelliği sunan tecrübeleriyle kendi doğruları için kişisel inançlarını elde etmeleri gerektiğini belirtmişlerdir. Bu yaklaşım şu anda İngiltere ve Galler’deki milli müfredatta açıklanmıştır. Bu müfredat kanun gereği bütün devlet okullarında uygulanır. Önemli bir grup matematikçi, müfredatta ispat ve kesinliğin yeteri derecede vurgulanmadığından şikayet etmektedirler (Healy, Hoyles, 2000). Schoenfeld’a (1994, s. 76) göre “ispat matematikten ayrı tutacağınız bir şey değildir, müfredatın ayrılmaz bir parçasıdır”.

Matematikte ve matematik eğitiminde ispatın anlam ve önemi hızla artarken, ileride matematikçi olabilecek öğrencileri yetiştirecek matematik öğretmen ve öğretmen adaylarının ispat yapma performanslarını arttıracak uygulamaların geliştirilmesi önemli olacaktır.

1.6 Araştırmanın Varsayımları

Bu araştırmada;

1. Öğretmen adaylarının çalışmada kullanılan veri toplama araçlarına objektif ve samimi cevap verdikleri varsayılmaktadır.
2. Veri toplama araçlarının çalışmanın amacına katkı sağlayacak nitelikte olduğu varsayılmaktadır.

1.7 Araştırmanın Sınırlılıkları

1. Bu araştırma, çalışmanın gerçekleşmesi gereken süre ile sınırlıdır. Çalışmada gömülü teorinin teknikleri kullanılmıştır. Glasser ve Stauss'a (1967) göre gömülü teoride; araştırma sorusunun yanıtı olabilecek kavramların ve süreçlerin tekrar etmeye başladığı aşamaya (doyum noktası) kadar veri toplamaya devam edilmesi gerekmektedir. Araştırmanın sonunda tekrar eden verilerden tümevarım yöntemi ile bir teori oluşturulur. Bu araştırmaya ayrılan süre, bu şekilde veri toplanmasına olanak vermemiştir ve bu nedenle araştırma sonunda bir teori ortaya konulamamıştır.
2. Bu araştırma öğretmen adaylarının görüşme sorularına verdikleri yanıtlar ile sınırlıdır. Katılımcılardan bazıları kendilerini ifade etmede yetersiz kalmış ve görüşme sorularına kısa ve açıklayıcı olmayan yanıtlar vermiştir.

1.8. Tanımlar

Anahtar Nokta ve Fikir: Bir teoremin ispatının, bir problemin çözümünün üzerine inşa edildiği nokta ve fikirler.

Teorem: Matematiksel uygulamalarla doğruluğu gösterilebilen önerme, sav (Weisstein, 2002).

İspat : Bir sonucu doğrulamak, başkalarını bilgilendirmek ve bu bilgiye ikna etmek, bir sonuç bulmak ve sonuçları tımdengelimsel bir sistem içine yerleştirmekdir (Almeida, 2003).

Gömölü Teori : Glasser ve Strauss' un (1967) sağlık bilimleri alanında yaptığı çalışmalardan ortaya çıkan, bir yığın veriden tümevarım yöntemi ile bir teori geliştirmeyi ifade eden nitel araştırma tekniğidir (Yıldırım ve şimşek, 2006).

BÖLÜM 2

İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

Bu bölümde araştırmanın konusu olan anahtar nokta ve fikirlerle ilgili çalışmalara ve sonuçlarına yer verilmiştir.

Raman (2002) çalışmasında üniversite öğrencileri ve bunların iki tip öğretmenlerinin ispata bakış açılarını incelemiştir. Çalışmasını 11 üniversite öğrencisi, 4 matematik asistanı ve 5 matematik profesörü ile uygulamıştır. Katılımcılara “*çift fonksiyonun türevinin tek olduğunu ispatlayınız*” sorusunu yöneltmiş ve görüşmeler yaparak verilerini toplamıştır. Üniversite öğretmenlerinin ve öğrencilerinin ispata bakış açılarının birbirinden farklı olduğunu ortaya koymuştur. Aşağıda bu çalışmadan alıntılar yer almaktadır.

Genel olarak insanların matematiğin özel ve genel yönlerini ayırt edebildikleri görünmektedir. Özel ve genel bölümler matematik için geçerli olduğu için bunun herhangi bir ispat için de geçerli olduğu söylenebilir. Bir ispat, özel ve genel bölümleri içerir. “Özel bölüm” ile “anlamanın oluşmasını sağlayan kısım” ı kastediyorum, “genel” den kastım ise “bir matematik topluluğunu ikna etmeye yeterli bölüm” dür. Genel Matematik üzerine çalışan matematikçiler için ispatın genel ve özel bölümleri birbirine bağlıdır, ben buna bir ispat için “anahtar fikir” diyorum. Fakat öğrenciler için ispatın genel ve özel bölümleri tamamen birbirinden ayrıdır (Raman, 2002).

Bu çalışmada katılımcılara “*çift fonksiyonun türevinin tek olduğunu ispatlayınız*” sorusunu yöneltmiş ve katılımcıların verdiği yanıtlar üzerine onlara aşağıdaki görüşme sorularını sormuştur:

- 1) Bu verdiğiniz cevap sizi ikna ediyor mu? Neden ediyor ya da neden etmiyor?
- 2) Bu yanıt size sınavda kaç puan getirir?

Daha sonra elde ettiği verileri çeşitli düşünce şekillerinin içine yerleştirmiştir. Aşağıda bu düşünce türleri ve bunlara uyan örnekler yer almaktadır.

Yorumsal Düşünce: İspat oluşturmada kullanılan ilk düşünce buluşsal olarak adlandırılan düşünce tipidir. Bu düşünce informal anlayışlara dayanmaktadır örneğin; deneysel verilere dayandırma veya bir şekilde ifade etme gibi. Bu, fikir verici olabilir fakat formal ispata götürmez. Yorumsal düşünce anlamaya dair bir his verir fakat ikna edici değildir. Bir şeyin doğru olması gerektiği hissini uyandırır.

Aşağıda bu düşüncenin bir öğrenci tarafından ifadesinin bir örneği yer almaktadır:

Öğrenci A: Benim türevden anladığım kuvveti bir eksiltmek. Doğru, eğer fonksiyonun kuvveti çift ise fonksiyon çifttir ve türevi alındığında her zaman tek olur. Bu benim... benim problemi sezgisel anlayışım. Ve sonra...Bilmiyorum...Bir yere ulaşmaya çalışıyorum ama yapamıyorum, ve buraya sadece formülü ...sanırım türevin tanımını yazarım. İşte bu benim elimde olan. Buradan hiç bir sonuca ulaşamam.

Öğrenci türeve prosedürel yaklaşarak işe başlamaktadır, kendisinden derslerde de beklenen hesaplama aktivitelerine eğilimlidir. Yine sınıfta yaptığı alıştırmaların etkisiyle yukarıdaki fonksiyonu polinom olarak sınırlandırmaktadır. Ulaştığı sonuç kendisinde iddianın doğru olması gerektiğine dair bir his uyandırmaktadır, fakat bu sonucu formal bir ispata dönüştürecek bir yol bulamamaktadır. Bunun aksine, fonksiyonun polinom olma durumunu düşünen fakülte öğrencilerinden bazıları bu durumun Taylor serisi (fonksiyonların analitik olması halinde) şekline nasıl genellenebileceğini de düşünmüşlerdir. Buradan bütün öğrencilerin yaklaşımlarının tecrübesiz olmadığı görülmektedir. Yukarıdaki öğrencinin elinde iddiasını daha ileri taşıyabilecek bilgiler bulunmamaktadır (Raman, 2003).

Raman'ın çalışmasında ele aldığı düşünce şekillerinden biri de prosedürel düşüncedir.

Prosedürel Düşünce: İspat oluşturmada kullanılan ikinci bir düşünce şekli de prosedürel olarak adlandırılan düşünce türüdür. Bu düşünce şekli muhakeme gücüne ve

formal işlemlere dayanmaktadır. Bu düşünce, bireyi informal algılarının dışında formal bir ispata götürür. Prosedürel bir düşünce bireye ikna hissi verir fakat anlama hissi vermez. Bir şeylerin doğru olduğunu gösteren düşünce şeklidir.

Aşağıda bu düşüncenin bir öğretici asistan tarafından ifadesinin bir örneği yer almaktadır:

Asistan A: İspata genel yaklaşımım şu şekildedir- sana bir şeyleri kanıtlamanı söylüyor. İçinde bir takım kavramlar vardır. Onların ne anlama geldiğini bilirim. Her zaman şunu yazarım, “ ne ile işe başlamam gerekiyor.” Bunları tanım olarak ifade ederim ve daha sonra bunu kullanacak net bir durum görmeye çalışırım ve bir sonraki tanıma geçerim.

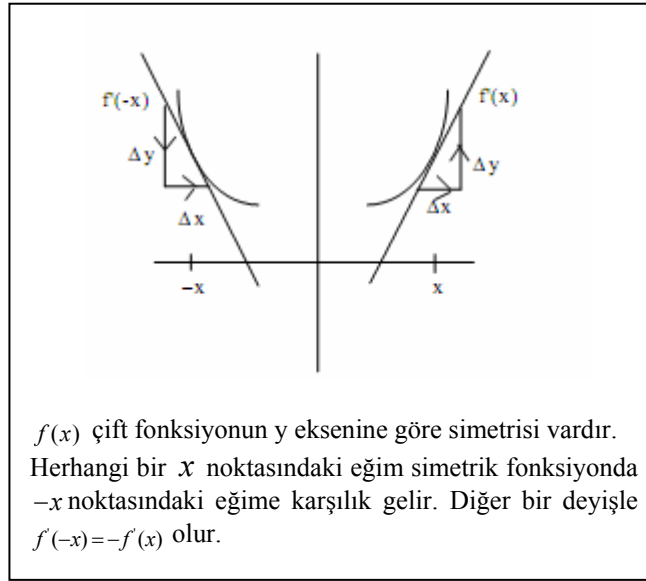
A öğrencisinin belirli örneklerden genel bir ispat oluşturmaya çalıştığı yaklaşımı özelden-genele gibi görünürken, Asistan A’nın yaklaşımı genelden-özele şeklindedir. Asistan’ ın nasıl ispat yapacağına dair, şekil olarak ilgili kitaplardakine benzeyen, genel bir anlayışı vardır ve bu prosedürü takip ederek ispata ulaşmaya çalışmaktadır. Bu haliyle onun ulaşacağı ispat doğru olmasına rağmen, ispatın neden doğru olduğuna dair, ona bir his vermemektedir (Raman, 2003).

Raman çalışmasında son olarak bizim de üzerinde durduğumuz anahtar düşünce kavramına yer vermektedir.

Anahtar Düşünce (Fikir): İspata ulaşmayı sağlayan üçüncü ve son düşünce şekli anahtar düşüncedir. Uygun mantıksal geçerlikle birlikte formal ispata dönüştürülebilen buluşsal düşüncedir. Yorumsal düşünce özel, prosedürel düşünce geneldir ve anahtar düşünce bunların ikisi arasında bağlantı sağlar. Anahtar düşünce hem anlama, hem de ikna hissi verir ve bir iddianın neden doğru olduğunu gösterir.

Profesörlerin “çift fonksiyonun türevinin tek olduğunu ispatlayınız” sorusuna yanıtları iki farklı şekilde olmuştur. Aşağıda profesörlerin yanıtlarını gösteren şekiller yer almaktadır:

1. Yanıt)



Şekil 1. Raman'ın (2002) çalışmasında Prof. B' nin ispatı

Bu yanıtı veren profesörün yanıtı hakkındaki düşünceleri aşağıdaki gibidir.

Profesör B: Çift fonksiyonu ele alalım. Burada önemli sadece tek bir nokta var o da eksenin diğer tarafındaki yansıyan grafiği. Evet bu resme bakarak yeterince ikna olabilirsiniz. Eğer resim hakkında söyleyecek yeterli sözünüz varsa bir ispat elde edebilirsiniz.

Raman (2002) çalışmasında yukarıdaki yanıtı veren profesörün yaptıklarını özetlemek gerekirse aşağıdakiler söylenebilir:

Profesör burada önce sadece grafiği çizmiş ve daha sonra bunu sembollerle ifade etmiştir. Profesörün aklında ispatın doğru olduğu hissini veren bir resim bulunmaktadır. Profesör daha sonra bu resimde yer alan fikir üzerine ispatını

oluşturmaktadır. Böylece bu anahtar fikir sayesinde hem kendi ikna olmakta hem de matematiksel olarak geçerli bir ispata ulaşmaktadır.

Bir ispata profesörün, asistanın ve öğrencinin yaklaşımları arasındaki fark nedir? Profesör ispat yaparken somut örneklerden ya da ispat yapma prosedürlerinden faydalanmıyor, bunun yerine bu iddiayı doğru yapan anahtar fikri kullanıyor. “Burada önemli olan sadece tek bir nokta var” çift fonksiyon için o da simetri. Bu fikir hem iddiayı doğrulayan bir açıklama oluyor hem de formüle dönüştürülerek iddianın doğruluğunu gösteriyor (Raman, 2003).

Bütün profesörlerin “çift fonksiyonun türevinin tek olduğunu ispatlayınız” sorusuna yanıtı aynı olmamıştır. Diğer profesör soruyu yanıtlarken farklı bir fikirden yararlanmış, türevin tanımını kullanarak soruyu ispat etmiştir.

2. Yanıt)

Suppose f is an even function, so $f(x) = f(-x)$ for all x .

$$f'(-x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x-h) - f(-x)}{-h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{-h} \quad \text{Since } f \text{ is even}$$

$$= - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= -f'(x),$$

So f' is an odd function.

Şekil 2. Raman'ın (2002) çalışmasında Prof A' nin ispatı

Profesör A için bu soruda gömülü olan fikir türevin tanımıdır. Türevin tanımını kullanarak teoremi ispat etmiştir (Raman, 2002).

Matematikçiler için bir ispat anahtar fikirlerden ibaretken, çoğu öğrenci için bu böyle değildir çünkü öğrencilerin o konu hakkındaki bilgisi anahtar fikir oluşturacak düzeyde değildir. Fakat daha da ilginç ispatın anahtar fikirlerden oluştuğunun farkında değiller. Araştırmalar gösteriyor ki matematikçiler kendi çalışmalarında anahtar fikirlere değer verirken öğretimde ve daha da önemlisi değerlendirme de anahtar düşünceye vurgu yapmıyorlar. Anahtar fikirleri müfredatın bir parçası yaparsak öğrencilerin olgun bir matematiksel ispat görüşüne sahip olmaları konusunda önemli bir adım atmış olacağız (Raman, 2003).

Anahtar fikir kavramı ilk defa Raman (2002) tarafından kullanılmıştır. Fakat bu kavramın bizim çalışmamızdaki anahtar fikir kavramından farklılıkları vardır. Aşağıda, Raman'ın (2002) çalışmasındaki anahtar fikir kavramı ile bizim çalışmamızda yer alan anahtar nokta ve fikir kavramı arasındaki farklılıklar benzerlikler anlatılmaktadır.

Raman (2002) çalışmasında profesörlerin, öğretici asistanların ve üniversite öğrencilerinin ispata bakış açılarını incelemiştir. Çalışmaya katılanların bir teoremi ispat ederken ne gibi aşamaları izlediklerini ve bir ispatın doğruluğuna neden inandıklarını incelemiştir. Bir anlamda katılımcıların zihinsel süreçlerine odaklanmıştır. Raman anahtar fikir kavramını bir metot olarak kullanmamıştır. Katılımcılardan; profesörlerin ve öğretici asistanların, ispat yaparken anahtar fikirlere başvurduklarını ortaya koymuştur. Bu anahtar fikirlere başvuranların, yaptıkları ispatların geçerli olduğuna inandıklarını belirlemiştir.

Bizim çalışmamızda ise anahtar nokta ve fikirler, öğretmen adaylarına hazır olarak verilmiştir. Öğretmen adaylarının bu nokta ve fikirlerle desteklenmiş ispatları yapabilme performansları belirlenmiştir. Öğretmen adayının, verilen anahtar nokta ve fikirler yardımıyla ispatı hangi aşamaya kadar getirebildiğine bakılmıştır. Bu çalışmada odaklanılan ortaya bir ispatın çıkmasıdır. Raman'ın (2002), çalışmasında öğrencinin yaptığı ispata olan inancı sorgulanırken bizim çalışmamızda böyle bir sorgulamaya gidilmemiştir. Öğretmen adayının ortaya koyduğu ürün üzerine odaklanılmıştır. Bizim

çalışmamızda öğretmen adayına, “*bu ispat sence geçerli mi*” , “*neden geçerli ya da neden geçerli değil*” gibi sorular yöneltilmemiştir.

Her iki çalışmadaki anahtar fikir kavramı incelendiğinde, bir teoremin anahtar fikrinin; ispatın merkezine alınan ve üzerine ispatın inşa edilmesini sağlayan fikir olduğu görülmektedir. Raman’ın (2002) çalışmasında anahtar fikir, üzerine ispatın inşa edilmesini sağlayan fikir olması yanında, bir ispatın neden geçerli olduğuna inandıran fikir olarak da ele alınmıştır.

Raman (2002) tarafından yapılan bu çalışma bizim çalışmamıza en yakın görünen çalışmadır. Sözü geçecek olan diğer çalışmalar konuyla dolaylı olarak ilgilidir.

Anahtar fikir kavramı literatürde çok fazla tartışılmamıştır fakat örnekleri de yok değildir. Örneğin Thurston bilgisi olan bir alanda okuduğu bir makale için aşağıdakileri söylemektedir:

Birkaç paragraf ve bir dizi denkleme baktıktan sonra kendi kendime şunu düşünürüm, “Ah, evet şu ve şu düşünceyi aktarmak için yeterli düzeyde kırtasiyecilik yapmışlar.” Fikir açık olduğunda biçimsel adımlar genellikle önemsiz ve gereksizdir. Sıklıkla, bu fikri, yazarın yazdığından daha kolay bir şekilde yazıp ortaya çıkarabilirdim diye düşünürüm (Thurston, 1994).

Matematikçilere göre bir ispatta önemli olan üzerine vurgu yaptığı fikirdir. Semboller ve şekiller bu fikrin taşınmasını sağlar ve sadece kırtasiyecilik görevi görürler. Hanna’ nın iddia ettiği gibi “*matematikçiler, sentaktik metodu kullananlar dahil ispatın sentaksından çok ardındaki mesajla ilgilenirler, ispatın mekaniğini önemserler fakat sonuçta daha az kayda değer bulurlar*” (Hanna, 1990). İspata dair matematikçilerin bu bakış açısı, ispatın biçimini ispatın merkezi olarak gören öğrencilerin bakış açısı ile ters düşmektedir. Öğrenciler ispat yaparken kendilerini ikna eden bir sonuca ulaşırsalar bile okulda öğretilen forma uygun olmadıkça, yaptıklarının matematiksel olduğunu düşünmüyorlar (Raman, 2002).

Yukarıdaki çalışmalarda araştırmacıların anahtar fikir kavramını tanım olarak kullanmasalar da pratikte yaptıkları uygulamalarda anahtar fikirlere yer verdikleri görülmektedir.

Balacheff (1988) öğrencilerin, örneklere dayanan informal bir çalışma ile formal bir ispat arasında ilişkilendirme yapmada zorlandıklarını ortaya koymuştur. Bir çalışmada öğrencilere bir çokgendeki köşegen sayısını gösteren genel bir ifade bulmaları istenmiştir. Bazı öğrenciler altıgeni ele almışlar ve birbirine komşu köşelerin köşegen oluşturmadıklarını fark ederek şunu yazmışlardır:

Bir çokgende 6 köşe olduğunu ele alırsak, her köşe için otomatik olarak 3 köşegen oluşmaktadır çünkü birbirine komşu iki köşe köşegen oluşturmaz. Sonuç olarak köşegen olan 3 doğru vardır (Balacheff, 1988, s 226).

Öğrenciler genel bir ispat oluşturmak istiyorlardı. Onlar “bizim yaptığımız sadece bir örnek... örnekleri kullanmamalısın...genel olmalı” dediler. Her ne kadar yukarıdaki örnekte 6’nın yerine x ; 3’ün yerine ise y konulduğunda ifade genelleştirilebilecek olsa da öğrenciler burada herhangi bir n köşeli çokgenin $n-3$ tane köşegeni olur anahtar fikrini göremediler. Formal bir cevap üretme ihtiyacı, öğrencilerin anlamsız cümleler oluşturmalarına ve bir sonuca ulaşamamalarına neden olmuştur (Raman, 2002).

BÖLÜM 3

YÖNTEM

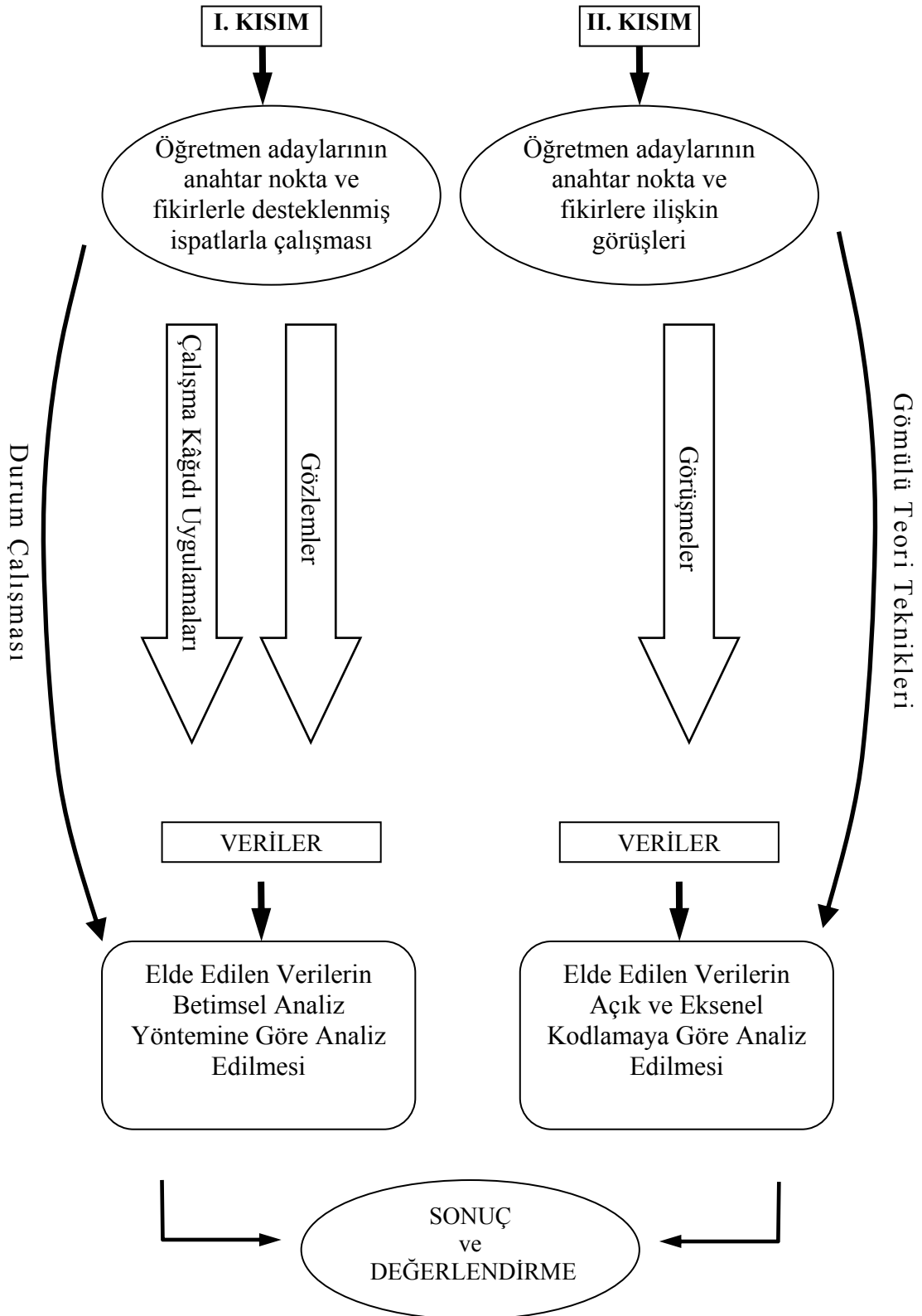
Bu bölümde araştırma modelinden, katılımcılardan ve kullanılan veri toplama araçlarından bahsedilmektedir.

3.1 Araştırma Modeli

Yapılan çalışmada nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması ve gömülü (grounded) teorinin teknikleri kullanılmıştır.

Bu araştırma iki kısımda yürütülmüştür. Araştırmada, önce matematik öğretmen adaylarına anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmiş teoremleri ispatlamayı içeren çeşitli sorular sorulmuştur. Bunun ardından öğretmen adaylarından ispatı verilmiş bir teoremin anahtar noktalarını belirlemeleri istenmiştir. Araştırmanın bu bölümünde matematik öğretmen adaylarının davranışları gözlemlenerek not tutulmuş ve çalışmanın bu kısmında durum çalışmasının teknikleri kullanılmıştır. Gözlemlerden elde edilen notlar betimsel analiz yöntemine göre analiz edilmiştir.

Araştırmanın ikinci kısmında matematik öğretmen adaylarının anahtar nokta ve fikirlerle ilgili görüşlerini almak için her bir öğretmen adayı ile görüşmeler yapılmış ve bu görüşmeler sonucunda elde edilen verilerin analizinde gömülü teorinin tekniklerinden yararlanılmıştır. Şekil 3’de yapılan araştırmanın deseni özetlenmektedir.



Şekil 3. Araştırma Deseni

3.2 Araştırmada Kullanılan Teknikler

3.2.1 Durum Çalışması

Durum çalışması; güncel bir olguyu kendi gerçek yaşam çerçevesi içinde çalışan, olgu ve içinde bulunduğu içerik arasındaki sınırların kesin hatlarıyla belirgin olmadığı ve birden fazla kanıt veya veri kaynağının mevcut olduğu durumlarda kullanılan, görgül bir araştırma yöntemidir (Yin, 1984). Diğer araştırma türlerinden ayrılan yönlerinden yola çıkarak, durum çalışmasının ‘nasıl’ ve ‘niçin’ sorularını temel alan, araştırmacının kontrol edemediği bir olgu ya da olayı derinliğine incelemesine olanak veren araştırma yöntemi olduğunu söylemek mümkündür. Bu araştırmada öğretmen adaylarının anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmiş ispatları yapabilme performanslarının nasıl olduğunu belirlemek için durum çalışması yapmanın uygun olduğu düşünülmüştür.

3.2.2 Gömülü Teori

Bu çalışmada, öğretmen adaylarının anahtar nokta ve fikirlere ilişkin görüşleri aracılığıyla anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmiş ispatları yapabilme performanslarını belirleme de gömülü teorinin tekniklerini kullanmak uygun görülmüştür. Bu yaklaşım ile yapılan fazla sayıda çalışma bulunmadığı için okuyuculara ve araştırmacılara ışık tutması için gömülü teori yaklaşımı aşağıda ayrıntılı olarak anlatılmıştır.

Gömülü teori yaklaşımı, Glaser ve Strauss’un (1967) sağlık bilimleri alanında yaptığı çalışmalardan ortaya çıkmıştır. Glaser ve Strauss sağlık alanında çalışan uzmanların, yaşamlarının son günlerini yaşayan hastalarla olan etkileşimleri konusunda çeşitli araştırmalar yapmışlar ve elde ettikleri verilerden yola çıkarak bu etkileşimin çeşitli boyutlarını ve sonuçlarını ortaya koymuşlardır. Bu çalışmalarda yeni kavramlara ve çalışanlarla hastalar arasındaki etkileşime ilişkin yeni açıklamalara ulaşılmıştır. Yani veri temelinde açıklayıcı bir kuram ortaya konmuştur. Örneğin bu çalışmalarda yaşamlarının son evresinde olan hastaların geçirdiği duygusal evreler sırasıyla “reddetme”, “kızgınlık”, “kabul” ve “kendisiyle barışma” olarak açıklanmıştır. Bu

evreler hastaların çoğunda gözlenmiş ve bu nedenle bu sürece ilişkin bir teori olma niteliği kazanmıştır (Hancock, 2004). Glaser ve Starauss (1967)'un ortaya attıkları bu kavram araştırma sorusunun yanıtı olabilecek kavramların ve süreçlerin tekrar etmeye başladığı aşamaya (doyum noktası) kadar veri toplamaya devam edilmesini gerektiren bir örnekleme yaklaşımına işaret eder. Buna göre, görüşülen öğrenci sayısı artabilir veya azalabilir.

Gömülü teoride, araştırmacı veri toplarken veya yorumlarken verilerin içine gömülü olan teoriyi ortaya çıkartır ve araştırma boyunca yeni kavram ve teorilere ulaşabilir. Bunun için araştırmacı sistematik bir şekilde deneklerden elde ettiği kategorileri kullanarak deneklerin düşünceleri ve inanışlarını net bir şekilde açıklar (Glaser ve Strauss, 1967).

Gömülü teori yaklaşımı anlamlara ve yaşantılara odaklanması açısından olgubilim (fenomoloji) geleneğine yakındır. Ancak, olgulara ilişkin teoriler ortaya koyma, olgubilim araştırmalarında söz konusu değildir. Gömülü teori yaklaşımında ise var olan kavramlara ve anlayışa özgün bir katkı söz konusudur. Gömülü teori tekniklerini kullanan araştırmacılar, yalnızca fenomenler ve sonuçları ile değil aynı zamanda süreçle de ilgilenirler.

Gömülü teori yaklaşımında gözlemler ve görüşmeler en çok kullanılan veri toplama yöntemleridir. Bunların yanında doküman analizi de gerekli görülebilir. Bu yaklaşımın en önemli özelliklerinden biri veri toplama ile analizin birlikte yürütülmesidir. Glasser ve Strauss bu sürece “sürekli karşılaştırmalı analiz” adını vermişlerdir. Bu süreçte, veriler toplandıktan hemen sonra analiz edilir ve ortaya çıkan kavramlar, olgular ve süreçler daha sonraki veri toplama aşamalarına dahil edilir. Böyle bir süreçte veri toplama aracı olarak görüşme ya da gözlem formu veri toplamanın ilk aşamasında yarı yapılandırılmış bir durumdadır ve veri toplama sürecinin sonuna kadar da son halini almaz. Hatta bazı araştırmalarda, başta öngörülen görüşme soruları ile veri toplamanın sonuna doğru oluşturulan sorular arasında önemli farklar olabilir (Hancock, 2004). Elde edilen verilerin analizi ve ortaya çıkan kavramların ve olguların doğası veri toplama aracının esnek bir yapıya sahip olmasını ve sürekli bir değişime açık olmasını gerektirir.

Gömülü teori yaklaşımı ile yapılan araştırmalarda, toplanan görüşme ve gözlem verilerinden elde edilen kavramlar ve temalar ile teorinin ilk işaretleri ortaya çıkar. Araştırmacı bu kavramlara ve temalara ilişkin gözlemlerini ve düşüncelerini, topladığı ek verilerle sürekli olarak test eder (Hancock, 2004). Bu süreçte araştırmacı kavramlar, temalar ve bunların ilişkilerine yönelik denenceler (olay ve olgulara ilişkin geçici açıklamalar) geliştirir ve bu denencelerin açıklanmasına (teyit etme ya da reddetme) yardımcı olacak verilere ulaşmaya çalışır. Bu süreç yukarıda sözü edilen “sürekli karşılaştırmalı analiz” kavramına bir örnek oluşturur. Sonuçta ulaşılan kavramlar ve temalar araştırmacının odağına ilişkin anlamlı bir açıklama ortaya koyar. Bu açıklama veriler temelinde ortaya çıkan teorilerdir (Yıldırım ve Şimşek, 2006).

Metodun Uygulanışı:

Teori oluşturmadaki ilk adım kavramsallaştırmadır. Bir kavram, etiketlenmiş bir fenomendir. Bu, bir araştırmacının veride önemli olarak belirlediği, bir olayın, nesnenin veya etkileşimin soyut bir temsilidir. Fenomeni adlandırmanın altında yatan amaç; araştırmacının benzer durumları, olayları ve nesneleri, ortak bir başlık veya sınıflandırma altında grupta imkanı vermektedir. Olaylar ve meydana gelenler ayrı elemanlar olsa da; onların ortak özellikler paylaştığı ve anlamca ilişkili oldukları gerçeği, onların gruplandırılmasına imkan sağlar (Strauss ve Corbin, 1998, s.103).

Kavramlar yığılmaya başladığı anda, analist onları daha soyut ve açıklayıcı terimler altında grupta imalıdır; bunlar kategorilerdir. Öncelikle bir kategori tanımlanır; onu hatırlamak, hakkında düşünmek ve (en önemlisi) onu, özelliklerine ve boyutlarına göre geliştirmek ve alt kategorilerine ayırarak daha ileri ayırım yapmak kolay hale gelir. Bu da (alt kategorilere ayırma), bir kategoride muhtemelen olan, ne zaman, nerede, neden, nasıl vb. nin açıklanmasıyla olur (Strauss ve Corbin, 1998, s. 114).

Bir araştırma projesinin başlangıcında kategorileri (bunların özellikleri ve boyutlarını) keşfetmek ve kavramlar arasındaki ilişkileri ortaya çıkarmak için mikro analiz yapılabilir. Mikro analize bazen “tek tek” analiz olarak başvurulsa da, aynı süreç bir kelimeye, bir cümleye ya da bir paragrafa da uygulanabilir. Kavramlar belirli bir merkez etrafında kategoriler oluşturur. Daha sonra iki zıt kavram bir kategorinin boyutunu ifade eder ve özellikler bu iki zıt kavramı birbirinden ayırt eder. Buna göre önce kavramlar ve fenomenlerin dayandığı daha genel merkezi kavramlar olan

kategoriler belirlenir, daha sonra ise kategorilerin boyutları ve özellikleri üzerinde durulur. Boyutlar ve kategoriler arasındaki ilişkiler teorinin açıklayıcı özelliğini artırır (Strauss ve Corbin, 1998).

Gömülü teori yaklaşımının ana düşüncesi, dökümü elde edilen verileri tekrar tekrar okuyarak değişkenleri (kategoriler, kavramlar ve özellikler) ve aralarındaki ilişkileri keşfetmek ya da etiketlemektir. Bu verilerin yazılı olması şart değildir. Değişkenler ve aralarındaki ilişkileri algılama kabiliyeti teorik hassaslık ile ifade edilir. Bu metodolojide, veri toplama ve analiz işlemleri değişen diziler halinde arka arkaya devam eder.

Araştırmacı mikro analiz veya benzer yöntemlerle elde ettiği verileri işleyerek kodlamalar yapar. Bu kavramsallaştırma ve kavramlar arasındaki ilişkilerin belirlenmesi süreci, yoğun bir bilgi akışı sağlayacaktır. Araştırmacı bu yoğun bilgi akışını kontrol etmek ve araştırmasını sistematik bir şekilde yürütebilmek için analizlerini, düşüncelerini, yorumlarını, sorularını ve ilerideki veri toplamalarına yönelik talimatlarını bir takım notlarda tutar. Bu notlar daha çok analistin teorik örnekleme ve meselelerdeki düşüncelerini ve fikirlerini içeren, bilgilendirici ve özetleyici olan teorik notlar olabileceği gibi, prosedürel yörüngeler ve hatırlatıcılardan oluşan işlemsel notlar olabilir (Strauss ve Corbin, 1998).

Gömülü teoride notlar üç farklı türde kodlanır.

Açık Kodlama: Açık kodlama, bir yapboz üzerinde çalışmak gibidir. Analist, organize olmak ve parçaları renklerine göre düzenlemek (bu genellikle gri tonlardaki küçük farklılıkları belirtme şeklinde olur) ve ayrı ayrı parçaları tekrar bir araya getirerek bir resim oluşturmak zorundadır. Alan notlarının ilk sayfaları genellikle biraz anlaşılmazdır. Nereden başlayacağını, neyin aranacağını ve gördüğünde nasıl fark edeceğini bilmek zordur. Birbirinden bağımsız bir bilgi yığını olarak görülebilir. Analizin değişken yapısı, önceden yazılmış notlarla ortaya çıkar. Analist, diğerlerinin ne düşündüğüne veya analizin doğru olup olmadığına bakmaksızın ilk düşünce ve fikirlerini yazar. İlk yazılmış notlar, izlenimler, düşünceler ve yönergelerden oluşur. Açık kodlamada, araştırmacı kategoriler ve onların özelliklerini oluşturmakla uğraşır.

Boyutlarına göre kategorilerin nasıl değiştiğini belirlemeye çalışır (Strauss ve Corbin, 1998).

Açık kodlama yapmanın birkaç farklı yolu vardır. Bir yolu kelime kelime analizdir. Bu kodlama şekli, verinin, sözcük grubu-sözcük grubu ve bazen kelime kelime incelenmesini içerir. Bu belki kodlamanın çok zaman alan fakat çoğu kez en üretici şeklidir. Kelime kelime kodlama yapma, özellikle çalışmanın başında önemlidir (Strauss ve Corbin, 1998, s.119).

Kodlamanın bir diğer yolu; analist bütün bir cümleyi ya da paragrafı analiz edebilir. Bir cümleyi ya da paragrafı kodlarken, analist “Bu cümleden ya da paragraftan çıkarılan ana fikir nedir?” diye sorabilir. O zaman ona bir isim verdikten sonra analist bu kavramla ilgili daha detaylı analiz yapabilir. Kodlama için bu yaklaşım her an kullanılabilir. Fakat özellikle araştırmacının farklı kategorileri varsa ve kodlamayı kesinlikle bunlara ilişkin yapmak istiyorsa, daha kullanışlı olur (Strauss ve Corbin, 1998, s.120).

Kodlamanın üçüncü bir yolu ise, tüm dökümanı dikkatle okuyup incelemek ve “Burada neler oluyor?” ve “Bu dökümanı daha önce kodladıklarımla aynı ya da farklı yapan nedir?” diye sormaktır. Bu soruların cevapları alınınca; analist dökümana dönüp, bu benzerlikler ve farklılıklar için daha kesin olarak kodlama yapabilir.

Eksensel Kodlama: Eksensel kodlama, kategorileri, onların özellik ve boyutları doğrultusunda alt kategorileri ile ilişkilendirme hareketidir. Kategorilerin nasıl ilişkilendiği ve birbirini kestiği ile ilgilenir. Eksensel kodlama sırasında analist, veri yap-bozunun parçalarını bir araya getirmeye başlar. Her bir parçanın (örneğin, kategori, alt kategorinin) bütünü açıklayıcı bir planda yeri vardır. Bir yapbozu oluştururken analist, bir parçayı alıp, “Oraya mı yerleşmeli, buraya mı?” diye sorabilir. Analistin ilk teşebbüsleri deneme yanılmadır. Daha sonra analist teorik olarak daha duyarlı hale geldikçe, kavramsal belirleyicileri ve kategoriyi birbirine uydurmak kolaylaşır. Eksensel kodlamanın amacı, kategoriler arasında bağlantı kurmak ve kategorileri özellikleri ve boyutları açısından geliştirmeye devam etmek olduğu için, eksensel kodlama sırasında yazılan kısa notlar, bu amacı yansıtmalıdır. Bunlar, ne, ne zaman, nerede, kiminle, nasıl, ne sonuçlarla sorularının cevaplarını sunarlar (Strauss ve Corbin, 1998).

Seçici Kodlama: Seçici kodlama, analizdeki son aşamayı temsil eder, bu da kavramların temel-ana bir kategori çevresinde entegre olması-bütünleşmesi ve daha fazla gelişim ve düzeltme-arıtma-inceltme ihtiyacı içinde olan kategorilerin doldurulmasıdır. Bu aşamada, kısa not ve şemalar, geliştirilen teori düşüncesinin derinliğini ve karmaşıklığını yansıtır (Strauss ve Corbin,1998).

3.3 Katılımcılar

Araştırmanın pilot ve asıl uygulama aşamalarında farklı katılımcılar araştırmaya dahil edilmişlerdir. Buna göre araştırmanın pilot uygulaması 2008-2009 eğitim öğretim yılı güz döneminde Ankara'daki bir üniversitenin Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Bölümü Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı 4. yılında bulunan bir öğretmen adayı ile yürütülmüştür. Araştırmanın asıl uygulaması ise 2008-2009 eğitim öğretim yılı bahar döneminde aynı fakültenin Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Bölümü Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı 1., 2. ve 3. yıldan birer öğretmen adayı ile yürütülmüştür.

Bu araştırma da katılımcıların matematik derslerine ilgili olmaları daha kaliteli veri elde edilmesini sağlayacağı için öğretim elemanları ile görüşülerek, derslere ilgili olan öğretmen adayları katılımcı olarak seçilmiştir. Aşağıdaki tabloda araştırma grubunun cinsiyet ve sınıflara göre dağılımı yer almaktadır.

Tablo 1.

Çalışılan Öğrencilerin Cinsiyet ve Yıllarına Göre Dağılımı

ÇALIŞMA	PİLOT	ASIL		
YIL	4.	1.	2.	3.
SAYI	1	1	1	1
CİNSİYET	Erkek	Erkek	Bayan	Bayan

3.4. Veri Toplama Araçları

Araştırmada veri toplamak amacıyla;

- i) çalışma kağıtları,
- ii) gözlem formu,
- iii) görüşme soruları kullanılmıştır.

Veri toplama araçlarına ait özellikler, bunların hazırlanma süreçleri ve uygulanma şekilleri, her bir veri toplama aracının başlığı altında ayrı ayrı sunulmuştur.

3.4.1. Çalışma Kağıtları

Çalışma kağıtları matematik öğretmen adaylarının anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmiş ispatları yapabilme performanslarını belirlemek amacıyla kullanılmıştır.

3.4.1.1 Çalışma Kağıtlarının Hazırlanması

Çalışma kağıtlarının hazırlanması için katılımcılarının her biri ile ayrı ayrı ön görüşme yapılmış ve bu görüşme sonucunda bu zamana kadar çalıştıkları matematik alanları belirlenmiştir. Bu ön görüşmelerde öğretmen adaylarına araştırma hakkında bilgi verilmiş ve onların uygun oldukları zamanlar belirlenerek bir çalışma takvimi hazırlanmıştır. Öğretmen adaylarına çalışmak istedikleri matematik alanları sorulmuş ve bu alanlarla ilgili soruları içeren çalışma kağıtları hazırlanmıştır. Her bir öğretmen adayına 5 çalışma kağıdı uygulanmıştır. Çalışma kağıtları anahtar nokta ve fikirleri içeren 1 tanım, 1 problem ve 2 teorem ile ispatı verilmiş 1 teoremden oluşmaktadır. Her soru bir kağıda hazırlanmış ve kağıdın alt kısmına üzeri yapışkan kağıtlar ile kapatılmış şekilde numaralandırılmış anahtar nokta ve fikirler verilmiştir. Her soru için anahtar nokta ve fikirler farklı sayılarda olabilmektedir. Bazı sorular için yalnızca 1 anahtar nokta ve fikir belirlenirken bazı sorular için 4 tane anahtar nokta ve fikir belirlenmiştir. Bu sorulardaki anahtar nokta ve fikirler araştırmacı tarafından belirlenmiştir. Belirlenen anahtar nokta ve fikirlerle ilgili bu alanlarda uzman kişilerin görüşleri alınmıştır. Şekil 4’de hazırlanan çalışma kağıtlarının bir formatı yer almaktadır.

SORU: (Teorem, problem veya tanımın sorulduğu alan)	
Öğretmen adayının yanıtını yazacağı alan	
1 Anahtar nokta ve fikirlerin üzeri kapalı ve numaralandırılmış olarak yer aldıkları alanlar	2 Anahtar nokta ve fikirlerin üzeri kapalı ve numaralandırılmış olarak yer aldıkları alanlar

Şekil 4. Çalışma Kağıdı Örneği

3.4.1.2. Çalışma Kağıtlarının Uygulanması

Çalışma kağıtları sırasıyla 1. yıl, 2. yıl ve 3. yıl öğretmen adayına uygulanmıştır. Öğretmen adaylarına, çalışma kağıtlarındaki ilk 4 soruyu cevaplarken ihtiyaç duyarlarsa üzeri numaralı yapışkan kağıtları kaldırabilecekleri ve altındaki ipuçlarından yararlanabilecekleri anlatılmıştır. Öğretmen adaylarına bu kısma kadar anahtar nokta ve fikir kavramından bahsedilmemiştir, bunun yerine ipucu kelimesi kullanılmıştır. Daha sonra öğretmen adaylarından bu ipuçlarını adlandırmaları istenmiş ve çalışmada kullanılan kavramın “anahtar nokta ve fikir” olduğu söylenmiştir. 5. soru için ise öğretmen adaylarından ispatı verilen teoremin anahtar nokta ve fikirlerini belirlemeleri istenmiştir. Öğretmen adayları soruları cevaplarken süre sınırlaması yapılmamıştır. Soruları cevaplayabildikleri ölçüde çalışmalara devam edilmiştir. Çalışma kağıtlarının öğretmen adaylarına uygulanması, öğretim elemanının odasında gerçekleşmiştir. Uygulama sırasında öğretmen adaylarının kendilerini rahat hissedebilecekleri bir ortam oluşturulmasına özen gösterilmiştir.

3.4.2 Gözlem Formu

Öğretmen adayları, çalışma kağıtlarındaki soruları cevaplarken göstermiş oldukları davranışlar, not tutmak suretiyle gözlemlenmiştir. Bu çalışmada matematik öğretmen adaylarının anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmiş ispatları yapabilme performanslarını belirlemek amaçlanmıştır ve bu nedenle öğretmen adaylarının performanslarını belirlemek için çalışma kağıtlarındaki soruları çözerken ortaya koydukları davranışların gözlemlenmesine ihtiyaç duyulmuştur. Araştırma sürecinde yapılan gözlemler için önce gözlem formu (bkz. Ek-1) hazırlanmış ve gözlemler bu form çerçevesinde yapılmıştır. Gözlem sürecinde araştırmacı, ortamdan bağımsız değildir. Araştırmacı ihtiyaç duyduğunda katılımcı ile diyalog kurmuştur. Katılımcıların kendilerini daha rahat hissetmeleri için gözlem yapıldığı, mümkün olduğu kadar katılımcılara hissettirilmemeye çalışılmıştır. Araştırmacı bazen küçük notlar almış ve uygulamaların hemen ardından bu notlar çerçevesinde gözlemlerini genişletmiştir.

3.4.3 Görüşme

Öğretmen adaylarına uygulanan çalışma kağıtlarının ardından, onların anahtar nokta ve fikirlerle ilgili düşüncelerini almak için her biri ile ayrı ayrı görüşme yapılmıştır. Öğretmen adayları ile yapılan görüşmeler araştırmacı tarafından önceden hazırlanan görüşme soruları (bkz. Ek-2) çerçevesinde yapılmıştır.

Öğretmen adayları ile yapılan görüşmelerde süre kısıtlaması yapılmamış, öğretmen adayının yorum yapabildiği ölçüde görüşmeye devam edilmiştir. Görüşmeler sohbet tarzında gerçekleştirilmiş, böylelikle öğretmen adaylarının daha rahat ve samimi bir şekilde soruları cevaplandırmaları hedeflenmiştir. Görüşme sürecinde verilerin kaydedilmesi için, öğretmen adaylarından izin alınarak, ses kayıt cihazı kullanılmıştır. Görüşmeler öğretim elemanının odasında gerçekleştirilmiştir. Görüşme sürecinde öğretmen adaylarının rahat cevap verecekleri bir ortam oluşmasına özen gösterilmiştir.

3.5 Verilerin Toplanması

Uygulamaya başlamadan önce, süreçle ilgili tecrübe edinmek ve çalışmanın amacına uygun hareket edebilmek için araştırma grubundaki öğretmen adaylarına benzer nitelikte seçilen 4. yıl öğretmen adayı ile pilot çalışmalar yapılmıştır. Pilot çalışma, araştırmacı tarafından iki hafta sürdürülmüştür. İlk oturumda öğretmen adayına çalışma kağıtları uygulanmıştır. İkinci oturumda ise öğretmen adayının anahtar nokta ve fikirlerle ilgili görüşleri alınmıştır.

Pilot çalışma sonrasında çalışmanın uygulama kısmında bazı kusur ve eksiklikler görülmüş ve bunlar düzeltilmiştir. Tamamlanan eksiklikler ve düzeltilen kusurlar aşağıdaki gibidir:

- 1) Pilot çalışmada katılımcı anahtar nokta ve fikirleri kullanmaktan çekinmiş ve *“ipuçlarını kullanmadan kendi kendime yaparsam daha başarılı olduğumu düşünürsünüz”* demişti. Bunun üzerine asıl uygulamada öğretmen adaylarına, sorulacak sorularla öğretmen adaylarının herhangi bir değerlendirmeye tabi tutulmayacağı anlatıldı ve öğretmen adaylarının uygulamaya alışmaları için alıştırmalar soruları hazırlandı ve bunlar öğretmen adaylarına uygulandı.
- 2) Pilot çalışma sırasında çalışma kağıtlarında yer alan anahtar nokta ve fikirlerin olduğu alanlar kesilerek arkaya kıvrılmıştı fakat bu durumda öğretmen adayı bir anahtar noktayı açmaya çalıştığı anda diğer anahtar noktayı da istemeden açmak zorunda kalıyordu. Bu uygulamadaki kusur, asıl çalışmada anahtar nokta ve fikirlerin üzeri yapışkan kağıtlarla kapatılarak düzeltilmiştir.
- 3) Pilot çalışmanın ardından çalışma kağıtlarındaki soru sayısı arttırılmış ve görüşme soruları düzenlenmiştir. Örnek olarak, ilk hazırlanan görüşme sorularında *“anahtar nokta ve fikirleri açtın mı”* şeklinde bir soru yer alıyordu fakat yapılan gözlemde zaten öğretmen adayının

anahtar nokta ve fikirleri açıp açmadığı görölüyordu. Bu nedenle bu gibi sorular görüşme sorularından çıkarılmıştır.

- 4) Pilot çalışma esnasında araştırmacı, öğretmen adayının davranışlarını gözlemlemiş ve gözlem yapma konusunda tecrübe kazanmıştır.

Pilot çalışma tamamlandıktan sonra, katılımcılarla öğretim elemanının odasında bireysel olarak uygulamalara başlanmıştır. Öğretmen adayları bu uygulamada anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmiş soruları yanıtlamışlardır. Bu süreçte öğretmen adaylarının davranışları gözlemlenmiştir. Bu uygulamanın ardından öğretmen adayları ile tekrar bir araya gelinmiş ve görüşmeler yapılmıştır.

3.6 Verilerin Analizi

Araştırmanın ilk kısmında; çalışma kağıtları ve gözlem notlarından elde edilen veriler, nitel veri analiz yöntemi olan betimsel analize göre analiz edilmiştir. Betimsel analize göre, elde edilen veriler, daha önceden belirlenen temalara göre özetlenir ve yorumlanır. Veriler, araştırma sorularının ortaya koyduğu temalara göre düzenlenebileceği gibi, görüşme ve gözlem süreçlerinde kullanılan sorular ya da boyutlar dikkate alınarak da sunulabilir. Betimsel analizde, görüşülen ya da gözlenen bireylerin görüşlerini çarpıcı bir biçimde yansıtmak için doğrudan alıntılara sık sık yer verilir. Bu tür analizde amaç, elde edilen bulguları düzenlenmiş ve yorumlanmış bir biçimde okuyucuya sunmaktır. Bu amaçla elde edilen veriler, önce sistematik ve açık bir biçimde betimlenir. Daha sonra açıklanan bu betimlemeler açıklanır ve yorumlanır, neden sonuç ilişkileri irdelenir ve bir takım sonuçlara ulaşılır (Yıldırım ve Şimşek, 2006, s. 224). Bu araştırmada da katılımcıların anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmiş ispatlarını yapabilme performanslarını ortaya koymak için katılımcıların soruları çözerken sergilemiş oldukları davranışlara doğrudan yer verilmiştir. Daha sonra bu davranışlar yorumlanmış ve bazı kategorilere ulaşılmıştır. Katılımcıların davranışları bu kategoriler çerçevesinde özetlenmiştir.

Araştırmanın ikinci kısmında; öğretmen adayları ile yapılan görüşmelerden elde edilen veriler analiz edilirken gömülü teorinin teknikleri kullanılmıştır. Öğretmen adaylarının görüşme kayıtları metin olarak düzenlenmiş ve bu metindeki cümleler açık kodlamaya göre etiketlenmiş ve bazı kavramlara ulaşılmıştır. Kavramların bulunuşu, açık kodlamanın odak noktasıdır. Kavramları geliştirmek için metin açılmalı, düşünceler, fikirler ve bu konuda içerilen anlamlar açığa çıkarılmalıdır. Bu ilk adım olmaksızın takip eden iletişim ortaya çıkamaz (Strauss ve Corbin, 1998).

Araştırmada metin açılıp cümleler etiketlenerek, kavramlar ortaya çıkarıldıktan sonra bu kavramlar, benzer ve ilişkili olma yönünden kategorilenmiştir. Böylece kavramlardan kategorilere ulaşılmıştır. Bu kategorilerin eksensel kodlamaya göre boyutlarına ulaşılmış bu boyutlar arasındaki ilişki ortaya çıkarılmıştır. Son olarak da kategoriler boyutları açısından eksensel kodlamaya göre birbiri ile ilişkilendirilmiştir.

3.7 Araştırmada Geçerlik ve Güvenirlik Sağlama Çalışmaları

Bu araştırmada geçerlik ve güvenirliliği sağlamak için bazı yollar izlenmiştir:

- 1) Bu araştırmada veri kaynağı olan katılımcılar, katılımcıların çalıştığı ortam ve süreç ve veri toplama ve analiz yöntemleri ayrıntılı bir şekilde tanımlanmıştır. Gözlem ve görüşmelerin nasıl yapıldığı, verilerin nasıl kaydedildiği, dokümanların nasıl analiz edildiği, elde edilen sonuçların nasıl birleştirildiği ve sunulduğu gibi yönteme ilişkin konular çalışma içerisinde ayrıntılı bir şekilde anlatılmıştır.
- 2) Toplanan veriler betimsel bir yaklaşımla okuyucuya sunulmuştur. Yani araştırmacı; görüşme, gözlem ve dokümanlar yoluyla elde ettiği verileri herhangi bir yorum katmadan okuyucuya sunmuş, doğrudan alıntılara yer vermiş ve yorumunu verileri sunduktan sonra yapmıştır.
- 3) Bu araştırmada, öğretmen adaylarının anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmiş ispatları yapabilme performanslarını belirlemek için öğretmen adaylarına çalışma kağıtları uygulanmış ve öğretmen adaylarının uygulamalar sürecindeki

davranışları gözlemlenmiştir. Bu uygulamaların ardından öğretmen adaylarının anahtar nokta ve fikirlere ilişkin görüşleri görüşme yoluyla elde edilmiştir. Bu uygulamalarda gözlem yoluyla elde edilen veriler görüşme yoluyla elde edilen verilerle desteklenmiş bir bakıma teyit edilmiştir.

- 4) Verilerin analizi ve ulaşılan sonuçların teyit edilmesi için bu alanda uzman bir kişinin görüşlerine başvurulmuştur.

BÖLÜM 4

BULGULAR VE YORUMLAR

Bu bölümün birinci kesiminde, matematik öğretmen adaylarının, anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmiş ispatları yapabilme performanslarını belirlemeyi amaçlayan çalışma kağıtlarından elde edilen bulgular ve yorumlara yer verilmiştir.

İkinci kesimde ise öğretmen adayları ile yapılan görüşmeler ve bu görüşmelerden elde edilen bulgular ve yorumlara yer verilmiştir.

4.1. Öğretmen Adaylarının Anahtar Nokta ve Fikirlerle Desteklenmiş Soruları Çözerken Ortaya Koydukları Tepkiler

Çalışmanın 1. alt problemi “araştırmaya katılan öğretmen adayları anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmiş soruları cevaplarken ne tür tepkiler ortaya koymaktadırlar?” dir. Araştırmanın bu kısmında bu problem yanıtlanacaktır. Öğretmen adaylarının anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmiş soruları yanıtlarken göstermiş oldukları davranışlar gözlemlenmiştir. Aşağıda her bir öğretmen adayı tek tek ele alınarak bu gözlem notlarından ortaya çıkan bulgulara ve yorumlara yer verilecektir.

4.1.1. 1. Yıl Öğretmen Adayının Tepkileri

Öğretmen adayına anahtar nokta ve fikirleri içeren; 2 teorem, 1 problem ve 1 tanım sorulmuştur. 1. yıl öğretmen adayının isteği üzerine sorular ‘Soyut Matematik’ konularından hazırlanmıştır. Soruların her biri bir A4 kağıdına hazırlanmış ve anahtar nokta ve fikirlerin üzeri yapışkan kağıtlarla kapatılarak numaralandırılmıştır. Öğretmen adayına eğer ihtiyaç duyarsa yapışkan kağıtları kaldırarak altındaki ipuçlarından yararlanabileceği anlatılmıştır. Öğretmen adayının çalıştığı sorulara sırayla yer verilmiş ve her soruyu yanıtlarken ne tür tepkilerde bulunduğu bu soruların altında anlatılmıştır.

1.Aşağıdaki teoremi ispatlayınız. İhtiyaç duyduğunuzda rakamların altındaki ipuçlarından yararlanabilirsiniz

Teorem: $f : X \rightarrow Y$ ve $g : Y \rightarrow Z$ fonksiyonlarının tersi varsa $g \circ f : X \rightarrow Z$ fonksiyonunun da tersi vardır ve $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ olur.

1

Teorem: Bir $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonunun tersinin var olması için gerek ve yeter koşul f 'nin birebir ve örten olmasıdır.

Bu teorem $g \circ f$ içinde geçerlidir.

2

i) f birebirdir $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X$ için
 $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2, \dots$

ii) $f : X \rightarrow Y$ örtendir $\Leftrightarrow \forall y \in Y$ için
 $\exists x \in A, \dots$

3

$f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin
 $f \circ g : I_y$ ve $g \circ f : I_x$ eşitliklerini sağlayan bir $g : Y \rightarrow X$ fonksiyonu varsa g 'ye f 'nin ters fonksiyonu adı verilir.

Şekil 5. Çalışma Kağıdı-1 (Anahtar Nokta ve Fikirlerle Desteklenmiş Teorem)

Birinci yıl öğretmen adayına sorulan 1. soru fonksiyon kavramı ile ilgili bir teoremin ispatıydı. Öğretmen adayı bu soruda $g \circ f$ fonksiyonunun tersinin $f^{-1} \circ g^{-1}$ fonksiyonuna eşit olduğunu gösterecekti. Bu soruda öncelikle bir fonksiyonun tersi kavramı yer almaktadır. Bir fonksiyonun tersinin var olması gerek ve yeter koşul fonksiyonun birebir ve örten olmasıdır. Burada da karşımıza bir fonksiyonun birebirliği ve örtenliği tanımları çıkmaktadır. Sorunun içerisinde yer alan diğer bir kavram ise bileşke fonksiyon kavramıdır. Teoremin ispatı incelenmiş içerisinde yer alan kavramlar göz önünde bulundurularak bu teorem için 3 tane anahtar nokta belirlenmiştir. Bu anahtar noktalar numaralandırılırken öğretmen adayının soru içerisinde bu noktalarla karşılaşacağı sıralama göz önüne alınmıştır.

Öğretmen adayı teoremi okumuş ve düşünmeye başlamıştır fakat başlangıçta bir çözüme girişiminde bulunmamıştır. Aklına birkaç fikir geldiğini, fakat nereden başlayacağını kestiremediğini dile getirmiştir. Bu davranışlardan, öğretmen adayının teoremi ispat ederken yönlendirilmeye ihtiyaç duyduğu söylenebilir.

Öğretmen adayı 1 numaralı anahtar noktayı açmış ve okumuştur. Verilen 1 numaralı anahtar nokta “bir f fonksiyonunun tersinin var olması için gerek ve yeter koşulun o fonksiyonun birebir ve örten olmasıdır” teoremini içermektedir. Öğretmen adayı anahtar noktadaki boşlukları doldurmuş ve teoremi ispat etmeye nereden başlayacağını anladığını dile getirmiştir. Buradan anahtar noktanın, öğretmen adayının zihnindeki dağınık fikirleri toplamasına yardımcı olduğu anlaşılmaktadır.

Anahtar noktayı açana kadar soruyu çözmek için herhangi bir girişimde bulunamayan öğretmen adayı, 1 numaralı anahtar noktayı açtığı anda, Şekil 6’ da yer alan yanıtları yazmaya başlamıştır. Öğretmen adayı teoremi ispatlamaya fonksiyonun birebirliğini ve örtenliğini göstermekle başlamıştır ve bu sorunun başlangıcı için bu doğru bir adımdır.

$\therefore g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
 $g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow g(x_1) = g(x_2)$ fonk. 1-1 ve örten ise
 $x_1 = x_2$ dir. $x_1 = f(x_1)$ $x_2 = f(x_2)$ olursak $f(x_1) = f(x_2)$
 $(x_1, x_2 \in Y)$ dir. 1-1 ve örten olduğundan $x_1 = x_2$ dir.
 $\therefore g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2$ dir. Böyleyse $g \circ f$ 1-1' dir.
 $\forall x \exists y (f(y) = x)$
 $\bullet g \circ f(x) \Rightarrow \exists y (g \circ f(y) = x)$ $y \in Z$ için g 1-1 örten old.
 $g(l) = y$ oğ. $l \in Y$ vardır. Eğer f fonksiyonunda örten ise
 $\forall l \in Y$ için $f(k) = l$ oğ. bir k sayısı vardır. Yani
 $g(f(k)) = l$ oğ. $k \in X$ vardır. $\forall l \in Z$ için $\exists k \in X$ vardır.

Şekil 6. Birinci Yıl Öğretmen Adayının Cevap Kağıdından Bir Bölüm

Verilen 1 numaralı anahtar nokta da bir f fonksiyonun tersinin var olması için o fonksiyonun birebir ve örten olması gerektiği yazılıydı fakat bir fonksiyonun birebir ve örten olmasının ne demek olduğu yazılı değildi. Fakat öğretmen adayı bu tanımlara ihtiyaç duymadan Şekil 6'daki bölümü yazabilmiştir. Buradan öğretmen adayının bir fonksiyonun birebirlik ve örtenlik tanımını bildiği görülmektedir. Öğretmen adayı bu nedenle 2 numaralı anahtar noktayı kullanmamıştır. Buradan öğretmen adayının önceki bilgilerinin varlığı, anahtar noktanın onun için işlevsiz hale gelmesine neden olduğu söylenebilir.

Birinci yıl öğretmen adayı bu kısma kadar $g \circ f$ fonksiyonun tersinin var olduğunu göstermiş oldu. Buradan sonra yapması gereken $g \circ f$ fonksiyonunun tersinin $f^{-1} \circ g^{-1}$ fonksiyonuna eşit olduğunu göstermekti. Burada bir fonksiyonun tersi kavramı yer almaktadır. Bu nedenle 3 numaralı anahtar nokta ters fonksiyonun tanımını içermektedir. Öğretmen adayı teoremin ikinci kısmını ispat etmeye başladığında yine duraksamıştır. 3 numaralı anahtar noktayı açınca nasıl göstereceğini anladığını dile getirmiş ve teoremin ikinci kısmını ispat etmeye başlamıştır. Şekil 7'de öğretmen adayının ispatının kalan kısmı yer almaktadır.

2. Aşağıdaki teoremi ispatlayınız. İhtiyaç duyduğunuzda rakamların altındaki ipuçlarından yararlanabilirsiniz.

Teorem: $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonunun tersi varsa, tektir.

1

Tanım:

$f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin

$f \circ g : I_y$ ve $g \circ f : I_x$ eşitliklerini sağlayan bir $g : Y \rightarrow X$

fonskiyonu varsa g 'ye f 'nin ters fonskiyonu.. adı verilir.

2

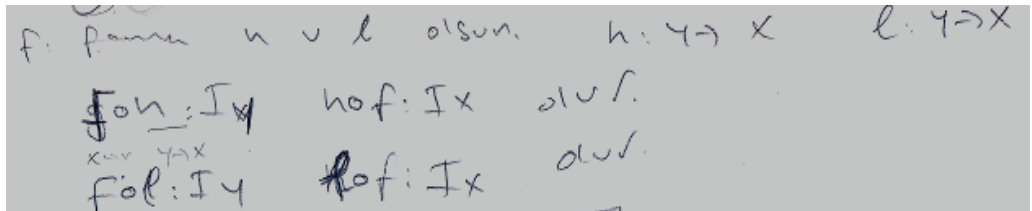
Teorem: $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ ve $h : Z \rightarrow T$ fonskiyonları

verildiğinde $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ olur.

Şekil 8. Çalışma Kağıdı-2 (Anahtar Nokta Fikirlerle Desteklenmiş Teorem)

Birinci yıl öğretmen adayına sorulan 2. teorem yine fonksiyon kavramı ile ilgili idi. Öğretmen adayı bu teoremden bir fonksiyonun tersinin tek olduğunu gösterecekti. Teorem içerisinde bir fonksiyonun tersi kavramı geçmektedir. Teoremin ispatı incelenmiş ve bu soru için 2 tane anahtar nokta belirlenmiştir. 1 numaralı anahtar nokta ters fonksiyon kavramını içermektedir. 2 numaralı anahtar nokta ise fonksiyonların bileşke işleminin değişme özelliğini içermektedir.

Bu teoremin ispatı için olmayana ergi yöntemi kullanılabilir ve f fonksiyonunun 2 tane tersinin olduğu varsayılabilir. Öğretmen adayı da ispata başlarken bu yöntemi seçmiştir. Soruyu çözmeye, f fonksiyonunun h ve l gibi iki tane tersinin var olduğunu kabul ederek başlamıştır. Öğretmen adayı buradan sonra ne kullanacağını bilememiş ve devam edememiştir. Bunun üzerine 1 numaralı anahtar noktayı açmıştır. 1 numaralı anahtar noktada bir fonksiyonun tersinin tanımı yer almaktaydı öğretmen adayı bu tanımın yardımı ile Şekil 9'da yer alan bölümü yazmıştır.



Şekil 9. Birinci Yıl Öğretmen Adayının Cevap Kağıdından Bir Bölüm.

Birinci yıl öğretmen adayı ispatın bu kısma kadar olan bölümünü 1 numaralı anahtar noktayı kullanarak yazmıştır. Bu kısımdan sonra 2 numaralı anahtar noktayı açmamıştır ve ispatı fonksiyonun tanımını kullanarak tamamlamıştır. 2 numaralı anahtar nokta ise fonksiyonlarda bileşke işleminin değişme özelliği ile ilgili idi. Şekil 10'da öğretmen adayının yaptığı ispatın kalan kısmı yer almaktadır.

$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ | farklı sonucu gerektirir.
 $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(h(x_1)) = f(h(x_2))$ dır.
 $h(x_1) = y_1$. $h(x_2) = y_2$
 $f \circ h = f \circ h$ olsun
 $(f \circ h)(y) = f(h(y)) = I_y$
 $f^{-1} = h$ olsun
 $f \circ h = f \circ h(y) = f(h(y)) = I_y$

Şekil 10. Birinci Yıl Öğretmen Adayının Cevap Kağıdından Bir Bölüm.

Şekil 10'da görüldüğü üzere öğretmen adayı 2 numaralı anahtar noktada belirtilenden farklı bir yol kullanarak soruyu çözdüğü için 2 numaralı anahtar nokta katılımcı için işlevsiz hale gelmiştir.

Bu soruda öğretmen adayı, soruyu belli bir yere kadar getirip devamını getirememesi, soru ile ilgili önemli tanımları unutma davranışlarını göstermiştir. Öğretmen adayı anahtar noktanın yardımı ile ispatı başarı ile tamamlayabilmiştir. Burada anahtar nokta, öğretmen adayının soru ile ilgili önemli bir kavramsal bilgiyi hatırlamasını sağlamıştır.

3. Aşağıdaki problemi çözünüz. İhtiyaç duyduğunuzda rakamların altındaki ipuçlarından yararlanabilirsiniz.

PROBLEM: $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $f((x, y)) = x^2 + y^2$

- i) f fonksiyonu birebir midir?
- ii) f örten midir?
- iii) $A = \{(x, y), x + y = 1\}$ ise $f(A) = ?$
- iv) $B = [0, 1] \Rightarrow f^{-1}(B) = ?$

1

- i) f birebirdir $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X$ için
 $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
- ii) $f : X \rightarrow Y$ örtendir $\Leftrightarrow \forall y \in Y$ için $\exists x \in A$

2

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}$$

3

$$f : X \rightarrow A$$

$$f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\}$$

Şekil 11. Çalışma Kağıdı-3 (Anahtar Nokta ve Fikirlerle Desteklenmiş Problem)

Birinci yıl öğretmen adayına teoremlerin ardından anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmiş bir problem soruldu. Bu problem fonksiyon kavramı ile ilgili idi. Problemden öğretmen adayına f fonksiyonu $f((x, y)) = x^2 + y^2$ şeklinde tanımlanmış ve ilk 2 şıkta öğretmen adayının bu fonksiyonun birebir ve örten olduğunu göstermesi istenmiştir. Burada karşımıza yine bir fonksiyonun birebir ve örten olma tanımları çıkmaktadır. 1 numaralı anahtar nokta da buradan hareketle bir fonksiyonun birebir ve örten olması tanımını içermektedir. Öğretmen adayının ispatladığı teoremler incelendiğinde bu tanımları bildiği görülmektedir ve bu nedenle 1 numaralı anahtar noktadan yararlanmamıştır. Anahtar noktanın ne içerdiğini görmek için üzerindeki kağıdı kaldırmış fakat anahtar noktayı kullanmamıştır.

Öğretmen adayı, problemin ilk iki şikkını çözebilecek yeterli ön bilgiye sahipti. Buradan öğretmen adaylarının sahip oldukları ön bilgilere göre anahtar noktaların faydalı olup olmayacağının değişeceği söylenebilir. Öğretmen adayı eğer yeterli ön bilgiye sahip ise anahtar noktaya ihtiyaç duymadan soruyu kendisi çözebilir fakat öğretmen adayı yeterli ön bilgiye sahip değilse anahtar noktanın yardımıyla çözüme ulaşacağı söylenebilir.

Öğretmen adayına problemin 3. şikkında bir A kümesi tanımlanmış ve bu kümenin soruda tanımlanan f fonksiyonu altındaki görüntüsünü bulması istenmiştir. Burada bir kümenin bir fonksiyon altındaki görüntüsü tanımı 2 numaralı anahtar noktada verilmiştir. Öğretmen adayı problemin 3. şikkını çözmek istediğinde bu tanımı hatırlayamamıştır. Öğretmen adayı 2 numaralı anahtar noktayı açmış ve ihtiyacı olan tanımı görmüştür. Öğretmen adayı bu tanımı bildiğini fakat hatırlayamadığını ifade etmiştir. Öğretmen adayı anahtar noktanın da yardımıyla problemin 3. şikkını cevaplamıştır. Buradan; anahtar noktaların, öğretmen adaylarına unuttukları küçük tanımları hatırlatarak bir sorunun bütünü çözmelerine yardımcı olduğu söylenebilir.

Öğretmen adayının problemin 4. şikkını çözebilmesi için, bir kümenin bir f fonksiyonu altındaki ters görüntüsünün tanımına ihtiyacı vardır. Öğretmen adayı önce hatırladığı bilgiler ışığında Şekil 12' deki bölümü yazmıştır.

$$f^{-1}(B) = \{(x,y) \in B \wedge f^{-1}(B) \in (x,y)\}$$

$$= \{\mathbb{R}^2 \mid [0,1] \subseteq \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \wedge f^{-1}([0,1]) \in \mathbb{R}^2\}$$

Şekil 12. Birinci Yıl Öğretmen Adayının Cevap Kağıdından Bir Bölüm.

Öğretmen adayı Şekil 12'de yazdıklarından sonra devam edememiştir. Öğretmen adayı 3 numaralı anahtar noktayı açmış ve bir kümenin bir f fonksiyonu altındaki tanımını görmüştür. Bunun üzerine cevabını daha doğru bir şekilde ifade ederek problemi Şekil 13' deki gibi yanıtlamıştır.

$$f^{-1}(B) = \{(x,y) : f(x,y) \in B\}$$

$$= \{(x,y) : x^2 + y^2 \in B\}$$

$$= \{(x,y) : x^2 + y^2 \in [0,1]\}$$

$$(x,y) \quad 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$$

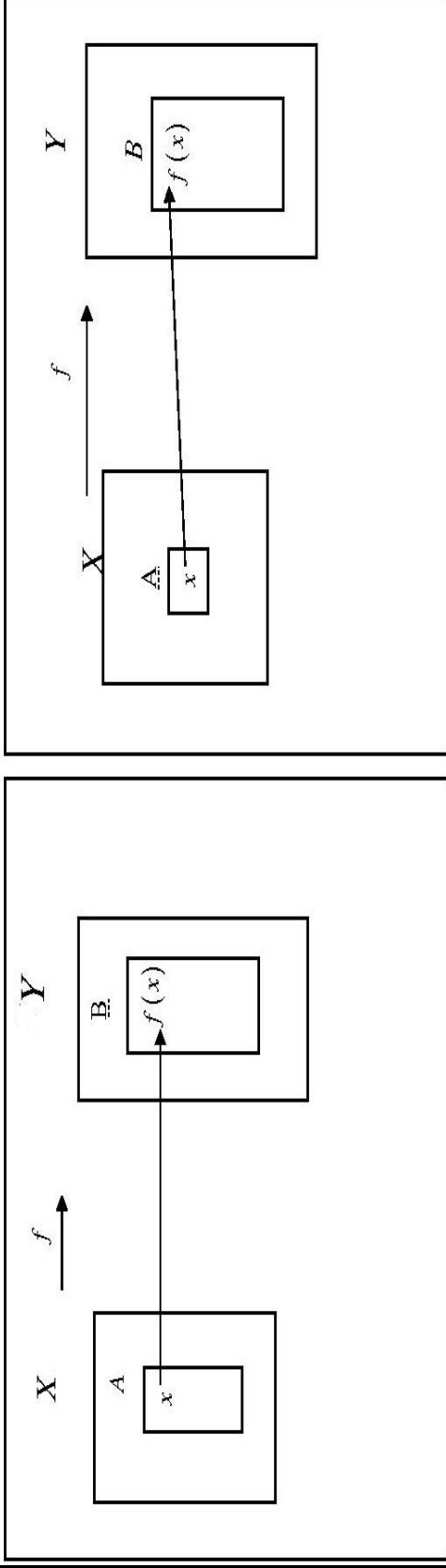
birim disk.

Şekil 13. Birinci Yıl Öğretmen Adayının Cevap Kağıdından Bir Bölüm

4. Bir $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilmiş olsun.
- i) Bir $A \subseteq X$ için A 'nın f altındaki görüntü kümesini tanımlayınız.
 - ii) Bir $B \subseteq Y$ için B 'nin f altındaki ters görüntü kümesini tanımlayınız.

1

2



Şekil 14. Çalışma Kağıdı-4 (Anahtar Nokta ve Fikirlerle Desteklenmiş Tanım)

Birinci yıl öğretmen adayına sorulan 4. soru bir kümenin herhangi bir f fonksiyonu altındaki görüntü ve ters görüntü kümelerinin tanımı idi. Öğretmen adayı bu soruyu yanıtlarken anahtar noktaları kullanmaya gerek duymamıştır. Soruyu sahip olduğu ön bilgilerle yanıtlamıştır. Şekil 15 'de öğretmen adayının cevabı yer almaktadır.

Handwritten mathematical definitions for image and pre-image sets:

$$i) f(A) = \{ f(x) \mid x \in A \text{ ve } f(x) \in Y \}$$

$$ii) f^{-1}(B) = \{ f^{-1}(y) \mid y \in B \text{ ve } f^{-1}(y) \in X \}$$

Şekil 15. Birinci Yıl Öğretmen Adayının Cevap Kağıdından Bir Bölüm.

Şekil 15’de görüldüğü gibi, öğretmen adayının sahip olduğu ön bilgiler yeterli ise anahtar noktaya ihtiyaç duymadan soruyu çözebileceği söylenebilir. Anahtar noktanın işlevinin öğretmen adayının ön bilgisine göre farklılık göstereceği söylenebilir.

Öğretmen adayı kendisine sorulan bu 4 soruda anahtar nokta ve fikirlerden yararlanarak soruları doğru bir şekilde yanıtlamıştır. Anahtar noktaların yardımıyla soruları çözmeye nasıl ve nereden başlayacağını anlamış, unuttuğu tanım, teorem ve geçişleri hatırlamıştır. Öğretmen adayı soruyu çözerken takıldığı yerlerde anahtar noktaların yardımına başvurmuş ve böylece soruları kendi başına, doğru olarak yanıtlayabilmiştir.

Bu uygulamalar bitene kadar öğretmen adayına anahtar nokta ve fikir kavramından söz edilmemiştir. “Anahtar nokta ve fikir” kavramı yerine “ipucu” kavramı kullanılmıştır. Öğretmen adayından bu ipuçlarına bir isim vermesi istenmiştir ve öğretmen adayının cevabı aşağıdaki gibi olmuştur;

“Can alıcı nokta, duraklar, ekipman, bir işi yapmanız gerekiyor onları kullanıyorsunuz, sonuçta onlara ihtiyacınız var”

Öğretmen adayının bu görüşü anahtar nokta ve fikir kavramını anladığını göstermektedir.

Öğretmen adayına ek olarak son bir soru sorulmuş ve bu soruda öğretmen adayına herhangi bir anahtar nokta ve fikir verilmemiştir. Öğretmen adayına bir teorem ispatıyla beraber verilmiş ve bu teorem için anahtar nokta ve fikirleri belirlemesi istenmiştir.

5. Aşağıdaki teoremin ispatının anahtar noktalarını belirleyip yazınız.

Teorem: Bir $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonunun tersinin var olması için gerekli ve yeterli koşul f 'in birebir ve örten olmasıdır.

İspat :

$\Rightarrow$: $f : X \rightarrow Y$ 'nin tersi var olsun. O halde $f^{-1} : Y \rightarrow X$ fonksiyonu $f^{-1} \circ f = I_X$ ve $f \circ f^{-1} = I_Y$ eşitliklerini sağlar.

$x_1, x_2 \in X$ için

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2))$$

$$\Rightarrow (f^{-1} \circ f)(x_1) = (f^{-1} \circ f)(x_2)$$

$$\Rightarrow I_X(x_1) = I_X(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

bulunduğuna göre f birebirdir. Diğer yandan herhangi bir $y \in Y$ ögesi için $f^{-1}(y) \in X$ dir ve

$$f(f^{-1}(y)) = (f \circ f^{-1})(y) = I_Y(y) = y$$

olduğundan f örtendir.

$\Leftarrow$: Karşıt olarak f 'in birebir ve örten olduğunu varsayalım ve f^{-1} 'in varlığını gösterelim. Y kümesinden X kümesine bir g fonksiyonunu şöyle tanımlayalım: Her bir $y \in Y$ için, f örten olduğundan, $f(x) = y$ olacak biçimde en az bir $x \in X$ vardır. f birebir olduğundan bu koşulu sağlayan bir ve yalnız bir $x \in X$ bulunur. Böylece $g : Y \rightarrow X, g(y) = x$ şeklinde bir fonksiyon oluşturduk. Şimdi $g \circ f = I_X, f \circ g = I_Y$ olduğunu göstermeliyiz.

$x \in X$ için $f(x) = y$ dersek, $g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x)$ olduğundan $g \circ f = I_X$ dir. Yine $y \in Y$ için $f(x) = y$ olacak şekilde bir ve yalnız bir $x \in X$ ögesinin varlığını bilmekteyiz. Böylece $g(y) = x$ olmaktadır. Buradan da $f \circ g(y) = f(g(y)) = f(x) = y \Rightarrow f \circ g = I_Y$ olarak istenen çıkar. O halde $g = f^{-1}$ olup f 'in tersi vardır.

Birinci yıl öğretmen adayı, son olarak kendisine ispatı verilen teoremin anahtar noktalarını belirlemiştir. Öğretmen adayının belirlediği anahtar noktalar aşağıdaki gibidir:

$$1. \text{ i) } f \text{ birebirdir} \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\text{ii) } f : X \rightarrow Y \text{ örtendir} \Leftrightarrow \forall y \in Y \text{ için } \exists x \in X [f(x) = y]$$

$$2. \quad f : X \rightarrow Y \text{ fonksiyonu verilsin } f \circ g : I_y \text{ ve } g \circ f : I_x \text{ eşitliklerini sağlayan bir} \\ g : Y \rightarrow X \text{ fonksiyonu varsa } g \text{ 'ye } f \text{ 'nin tersi adı verilir.}$$

4.1.2 2. Yıl Öğretmen Adayının Tepkileri

Öğretmen adayına, anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmiş 2 teorem, 1 problem ve 1 tanımdan oluşan 4 soru sorulmuştur. 2. yıl öğretmen adayı için sorular kendi isteği üzerine ‘Genel Matematik’ konularından hazırlanmıştır. Son olarak da bir teoremin ispatı verilmiş ve buradaki anahtar noktaları belirlemesi istenmiştir. Öğretmen adayının cevapladığı sorulara sırasıyla yer verilmiş ve öğretmen adayının bu soruları çözerken göstermiş olduğu davranışlar ve bunlara ilişkin yorumlar bu sorular altında anlatılmıştır.

1. Aşağıdaki teoremi ispatlayınız. İhtiyaç duyduğunuzda rakamların altındaki ipuçlarından yararlanabilirsiniz

Teorem: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ve $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ olsun. O zaman $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A + B$ dir.

1

Teorem: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \equiv \forall \varepsilon > 0$ iken
 $\exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta$ için
 $|f(x) - A| < \varepsilon$

2

(Üçgen eşitsizliği)
 $|x + y| \leq |x| + |y|$

Şekil 17. Çalışma Kağıdı-6 (Anahtar Nokta ve Fikirlerle Desteklenmiş Teorem)

İkinci yıl öğretmen adayına sorulan ilk soru limit kavramını içeren bir teoremin ispatıydı. Bu soruda $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ eşitliğinin gösterilmesi isteniyordu. Teoremden limit kavramı öne çıkmaktadır. 1 numaralı anahtar noktada limit kavramının tanımı verilmiştir.

İkinci yıl öğretmen adayı teoremi okumuştur ve limit tanımını kullanması gerektiğini ifade etmiştir. Teoremi ispat etmeye çalışmış fakat limit tanımını hatırlayamamıştır. Bunun üzerine 1 numaralı anahtar noktayı açmıştır, Anahtar noktadaki boşlukları araştırmacının da yardımıyla doldurmuştur. Öğretmen adayı 1 numaralı anahtar noktadaki limit tanımını kullanarak teoremi ispat etmeye başlamıştır. Şekil limit tanımlarını yazmıştır.

Handwritten mathematical definitions of limits for functions f and g :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \equiv \forall \epsilon_1 > 0 \text{ iken } \exists \delta_1 > 0 : 0 < |x - a| < \delta_1 \text{ iken } |f(x) - A| < \epsilon_1/2$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B \equiv \forall \epsilon_2 > 0 \text{ iken } \exists \delta_2 > 0 : 0 < |x - a| < \delta_2 \text{ iken } |g(x) - B| < \epsilon_2/2$$

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} \quad \exists \delta > 0 \text{ iken}$$

Şekil 18. İkinci Yıl Öğretmen Adayının Cevap Kağıdında Limit Tanımlarını Yazdığı Bölüm.

Daha sonra bu limit tanımlarını Şekil 19'daki gibi taraf tarafa toplamıştır.

Handwritten mathematical proof of the limit of a sum:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = A + B \equiv \forall \epsilon > 0 \text{ iken } \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \text{ iken}$$

$$|f(x) + g(x) - (A + B)| < \epsilon \text{ dir.}$$

Şekil 19. İkinci Yıl Öğretmen Adayının Cevap Kağıdından Bir Bölüm.

Bu kısma kadar öğretmen adayı teoremin ispatını başarılı bir şekilde sürdürmüştür fakat kendisinden istenen geçişi gerçekleştirememiştir. İspatın devamında üçgen eşitsizliği kullanılarak sonuca ulaşılabilir. Bu nedenle 2 numaralı anahtar nokta da üçgen eşitsizliği yer almaktadır.

Araştırmacı öğretmen adayına 2 numaralı anahtar noktayı kullanabileceğini söylemiştir. Öğretmen adayı 2 numaralı anahtar noktayı açmış ve ne yapması gerektiğini anladığını ifade etmiştir. 2 numaralı anahtar noktanın yardımıyla öğretmen adayı teoremi doğru bir şekilde ispatlayabilmiştir.

Öğretmen adayı bu soruda; cevaplamaya nereden başlayacağını bildiği halde kavramı hatırlayamama, teoremin bir yerinde takılma davranışlarını göstermiştir. Anahtar noktalardan yararlanarak teoremi doğru bir şekilde ispat etmiştir. Öğretmen adayı anahtar noktadan yararlanana kadar limit tanımını hatırlayamamıştır, fakat anahtar noktanın yardımıyla tanımları hatırlamış ve ispatı tamamlamıştır. Burada anahtar nokta ve fikirlerin teoremle ilgili kavramsal bilgileri hatırlatarak teoremin ispatına katkıda bulundukları söylenebilir.

2. Aşağıdaki teoremi ispatlayınız. İhtiyaç duyduğunuzda rakamların altındaki ipuçlarından yararlanabilirsiniz

Teorem: Eğer f fonksiyonu bir I aralığında türevlenebilir ve bir $x \in I$ için $(f)' \neq 0$ ise f^{-1} vardır.

1

Teorem: Bir $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonunun tersinin var olması için gerek ve yeter koşul f 'nin birebir, v.g. örten, olmasıdır

2

$f, [a, b]$ 'de sürekli ve $f, (a, b)$ 'de türevlenebilir ise $\exists c \in (a, b)$ öyle ki

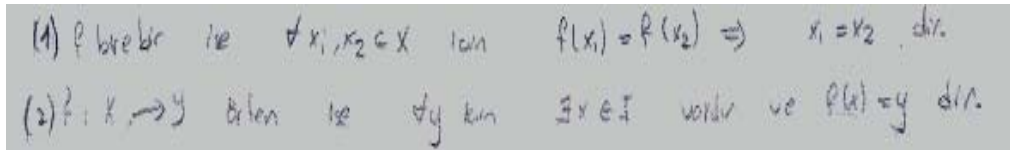
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ olur.}$$

(Ortalama Değer Teoremi)

Şekil 20. Çalışma Kağıdı-7 (Anahtar Nokta ve Fikirlerle Desteklenmiş Teorem)

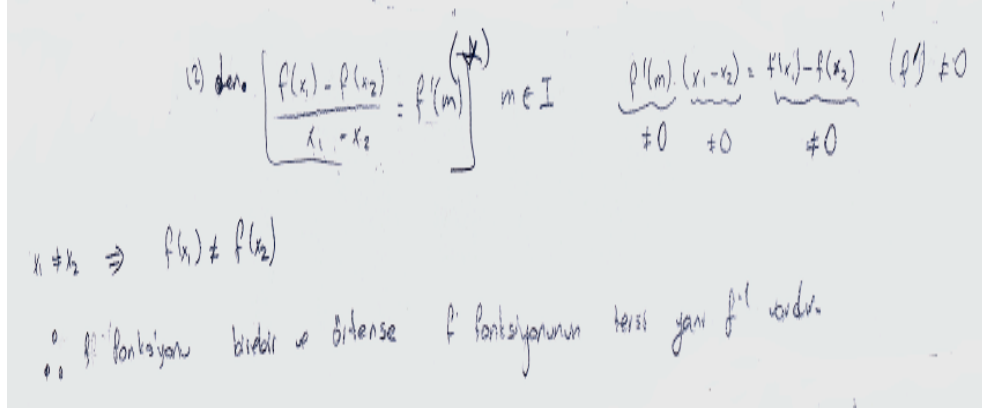
İkinci yıl öğretmen adayına sorulan 2. soru anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmiş diğer bir teoremdi. Bu teoremden türev ve bir f fonksiyonunun tersi tanımları öne çıkmaktadır. Teoremin ispatı incelendiğinde bir f fonksiyonunun tersinin var olması için birebir ve örten olması gerektiği teoremi anahtar nokta olarak belirlenmiştir. Burada f fonksiyonunun I aralığında türevlenebilir olması beraberinde süreklilik ve diferensiyellenebilme kavramlarını getirmektedir. Burada öğretmen adayının ispatı tamamlayabilmesi için “*Ortalama Değer Teoremi*” inden yararlanması gerekebilir, son anahtar nokta olarak da “ortalama değer teoremi” belirlenmiştir.

İkinci yıl öğretmen adayı soruyu çözmeye başladığında fonksiyonun sürekli olduğunu yazabilmiştir. 1 numaralı anahtar noktayı açtığında fonksiyonun tersinin var olması için birebir ve örten olması gerektiğini görmüştür. Öğretmen adayı birebirlik ve örtenlik tanımını hatırlamış ve Şekil 21’ deki gibi yazmıştır fakat buradan sonra doğru bir şekilde devam edememiştir.



Şekil 21. İkinci Yıl Öğretmen Adayının Cevap Kağıdından Bir Bölüm.

Öğretmen adayı bir fonksiyonun tersinin var olması için birebir ve örten olması gerektiğini anlamış ve bunların tanımını yazmıştır. Fakat bu fonksiyonun birebir ve örtenliğini göstermeye nereden ulaşacağını görememiştir. Öğretmen adayı aynı zamanda sorudaki f fonksiyonunun I aralığında sürekli olduğunu yazabilmiştir fakat buradan ortalama değer teoremine geçiş yapamamıştır. Öğretmen adayı için burada ortalama değer teoremini bilmemek ispatı sonuçlandıramamasına neden olmuştur. Öğretmen adayı devam edemeyince bunun üzerine 2 numaralı anahtar noktayı açmıştır ve ortalama değer teoremini görmüştür. Öğretmen adayı anahtar noktayı gördüğü anda “*hıııı*” diyerek tepki vermiş ve Şekil 22’dekileri yazarak teoremi ispat edebilmiştir.



(2) den. $\boxed{\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(m)} \quad m \in I$ $\frac{f'(m)(x_1 - x_2)}{\neq 0 \neq 0} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{\neq 0} \quad (f') \neq 0$

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

• • f' fonksiyonu biribir e bitense f' fonksiyonunun tersi yani f^{-1} vardır.

Şekil 22. İkinci Yıl Öğretmen Adayının Cevap Kağıdından Bir Bölüm.

Bu soruda öğretmen adayı soruya nasıl başlayacağını bilememe, sorunun bir yerinde takılma ve devam edememe, soruyla ilgili bazı teoremleri hatırlayamama davranışlarını göstermiştir. Anahtar noktalardan faydalanarak soruyu eksiksiz bir şekilde cevaplamıştır.

3. Aşağıdaki problemi çözünüz. İhtiyaç duyduğunuzda rakamların altındaki ipuçlarından yararlanabilirsiniz.

Teorem: f fonksiyonu x noktasında diferansiyellenebilir ise f x noktasında süreklidir.

1

2

Tanım: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ Her $N_\epsilon f(a)$ için $f(N_\delta(a)) \subseteq N_\epsilon f(a)$ olacak şekilde bir $N_\delta(a)$ komşuluğu varsa f fonksiyonu $x = a$ noktasında süreklidir, denir.

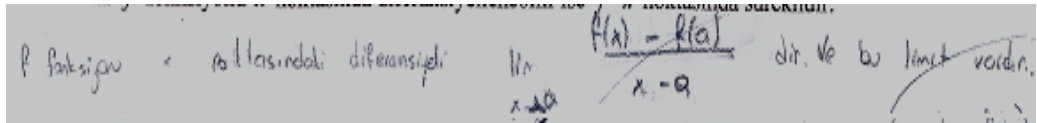
Teorem: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ve $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ olsun. O zaman

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x) = AB$$

Şekil 23. Çalışma Kağıdı-8 (Anahtar Nokta ve Fikirlerle Desteklenmiş Problem)

İkinci yıl öğretmen adayına sorulan problem yine bir teoremin ispatıydı. Bu soruda öne çıkan kavramlar diferansiyel ve süreklilik kavramlarıdır. Bu nedenle 1 numaralı anahtar nokta da bir f fonksiyonunun sürekli olması tanımı yer almaktadır.

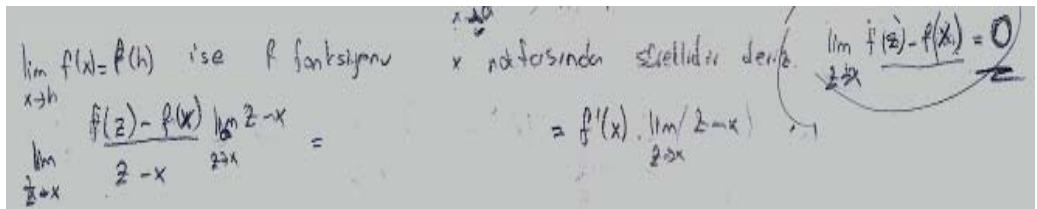
Öğretmen adayı soruyu okuduğunda bir müddet düşünmüş fakat soruyu çözmek için herhangi bir girişimde bulunamamıştır. daha sonra araştırmacının da yardımı ile Şekil 24'deki diferansiyellenebilme tanımını yazmıştır. Bu kısımdan sonra nasıl devam edeceğini bilemediğini belirtmiş ve devam edememiştir.



f fonksiyonu x noktasında diferansiyel $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ dir. ve bu limit vardır.

Şekil 24. İkinci Yıl Öğretmen Adayının Cevap Kağıdında Diferansiyel Tanımını Yazdığı Bölüm.

1 numaralı anahtar noktayı açtığında süreklilik tanımını Şekil 25' deki gibi yazmıştır ancak devam edememiştir. Bunun üzerine 2 numaralı anahtar noktayı açmıştır fakat bu anahtar noktayı açtığında yazdığı süreklilik tanımına eklediği kısımlar olmuştur fakat öğretmen adayı bu teoremi sonuçlandıramamıştır.



$\lim_{x \rightarrow h} f(x) = f(h)$ ise f fonksiyonu x noktasında sürekli $\lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = f'(x) \cdot \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = 0$

Şekil 25. İkinci Yıl Öğretmen Adayının Cevap Kağıdından Bir Bölüm.

Öğretmen adayı bu soruda; problemi çözmeye nasıl başlaması gerektiğini bilememe, ilgili tanım ve teoremleri unutma davranışlarını göstermiştir. Anahtar noktalardan yararlanmış ve cevabın bir kısmını yazabilmiş fakat sonuca ulaşamamıştır. Bu soruda anahtar noktalar öğretmen adayı için yeterli olmamıştır. Buradan anahtar noktanın varlığının her zaman öğrenciyi sonuca ulaştıramayacağı söylenebilir.

4. Limit tanımını yazınız.

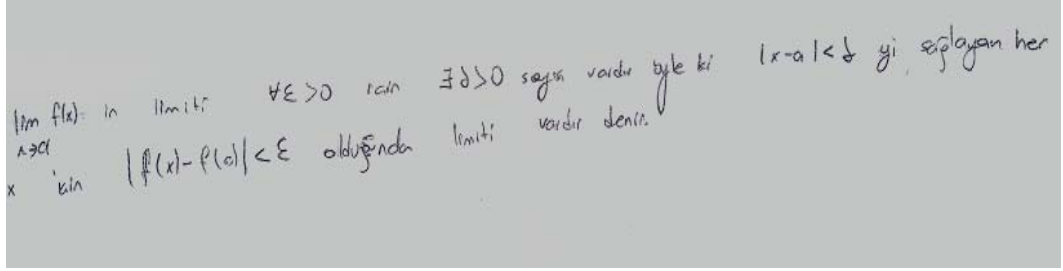
1

Tanım: Bir $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasının $\delta > 0$ delinmiş komşuluğu

$$N_\delta(x_0) - \{x_0\} = \{(x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}\} \\ = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$$

Şekil 26. Çalışma Kağıdı-9 (Anahtar Nokta ve Fikirlerle Desteklenmiş Tanım)

İkinci yıl öğretmen adayından yazması istenen tanım limit kavramıydı. Öğretmen adayının bu tanımı yazabilmesi için bir noktanın delinmiş komşuluğu tanımını bilmesi gerekiyordu. Öğretmen adayı limitin aklında bir şemasının olduğunu fakat bunu matematiksel olarak kağıda dökemediğini belirtmiş ve 1 numaralı anahtar noktayı açmıştır. 1 numaralı anahtar noktayı açtığı anda zihnindeki parçaları birleştirmiş ve Şekil 27’ deki limit tanımını yazmıştır.



Şekil 27. İkinci Yıl Öğretmen Adayının Cevap Kağıdında Limit Tanımını Yazdığı Bölüm.

Öğretmen adayı kendisine sorulan bu 4 soruda anahtar nokta ve fikirlerden yararlanarak soruları doğru bir şekilde yanıtlamıştır. Sadece kendisine sorulan problemi sonuçlandıramamıştır. Anahtar noktaların yardımıyla soruları çözmeye nasıl ve nereden başlayacağını anlamıştır. Anahtar noktalar öğretmen adayına takıldığı noktalarda yardım etmiş ve unuttuğu tanım, teorem ve geçişleri hatırlatmıştır. Öğretmen adayı anahtar noktaların yardımıyla zihninde parça parça olan ve net olmayan bilgileri açıklığa kavuşturmuş ve soruları kendi başına yanıtlamıştır.

Bu uygulamalar bitene kadar öğretmen adayına anahtar nokta ve fikir kavramından söz edilmemiştir. “anahtar nokta ve fikir” kavramı yerine “ipucu” kavramı kullanılmıştır. Öğretmen adayından bu ipuçlarına bir isim vermesi istenmiştir ve öğretmen adayının cevabı aşağıdaki gibi olmuştur;

“Teorem yardımcıları, ana noktalar”

Öğretmen adayının yukarıdaki tanımı ile araştırmacının tanımı aynı anlama gelmektedir. İkinci yıl öğretmen adayına son olarak bir teoremin ispatı verilmiştir. Bu soruda öğretmen adayına herhangi bir anahtar nokta ve fikir verilmemiştir ve bu noktaları kendisinin belirlemesi istenmiştir.

5. Aşağıdaki teoremin ispatının anahtar noktalarını belirleyip yazınız.

Rolle Teoremi: 1) $f \in C[a, b]$
 2) $f \in D(a, b)$
 3) $f(a) = f(b)$
 ise $\exists c \in (a, b)$ öyle ki $f'(c) = 0$

İspat :

1.hal: $y = f(x) = a$ yani sabit ise $y' = f'(x) = 0$ olduğundan teorem gerçekleşir.

2.hal: $f(x) \neq \text{sabit}$ ise 1) gereği $\exists c_1, c_2 \in [a, b]$ öyle ki $m = f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2) = M$

Eğer $m = M$ ise $f(x) = \text{sabit}$ olur ki bu 1. haldir ve ispat tamamdır.

$m < M$ olsun. Böylece $c = c_2$ alınırsa $f(c) = M$ olur.

$$\lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - M}{x - c} \geq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - M}{x - c} \leq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq f'(c) \leq 0 \Rightarrow f'(c) = 0 \text{ dir.}$$

Şekil 28. Çalışma Kağıdı-10 (İspatı Verilmiş Teorem)

İkinci yıl öğretmen adayı, son olarak ispatı verilmiş bir teoremin anahtar nokta ve fikirlerini belirlemiştir. Öğretmen adayının bu teorem için belirlediği anahtar noktalar aşağıdaki gibidir:

1) $f(x) = a$ gibi bir sabit fonksiyon olabilir veya olmayabilir

2) $f(x)$ sabit bir fonksiyon olmadığında $f(x)$ 'in $[a, b]$ aralığında gösterdiği artanlığı ve azalanlığı incelenmelidir.

4.1.3 3. Yıl Öğretmen Adayının Tepkileri

Üçüncü yıl öğretmen adayına, anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmiş 2 teorem, 1 problem ve 1 tanımdan oluşan 4 soru sorulmuştur. Öğretmen adayının isteği üzerine sorular ‘Soyut Cebir’ alanından hazırlanmıştır. Son olarak da bir teoremin ispatı verilmiş ve buradaki anahtar noktaları belirlemesi istenmiştir. Öğretmen adayının cevapladığı sorulara sırayla yer verilmiş ve öğretmen adayının bu soruları çözerken göstermiş olduğu tepkiler ve bunlara ilişkin yorumlar bu sorular altında anlatılmıştır.

1. Aşağıdaki teoremi ispatlayınız. İhtiyaç duyduğunuzda rakamların altındaki ipuçlarından yararlanabilirsiniz.

Teorem: $H \leq G$ ve $K \leq G$ olsun. HK 'nın G 'nin bir altgrubu olması için gerek ve yeter şart $HK = KH$ olmasıdır.

1

Teorem: G bir grup ve $\emptyset \neq H \subseteq G$ verilsin.
 $H \leq G$ olması için gerek ve yeter koşul
 i) $\forall a, b \in H$ için $ab \in H$
 ii) $\forall a \in H$ için $a^{-1} \in H$ olmasıdır.

2

$H \leq G$ ve $K \leq G$ olsun.
 $HK = \{x \in G : x = hk, h \in H, k \in K\}$

3

1'deki teorem ile 2'deki tanım arasında
 nasıl bir ilişki kuruyorsun?

4

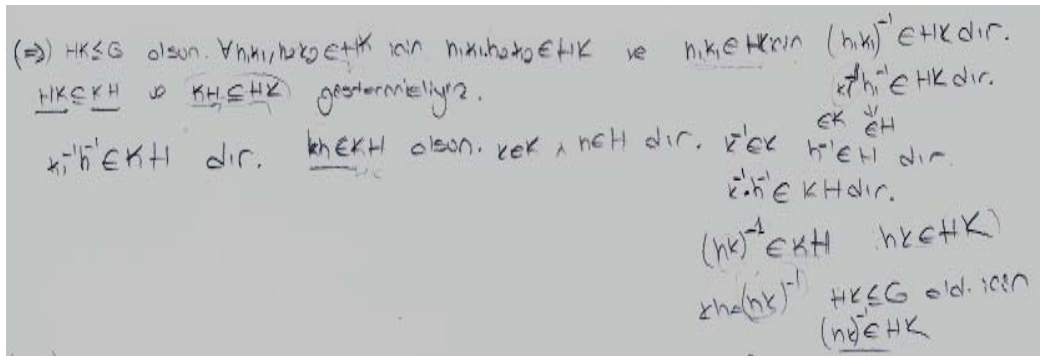
$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$

Şekil 29. Çalışma Kağıdı-11 (Anahtar Nokta ve Fikirlerle Desteklenmiş Teorem)

Üçüncü yıl öğretmen adayına sorulan ilk soru grup kavramı ile ilgili bir teoremdi. Bu teoremden alt grup ve çarpım grubu kavramları öne çıkmaktadır. Öğretmen adayının bu soruyu cevaplaması için öncelikle alt grup ve HK grubunun tanımını bilmesi gerekiyordu. Bu yüzden 1 ve 2 numaralı anahtar noktalarda bu tanımlar yer almaktadır.

Üçüncü yıl öğretmen adayı alt grup tanımını hatırlamıştır fakat HK grubunun elemanlarını nasıl tanımlayacağını hatırlayamamıştır. Öğretmen adayı önce 1 numaralı anahtar noktayı açmıştır burada alt grup tanımını görünce bu tanımlı bildiğini ifade etmiştir. 3. yıl öğretmen adayı araştırmacının da destek vermesiyle 2 numaralı anahtar noktayı açmıştır ve HK grubunun elemanlarını nasıl tanımlayacağını anlamış ve soruyu cevaplamaya başlamıştır. Öğretmen adayı 2 numaralı anahtar noktadan faydalanarak HK çarpım grubunu G grubunun alt grubu kabul etmiştir ve HK çarpım grubunun tanımından yararlanarak bunun KH çarpım grubuna eşit olduğunu göstermiştir. Burada çarpım grubunun tanımı öğretmen adayı için anahtar noktayı teşkil etmektedir. Öğretmen adayı ispatın gereklilik kısmını bu nokta üzerine inşa etmiştir.

Öğretmen adayı anahtar noktaların da yardımıyla teoremin gereklilik kısmını ispatlamıştır. Öğretmen adayının ispatı Şekil 30'daki gibidir.



Şekil 30. Üçüncü Yıl Öğretmen Adayının Cevap Kağıdından Bir Bölüm

3. yıl öğretmen adayı teoremin ikinci kısmını ispatlamaya başladığında zorlanmamıştır. Öğretmen adayı teoremin yeterlilik kısmında anahtar noktalara

gereksinim duymadan ispatı tamamlamıştır. Öğretmen adayının ispatı Şekil 31' de gösterilmektedir.

$(\Leftarrow) HK \leq KH$ olsun. $HK \leq G$?
 $\forall h_1, h_2, k_1, k_2 \in HK$ için $h_1 k_1 h_1^{-1} \in HK$ ve $h_1 k_1 \in HK$ için $(h_1 k_1)^{-1} \in HK$?
 $h_1 k_1, h_2 k_2 \in HK$ olsun. $h_1 k_1 \in KH$, $h_2 k_2 \in KH$
 $h_1 \in H$, $k_1 \in K$, $h_2 \in H$, $k_2 \in K$ dir. $h_1 h_2 (h_2 k_1) k_2 \in HK$?
 $h_1 k_1 \in HK$ için $(h_1 k_1)^{-1} \in HK$ midir?
 $h_1 k_1 \in HK$ $h_1 \in H$ $k_1 \in K$ $h_1^{-1} \in H$ $k_1^{-1} \in K$ dir. $(k_1^{-1})^{-1} (h_1^{-1})^{-1} \in KH$
 $(h_1 k_1)^{-1} \in KH$ dir.
 $(h_1 k_1)^{-1} \in HK$ ✓

Şekil 31. Üçüncü Yıl Öğretmen Adayını Cevap Kağıdından Bir Bölüm

Öğretmen adayı bu soruda bazı tanımları hatırlayamama davranışı göstermiş ve bu yüzden teoremin devamını getirememiştir fakat anahtar noktaların yardımıyla unuttuğu tanımları hatırlayarak teoremi kolaylıkla ispatlayabilmiştir. Buradan anahtar noktanın; teoremle ilgili tanımları ve geçişleri hatırlatarak teoremin ispatlanmasına katkıda bulunduğu söylenilebilir. Öğretmen adayı bu soruda bütün anahtar noktalardan faydalanmamıştır. Öğretmen adayının bütün anahtar noktalardan faydalanmamasının sebebi önceki bilgilerin varlığıdır. Buradan; eğer soruyu çözen kişinin, soruyla ilgili önceki bilgileri yeterli ise anahtar noktanın onun için işlevsiz hale geldiği söylenebilir.

2. Aşağıdaki teoremi ispatlayınız. İhtiyaç duyduğunuzda rakamların altındaki ipuçlarından yararlanabilirsiniz

Teorem: Devirli bir grubun alt grubu da devirlidir.

1

Tanım:

G bir grup ve $g \in G$ olsun. G Grubu g elemanı tarafından üretiliyorsa bu gruba devirli grup denir.

$G = \langle g \rangle$ ile gösterilir. g elemanına da grubun üreteci denir.

2

Teorem (Bölme Algoritması) : $a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$ olsun.

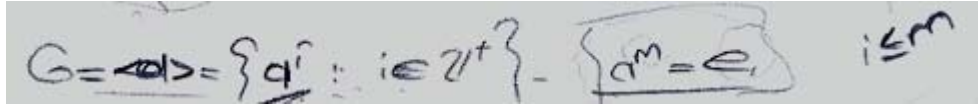
$0 \leq r \leq b$ olmak üzere $a = bq + r$ olacak şekilde

$q, r \in \mathbb{Z}$ vardır.

Şekil 32. Çalışma Kağıdı-12 (Anahtar Nokta ve Fikirlerle Desteklenmiş Teorem)

Üçüncü yıl öğretmen adayı için hazırlanan diğer teorem yine grup kavramı ile ilgili idi. Bu teoremden devirli grup kavramı yer almaktadır. 1 numaralı anahtar nokta olarak devirli grup kavramının tanımı verilmiştir.

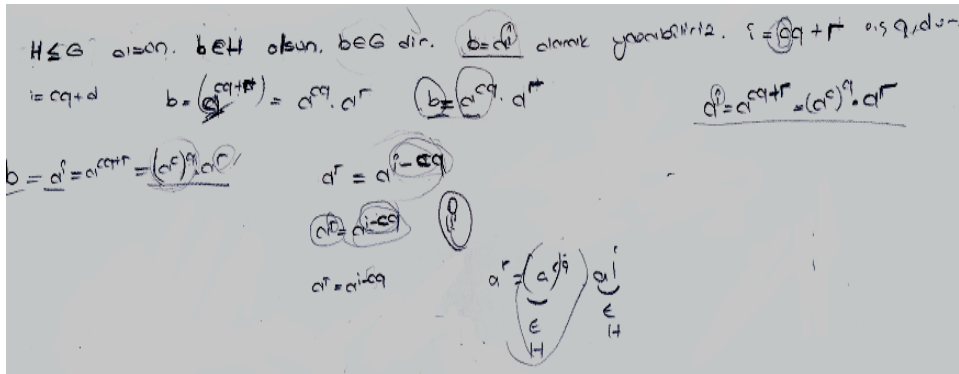
Öğretmen adayı soruyu okumuştur fakat soruyla ilgili herhangi bir çözüm önerisi getirememiştir. Öğretmen adayı aklına hiçbir şey gelmediğini dile getirmiş ve bu soruyu çözemeyeceğini düşündüğünü söylemiştir. Araştırmacının desteği üzerine 1 numaralı anahtar noktayı açmıştır ve Şekil 33'deki devirli grubun tanımını yazmıştır.



$$G = \langle a \rangle = \{a^i : i \in \mathbb{Z}^+\} - \{a^m = e, i \leq m\}$$

Şekil 33. Üçüncü Yıl Öğretmen Adayının Cevap Kağıdından Bir Bölüm

Devirli grubun bir alt grubunu düşünmüştür fakat buradan sonra devam edememiştir. Bu teoremin ispatını devamında devirli grubun elemanlarının özelliği düşünülerek bu elemanlara bölme algoritması uygulanmalıdır. Bu nedenle 2 numaralı anahtar noktada bölme algoritmasının tanımı yer almaktadır. Öğretmen adayı 2 numaralı anahtar noktayı açmıştır ve bölme algoritmasının tanımını görmüştür. Bu tanımdan yararlanarak aşağıdaki Şekil 34'dekileri yazarak teoremi ispat etmiştir.



$$\begin{aligned} H \leq G, a \in H, b \in H \text{ olsun, } b \in G \text{ dir. } b = a^i \text{ olmak zorunda. } i = cq + r, 0 \leq r < d. \\ i = cq + d, \quad b = (a^{cq+d}) = a^{cq} \cdot a^d \quad (b = a^{cq} \cdot a^d) \quad a^d = a^{cq+r} = (a^c)^q \cdot a^r \\ b = a^i = a^{cq+r} = (a^c)^q \cdot a^r \\ a^r = a^{i-cq} \\ a^r = a^{i-cq} \\ a^r = a^{i-cq} \end{aligned}$$

Şekil 34. Üçüncü Yıl Öğretmen Adayının Cevap Kağıdından Bir Bölüm

Öğretmen adayı bu teoremi başlangıçta ispatlayamayacağını düşünüyordu fakat anahtar noktaların yardımıyla öğretmen adayı teoremi ispatlayabilmiştir.

3. Aşağıdaki problemi çözünüz. İhtiyaç duyduğunuzda rakamların altındaki ipuçlarından yararlanabilirsiniz

Problem: H karakteristiği p olan değişmeli bir halka olsun. $\varphi(h) = h^p$ olacak şekilde $\varphi : H \rightarrow H$ dönüşümünün bir halka homomorfizmi olduğunu gösterip çekirdeğini bulunuz.

1

Tanım:

R_1 ve R_2 birer halka olmak üzere tanımlanan $\theta : R_1 \rightarrow R_2$

bir fonksiyonunun halka homomorfizmi olması için gerek ve

yeter şart

$$i) \forall r_1, r_2 \in R_1 \text{ için } \theta(r_1 + r_2) = \theta(r_1) + \theta(r_2)$$

$$ii) \forall r_1, r_2 \in R_1 \text{ için } \theta(r_1 r_2) = \theta(r_1) \theta(r_2)$$

$$\text{Çek} \theta = K_\theta = \{x \in R_1 : \theta(x) = e^{R_2} \in R_2\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye θ homomorfizminin çekirdeği denir.

2

Tanım: H bir halka olsun. Her $x \in H$ için

$nx = 0$ olacak şekilde n pozitif tamsayısı

veya tamsayıları varsa bunların en küçüğüne

H halkasının karakteristiği denir

3

$$(a+b)^n = a^n + b^n + \sum_{m=1}^{n-1} \binom{n}{m} a^{n-m} b^m$$

Şekil 35. Çalışma Kağıdı-13 (Anahtar Nokta ve Fikirlerle Desteklenmiş Problem)

Üçüncü yıl öğretmen adayına sorulan problem halka homomorfizması ile ilgiliydi. Bu soruda homomorfizma, bir halkanın karakteristiği ve çekirdeği tanımları öne çıkmaktadır. Öğretmen adayının bu soruyu çözmesi için öncelikle bilmesi gereken halka homomorfizması ve bir halkanın karakteristiğinin tanımıdır. Öğretmen adayı soruyu çözmeye halka homomorfizması ve çekirdeğin tanımını yazarak başlamıştır. Bu tanımları yazarken anahtar noktalardan yararlanmamıştır. Burada anahtar noktanın öğretmen adayının sahip olduğu ön bilgiye göre işlevinin değiştiği söylenebilir. Şekil 36 da öğretmen adayının yazdığı tanımlar yer almaktadır.

Handwritten definitions for homomorphism and kernel. The first part shows the definition of a homomorphism: $Q(r_1 + r_2) = Q(r_1) + Q(r_2)$ and $Q(r_1 \cdot r_2) = Q(r_1) \cdot Q(r_2)$. The second part shows the definition of the kernel: $\text{Ker}(Q) = \{x \mid Q(x) = e_H\}$. To the right, there is a note: "Halka homomorfizması" and a set of symbols $(+, +, \cdot)$ with a circled 'H' below it.

Şekil 36. Üçüncü Yıl Öğretmen Adayının Cevap Kağıdına Yazdığı Homomorfizma Tanımı.

Öğretmen adayı bu kısımdan sonra devam edememiş ve 2 numaralı anahtar noktayı açmıştır. 2 numaralı anahtar noktayı açtığı anda bir halkanın karakteristiği kavramının tanımı ile karşılaşmıştır. Öğretmen adayı 2 numaralı anahtar noktadan faydalananarak Şekil 37'dekileri yazmıştır.

Handwritten definitions for characteristic and homomorphism. The first part shows the definition of characteristic: $n \cdot x = 0$ and $p \cdot x = 0$ for $x \in H$. The second part shows the definition of a homomorphism: $Q(n) = n^p$ and $Q: H \rightarrow H$ with $n \mapsto n^p$.

Şekil 37. Üçüncü Yıl Öğretmen Adayının Cevap Kağıdından Bir Bölüm

Üçüncü yıl öğretmen adayı bu tanımlı yazdıktan sonra $\varphi: H \rightarrow H$ dönüşümünün bir halka homomorfizması olduğunu göstermek istemiştir fakat $(h_1 + h_2)^p$ toplamının açılımını yazamamıştır. Bu nedenle ispata devam edememiştir. Öğretmen adayı burada 3 numaralı anahtar noktayı ne içerdiğini görmek için açmıştır ve ispata devam etmesini sağlayan $(h_1 + h_2)^p$ toplamının açılımı ile karşılaşmıştır. Öğretmen adayı bu anahtar noktanın yardımı ile Şekil 38' dekileri yazmıştır.

$$\begin{aligned} \varphi(h_1 + h_2) &= (h_1 + h_2)^p = h_1^p + \binom{p}{1} h_1^{p-1} h_2 + \binom{p}{2} h_1^{p-2} h_2^2 + \dots + h_2^p \\ &= h_1^p + h_2^p \\ &= \varphi(h_1) + \varphi(h_2) \\ \varphi(h_1 h_2) &= (h_1 h_2)^p = h_1^p h_2^p = \varphi(h_1) \varphi(h_2) \end{aligned}$$

aynı bir halka,

Şekil 38. Üçüncü Yıl Öğretmen Adayının Cevap Kağıdından Bir Bölüm

Öğretmen adayının göstermesi gereken son kısım H halkasının çekirdeği idi. Öğretmen adayı 1 numaralı anahtar noktayı açtığı anda orada gördüğü çekirdek tanımını cevap kağıdına yazmıştı. Öğretmen adayı bu tanımdan hareketle H halkasının çekirdeğini Şekil 39'daki gibi tanımlamıştır.

$$\text{Ker } \varphi = \{ h \in H \mid \varphi(h) = e_H \}$$

$\varphi(h) = e_H$ $h^p = e_H$ $h^p = e_H$ $h \in H$ $\varphi(h) = e_H$

Şekil 39. Üçüncü Yıl Öğretmen Adayının Cevap Kağıdından Bir Bölüm

Üçüncü yıl öğretmen adayı bu soruda, soru ile ilgili önemli tanımları ve kuralları unutmuş ve sorunun çözümüne devam edememiştir, öğretmen adayı bu durumda anahtar noktaya başvurmuş ve unuttuğu tanımları ve kuralları hatırlayarak çözümün devamını getirebilmiştir. Buradan anahtar noktanın soru ile ilgili önemli kısımların hatırlanmasına yardımcı olduğu söylenebilir.

4. $(H, +, \cdot)$ halkasını tanımlayınız.	
1 Tanım: $G \neq \emptyset$ olmak üzere G üzerinde “$\cdot$” işlemi verilsin. Eğer $(G, \cdot)$ sistemi; kapalılık, birleşme, birim eleman, ters eleman, değişme özelliklerini sağlıyorsa $(G, \cdot)$ yapısınaabelyan grup..... denir	
2 Yarı grup tanımını hatırlıyor musun???	
3 1. ipucu ile 2. ipucu arasında nasıl bir bağ kuruyorsun?	

Şekil 40. Çalışma Kağıdı-14 (Anahtar Nokta Ve Fikirlerle Desteklenmiş Tanım

Üçüncü yıl öğretmen adayı $(H, +, \cdot)$ halkasının tanımını yazması için öncelikle $(H, +)$ grubunun abelyan grup ve $(H, \cdot)$ grubunun yarı grup olduğunu hatırlamalıydı. Öğretmen adayı $(H, +)$ grubunun abelyan grup olduğunu hatırlamış ve yazmıştır. Öğretmen adayı bu nedenle 1 numaralı anahtar noktadan yararlanmamıştır.

Öğretmen adayı $(H, \cdot)$ grubunun yarı grup olması gerektiğini hatırlayamamıştır. Öğretmen adayı 2 numaralı anahtar noktayı açtığında kendisine yöneltilen soru üzerine Şekil 41'dekileri yazabilmiştir.

(ii) $(H, \cdot)$ göre bir birim elemanı olarak.

Şekil 41. Üçüncü Yıl Öğretmen Adayının Cevap Kağıdından Bir Bölüm

Öğretmen adayı 2 numaralı anahtar noktadan sonra tanımı hatırladığını ifade etmiş ve Şekil 42'dekileri yazarak soruyu doğru bir şekilde yanıtlamıştır.

(ii) $(a+b)c = ac+bc$ ve $c(a+b) = ca+cb$ oys sağdan ve soldan dağılım öz. var.

Şekil 42. Üçüncü Yıl Öğretmen Adayının Cevap Kağıdından Bir Bölüm

Öğretmen adayı bu soruda 1 ve 3 numaralı anahtar noktadan yararlanmamıştır, sadece 2 numaralı anahtar noktayı kullanarak tanımı hatırlayabilmiştir. Buradan küçük bir anahtar fikrin yardımıyla sorunun çözülebildiği görülmektedir.

Üçüncü yıl öğretmen adayı kendisine sorulan bu dört soruda; soru ile ilgili tanım ve teoremleri hatırlayamama, soruya nereden başlayacağını bilememe, zihnindeki bilgiler içerisinde hangisini kullanması gerektiğini seçememe davranışlarını göstermiştir. Öğretmen adayı bazı sorular için soruyu çözemeyeceğini dile getirmiş fakat anahtar nokta ve fikirlerin yardımıyla bütün soruları doğru ve eksiksiz bir şekilde yanıtlamıştır. Buradan, anahtar nokta ve fikirlerin; soruyu çözen kişiyi yönlendirdiği, unuttuğu tanım ve teoremleri hatırlatarak soruyu çözmesine katkı sağladığı söylenebilir.

Bu uygulamalar bitene kadar öğretmen adayına anahtar nokta ve fikir kavramından söz edilmemiştir. “Anahtar nokta ve fikir” kavramı yerine “ipucu” kavramı kullanılmıştır. Öğretmen adayından bu ipuçlarına bir isim vermesi istenmiştir ve öğretmen adayının cevabı aşağıdaki gibi olmuştur;

“Bir teoremin ana noktaları, yardıma koşan noktalar, yardımcı fikirler. Yardımla ilgili şeyler geliyor aklıma”

Öğretmen adayının yukarıdaki tanımlaması anahtar nokta kavramına oldukça yakındır.

Üçüncü yıl öğretmen adayına son olarak bir teoremin ispatı verilmiştir. Bu soruda öğretmen adayına herhangi bir anahtar nokta ve fikir verilmemiştir ve bu noktaları kendisinin belirlemesi istenmiştir. Bu teorem Şekil 43’de yer almaktadır.

5. Aşağıdaki teoremin ispatının anahtar noktalarını belirleyip yazınız.

Teorem: Bir H halkasında sadeleştirme özelliğinin olması için gerek ve yeter şart halkanın sıfır bölensiz olmasıdır.

İspat :

$\Rightarrow$: H halkasında sadeleştirme özelliği mevcut ve $x, y \in H$ için $xy = 0$ olsun. O halde $x = 0$ veya $y = 0$ olduğunu gösterelim. $x \neq 0$ ise $x.y = x.0$ ifadesinden $y = 0$, ve benzer şekilde $y \neq 0$ ise $x.y = 0.y$ ifadesinden $x = 0$ elde edilir ki; H halkası sıfır bölensizdir.

$\Leftarrow$: Karşıt olarak H halkası sıfır bölensiz olsun. $x, y, z \in H$ için $x.y = x.z$ ve $x \neq 0$ olsun. O halde

$$xy - xz = x(y - z) = 0$$

olur. $x \neq 0$ ve H halkası sıfır bölensiz olduğundan $y - z = 0$ olup $y = z$ elde edilir. Benzer şekilde $y.z = z.x$ ise yine $y = z$ olur ki, H 'da sadeleştirme özelliği vardır.

Şekil 43. Çalışma Kağıdı-15 (Anahtar Nokta ve Fikirlerin İstendiği İspatı Verilmiş Teorem).

Öğretmen adayının belirlediği anahtar noktalar aşağıdaki gibidir:

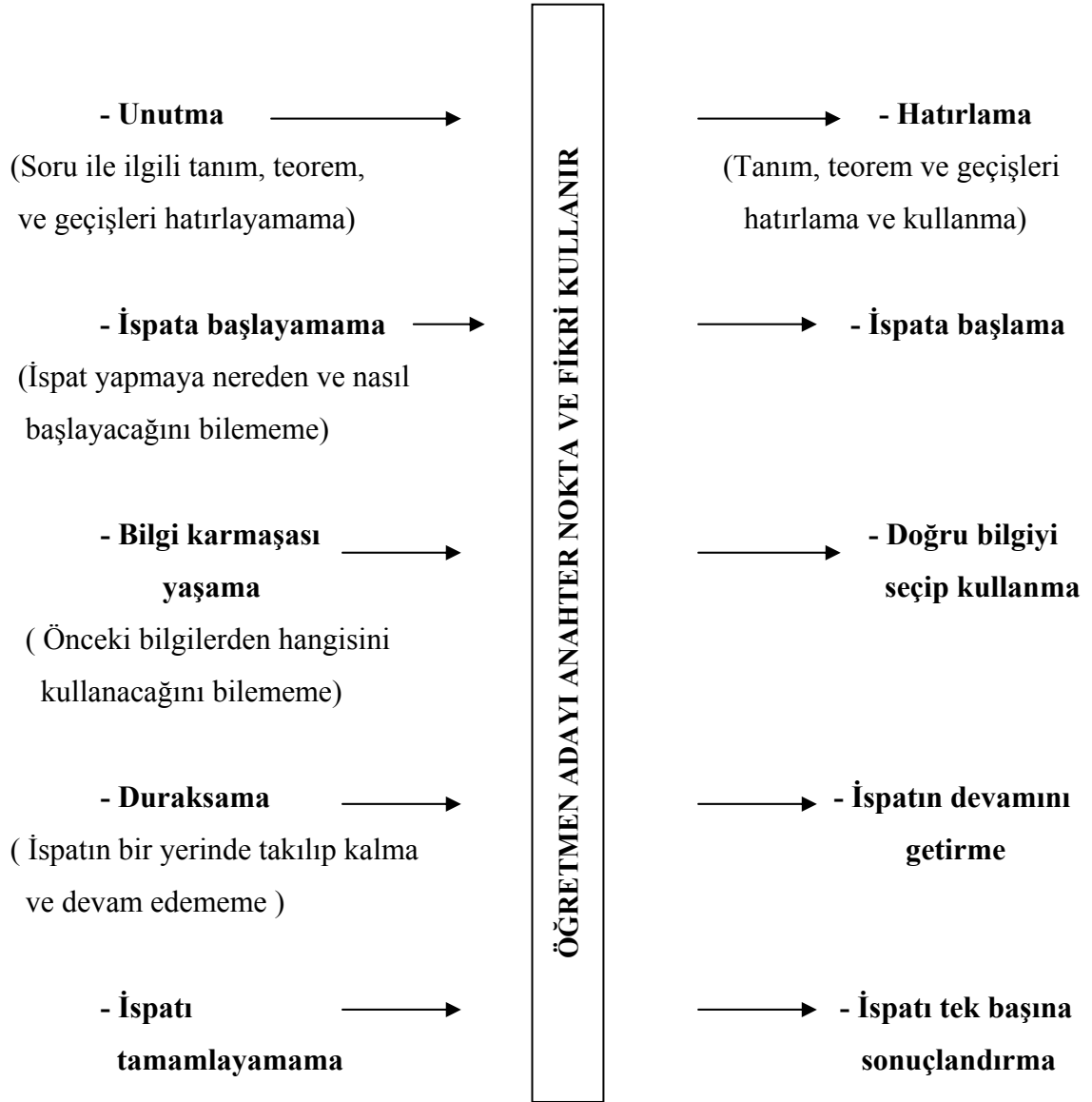
1) **Tanım (Sıfır Bölensiz Halka) :** H birimli bir halka olsun. $a \neq 0$ ve $b \neq 0$, H 'ın iki elemanı olmak üzere $ab = 0$ ise a 'ya *sol sıfır bölen* ve b 'ye de *sağ sıfır bölen* denir. Her $a, b \in H$ için $ab \neq 0$ oluyorsa H halkasına *sıfır bölensiz halka* denir.

Öğretmen adaylarının anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmiş ispatları ve bunun yanında bir takım soruları yanıtlarken göstermiş oldukları davranışlar ayrıntılı olarak betimlenmiştir. Bu uygulamalar sonucunda öğretmen adaylarının anahtar nokta ve fikirleri kullanmadan önce ispat yaparken sergiledikleri davranışlar ile anahtar nokta ve fikirleri kullandıktan sonra sergiledikleri davranışlar arasında farklılıklar görülmüştür.

Öğretmen adayları teoremlerin ispatında ve soruların çözümünde bazen ispata ve sorunun çözümüne hiç başlayamamışlardır fakat öğretmen adayları bu durumda anahtar nokta ve fikirlere başvurmuş ve ispata başlayabilmişlerdir. Öğretmen adaylarının çalışma kağıtlarında yer alan soruları yanıtlarken bazen soru ile ilgili kavramsal bilgileri unuttukları gözlemlenmiştir fakat öğretmen adayları bu noktada anahtar nokta ve fikirlerin yardımına başvurarak soru ile ilgili kavramsal bilgileri hatırlamışlar ve sorunun yanıtında kullanmışlardır.

Bazı soruların çözümünde öğretmen adaylarının zihinlerinde yer alan kavramsal bilgiler arasından seçim yapamadıkları görülmüştür, bu durumda anahtar noktayı kullanan öğretmen adayları doğru bilgiyi seçip kullanabilmişlerdir.

Öğretmen adayları soruları yanıtlarken bazen sorunun çözümünü veya teoremin ispatını bir noktaya kadar getirebilmişler ve bu noktadan sonra devam edememişlerdir. Bu durumda anahtar nokta öğretmen adaylarının sorunun devamını getirmelerinde öğretmen adaylarına yardımcı olmuştur. Öğretmen adaylarının anahtar nokta ve fikirlerin yardımıyla teoremlerin ispatlarını doğru bir şekilde tamamlayabildikleri söylenebilir. Bu anlatılanlar Şekil 44' de özetlenmiştir.



Şekil 44. Anahtar Nokta ve Fikir Kullanımının Öğretmen Adaylarının Davranışlarına Etkileri

4.2. Öğretmen Adaylarının Anahtar Nokta ve Fikirlerle İlgili Görüşlerine İlişkin Bulgular ve Yorumlar

Öğretmen adaylarına uygulanan çalışma kağıtlarının ardından, onların anahtar nokta ve fikirlerle ilgili düşüncelerini almak için her biri ile ayrı ayrı görüşme yapılmıştır. Bu araştırmada da görüşmeler araştırmacı tarafından önceden hazırlanan görüşme soruları ile yürütülmüştür. Görüşme formundaki soruların her biri öğretmen adaylarına sorulmuştur fakat görüşme esnasında öğretmen adaylarının verdiği yanıtlar üzerine ek sorular da sorulmuştur. Öğretmen adayları ile yapılan görüşmelerde süre kısıtlaması yapılmamış, öğretmen adayının yorum yapabildiği ölçüde görüşmeye devam edilmiştir. Görüşmeler sohbet tarzında gerçekleştirilmiş, böylelikle öğretmen adaylarının daha rahat ve samimi bir şekilde soruları cevaplandırmaları hedeflenmiştir. Görüşme sürecinde verilerin kaydedilmesi için, öğretmen adaylarından izin alınarak, ses kayıt cihazı kullanılmıştır. Görüşmeler öğretim elemanının odasında gerçekleştirilmiştir. Görüşme sürecinde öğretmen adaylarının rahat cevap verecekleri bir ortam oluşmasına özen gösterilmiştir.

Görüşmelerden elde edilen veriler gömülü teorinin teknikleri kullanılarak analiz edilmiştir. Görüşme verilerinin analizi yapılırken birbirleri ile yakın ilişkili sorular birlikte ele alınmış ve öğretmen adaylarının yanıtları incelenmiştir. Görüşmelerin yazımında 1. yıl öğretmen adayı 1.ÖA; 2. yıl öğretmen adayı 2. ÖA; 3. yıl öğretmen adayı ise 3. ÖA şeklinde ifade edilmiştir. Görüşmeci ile öğretmen adayları arasında geçen diyaloglar metin halinde sunulmuş ve öğretmen adaylarının yanıtlarındaki cümleler kavramlarla etiketlenmiştir. Kavramlar metin içerisinde sunulurken koyu harflerle belirtilmiştir.

Teori oluşturmadaki ilk adım kavramsallaştırmadır. Bir kavram, etiketlenmiş bir fenomendir. Bu, bir araştırmacının veride önemli olarak belirlediği, bir olayın, nesnenin veya etkileşimin soyut bir temsildir. Fenomeni adlandırmanın altında yatan amaç; araştırmacının benzer durumları, olayları ve nesneleri, ortak bir başlık veya sınıflandırma altında grupta imkanı vermektedir. Olaylar ve meydana gelenler ayrı elemanlar olsa da; onların ortak özellikler paylaştığı ve anlamca ilişkili oldukları gerçeği, onların gruplandırılmasına imkan sağlar (Strauss ve Corbin, 1998, s. 103).

Kavramlar arasından birbirleri ile ilişkili olanlar incelenmiş ve kategoriler oluşturulmuştur. Daha sonra kategorilerin boyutları ve birbirleri ile olan ilişkileri ortaya konmuştur.

4.2.1 1., 2. ve 3. Görüşme Sorularına Ait Bulgular ve Yorumlar

1. **Soru:** Bu zamana kadar almış olduğunuz matematik derslerinde birçok teorem ispatladınız. Teorem ispatlarken nelerle karşılaşıyorsunuz
2. **Soru:** Teoremleri ispat ederken nelerden faydalaniyorsunuz?
3. **Soru:** Bir teoremi ispat etmede başarılıyım çünkü..... Boşlukları doldurman gerekirse ne dersin?

Öncelikle 1. yıl öğretmen adayının yukarıdaki sorulara vermiş olduğu cevaplara yer verilecektir. Öğretmen adayının yanıtları sonucunda ortaya çıkan kavramsal isimler koyu renkle yazılmıştır. Diyalogların ardından öğretmen adaylarının görüşlerinden ortaya çıkan durumlar anlatılmıştır.

1. Yıl Öğretmen Adayı

Görüşmeci: *Bu zamana kadar almış olduğunuz matematik derslerinde birçok teorem ispatladınız. Teorem ispatlarken nelerle karşılaşıyorsunuz?*

1. ÖA : *Teorem ispatlarında genellikle tanımı kullanmaya, sorulardaki verileri kullanmaya dayalı gittik (“önceki bilgiyi uyarlama”).*

Görüşmeci: *Söylediklerini biraz daha açıklar mısın?*

1. ÖA : *Bazen bir teoremi ispatlamak gerekirken başka bir teoremi ispatlamak gerekiyor (“teoremin dayandığı kavramsal bilgiler”). Mesela integralin esas teoremini ispatlarken analizdeki, türevdeki ortalama değer teoremini kullanıyorsun (“kavramsal bilgiyi uyarlama”). Teoremleri ispat ederken bunları kullanıyoruz.*

Görüşmeci : *Peki önceki bilgileri kullandığın teoremleri ispat etmek senin için nasıl bir durum oluşturuyor?*

1. ÖA : *Bazen teoremleri ispatlarken sıkıntı çekiyorum (“ispat yapmada sorun yaşama”) işte bu da önceki tanımı, teoremi bilmemekten kaynaklanıyor (“kavramsal bilgi eksikliği”).*

Görüşmeci : *Teoremleri ispat ederken nelerden faydalaniyorsun?*

1. ÖA : *Başka teoremler nasıl ispatlanıyorsa, biraz sanki ona benzeyebiliyor gibi (“diğer ispatlara benzetme çabası”). Genelde zaten 5-6 tane ispat yöntemi var; çelişki, tümevarım vs. bunların bilinmesi gerekebiliyor (“ispatlama yöntemlerini bilme”). Sonra daha önce de dediğim gibi , tanımlar, teoremler, ilişkiler, bilgiler (“teoremin dayandığı kavramsal bilgiler”).*

Görüşmeci : *Bir teoremi ispatlamada başarılıyım çünkü.....Boşlukları doldurman gerekirse ne dersin?*

1. ÖA : *Tanımı iyi kullanabilme becerim varsa, daha önceden ilintili olan teoremi kavrayabiliyorsam (“kavramsal bilgiyi uyarlama”), nereden gideceğimi görebilme (“başlangıç noktasını görebilme”), teoremde ne isteniyor (“teoremi anlama”), nasıl gideceğimi (“işlem basamakları”) görebiliyorsam başarılı olurum.*

1. yıl öğretmen adayının görüşlerine göre:

Öğretmen adayı teoremleri ispat ederken teoremin dayandığı kavramsal bilgilerden yararlanıyor. Teoremle ilgili olan tanım, teorem ve ilişkilerin o teoremin ispatının yapılabilmesinde gerekli olduğunu düşünüyor. Diğer bir anlamda teoremin öncesini önemsiyor. Bir teoremin ispatına başlayabilme de, ispatın başlangıç noktasını görmenin önemli olduğunu düşünüyor. Herhangi bir teoremin ispatını önceden ispatladığı teoremlerin ispatına benzetmeye çalışıyor. Bir ispatı yapıp yapamamasını; teoremin dayandığı bilgileri, işlem basamaklarını ve ispat yöntemlerini bilmesine ve teoremi anlamasına bağlıyor. Öğretmen adayı teoremlerin ispatında ; tanımlara, diğer teoremlere ve ilişkilere ihtiyaç duyuyor.

2. Yıl Öğretmen Adayı

Aşağıda 2. yıl öğretmen adayının ilk üç görüşme sorusuna verdiği yanıtlar ve elde edilen kavramlar yer almaktadır:

Görüşmeci : *Bu zamana kadar almış olduğunuz matematik derslerinde birçok teorem ispatladınız. Teorem ispatlarken nelerle karşılaşıyorsunuz?*

2. ÖA : *Bir kere çok zordu (“ispat yapmada sorun yaşama”).*

Görüşmeci : *Zorlanıyorum diyorsun. Peki zorluk yaşamamanın nedeni ne olabilir?*

2. ÖA : *Şu ana kadar sonucu önemsemediğimiz için hiç gidiş yolunu (“işlem basamaklarını oluşturma”) önemsemiyorduk. Hani burada sen düşünüyorsun. Böyle mi yapsam, şöyle mi yapsam diye Yoksa işte ÖSS’ de tek çözüm yolu vardı onu ezberliyorsun, testini çözüyorsun, öyle devam ediyorsun (“sadece sonuca odaklanma”).*

Görüşmeci : *Zorluk yaşamamanın nedeni olarak başka neler var?*

2. ÖA : *Mesela biraz önce analiz de z ’ li bir şeyler yapmıştık ya (öğretmen adayı Çalışma Kağıdı-8’den bahsetmektedir) onları kaç kere yaptım ben ama aklıma gelmiyor (“kavramsal bilgiyi unutma”), öyle tikanıp kalıyorum Çok farklı düşünemiyorum hep bir yerden bakıyorum, o yüzden farklı düşünemediğimden (“tek yönlü düşünme”) sonuca ulaşamıyorum.*

Görüşmeci : *Teoremleri ispat ederken nelerden faydalaniyorsun?*

2. ÖA : *İspat yaparken ilk önce defterden faydalaniyorum (“materyal kullanımı”) tabi hocayı dinlediysem. Bazen derste hoca söylüyor burası önemli diye o zaman aklımda kalıyor (“öğretmen rehberliği”).*

Görüşmeci : *Defterden nasıl faydalandığını açıklar mısın?*

2. ÖA : *Öğretmenin daha önce anlattığı konulara bakıyorum, işime ne yarayabilir diye (“önceki bilgiyi araştırma”). Daha önce yapılan ispatlara bakıyorum (“diğer ispatlara benzetme çabası”).*

Görüşmeci : *Bir teoremi ispatlamada başarılıyım çünkü.....Boşlukları doldurman gerekirse ne dersin?*

2. ÖA : *Teorem çok açık olduğu zaman (“isteneni görme”) ya da iki üç konu öncesiyle alakalı olduğu zaman başarılıyım (“hatırlama”). Ama bazen hiç aklına gelmeyecek bir şey oluyor, çok farklı şeyler bilmen gerekebiliyor. Mesela analizde soyut matematiği kullanman ya da lineer cebiri kullanman gerekebiliyor. Öyle çok şey girince yapamıyorum. Çok fazla kavram.(“ alanlar arası ilişki kuramama”)*

2. yıl öğretmen adayının görüşlerine göre:

2.yıl öğretmen adayı, bazı zamanlar, teoremleri ispat ederken sorun yaşıyor. Öğretmen adayı sorun yaşamasını, sonucu önemseydiği için işlem basamaklarını oluşturamamasına, teoremi önceki bilgilerle ilişkilendirememesine bağlıyor. Öğretmen adayı ispat yaparken öğretmenin rehberliğinden ve elindeki materyallerden faydalananarak ispatı önceden yapılan ispatlara benzetmeye çalışıyor. Öğretmen adayı bu benzetmeyi yaptığı zaman ve önceki bilgiyi hatırladığı zaman ispatı yapabiliyor. Diğer bir deyişle teoremle ilgili kavramsal bilgiye sahip olduğu zaman teoremleri ispat edebiliyor. Öğretmen adayı yakın zamanda anlatılan bir konu ile ilgili olan teoremi ispatlamada daha başarılı iken, farklı alanlardaki kavramların yer aldığı ispatları yapmada zorlanıyor.

3. Yıl Öğretmen Adayı

Aşağıda 3. yıl öğretmen adayının ilk üç soruya verdiği cevaplar ve elde edilen kavramlar yer almaktadır:

Görüşmeci : *Bu zamana kadar almış olduğunuz matematik derslerinde birçok teorem ispatladınız. Teorem ispatlarken nelerle karşılaşıyorsunuz?*

3. ÖA : *İspatlarda en büyük sorun; o ispatın benden ne istediği (“isteneni görme”). Nereden başlayacağımı bilirse devamı takır takır geliyor zaten ama bence en çok zorlandığım nokta ispata nereden başlamak gerektiği (“ispatın başlangıç noktasını görme”) ve benden ne istediği. Bu tür zorluklarla karşılaştığım*

oldu(“ispat yapmada sorun yaşama”). Hatta az önce bir soru çözdük ya $HK = KH$, onda kapsamayı göstereceğim, onu o an anladığım anda devamı gelmişti. Nereden başlayacağımı bilirse devamı geliyor (“işlem basamaklarını oluşturma”)

Görüşmeci : *İspat yaparken zorlanmanın nedeni sadece nereden başlayacağımı bilmemek mi? Başka nedenler de var mı?*

3. ÖA : *En önemli sorun nereden başlayacağımı bilememek. Mesela bazen oluyor, teoremle ilgili önceki tanımları, teoremleri biliyorum ama nasıl kullanacağımı bilemiyorum (“kavramsal bilgiyi uyarlayamama”). Orda bir seçme işlemi yapmak gerekiyor.*

Görüşmeci : *Teoremleri ispat ederken nelerden faydalaniyorsun?*

3. ÖA : *Bildiğim tanım, teorem ne varsa hepsini şöyle bir karıştırıyorum kafamda (“kavramsal bilgiyi zihinde araştırma”). Tanımlar ve teoremlerden yararlanıyorum, bir de diğer derslerimden.*

Görüşmeci : *Bir teoremi ispatlamada başarılıyım çünkü.....Boşlukları doldurman gerekirse ne dersin?*

3. ÖA : *Nereden başlayacağımı biliyorsam (“başlangıç noktasını görme”) ve tanımları, teoremleri nasıl kullanacağımı biliyorsam o teoremi ispatlarım (“kavramsal bilgileri kullanma”).*

3. yıl öğretmen adayının görüşlerine göre:

Öğretmen adayının ispat yaparken sorun yaşadığı zamanlar oluyor. Öğretmen adayı teorem ispatlarında sorun yaşamasının nedenini; ispat yaparken başlangıç noktasını seçememeye ve teoremle ilgili kavramsal bilgileri kullanamamasına bağlıyor. Öğretmen adayı bir teoremi ispatlamaya çalıştığı anda ilk önce zihninde teoremle ilgili kavramsal bilgilere başvuruyor. İspat yaparken bu bilgileri kullanabilirse ve işlem basamaklarını oluşturabilirse o ispatı yapabiliyor.

Öğretmen adaylarının görüşleri incelendiğinde elde edilen kod notları ve kavramlar sonucunda iki merkez kategoriye ulaşılmıştır.

- İspat yapmada sorun yaşama, isteneni görme, ispat yaparken işlem basamaklarını oluşturma, ispatın başlangıç noktasını görme kod notlarından “**ispat yapma**” kategorisine ulaşılmıştır.

- Teoremin dayandığı kavramsal bilgiler, önceki bilgiyi kullanma, önceki bilgiyi araştırma, kavramsal bilginin eksikliği, kavramsal bilgiyi unutma, ispatlama yöntemlerini bilme şeklindeki kod notlarından ise “**kavramsal bilgi**” kategorisine ulaşılmıştır.

Merkez kategoriler belirlendikten sonra bu kategorilerin eksensel kodlamaya göre boyutları belirlenmiştir. Bu boyutlar verilerin incelenmesi sonucunda oluşturulmuştur.

“İspat Yapma” kategorisinin boyutları:

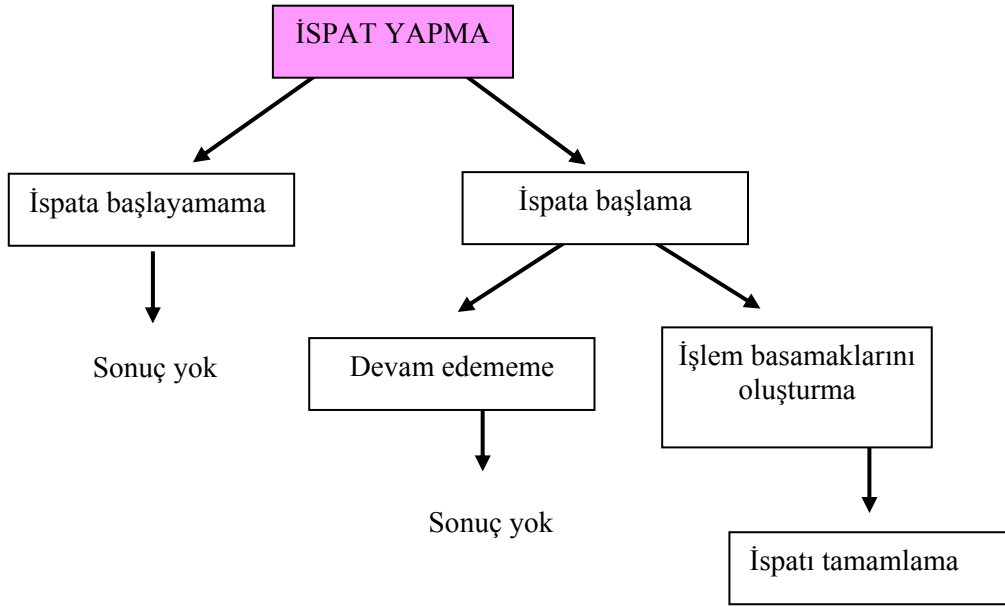
- İspata başlayamama,
- İspata başlayabilme,
- İspata başlama fakat devam edememe,
- İşlem basamaklarını oluşturma,
- İspatı tamamlama

olarak belirlenmiştir.

Bu boyutlara açıklık getirmek gerekirse aşağıdakiler söylenebilir:

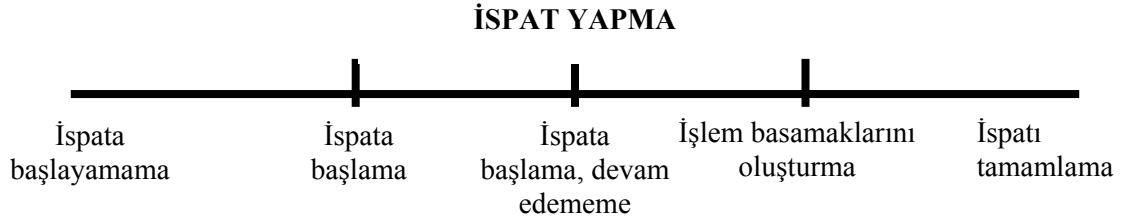
Öğretmen adayı bir teoremi ispatlamaya çalıştığı anda birkaç durumla karşı karşıya kalmaktadır. Öğretmen adayı bazı durumlarda ispatı yapma adına hiçbir performans gösterememekte ve ispata başlayamamaktadır. Bundan farklı olarak öğretmen adayı bazı durumlarda ispata başlayabilmektedir fakat ispatın devamındaki işlemlerde bazı sorunlarla karşılaşabilmektedir. Öğretmen adayı ispatlama süreci

içerisinde ispatı bir noktaya kadar getirebilmekte fakat devam edememektedir. Bunun haricinde de bazı durumlar gerçekleşebilmektedir. Öğretmen adayı ispata başlar ve ispat içerisinde oluşturması gereken işlem basamaklarını oluşturarak ispatı başarı ile sonuçlandırabilir. Ulaşılan bu boyutların bazılarının birbiri ile ilişkili olduğu ortaya çıkmıştır. Bu ilişki Şekil 45’ deki şemada gösterilmektedir.



Şekil 45. İspat Yapma Kategorisine Ait Şema

Yukarıdaki Şekil 45’de yer alan ispat yapma kategorisine ait boyutlar arasında hiyerarşik bir ilişki olduğunu söz konusudur. Burada ispat yapma kategorisinin iki uç boyutunu “ispata başlayamama” ve “ispatı tamamlama” oluşturmaktadır. Öğretmen adayının ispatın herhangi bir noktasında duraksaması için ispata başlaması gerekmektedir. Aynı şekilde işlem basamaklarını oluşturması için de ispata başlaması gerekmektedir daha sonra bunun devamında ispatı sonuçlandırabilmesi için ise ispata başlamalı ve işlem basamaklarını oluşturabilmelidir. Bu hiyerarşik ilişki Şekil 46’da bir eksen üzerinde gösterilmiştir.



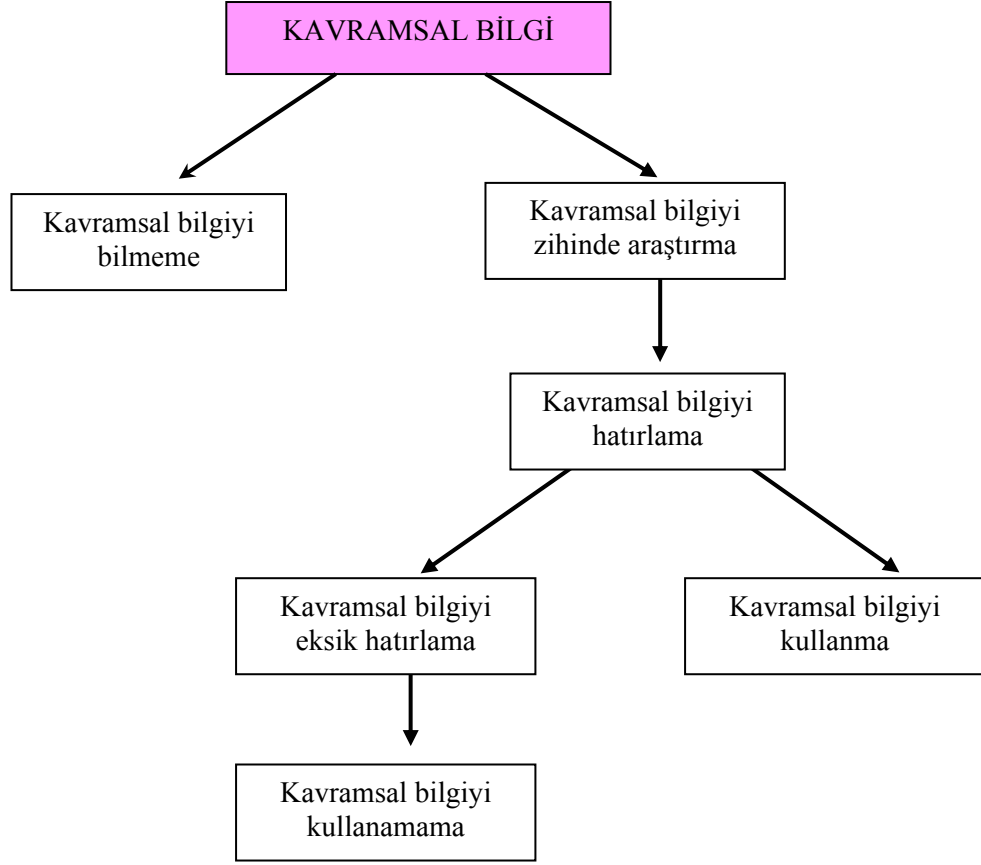
Şekil 46. İspat Yapma Kategorisine Ait Boyutların Eksen Üzerinde Gösterimi

“Kavramsal Bilgi” kategorisi incelenerek aşağıdaki boyutlara ulaşılmıştır:

- Kavramsal bilgiyi bilmeme
- Kavramsal bilgiyi zihinde araştırma
- Kavramsal bilgiyi hatırlama(alt boyutları: -kavramsal bilgiyi eksik hatırlama, - yeterli düzeyde kavramsal bilginin hatırlanması)
- Kavramsal bilgiyi kullanamama
- Kavramsal bilgiyi kullanma

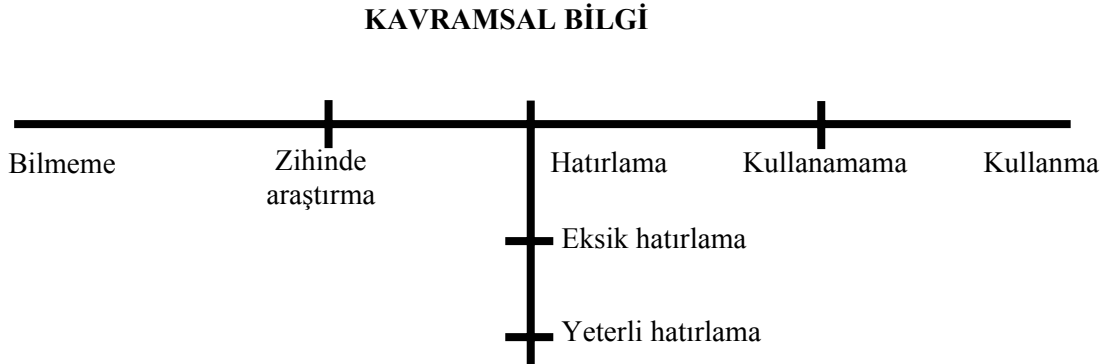
Bu boyutlara açıklık getirmek gerekirse aşağıdakiler söylenebilir:

Öğretmen adayının bir teoremin ispatı ile ilgili kavramsal bilgiyi hiç bilmemesi durumu söz konusu olabilir. Diğer bir deyişle öğretmen adayı teoremin ispatında kullanacağı ilgili tanım, teorem ve ilişkileri bilemeyebilir. Bundan farklı olarak öğretmen adayı bir teoremi ispat etmeye çalıştığı anda öncelikle zihninde yer alan kavramsal bilgilere başvurur ve hatırladıkları arasından kullanacaklarını seçer. Eğer hatırladığı kavramsal bilgiler eksik ise öğretmen adayı bu kavramsal bilgiyi kullanamayabilir. Öğretmen adayı son olarak teoremi ispatlamak için hatırladığı kavramsal bilgileri kullanır. Kavramsal bilgi merkez kategorisinin boyutları incelendiğinde bazı boyutlarının birbirleri ile ilişkili olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Şekil 47’ de boyutların ilişkisi gösterilmektedir.



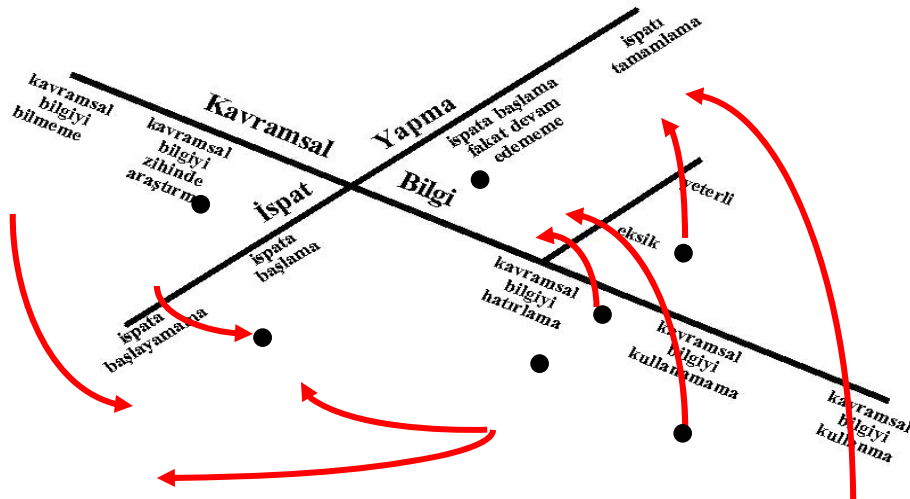
Şekil 47. Kavramsal Bilgi Kategorisine Ait Şema

Şekil 47 incelendiğinde görülmektedir ki; kavramsal bilgi kategorisinin iki uç boyutunu “kavramsal bilgiyi bilmeme” ve “kavramsal bilgiyi kullanma” oluşturmaktadır. Öğretmen adayının kavramsal bilgiyi bir teoremin ispatında kullanabilmesi için öncelikle o kavramsal bilgiyi hatırlaması gerekmektedir, kavramsal bilgiyi hatırlayabilmesi için ise zihninde yer alan kavramsal bilgileri araştırır. Buradan da görüldüğü üzere kavramsal bilginin boyutları arasında hiyerarşik bir ilişki söz konusudur. Bu ilişki Şekil 48’de gösterilmiştir.



Şekil 48. Kavramsal Bilgi Kategorisine Ait Boyutların Eksen Üzerinde Gösterimi

Öğretmen adaylarının görüşlerinden elde edilen veriler incelendiğinde “kavramsal bilgi” ve “ispat yapma” kategorilerinin birbirleri ile ilişkili olduğu görülmektedir. Bu iki kategorinin eksenlerindeki boyutlar bazı noktalarda birbirleri ile ilişkilidir. Şekil 49 da bu ilişkiyi gösteren bir yapı oluşturulmuştur. Bu yapı elde edilirken gömülü teoride boyutların ilişkilendirilmesini öngören eksensel kodlama teknikleri temel alınmıştır. İki merkez kategorinin yer aldığı eksenler birbiri ile kesiştirilmiş ve boyutlar arasındaki ilişki kırmızı oklarla gösterilmiştir.



Şekil 49. İspat Yapma ve Kavramsal Bilgi Kategorilerinin İlişkisini Gösteren Yapı

Şekil 49’ dan da görüldüğü üzere ispat yapma ile kavramsal bilgi birbiri ile ilişkilidir. Kavramsal bilgiyi bilmediği zaman öğretmen adayı ispata başlayamıyor. İspata başlamak için önce zihninde kavramsal bilgiyi araştırıyor, hatırladığı zaman başlıyor fakat yeterli düzeyde değilse ispatlamaya devam edemiyor. Öğretmen adayının hatırladığı kavramsal bilgi yeterli düzeyde ve öğretmen adayı bu kavramsal bilgiyi kullanabiliyorsa o zaman ispatı başarıyla tamamlıyor. Buradan öğretmen adayının sahip olduğu kavramsal bilginin, ispatı yapabilmesi üzerinde etkiye sahip olduğu söylenebilir.

Ulaştığımız bu sonuç; Weber’in (2001) “öğrencilerin çoğu nasıl kanıtlayacağını, kanıtlamaya nerden başlaması gerektiğini, kanıtlama sürecinde kullanması gereken kavramsal bilgileri, tanımları ve bunları nasıl kullanması gerektiğini bilmemektedir” görüşünü desteklemektedir.

4.2.2 4., 5., 6., 7., 8. ve 9. Görüşme Sorularına Ait Bulgular ve Yorumlar

- 4. Soru:** Sorularda yer alan anahtar noktaları ve fikirler hakkında ne düşünüyorsun?
- 5. Soru:** Soruları çözerken bu anahtar noktalardan ne düzeyde faydalandın?
- 6. Soru:** Anahtar noktaları vermemiş olsaydık soruları yanıtlarken nasıl davranırdın?
- 7. Soru:** Teoremlerin ispatında anahtar noktalar ne düzeyde önemlidir?
- 8. Soru:** Anahtar noktası verilmiş bir teoremle verilmemiş bir teoremi kıyaslanan gerekirse neler söylersin?
- 9. Soru:** Derslerde, ya da sınavlarda teoremler anahtar noktaları ile birlikte verilse bu senin ispat yapma performansını nasıl etkiler?

1. Yıl Öğretmen Adayı

Görüşmeci: *Soru kağıtlarında yer alan anahtar nokta ve fikirler hakkında ne düşünüyorsun?*

1.ÖA : *Kağıtları açtığım zaman bazı noktalar için ben bunu zaten biliyordum dedim. Ama işte bir ışık yaktı (**“farkına varma”**), ona göre devam edeyim dedim.*

Görüşmeci: *O zaman soruları çözerken bu anahtar noktalardan faydalan. Ne düzeyde faydalandığını açıklar mısın?*

1.ÖA : *Nereden başlayacağımı (**“ispata başlama”**), nasıl tamamlayacağımı (**“ispatı sonuçlandırma”**) göstermede çok faydası oldu (**“fayda sağlama”**).*

Birinci yıl öğretmen adayı soruları çözerken anahtar nokta ve fikirlerden faydalanmıştır. Öğretmen adayının görüşlerine göre anahtar nokta ve fikirler sayesinde teoremin kendisinden ne istediğinin farkına varmış ve ona göre devam etmiştir. Anahtar nokta ve fikirler sayesinde ispata başlayabilmiş ve ispatı başarı ile sonuçlandırabilmiştir.

Görüşmeci: *Anahtar noktaları vermemiş olsaydık soruları yanıtlarken nasıl davranırdın?*

1.ÖA : *Baya bi üstünde düşünürdüm herhalde (**“uzun süre düşünme”**), sinirlenirdim.*

Görüşmeci: *Sinirlenmek neden?*

1.ÖA : *Yapamadığım için sinirlenirdim (**“öfke duyma”**). Çok vakit harcardım (**“sonucun gecikmesi”**). Aslında verilmesi baya bi kolaylık oldu (**“kolaylaştırma”**).*

Görüşmeci: *Sence teoremlerin ispatında anahtar noktalar ne düzeyde önemlidir?*

1.ÖA : *Genelde işte tanımlar verilmiş, ilişkili teoremler verilmiş (**“kavramsal bilgi”**) yani önemli noktalar belirtiliyor, orada da öğrenci devam ediyor (**“ispatı oluşturma”**). Asıl yani can alıcı noktalar verilmiş (**“kritik nokta”**). Aslında teoremin kalan*

kısımında pek bir şey yok, onlar verilince devam ettirilebiliyor (“kolay cebirsel işlemler”).

Öğretmen adayının görüşlerine göre uygulama sorularında anahtar nokta ve fikirler yer almamış olsaydı, öğretmen adayı uygulama sorularını yanıtlarken uzun süre düşünmek zorunda kalacak ve yapamadığı için öfke duyacaktı. Fakat soruların anahtar nokta ve fikirlerle öğretmen adayının sonuca daha kolay ve çabuk ulaşmasını sağlamıştır. Öğretmen adayına göre; anahtar nokta ve fikirler, ispatın oluşturulmasını sağlayan önemli noktalardır ve arada kalan işlemler ise herkes tarafından kolayca yapılabilir.

Görüşmeci: *Anahtar noktası verilmiş bir teoremle verilmemiş bir teoremi kıyaslamam gerekirse neler söylersin?*

1. ÖA : *Anahtar nokta, teoremden hangi yolları izleyeceğimizi gösteriyor (“işlem basamaklarını oluşturma”). Nerelelere uğrayacağımızı gösteriyor (“kesim noktaları”). Şöyle düşünülebilir mesela otobüsle bir yere gideceksiniz nereden bineceğinizi bilirsiniz ve otobüs hangi duraklara uğrayacağını söyler ya onun gibi. Ama anahtar noktanın verilmediği teoremi de bunun gibi düşünürsek; sadece nereye gideceğiniz söyleniyor (“ispatın sonucu”). Nereden bineceğini ve hangi duraklara uğraman gerektiğini bilmiyorsun (“ispatı başlama ve işlem basamaklarını oluşturma”).*

Görüşmeci: *Derslerde, ya da sınavlarda teoremler anahtar noktaları ile birlikte verilse bu senin ispat yapma performansını nasıl etkiler?*

1. ÖA : *Bu şekilde verilse çok iyi olur aslında. Anahtar noktanın verilmesi beni çok rahatlatırdı (“rahatlama”). Çünkü neleri kullanacağımızı söylüyor (“önemli noktalara vurgu yapma”). Bazı teoremler oluyor tamamıyla başka başka şeyler kullanılıyor, çok dipte köşede kalmış özellikler kullanılıyor.*

Görüşmeci: *Dipte köşede kalmış özellikten kastın nedir?*

1. ÖA : *Bazen çok küçük geçişler kullanılıyor işte onu kastediyorum (“az kullanılan ayrıntılar”). Onlar benim aklıma gelmiyor (“kavramsal bilgiyi unutma”).*

Öğretmen adayına göre anahtar nokta ve fikirlerin yer aldığı teoremlerde önemli noktalara vurgu yapılıyor. İspatın başlangıç noktası ve işlem basamakları anahtar nokta ve fikirler yardımıyla kolayca oluşturulabiliyor. Anahtar nokta ve fikirlerin yer almadığı teoremlerde ise sadece istenen sonuç görünüyor. Öğretmen adayına göre anahtar nokta ve fikirlerin derslerde ve sınavlarda kullanılması, anahtar nokta ve fikirlerin önemli noktalara vurgu yapması açısından önemlidir.

Görüşmeci: *Peki anahtar noktanın verilmesi senin ispat yapma performansına nasıl yansır? Biraz daha açıklar mısın?*

1. ÖA : *Anahtar nokta verildiği teoremleri daha kolay ispatlarım (“**sonuca kolay ulaşma**”). Daha başarılı olurum diye düşünüyorum (“**başarı**”). Mesela bir öğrenci fonksiyonunun tanımını biliyor tersinin tanımını biliyor, ya da görüntü kümesinde bir kısıtlama olduğu zaman ne olacağını biliyor fakat öğrenci ona nasıl gideceğini bilemiyor (“**önceki bilgiyi kullanamama**”) Mesela derslerde bu gibi uygulamalar yapılırsa öğrenci için daha faydalı olur (“**fayda sağlama**”). Bazı öğrenciler oluyor ki yani bazı derslerde çok başarılı bazı derslerde de çok başarısız. Öğrenci işte o derste birkaç soruyu yapamıyor onun yüzünden soğuyor (“**uzaklaşma**”). Ama teoremler bu şekilde verildiği zaman öğrencinin yapma olasılığı artar (“**ispatlama olasılığında artma**”). Öğrenci yaptığı zaman memnun olur ve motivasyonu artar (“**motivasyonda artma**”). Motivasyonu artan öğrencinin de öğrenmesi artar (“**öğrenmenin gerçekleşmesi**”).*

Öğretmen adayı, anahtar nokta ve fikirleri, kavramsal bilgiyi hatırlatması, ispatın oluşturulması, kritik noktaları ve az kullanılan ayrıntıları hatırlatması adına önemli buluyor. Anahtar nokta ve fikirleri verilen bir teoremin ispatında kalan kısımların kolay cebirsel işlemler olduğunu ve rahatlıkla yapılabileceğini düşünüyor. Öğretmen adayı anahtar nokta ve fikirlerin; öğrencilerin öğrenmesine katkı sağlayacağını, ispatlama performanslarını arttıracaklarını, öğrencinin motivasyonunu arttıracaklarını düşünüyor.

2. Yıl Öğretmen Adayı

Görüşmeci: Soru kağıtlarında yer alan anahtar nokta ve fikirler hakkında ne düşünüyorsun?

2. ÖA : Anahtar noktalar tam böyle takıldığım yerlerde işime yaradılar (**“ispata devam edememe”** , **“anahtar noktadan faydalanma”**), O noktayı aldıktan sonra gerisi geliyor (**“kolay cebirsel işlemler”**)

Görüşmeci: Anahtar noktalar işime yaradı dedin. Ne düzeyde faydalandın sorulardaki anahtar nokta ve fikirlerden?

2. ÖA : Oldukça faydalandım. Soruları çözerken işimi kolaylaştırdı (**“kolaylaştırma”**).

İkinci yıl öğretmen adayı uygulama sorularını yanıtlarken anahtar nokta ve fikirlerden yararlanmıştı. Anahtar nokta ve fikirler, öğretmen adayına soruları yanıtlarken takıldığı ve ispata devam edemediği yerlerde yardımcı olmuştur. Öğretmen adayına göre anahtar nokta ve fikirler haricinde yapılacak işlemler kolay cebirsel işlemlerdir. Anahtar nokta ve fikirler teoremleri ispat ederken öğretmen adayının sonuca ulaşmasını kolaylaştırmıştır.

Görüşmeci: Anahtar noktaları vermemiş olsaydık soruları yanıtlarken nasıl davranırdın?

2. ÖA : Bazılarını ispatlayamazdım (**“ispatı yapamama”**)

Görüşmeci: Sence teoremlerin ispatında anahtar noktalar ne düzeyde önemlidir?

2. ÖA : Bu noktalar teorem için tam böyle ana noktalar, çok önemli yani (**“kritik nokta”**). O noktayı bildiğinde gerisi geliyor zaten. Boşlukları doldurabiliyorsun (**“ anahtar noktalar arasındaki kolay cebirsel işlemler”**).

Öğretmen adayı uygulama sorularında anahtar nokta ve fikirlere yer verilmemiş olsaydı soruları yanıtlamayacağını düşünüyor. Öğretmen adayı anahtar nokta ve fikirleri teoremlerin ispatını oluşturmayı sağlayan önemli noktalar olarak görüyor ve bu noktalar arasında kalan işlemlerin kolaylıkla yapılabileceğini düşünüyor.

Görüşmeci: *Anahtar noktası verilmiş bir teoremle verilmemiş bir teoremi kıyaslamam gerekirse neler söylersin?*

2. ÖA : *Bir kere anahtar noktanın verilmediği teoremden korku olur (“başarısız olma kaygısı”). Ben mesela sınavda teorem gelince korkuyorum. Onu en sona bırakıyorum sınavda (“ispattan uzaklaşma”). Ama anahtar nokta olduğu zaman bir umut doğar içine uğraşırsın (“çaba gösterme”). Bazen çalışırsın çalışırsın aklına gelmez (“unutma”). Mesela geçen sene olmuştu çok çalışmıştım ama bir türlü iki noktayı birbirine bağlayamamıştım (“ilişki kuramama”), ama orda anahtar nokta olsaydı kesin bağlardım (“ispatı tamamlama”). Anahtar noktaların yardımıyla öğrenci teoremi ispatladıkça ben bu işi yapabiliyorum diyebilir (“özgüven”) ve artık ispatlara bakış açısı değişir, korkuyla yaklaşmaz (olumlu tutum geliştirme”).*

Görüşmeci: *Derslerde, ya da sınavlarda teoremler anahtar noktaları ile birlikte verilse bu senin ispat yapma performansını nasıl etkiler?*

2. ÖA : *Bence ispat yapma performansı artar (“ispat yapma performansında artma”). Oldukça artar hem de.*

Öğretmen adayının görüşlerine göre; öğretmen adayı anahtar nokta ve fikirlerin olmadığı teoremleri ispatlamaktan çekiniyor ve başarısız olma kaygısı yaşıyor. Buna karşın anahtar nokta ve fikirlerin yer aldığı teoremlerde öğretmen adayı ispatı yapabilmek adına çaba gösteriyor. Anahtar nokta ve fikirler sayesinde bireyde ispat yapmaya yönelik özgüven gelişeceğini ve bireylerin teorem ispatlamaya karşı olumlu tutum geliştireceğini düşünüyor.

3. Yıl Öğretmen Adayı

Görüşmeci: *Sorularda yer alan anahtar noktaları ve fikirler hakkında ne düşünüyorsun?*

3. ÖA : *Bu anahtar nokta ve fikirlerin çok faydalı olduğunu düşünüyorum (“fayda sağlama”). Anahtar noktalar tam yerindeydi ve gereksiz değildi (“anahtar noktanın yerinde olması”). Almamız gereken küçük nüanslar vardı*

Görüşmeci: Buradan anahtar nokta ve fikirlerden faydalandığını anlıyoruz. Peki sana sorduğumuz soruları çözerken bu fikirlerden ne düzeyde faydalandın?

3. ÖA : Çok faydalandım. Bu dersi uzun bir süredir almadığım (“**unutma**”) için o yüzden ipuçları bana çok faydalı oldu. Tam böyle imdadıma yetişti (“**yardımcı**”). Tam devirli grubun tanımını hatırlamaya çalışıyordum ki imdadıma yetişti. Tam oturdu yani (“**yerli yerinde**”). Anahtar noktalar çok güzeldi.

3. yıl öğretmen adayı uygulama sorularını yanıtlarken sorularda yer alan anahtar nokta ve fikirlerden yararlanmıştı. Öğretmen adayı sorularda yer alan anahtar noktaların faydalı olduğunu ve yerli yerinde kullanıldığını düşünüyor. Soruları yanıtlarken takıldığı noktalarda anahtar nokta ve fikirler öğretmen adayına yardımcı olmuştur.

Görüşmeci: Anahtar noktaları vermemiş olsaydık soruları yanıtlarken nasıl davranırdın?

3. ÖA : Bazılarını ispatlayamazdım (“**ispat yapamama**”). Çok düşünürdüm (“**düşünme süresinin uzaması**”) nereden başlayacağım (“**ispatın başlangıç noktası**”), nasıl devam edeceğim (“**ispatı oluşturma**”) diye.

Görüşmeci: Teoremlerin ispatında anahtar noktalar ne düzeyde önemlidir?

3. ÖA : Yerinde olması ve tam böyle öğrencinin sıkıştığı (“**duraksama**”) anda imdadına yetişmesi (“**yardımcı**”) açısından bence çok önemli. Ben ispat yaparken karşıma bir ipucu çıktığı zaman bile o ipucunun vermiş olduğu güveni hissederim (“**kaygı düzeyinin düşmesi**”). Kendimi daha iyi hissederim ve yapmaya başlarım (“**çaba gösterme**”). Eğer o ipucu alakasız bir şey bile olsa bende psikolojik olarak rahatlama sağlar (“**kaygı düzeyinin düşmesi**”). İlk başta bana bir rahatlığı olur sıkışırsam bakarım.

Öğretmen adayı çalışma kağıtlarında yer alan sorularda anahtar nokta ve fikirler olmasaydı bu soruların bir kısmını yanıtlamayacağını düşünüyor. Öğretmen adayı,

anahtar nokta ve fikirler verilmemiş olsaydı, ispata nasıl başlayacağı ve ispatı nasıl oluşturacağı konusunda uzun süre düşüneceğini belirtiyor. 3. yıl öğretmen adayı anahtar nokta ve fikirleri ispatı yapan kişinin kaygı düzeyini düşürmesi, ispatı yaparken yardımcı olması ve işini kolaylaştırması açısından önemli buluyor. Anahtar nokta ve fikirler sayesinde bireylerin ispatı yapmak için daha çok çaba göstereceğini düşünüyor.

Görüşmeci: *Anahtar nokta ve fikirlerin varlığı seni rahatlatıyor, peki ipucunu açınca ne hissediyorsun?*

3.ÖA : *Sadece varlığı değil işime yaradığını görünce daha da rahatladım (“fayda sağlama” , “rahatlama”).*

Görüşmeci: *Anahtar noktası verilmiş bir teoreme verilmemiş bir teoremi kıyaslamam gerekirse neler söylersin?*

3. ÖA : *Anahtar noktası verilmemiş bir teorem gördüğüm zaman önce benim elim ayağıma dolaşıyor (“telaşlanma”), bilgiler kafamda uçuşuyor, çok karışıyor (“bilgi karmaşası”). Bende “acaba çözebilecek miyim, sonunu getirebilecek miyim” endişesi oluyor (“ispatlayamama kaygısı”). Aslında bütün tanımları teoremleri biliyorum ama işte böyle başlayamamak (“önceki bilgiyi kullanamama”), bunun endişesi çok oluyor. Ama elimin altında bir anahtar noktanın olması kendimi güvende hissetmemi sağlıyor (“kaygı düzeyinin düşmesi”). Öğrenci o anahtar noktanın orda olduğunu biliyorsa ve konuyu iyi kavramışsa o anahtar noktanın varlığı bile yeter. Bence çok da rahat çözebilir (“sonuca ulaşma”). Bir güven oluşur, ki unutmuş olsa bile açar bakar. Rahatça çözebilir. Bence anahtar nokta ve fikirler olmalı.*

Görüşmeci: *Derslerde, ya da sınavlarda teoremler anahtar noktaları ile birlikte verilse bu senin ispat yapma performansını nasıl etkiler?*

3. ÖA : *Sınavlarda teoremler bu şekilde verildiği zaman öğrenci, tam olarak performansını ortaya koyabilir. Tam anlamıyla soruyu yapabileceği en iyi şekilde yapar (“üst düzey performans”). Mesela bazen biz unutuyoruz, yapamıyoruz (“kavramsal bilgiyi unutma”) ama o anahtar noktada onu eğer görürse aklına gelebilir (“kavramsal bilgiyi unutma” ya karşı “kavramsal bilgiyi hatırlama”) ve diğer*

bilgilerin açığa çıkmasını sağlayabilir (“çağrışım”). Bence o anahtar nokta çok şey yapabilir (“çok yönlü fayda sağlama”). Ama bazen şöyle de olabilir ipucunu açsa da kullanamayabilir (“anahtar noktayı kullanamama”). Mesela soruların birinde bende yaşadım, bunun tanımını biliyordum dedim ama şu an nerde kullanacağımı bilemiyorum dedim.

Görüşmeci: *Anahtar nokta ve fikirler hakkında eklemek istediğin düşüncelerin varsa bahseder misin?*

3. ÖA : *Ben anahtar noktanın öğrencinin başarısını olumlu etkileyeceğini düşünüyorum (“başarı”). Bir de anahtar noktalı teoremi ispatlamak daha eğlenceli (“zevk alma”). Daha bir eğlenceli hale sokuyor, hani mesela insan çözerken daha bir hevesli çözüyor (“ispatlama isteği”). Ama diğerinde mesela bakıyor aklına gelmeyince pes ediyor (“ ispatlama isteği” ne karşı “çaba göstermeme”). Hatta şu da oluyor “anahtar noktaya bakmadan kendi kendime çözmeye çalışsam” düşüncesiyle insan daha iyi konsantre oluyor (“teoreme odaklanma”). Anahtar noktayla yarışıyor bir bakıma. İpuçları sınavlarda puanlanabilir mesela.*

Öğretmen adayına göre, anahtar noktanın olmadığı zaman teoremi gördüğü zaman telaşlanıyor ispatlayamama kaygısı yaşıyor ve uzun süre düşünüyor, önceki bilgilerini kullanamadığında da teoremi ispatlamaktan vazgeçiyor. Anahtar nokta ve fikirlerin varlığı öğretmen adayının başarısız olma kaygısını düşürüyor ve özgüvenini artırıyor, bu tür teoremleri ispatlamaktan zevk alıyor. Sınavlarda ya da derslerde, teoremlerin anahtar nokta ve fikirlerle verilmesi halinde öğrencilerin üst düzey performans sergileyeceğini düşünüyor.

Öğretmen adayları ile yapılan görüşmelerde oluşan kod notları kavramlar analiz edilmiş ve bazı kategorilere ulaşılmıştır.

- Kavramsal bilginin çağırışımı, çok yönlü fayda sağlama, kolaylaştırma, kritik nokta, kolay cebirsel işlemler, önceki bilgiyi kullanma, kesim noktaları, teoreme odaklanma kodlarından “**anahtar nokta**” kategorisine ulaşılmıştır.

- Sonuca kolay ulaşma, başarı, üst düzey performans, uzun uzun düşünme, sonucun gecikmesi, ispata başlama, ispata devam edememe, çaba gösterme, vazgeçme kodlarından “**ispat yapma performansı**” kategorisine ulaşılmıştır.

- Vazgeçme, uzaklaşma, kaygı yaşama, telaşlanma, özgüven, olumlu tutum, zevk alma, çaba gösterme, istekli davranma, motivasyon, öfke duyma, korkma, kaygının azalması kodlarından “**öğrenci tutumları**” kategorisine ulaşılmıştır.

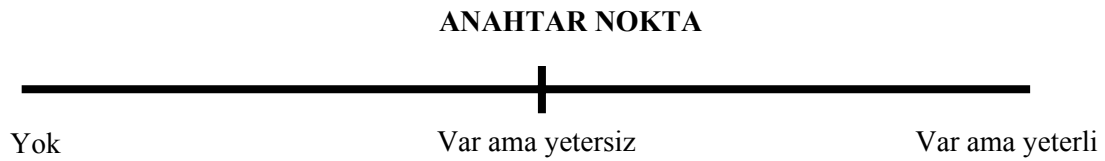
Merkez kategoriler belirlendikten sonra bu kategorilerin eksensel kodlamaya göre boyutları belirlenmiştir. Bu boyutlar verilerin incelenmesi sonucunda oluşturulmuştur.

“Anahtar Nokta” kategorisinin boyutları:

- Anahtar nokta ve fikir yok
- Anahtar nokta ve fikir var fakat yetersiz
- Anahtar nokta ve fikir var ve yeterli

Bu boyutlar, bir teoremden anahtar nokta ve fikirlerin varlığının durumunu göstermektedir. Herhangi bir teorem anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmemiş olabilir. Bunun yanında bir teorem anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmiş olsa da bu nokta ve fikirler teoremin ispatı için yetersiz olabilir. Son olarak da bir teoremden anahtar nokta ve fikirler verilmiş ve bu nokta ve fikirler o teoremin ispatı için yeterli düzeyde olabilir. Bu boyutlar arasında birbirleri ile ilişkisi olmadığından boyutların ilişkisini gösteren bir şema çizme yoluna gidilmemiştir. Fakat boyutlar incelendiğinde aralarında hiyerarşik bir sıralamanın olduğu görülmektedir. “Anahtar nokta ve fikir yok” boyutu ile “anahtar

nokta ve fikir var ve yeterli” boyutu “anahtar nokta” kategorisinin uç boyutlarıdır. Bu boyutlar Şekil 50 de bir eksen üzerinde gösterilmiştir.

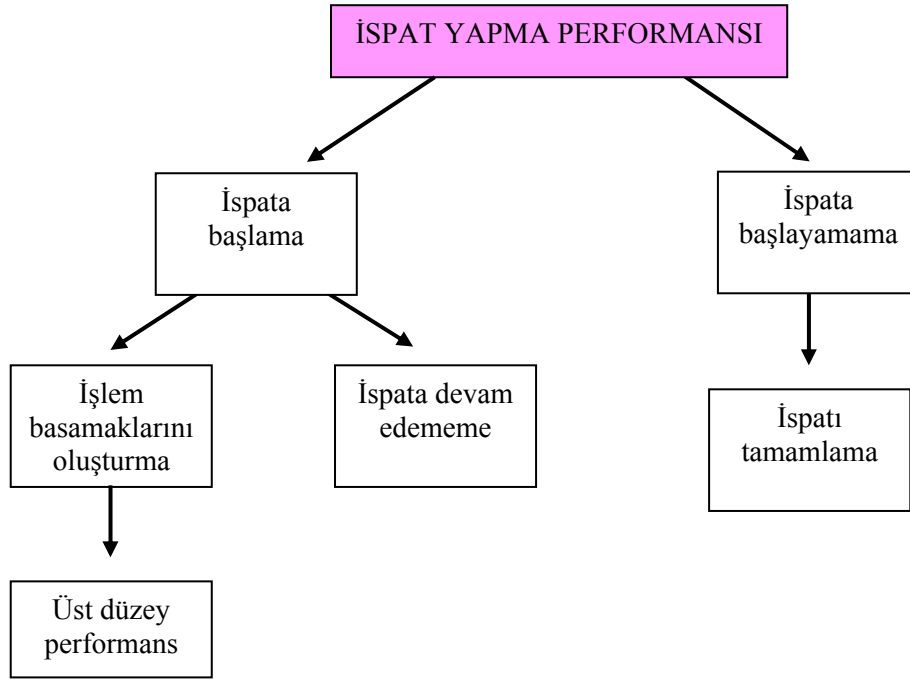


Şekil 50. Anahtar Nokta Kategorisine Ait Boyutların Eksen Üzerinde Gösterimi

İkinci olarak “İspat Yapma Performansı” kategorisinin boyutları belirlenmiştir. Bu boyutlar:

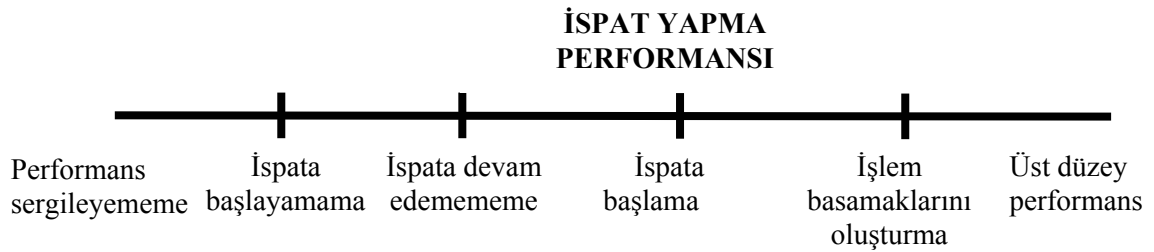
- İspata başlayamama
- İspata başlama
- İspatın bir yerinde takılma devam edememe
- Performans sergileyememe
- İşlem basamaklarını oluşturma
- Üst düzey performans

Bu boyutlar, öğretmen adayının ispatları yaparken ispat yapma performansının hangi şekillerde olduğunu gösterir. Öğretmen adayları bazı durumlarda ispata hiç başlayamıyorlar ve bunun ardından ispat yapmaktan vazgeçiyorlar, böylece o ispatı yapmak adına herhangi bir performans sergileyemiyorlar. Öğretmen adayları bazı durumlarda ise ispata başlıyor fakat ispatın herhangi bir yerinde takılabiliyor bu durumda öğretmen adayının performansı ispatı yapmak adına yeterli olmuyor. Bazı durumlarda ise öğretmen adayı ispata başlıyor, işlem basamaklarını oluşturuyor ve böylece üst düzey performans sergiliyorlar. Bu boyutlar incelendiğinde, boyutlar arasında bir ilişki kurulmuştur. Bu ilişki Şekil 51’de gösterilmektedir.



Şekil 51. İspat Yapma Performansı Kategorisine Ait Şema

“İspat Yapma Performansı” kategorisinin iki uç boyutunu “performans sergileyememe” ve “üst düzey performans” boyutları oluşturmaktadır. Bu boyutlar arası ilişkiye açıklık getirmek gerekirse; öğretmen adayının üst düzey performans sergileyebilmesi için ispata başlaması ve işlem basamaklarını oluşturmaları gerekmektedir. Diğer yandan öğretmen adayının performans sergileyememesi için ispata hiç başlayamamış olması gerekmektedir. Bu hiyerarşik yapı Şekil 52’de gösterilmektedir.



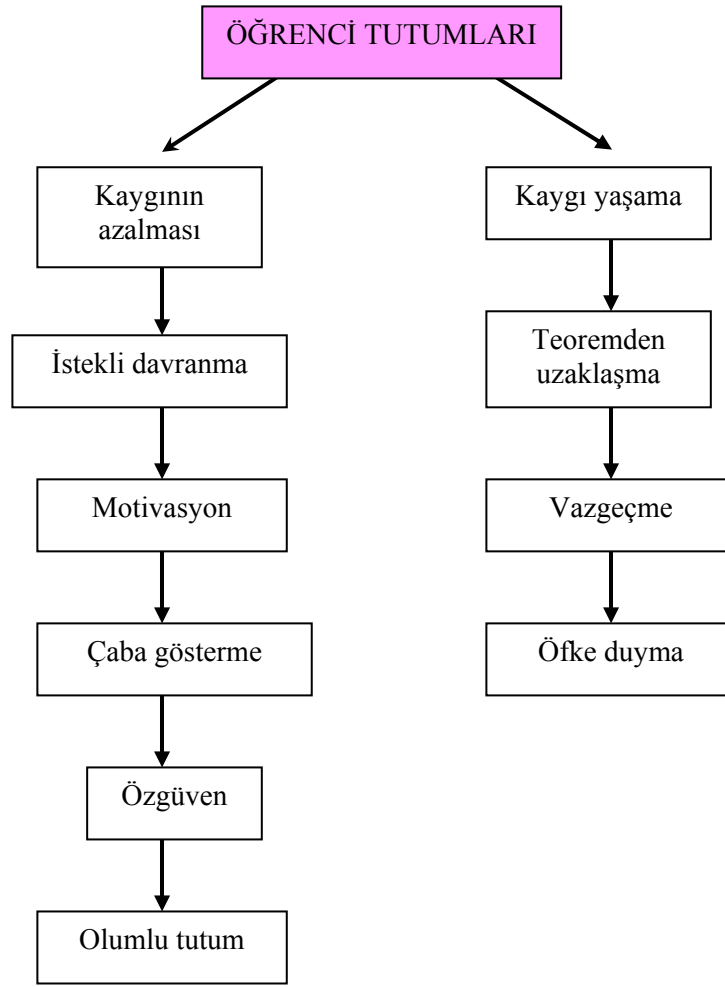
Şekil 52. İspat Yapma Performansı Kategorisine Ait Boyutların Eksen Üzerinde Gösterimi

“Öğrenci Tutumları” kategorisine ait aşağıdaki boyutlar belirlenmiştir:

- Kaygı yaşama
- Uzaklaşma
- Vazgeçme
- Öfke duyma
- Kaygının azalması
- İstekli davranma
- Motivasyon
- Çaba gösterme
- Özgüven
- Olumlu tutum

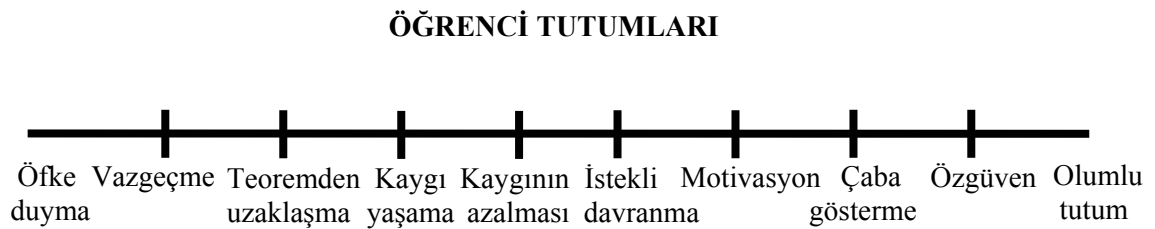
Bu boyutlara açıklık getirmek gerekirse aşağıdakiler söylenebilir:

Öğretmen adayları bazı durumlarda teoremleri ispat edecekleri zaman kaygı yaşıyorlar. Öğretmen adayı teoremi görür görmez bir kaygı durumu içerisine giriyor. Bu durumda teoremden uzaklaşıyorlar ya da teoremi ispat etmekten vazgeçiyorlar. Bunun sonucu olarak öğretmen adayı teoremi ispat edemediği için öfke duyuyor. Bu öfke bütün teorem ispatlarına ve derslere karşı gelişebiliyor. Diğer yandan öğretmen adayı bazı durumlarda teorem ispatlamaya karşı yüksek bir kaygı durumu içerisinde olmuyorlar, böylece öğretmen adayı teoremi ispatlamak için istekli davranıyor ve motive oluyor. Öğretmen adayının ispatı yapma adına çabası artıyor. Teoremi ispat eden öğretmen adayının özgüveninde artış oluyor ve teorem ispatlarına karşı olumlu tutum geliştirebiliyor. Bu anlatılanlara göre boyutlar arasında bir ilişkinin olduğu görülmektedir. Boyutlar arasındaki bu ilişki Şekil 53’de gösterilmektedir.



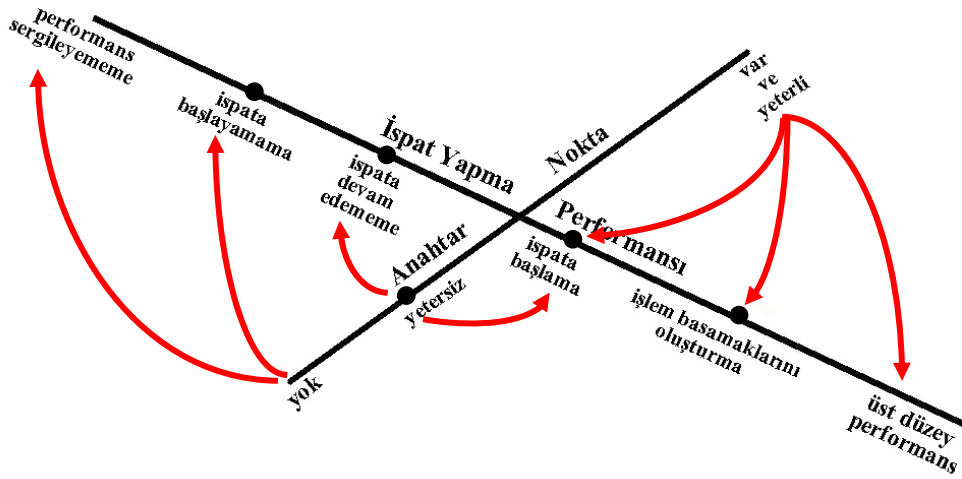
Şekil 53. Öğrenci Tutumları Kategorisine Ait Şema

“Öfke duyma” ve “Olumlu tutum” öğrenci tutumları kategorisinin iki uç boyutudur. Burada boyutlar arasında hiyerarşik bir yapı söz konusudur. Bu yapının daha iyi anlaşılabilmesi için, boyutlar Şekil 54 da eksen üzerinde gösterilmiştir.



Şekil 54. Öğrenci Tutumları Kategorisine Ait Boyutların Eksen Üzerinde Gösterimi

Öğretmen adaylarının görüşlerinden elde edilen veriler incelendiğinde “anahtar nokta” ve “ispat yapma performansı” kategorilerinin birbirleri ile ilişkili olduğu görülmektedir. Bu iki kategorinin eksenlerindeki boyutlar bazı noktalarda birbirleri ile ilişkilidir. Şekil 55’de bu ilişkiyi gösteren bir yapı oluşturulmuştur. Bu yapı elde edilirken gömülü teoride boyutların ilişkilendirilmesini öngören eksensel kodlama teknikleri temel alınmıştır. İki merkez kategorinin yer aldığı eksenler birbiri ile kesiştirilmiş ve boyutlar arasındaki ilişki kırmızı oklarla gösterilmiştir.

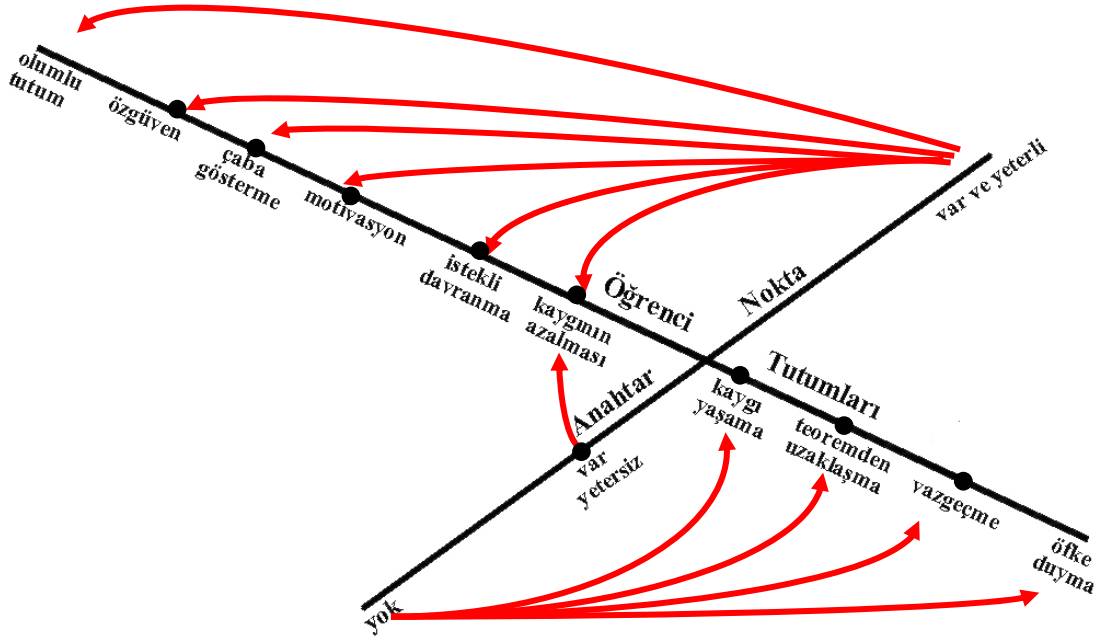


Şekil 55. Anahtar Nokta ve İspat Yapma Performansı Kategorilerinin İlişkisini Gösteren Yapı

Şekil 55 incelendiğinde görülmektedir ki; teoremden anahtar nokta ve fikirlere yer verilmediği zaman öğretmen adayı teoremi ispatlamaya hiç başlayamayabiliyor ve herhangi bir performans gösteremiyor. Anahtar nokta ve fikirlerin olduğu fakat yeterli olmadığı teoremlerde de öğretmen adayı teoremin ispatını bir yere kadar getirebiliyor fakat devam edemiyor. Anahtar noktanın yeterli olduğu teoremlerde ise öğretmen adayı işlemsel basamakları oluşturuyor ve teoremin ispatını tamamlıyor. Öğretmen adayı böylece üst düzey performans sergileyerek teoremi başarıyla ispat ediyor.

Buradan bir teoremden anahtar nokta ve fikirlerin yer alıp almamasının öğretmen adayının ispat yapma performansını etkilediği söylenebilir.

Öğretmen adaylarının görüşlerinden elde edilen veriler analiz edilerek “öğrenci tutumları” kategorisine ulaşılmıştır. Veriler incelendiğinde “öğrenci tutumları” ve “anahtar nokta” kategorilerinin birbirleri ile ilişkili olduğu görülmektedir. Bu iki kategorinin eksenlerindeki boyutları, bazı noktalarda birbirleri ile ilişkilidir. Şekil 56’da bu ilişkiyi gösteren bir yapı oluşturulmuştur. Diğer kategorilerin ilişkilendirilmesinde takip edilen yöntem burada da uygulanmıştır. Bu yapı elde edilirken gömülü teoride boyutların ilişkilendirilmesini öngören eksensel kodlama teknikleri temel alınmıştır. İki merkez kategorinin yer aldığı eksenler birbiri ile kesiştirilmiş ve boyutlar arasındaki ilişki kırmızı oklarla gösterilmiştir.



Şekil 56. Anahtar Nokta ve Öğrenci Tutumları Kategorilerinin İlişkisini Gösteren Yapı

Teoremlerde anahtar noktaların olup olmaması teoremleri ispatlamaya çalışan öğretmen adaylarının tutumlarını etkilemektedir. Anahtar nokta ve fikirlerin olmadığı teoremlerde öğretmen adayları teoremi gördüklerinde yapamayacaklarına dair kaygı yaşıyorlar. Bu kaygı öğretmen adayını ispat yapmaktan uzaklaştırıyor ve öğretmen adayı ispatı yapmıyor. Bunun sonucunda öğretmen adayında teorem ispatlarına karşı yapamamaktan kaynaklanan bir öfke hissi geliyor. Buna karşın anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmiş teoremlerde bu nokta ve fikirlerin varlığı öğretmen adayını rahatlatıyor ve kaygı düzeyinin azalmasını sağlıyor. Anahtar nokta ve fikirlerin yeterli düzeyde verilmiş olduğu teoremlerde ise öğretmen adayının kaygı düzeyinin azalmasının yanında, öğretmen adayı teoremi ispatlamak için çaba gösteriyor ve böylece öğretmen adayının kendine olan güveni artıyor. Sonuç olarak da öğretmen adayı teorem ispatlarına karşı olumlu tutum geliştiriyor. Buradan anahtar nokta ve fikirlerin öğretmen adaylarının teorem ispatlarına karşı olan tutumları üzerinde etkisi olduğundan söz edilebilir.

4.2.3 10. Görüşme Sorusuna Ait Bulgular ve Yorumlar

Öğretmen adaylarına sorulan ilk 4 soruda anahtar nokta ve fikirler verilmişti. Öğretmen adayından bu noktaları ve fikirleri unutması ve kendi noktalarını belirlemesi istendi. Öğretmen adayından son olarak da ispatı verilmiş bir teoremden anahtar nokta ve fikirleri belirlemesi istendi. Bu kısımda, bu uygulamaya ait bir görüşme sorusu yer almaktadır.

10. Soru: Sorulardaki anahtar nokta ve fikirleri belirlerken ne gibi kriterleri göz önünde bulundurdun?

1. Yıl Öğretmen Adayı

1. ÖA : Genel itibariyle tanımları verdim çünkü öğrenci onları kullanarak çok faydalaniyor (**“kavramsal bilgi”**). Öğrenci onları kullandıktan sonra işlemin devamını zaten kendisi getirebilir (**“anahtar noktalar arasındaki işlemleri yapma”**). Önemli olan öğrenciye yol gösterebilmek (**“yol gösterme”**). Bunu teorem için düşünürsek, teoremin ispatında neler kullanabileceğini göstermek (**“kavramsal bilgi”**). Rehberlik yaptım bir nevi.

2. Yıl Öğretmen Adayı

2.ÖA : Ben ipuçlarını belirlerken; ‘bana ne verilseydi bu soruyu çözebilirdim (**“ispatı tamamlama”**)’ diye düşündüm (**“empati”**). Kesim noktalarını düşündüm.

Görüşmeci: Kesim noktaları derken neyi kastediyorsun?

2.ÖA : Kesim noktası, yani teoremin ya da sorunun önemli noktaları (**“önemli nokta”**). O soruyla ilgili olan tanımın, teoremin ortak noktaları denilebilir (**“kavramsal bilgiyi kullanma”**).

3. Yıl Öğretmen Adayı

3.ÖA : Anahtar noktayı belirlemek aslında zor, onu anladım. Sıfır bölensizliğin tanımını verdim. Bence tanımlar çok önemli değil. Hani bir öğrencinin nerde kullanması gerektiğini bilmesi önemli(**“kavramsal bilgiyi kullanma”**). Hani belki o tanımları unutmuş olabilir. Ben bir öğrencinin bütün tanımları ve teoremleri ezbere bilmesine karşıyım. Önemli olan öğrencinin bir soruyu çözerken o tanımları ve teoremleri kullanabilmesidir. Bu daha değerlidir bence. O yüzden ben tanımları ve teoremleri (**“kavramsal bilgi”**) verirdim ve bunları kullanabileceği ispatlar sorardım.

Görüşmeci: Peki bu noktaları seçerken kriterin neler olur?

3.ÖA : Anahtar noktaları verirken öğrencinin işine ne kadar yarayacağını (**“fayda sağlama”**) düşünerek verirdim (**“empati”**). O anahtar noktayı alacak, kullanacak, gerisini kendisi getirebilecek (**“anahtar noktalar arasındaki işlemleri yapma”**). Neyi verirsem gerisini kendisi getirebilir diye düşünerek verirdim anahtar noktaları (**“kolaylaştırma”**). İspata ağırlığını koyan tanım, teoremleri verirdim, diğer yan teoremleri vermezdim (**“kavramsal bilgi”**).

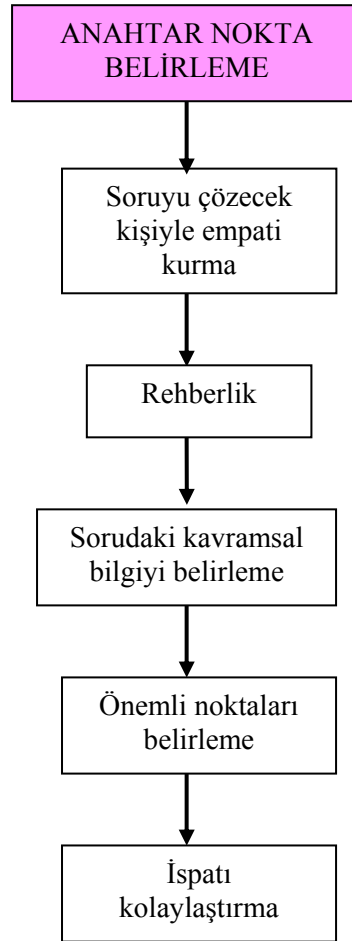
Öğretmen adayları anahtar nokta ve fikirleri belirlerken teoremlerde kullanılabilecek kavramsal bilgileri ele alıyorlar. İspatın çatısını düşünerek en önemli gördükleri kavramsal bilgileri anahtar noktalar olarak belirliyorlar. Öğretmen adayları ayrıca, anahtar nokta ve fikirleri belirlerken kendilerini soruyu çözen kişinin yerine

koyuyorlar ve hangi bilgilerle bu kişinin ispatı tamamlayabileceğini düşünüyorlar. Anahtar noktaları seçerken bu noktalar arasında kalan işlemlerin kolayca yapılabilir olmasını da göz önünde bulunduruyorlar.

Burada merkez kategori olarak “anahtar nokta belirleme” ortaya çıkmıştır. Öğretmen adaylarının herhangi bir soru ya da teorem için anahtar nokta ve fikirleri belirlerken izlemiş oldukları yönergeler vardır. Bu yönergeler anahtar nokta belirleme kategorisinin boyutlarıdır. Bu boyutlar:

- Soruyu çözecek kişiyle empati kurma
- Rehberlik yapma
- Teoremdeki kavramsal bilgiyi belirleme
- Önemli noktaları belirleme
- İspatı kolaylaştırma

Bu boyutlar arasındaki ilişki Şekil 57 ‘deki şemada gösterilmiştir.



Şekil 57. Anahtar Nokta Belirleme Kategorisine Ait Şema

Öğretmen adaylarının anahtar nokta ve fikirleri belirlerken ispatın ya da sorunun çözümünü sağlayan en önemli noktaları göz önüne aldıkları söylenebilir.

4.2.4 11. Görüşme Sorusuna Ait Bulgular ve Yorumlar

11. Soru: Anahtar nokta ve fikirler, matematiğin dışında, günlük hayatla ilişkilendirilebilir mi? Aklına gelen örneklerden bahseder misin?

1. Yıl Öğretmen Adayı

1. ÖA : *Evet. Yemek tarifi olabilir. Mesela yumurta kızartmak, onun bile bir anahtar noktası var, en sonda yumurtayı kırmak gerekiyorsa en başta bu yapılmamalı. Buradaki anahtar nokta yağı hafif kızdırdıktan sonra yumurtayı kırıp pişirmek. Bu kadarını bilen hemen herkes yumurta kızartabilir. Ne kadar pişeceğini bilebilir, yumurtayı nasıl kıracağını az çok bilebilir.*

Görüşmeci: *Aklına gelen başka örnek var mı?*

1. ÖA : *Hayatın kendisi de olabilir. Hayatta bazı önemli noktalar oluyor ki o noktalarda başarılı olunca hayatta da iyi bir oyuncu oluyorsun. Aile hayatı, maddi durum, akademik başarı, iyi arkadaşlık ilişkileri. Bence bu noktalar mutlu bir hayatın anahtar noktaları.*

1. Yıl Öğretmen Adayı

2. ÖA: *İlişkilendirilebilir. Ben fotoğraf çekimiyle ilgileniyorum, fotoğraf çekerken çeşitli ayarlar yapmak gerekiyor. Bunlardan ikisi ISO ile enstantane ayarıdır. Ben birisine anlatsam mesela ISO ile enstantane aynıdır ama birkaç farkı vardır derim. Ama aynı olduğunu bildikten sonra fotoğrafta işlemleri ayarlayabilirsin. Ara noktaları da fotoğraf çekerken tamamlayabilirsin.*

2. Yıl Öğretmen Adayı

3.ÖA: *Aklıma şöyle bir şey geliyor. Ben mesela alışverişe çıkıp giysi alacağım zaman çok kararsız kalıyordum. Bir mağazada bir giysi beğensem bile belki diğer mağaza da daha güzel bir şey vardır düşüncesiyle almıyor ve çok vaktimi harcıyordum. Sonra baktım ki aşağı yukarı aynı mağazalardan alıyorum kıyafetlerimi kendi zevkime uygun üç mağaza belirledim. Şu an sadece bu mağazalara gidiyorum ve ihtiyaçlarımı oralardan karşılıyorum. Bu mağazalar benim için kıyafet alımında anahtar noktalar oldu.*

Öğretmen adayları anahtar nokta ve fikirlerin kullanımı ile ilgili yemek yapımı, fotoğraf çekimi ve alışveriş yapma konularında örnekler verdiler. Öğretmen adaylarından bir tanesi anahtar noktaları hayatın kendisi ile ilişkilendirdi. Buradan öğretmen adaylarının anahtar noktayı genelleyeabildikleri ve herhangi bir alana uygulayabildikleri görülmektedir.

Araştırmacı öğretmen adaylarının görüşlerinden elde edilen verilere ek olarak, anahtar nokta ve fikirlerin gerçek hayatta uygulaması ile ilgili basketbol alanının uzmanı ile görüşmüştür. Uzman kişiye anahtar nokta ve fikirlerden bahsedilmiş ve bu nokta ve fikirleri kendi alanına uygulaması istenmiştir. Basketbol alanının uzmanı bir takımının antrenörlüğünü yapıyordu. Basketbolda isabetli şut atmanın anahtar noktalarını aşağıdaki şekilde sıraladı

- Temel duruş pozisyonu öğrenme (Bacaklar omuz hizası kadar açılır ve dizler hafif bükülür.Bu esnada başınız karşıya doğru bakmalıdır)

- Topsuz pratik yapma
- Topla pratik yapma
- Konsantrasyon

Yukarıdaki örnekten de anlaşılacağı üzere anahtar nokta ve fikirler sadece teoremlerle ve ispatlarla sınırlandırılmadığı, hayatın her alanına uygulanabileceği görülmektedir.

BÖLÜM 5

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu bölümde araştırmamızdan elde edilen bulgulara dayalı sonuçlar üzerinde durulacaktır. Ayrıca araştırma bulguları çerçevesinde, öğretim elemanlarına, araştırmacılara, matematik öğretmen adayları ve öğrencilere önerilerde bulunulmuştur.

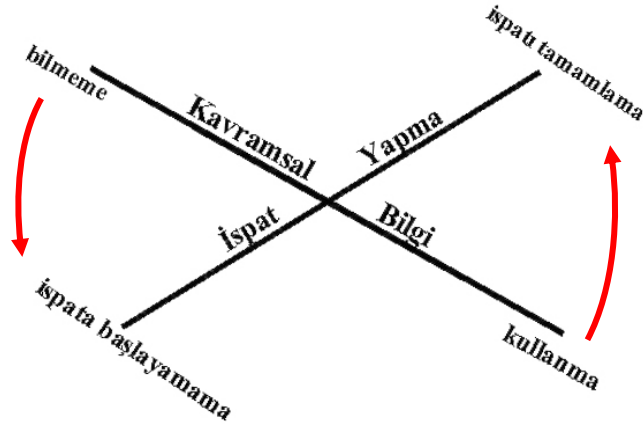
5.1 Sonuçlar

Bu çalışmada, matematik öğretmen adaylarının anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmiş ispatları yapabilme performanslarını belirlemek için öğretmen adaylarına çalışma kağıtları uygulanmış ve tepkileri gözlemlenmiştir. Öğretmen adaylarının tepkilerinden elde edilen veriler betimsel analiz yöntemi ile analiz edilmiş ve bazı sonuçlara ulaşılmıştır. Çalışmanın ikinci kısmında ise, matematik öğretmen adaylarının anahtar nokta ve fikirlere yönelik görüşleri alınmıştır. Bu görüşlerden elde edilen veriler, gömülü teorinin tekniklerine göre analiz edilmiş ve bazı sonuçlar elde edilmiştir. Aşağıda her iki uygulamadan elde edilen verilerin sonuçlarına sırayla yer verilmiştir.

- Çalışmaya katılan öğretmen adaylarının teoremlerle ilgili kavramsal bilgilere hakimiyeti, ispatın kendileri tarafından yapılabilme düzeyini etkilemiştir.

Teoremle ilgili tanımlar, teoremler, kavramlar ve ispat yapma yöntemleri o teoremle ilgili kavramsal bilgiyi ifade etmektedir. Bu çalışmada öğretmen adaylarının çalışma kağıtlarındaki soruları yanıtlarken çeşitli davranışlarda bulundukları gözlemlenmiştir. Öğretmen adayı soru ile ilgili kavramsal bilgiye sahip olduğunda soruyu yanıtlama performansı artmaktadır. Öğretmen adayının sahip olduğu kavramsal bilgi eksik olduğunda ise soruyu yanıtlama olasılığı azalmaktadır. Bu çalışmada 3. yıl öğretmen adayına “*devirli grubun her alt grubu devirlidir*” şeklinde bir soru

sorulmuştu. Öğretmen adayı bu soruda devirli grup kavramını hatırlayamadığı için soruyu yanıtlamak adına, aklına hiçbir şey gelmediğini ve soruyu çözemeyeceğini dile getirmiş ve sonuç olarak soruyu yanıtlamaya başlayamamıştır. Benzer şekilde öğretmen adaylarının görüşlerinden elde edilen veriler de yukarıdaki sonucu desteklemektedir.”Kavramsal Bilgi” ve “İspat Yapma” kategorileri arasındaki ilişki Şekil 58’deki özet yapıda gösterilmektedir.



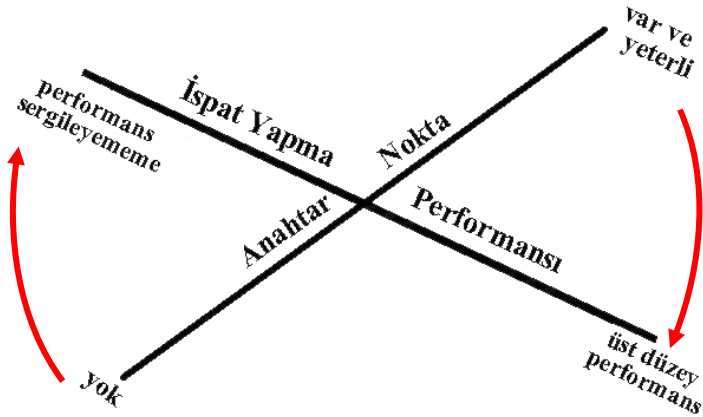
Şekil 58. Kavramsal Bilgi ve İspat Yapma Kategorileri Arasındaki İlişkiyi Özetleyen Yapı

Bu yapıda da görüldüğü üzere öğretmen adayı, ispatını yapmak istediği teoremlerle ilgili kavramsal bilgiye sahip olmadığı zaman ispata başlayamıyor. Öğretmen adayı önce teoremlerle ilgili zihninde yer alan bütün kavramları araştırıyor, hangisinin işine yarayacağını bulmaya çalışıyor, ulaştığı bu kavramlar sayesinde ispata başlıyor fakat elindeki bilgi yeterli değilse ispatın sonunu getiremiyor. Öğretmen adayının ispatı tamamlayabilmesi için yeterli düzeyde kavramsal bilgiye sahip olması ve bunu teoremin ispatında nasıl kullanacağını bilmesi gerekiyor.

- Teoremlerin anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmesi, çalışmaya katılan öğretmen adaylarının teoremi ispatlama performansını etkilemiştir.

Öğretmen adayları, çalışma kağıtlarında yer alan soruları yanıtlarken, bazen çözüme başlayamamışlar, bazen yer yer duraksamışlar ve devam edememişlerdir.

Öğretmen adayları bu noktada anahtar nokta ve fikirlerden yararlanmışlar ve çoğunlukla soruları doğru bir şekilde yanıtlamışlardır. Bu durumda, anahtar nokta ve fikirler, soruların yanıtlanmasında öğretmen adayına katkı sağlamıştır. 3. yıl öğretmen adayına sorulan devirli grup kavramı ile ilgili soruda öğretmen adayının ilk tepkisi “*ben bu soruyu yanıtlayamam*” şeklinde olmuştu ve öğretmen adayı sorunun çözümüne başlayamamıştı. Fakat öğretmen adayı, daha sonra kendisine verilen anahtar noktalardan faydalanarak soruyu doğru bir şekilde yanıtlamıştı. Burada anahtar nokta ve fikirlerin öğretmen adayının ispat yapma performansını arttırdığı görülmektedir. Çalışma kağıtlarının uygulanmasının ardından öğretmen adaylarının anahtar nokta ve fikirlerle ilgili görüşlerinden elde edilen sonuca göre anahtar nokta ve fikirlerin varlığı ispat yapma performansını etkilemektedir. “Anahtar Nokta ve Fikirler” ile “İspat Yapma Performansı” arasındaki ilişki Şekil 59’daki özet yapıda gösterilmektedir.



Şekil 59. İspat Yapma Performansı ve Anahtar Nokta Kategorileri Arasındaki İlişkiyi Özetleyen Yapı

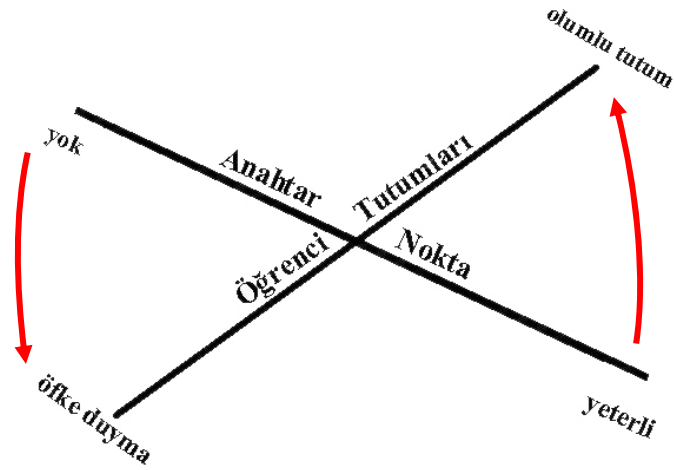
Bu yapıdan elde edilen sonuca göre; anahtar nokta ve fikirlerin olmadığı teoremlerde öğretmen adayları ispatı yapamayabiliyorlar. Öğretmen adayı bazen ispata başlayamıyor, bazen de başlıyor fakat devamını getiremiyor. Buna karşın anahtar nokta ve fikirlerin yeterli olduğu teoremlerde ise öğretmen adayları ispat yaparken üst düzey performans sergiliyorlar. Öğretmen adayı anahtar nokta ve fikirlerden faydalanarak ispatı kendi kendine tamamlayabiliyor. Yapılan uygulamada sadece bir soruda, 2. yıl öğretmen adayı anahtar nokta ve fikirleri açtığı halde kullanamamıştır ve teoremi sonuçlandıramamıştır.

- Çalışmaya katılan öğretmen adaylarına göre; bir teoremin anahtar nokta ve fikirleri, o teoremin ispatlanmasını sağlayan, en önemli noktalarıdır. Araştırmanın uygulama kısmında her bir öğretmen adayına ispatı verilmiş bir teoremdeki anahtar nokta ve fikirleri belirlemesi istenmişti. Öğretmen adaylarına bu uygulamanın ardından anahtar nokta ve fikirleri belirlerken ne gibi kriterleri göz önünde bulundurdıkları sorulmuştur. Öğretmen adayları teoremden en can alıcı noktaları, ispatın yapılmasını sağlayan noktaları belirlediklerini dile getirmişlerdir. Bu noktaları belirlerken kendilerini soruyu çözecek kişinin yerine koyduklarını ve “*bu kişi, hangi noktalar olursa bu soruyu çözebilir*” şeklinde düşündüklerini söylemişlerdir.

- Çalışmaya katılan öğretmen adaylarının teoremin ispatı ile ilgili sahip oldukları kavramsal bilginin düzeyi, onların, anahtar nokta ve fikirlerden faydalanma düzeyini etkilemiştir. Öğretmen adayları kendilerine uygulanan çalışma kağıtlarındaki soruları yanıtlarken anahtar noktalardan oldukça faydalanmışlardır. Fakat bazı anahtar noktalarda yer alan bilgileri bildikleri için kullanmamışlardır. Çalışmaya katılan 3. yıl öğretmen adayı kendisine sorulan grup kavramı ile ilgili bir soruda 1 numaralı anahtar noktayı açmıştır fakat “*bu tanımlı zaten biliyordum*” demiş ve anahtar noktadan faydalanmamıştır.

- Teoremden anahtar nokta ve fikirlerin varlığı, çalışmaya katılan öğretmen adaylarının o teoremi ispatlamaya ilişkin tutumunu etkilemiştir.

Bu çalışmada matematik öğretmen adaylarının anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmiş ispatları yapabilme performansları belirlenmeye çalışılırken öğretmen adaylarının ispat yapmaya karşı tutumlarında da değişiklikler gözlenmiştir. Öğretmen adaylarının, anahtar nokta ve fikirlerin yer almadığı teoremlere karşı olan tutumları ile anahtar nokta ve fikirlerin yer aldığı teoremlere karşı olan tutumları arasında belirgin farklar ortaya çıkmıştır. Bu tutumlar arasındaki fark hem öğretmen adayları çalışma kağıtlarındaki soruları cevaplarken gözlemlenmiş hem de öğretmen adaylarının görüşlerinden ortaya çıkmıştır. Öğretmen adaylarının tutumları ile anahtar nokta ve fikirlerin varlığı arasındaki Şekil 60’daki özet yapıda yer alan ilişki bulunmuştur.



Şekil 60. Öğrenci Tutumları İle Anahtar Nokta Kategorileri Arasındaki İlişkiyi Özetleyen Yapı

Bu yapıdan ortaya çıkan sonuca göre, öğretmen adayı anahtar nokta ve fikirlerin olmadığı teoremlerde teoremi gördüğü zaman kaygı yaşıyor, yapamayacağını düşünüyor ve teoremden uzaklaşmaya çalışıyor. Öğretmen adayı teoremi ispatlayamadığı için öfke duyuyor ve kendine olan güveni azalıyor. Çalışmaya katılan 2. yıl öğretmen adayı “*ne zaman sınavlarda bir teorem ispatı görsem onu en sona bırakıyorum*” demişti. Buradan öğretmen adayının teoremi ispatlamaktan uzaklaşmaya çalıştığı görülmektedir.

Buna karşın anahtar nokta fikirlerin olduğu teoremlerde ise öğretmen adayları teoremi ispatlamaya daha sıcak bakıyorlar, kaygı düzeyleri azalıyor, teoremi ispatlamak için çaba gösteriyorlar. Anahtar nokta ve fikirler sayesinde öğretmen adaylarının teoremi ispat etmeye yönelik motivasyonları artıyor, teoremi ispatlamaktan zevk alıyorlar ve ispatı tamamlayabileceklerine ilişkin kendilerine olan güvenleri artıyor. Öğretmen adayı teoremi gördüğü anda ondan uzaklaşmak yerine anahtar noktanın varlığı sayesinde rahatlama yaşıyor ve böylece ispatı yapmak için çaba gösteriyor. Öğretmen adayları, teoremleri anahtar nokta ve fikirler yardımı ile ispat edebildikçe o konuya ya da derse karşı olumlu tutum geliştiriyorlar.

- Öğretmen adayları, derslerde ve sınavlarda, anahtar nokta ve fikirlerin, o dersin öğreticisi tarafından kullanılmasının faydalı olacağını düşünmekte. Öğretmen adaylarının görüşlerinden ortaya çıkan sonuca göre bu zamana kadar aldıkları derslerde veya katıldıkları sınavlarda anahtar nokta ve fikir kullanımına yönelik uygulamalar gerçekleşmemiştir. Öğretmen adayları bu tarz bir uygulamanın öğrenmelerini kolaylaştıracağını düşünüyorlar. Bu çalışma yürütülürken 2. yıl öğretmen adayı “*geçen yıl bir sınava çok fazla çalışmışım ama sınavda çok küçük bir şeyi hatırlayamadığım için bir soruyu çözememişim, oysa böyle bir uygulamaya yer verilseydi kesin başarılı olurdum*” demiştir.

- Öğretmen adaylarının görüşlerine göre anahtar nokta ve fikirler sadece matematikte değil gerçek hayat problemlerinde de kullanılabilir. Öğretmen adaylarının gerçek hayat durumlarına yönelik çeşitli örnekleri olmuştur. Yemek yaparken, alışveriş yaparken, fotoğraf çekerken anahtar nokta ve fikirlerin kullanılabileceğini belirtmişlerdir. 1. yıl öğretmen adayı hayatın kendisinin içerisinde de anahtar nokta ve fikirlerin yer aldığını söylemiştir.

5.2 Öneriler

5.2.1 Öğretim Elemanlarına Öneriler

- 1) Matematik öğretmen adayları, lisans eğitimleri süresince aldıkları alan derslerinin hemen hepsinde ispatla karşılaşmakta fakat yapılan çalışmalar öğretmen adaylarının ispat yaparken zorlandıklarını ortaya koymaktadır. Öğretmen adaylarının lisans eğitimlerini başarı ile tamamlamaları için ispat yapma yönüyle yaşadıkları zorlukları azaltmak ve ispat yapabilme performanslarını arttırmak gerekmektedir (bkz. 1.1.2). Bu kapsamda öğretim elemanlarının derslerde, öğretmen adaylarının ispat yapma performanslarını arttırmaya yönelik uygulamalar yapmaları önerilir.
- 2) Bu araştırmadan elde edilen sonuçlara göre; teoremlerin anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmesi, öğretmen adaylarının ispat yapma performanslarını

arttırmaktadır. Bu bağlamda öğretim elemanlarının derslerde, öğretmen adaylarının ispat yapma performanslarını arttırmak adına anahtar nokta ve fikirlere vurgu yapmaları önerilir.

- 3) Bu araştırmada, anahtar nokta fikirlerle, öğretmen adaylarının ispat yapmaya ilişkin tutumları arasında ilişki bulunmuştur. Öğretmen adayları, anahtar nokta ve fikirlerin yer almadığı teoremleri ispat etmekten çekinmekte ve teoremi ispat etmede başarısız olacaklarına dair kaygı yaşamaktadırlar. Çalışmaya katılan öğretmen adaylarından birinin bu yöndeki görüşü şu şekildedir:

“Anahtar noktası verilmemiş bir teorem gördüğüm zaman, önce benim elim ayağıma dolaşıyor, bilgiler kafamda uçuşuyor, çok karışıyor. Bende “acaba çözebilecek miyim, sonunu getirebilecek miyim” endişesi oluyor.”

Buna karşıt, anahtar nokta ve fikirlerin yer aldığı teoremlerde öğretmen adaylarının kaygı düzeyleri azalmakta, motivasyonları artmakta teoremi ispatlamak için çaba göstermekte ve teorem ispatlamaya ilişkin tutumları olumlu yönde değişmektedir. Bu bağlamda öğretim elemanlarının, öğretmen adaylarının teorem ispatlamaya karşı, kaygı düzeylerini normal seviyeye indirmek , motivasyonlarını arttırmak ve lisans derslerine yönelik olumlu tutum geliştirmelerini sağlamak adına, derslerde, anahtar nokta ve fikirlere yönelik uygulamalar yapmaları önerilir.

5.2.2 Araştırmacılara Öneriler

- 1) Yapılan çalışmalarda sadece lisans öğrencilerinin değil her seviyeden öğrencinin ispat yaparken zorluk yaşadığı ortaya konmuştur. Bu nedenle ortaöğretim programında bir konunun anahtar nokta ve fikirleri belirlenerek öğretim yapıldığında, bu öğretimin etkililiği konusunda bir araştırma yapılabilir.
- 2) Anahtar nokta ve fikirlerin öğretmen adaylarının ispat yapma performanslarına olan etkilerini daha derinden incelemek için lisans derslerinin herhangi birinde bu konu ile ilgili eylem araştırması yapılabilir.

- 3) Bu çalışmada anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmiş teoremlerin öğretmen adaylarının ispat yapma performansına etkileri belirlenirken anahtar nokta ve fikirlerin öğretmen adaylarının teoremlere ilişkin tutumlarını değiştirdiği de gözlenmiştir. Bu çalışmada bu gözlemlere yer verilmiştir fakat bu konunun ayrıntılı olarak ayrı bir şekilde incelenmesi daha uygun olacaktır. Araştırmacılar, anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmiş teoremlerin, öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik tutumlarına etkisini inceleyen bir araştırma yapabilirler.

5.2.3 Matematik Öğretmen Adaylarına ve Öğrencilere Öneriler

- 1) Matematik öğretmen adayları, lisans derslerinde birçok teorem ispatı ile karşılaşmaktalar. Bu çalışmada yer alan katılımcıların görüşlerine göre, öğretmen adayları derslerde verilen teoremleri kendi kendilerine ispatlamak için o teoremle ilgili bütün tanım ve teoremleri ezberlemeye çalışmaktalar (bkz. 1.1.2). Öğretmen adayları bir teoremin ispatlamak için ilgili bütün tanım ve teoremleri ezberlemek yerine ispatın anahtar nokta ve fikirlerini belirleyebilirler ve böylece ispatı daha kolay öğrenebilirler. Matematik öğretmen adaylarına bir teoremi ispatlamak istediklerinde, öncelikle o teoremin anahtar nokta ve fikirlerini belirlemeleri önerilir.
- 2) Bu çalışmada anahtar nokta ve fikirlerin sadece teorem ispatları için değil, bir problemin çözümünde, bir kavramın tanımlanmasında da kullanılabileceğine dair uygulamalar yer almaktadır. Bu bağlamda öğrenciler çalıştıkları herhangi bir dersin ya da konunun anahtar nokta ve fikirlerini belirleyebilirler ve böylece çalışmaları daha anlamlı hale getirebilirler. Öğrenciler anahtar nokta ve fikirleri belirlediklerinde, çalışacakları konunun ayrıntılarına gömülmeden önemli noktalarına vurgu yapmış olacaklardır ve böylece o konuyu öğrenmeleri daha kısa zamanda ve daha kolay gerçekleşebilir. Bu bağlamda matematik öğretmen adaylarına çalışacakları herhangi bir dersin anahtar nokta ve fikirlerini belirleyerek çalışmaları önerilir.

KAYNAKÇA

- Almeida, D. (2000). A survey of mathematics undergraduates' interaction with proof: some implications form mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(6), 869–890
- Almeida, D. (2003). “Engendering proof attitudes: can the genesis of mathematical knowledge teach us anything?”, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, vol. 34, no.4, p. 479–488.
- Asiala, M., Dubinsky, E., Mathews, D., Mories, C. And Oktac, A. (1997). Student understanding of cosets, normality and quotient groups, *Journal of Mathematical Behaviour* 16,241-309
- Balacheff, N. (1988). ‘Aspects of Proof in Pupils’ Practice of School Mathematics’ in D. Pimm, *Mathematics, Tecahers and Children*. Hodder & Stoughton, London. 216-230
- Baylis, J. (1983). Proof- The esence of mathematics, part 1, *International Journal of Mathematics Education and Science Technology* 14, 409-414
- Chazan, D. : 1993, ‘High school geometry students’ justification for their views of empirical evidence and mathematical proof’, *Educational Studies in Mathematics* 24(4), 359–387.
- Conradie J. and Frith, J. (2000). Comprehension Tests in Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 42, ss 225-235, Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands
- DEÜ (2002). *Buca Eğitim Fakültesi Kataloğu*
- DFE (1995). Department for Education, *Mathematics in the National Curriculum*, London: HMSO
- Edwards, L. (1999). Odds and Evens: Mathematichal Reasoning and Informal Proof among High School Students, California.

- Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*, The Falmer Pres, London.
- Fraizer Sr., R. C. (1970). *A Comparison Of Implicit and Two Explicit Methods Of Teaching Mathematical Proof Via Abstract Groups Using Selected Rules of Logic*, Dissertioan Abstarct International 30. 5317A.
- Glaser, B.& Strauss, A. (1967). *The discovery of grounded theorey. Strategies for qualitative research*. New York: Adline de Gruyter.
- Güven, B., Çelik D. ve Karataş İ. 2005. Ortaöğretimdeki Çocukların Matematiksel İspat Yapabilme Durumlarının İncelenmesi, *Çağdaş Eğitim Dergisi*. 316, (35–45)
- Hancock, B. (2004). *An introduction to qualitative research*. C. Cassell ve G. Symon (Eds)., *Qualitative methods in organizational research: Apractical guide*, London:Sage
- Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of prof. Interchange, 21. 6- 13
- Hanna, G. (1991). *Advanced Mathematical thinking*, Educational Studies in Mathematics, , ss 54-65, Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands
- Hardy, G. H. (1997) *A Mathematician's Apology*, Univesity Pres, Cambridge
- Harel, G. (1998). Two dual assertions: The first on learning and the second on teaching (or vice versa), *American Mathematical Monthly* 105, 497-507
- Harel, G. and Sowder, L.: 1998, 'Students' proof schemes: Results from exploratory studies', in A.H. Schoenfeld, J. Kaput, and E. Dubinsky (eds.), *CBMS Issues in Mathematics Education*, Vol. 3, American Mathematical Society, Providence, RI, pp. 234–283
- Hart, E. W. (1994). Aconceptual analysis of the proof-writing performance of expert and novice students in elemantary group theory in J.J. Kaput and E. Dubinsky (eds.).

- Hazan, O. And Leron, U. (1994). Students' use and misuse of mathematical theorems: The case of Lagrange's Theorem, *For the Learning of Mathematics* 16, 23-26
- Healy, L. and Hoyles, C. 2000, 'Proof conceptions in algebra', *Journal for Research in Mathematics Education* 31(4), 396-428
- Heinze, A. & Reiss, K. (2003). Reasoning and proof: Methodological knowledge as a component of proof competence. In M.A. Mariotti (Ed.), *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, Bellaria, Italy.
- Hoyles, C., & Healy, L. (1999). Justifying and Proving in School Mathematics (End of Award Report to ESRC). London: Institute of Education, University of London.
- Jones, K. (1997). Student-Teachers' Conceptions of Mathematical Proof, *Mathematics Education Review*, 9, 16-24
- Jones, K. (2000). The student experience of mathematical proof at university level, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31,1, 53-60.
- Knuth, E. J. (2002). Teachers' Conceptions of Proof in the Context of Secondary School Mathematics, *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5, 1, 61-88
- Knuth, E. J. (2002). Proof as a tool for learning mathematics. *Mathematics Teacher*, 95(7), 486-490
- Knuth, E. J. and Eliot, R. L. (1998). Characterizing students' understandings of mathematical proof, *Mathematics Teacher* 91, 14-17
- Ko, Y., Knuth, E., Shy, E. (2007) Taiwanese Undergrates' Performance Constructing Proofs and Generating Counterexamples in Differentiation, National Changhua Univesity of Education, Taiwan
- Martin, G.W. and Harel G. (1989) Proof frames of preservice elemantry teachers, *Journal for Research in Mathematics Education* 20, 41-51

- Lee, J. K. (2002). Philosophical perspectives on proof in mathematics education, *Philosophy of Mathematics Education*, vol.16, <http://www.ex.ac.uk/~PERnest/pome16/docs/lee.pdf> (02-Temmuz-2005).
- MEB (2005). Ortaöğretim Matematik (9,10,11 ve 12. Sınıflar) Dersi Öğretim Programı, http://ttkb.meb.gov.tr/ogretmen/modules.php?name=Downloads&d_op=viewdownload&cid=34 (28-Aralık-2005)
- Moralı, S., Uğurel, I., Türnüklü, E. ve Yeşildere S. 2006. Matematik Öğretmen Adaylarının İspat Yapmaya Yönelik Görüşleri, *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 14,1,147-160.
- Moore, R.C.: 1994, 'Making the transition to formal proof', *Educational Studies in Mathematics* 27, 249-266.
- Nasibov, F. ve Kaçar, A. 2005. Matematik ve Matematik Eğitimi Hakkında, *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 13(2). 339- 346.
- NCTM. (2000). Principles and Standarts For School Mathematics. National Council of Teachers of Mathematics, Roston, Virginia.
- Özer, Ö. & Arıkan, A. (2002). *Lise matematik derslerinde öğrencilerin ispat yapabilme düzeyleri*. V.Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi. 16-18 Eylül Ankara, Bildiriler Kitabı, II, 1083-1089
- Öziş, T. ve Altıparmak K. 2005. Matematiksel İspat ve Matematiksel Muhakemenin Gelişimi Üzerine Bir İnceleme. *Ege Eğitim Dergisi*, 6(1). 25-37.
- Raman, M. (2001). Beliefs about proof in collegiate calculus, in Robert Speiser (Ed.), *Proceedings of the Twenty Second Annual Meeting, North American Chapter for the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Snowbird, Utah.
- Raman, M. J. (2002). *Proof and Justification in Collegiate Calculus*. Doctoral dissertation, University of California: Berkeley
- Raman, M.(2003). Key ideas: What are they and how can they help us understand how people view proof?. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 319-325.

- Recio, A. M. & Godino, J. D.(2001). Institutional and Personal Meanings of Mathematical Proof, *Educational Studies in Mathematics*, 48,1,83-89
- Ross, Kenneth A(1998). The place of Algorithms and Proofs in School Mathematics. *Doing and Proving*. March, 252-255
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*, Academic Pres, Orlando
- Schoenfeld, A. (1994). Reflections on Doing and Teaching Mathematics. In A. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical Thinking and Problem Solving* (pp. 53-70). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Selden, A. and Selden, J. (1987). Errors and misconceptions in college level theorem proving, *Proceedings of the Second International Seminar on Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics*. Cornell University
- Senk, S.L. (1983). *Proof-writing achievement and Van Hiele levels among secondary school geometry students*. Yayınlanmamış doktora tezi. Chicago Üniversitesi, Chicago.
- Senk, S.L. (1985). How well do students write geometry proofs?, *Mathematics Teacher* 78, 448-456
- Solomon, Y. (2006). Deficit or difference? The role of students' epistemologies of mathematics in their interactions with proof. *Educational Studies in Mathematics*, 61(3), 373–393.
- Strauss A. and J. Corbin. (1998). *Basizcs of Qualitative Research, Techniques and Procedires' of Developing Grounded Theory*. Second Edition. London: Sagepublications.
- Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Philippou, G.N. (2007). Preservice teachers' knowledge of proof by mathematical induction. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10, 145-166.
- Thompson, D.R. (1996). Learning and teaching indirect proof, *Mathematics Teacher* 89, 474-482
- Tucker, T. (1999). *On the Role of Proof in Calculus Courses* Contemporary Issues in Mathematics education, Vol 36, s.31-35

- Thurston, W. (1994). On Proof and Progress in Mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 30(2), 161-177.
- Toluk, Z. (2003) Üçüncü Uluslararası Matematik ve Fen Araştırması (TIMMS):Matematik Nedir?, *İlköğretim Online Dergisi* , 2,1, 36-41.
- Umay, A. 2003. Matematiksel Muhakeme Yeteneği, H.Ü. *Eğitim Fakültesi Dergisi*. 24, 234-243.
- Weber, K.(2001). Student difficulty in constructing proof: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 101-119
- Weisstein, E. (2002). “Theorem” from Mathworld- *A Wolfram Web Resource*.<http://www.theorema.org/>.
- Williams, E. (1980). An investigation of senior high school students’ understanding the nature of mathematical proof, *Journal for Research Mathematics Education* 11, 165-166
- Yıldırım, A. ve Simsek, H.,(2006). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri*. (6. basım). Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- Yin, R. K. (2003). *Case Study Research : Design and Methods* (Third Edition). Applied Social Research Methods Series (Volume 5). New Delhi: Sage Publications

EK-1**GÖZLEM FORMU****Amaç**

Bu gözlem formunun amacı ,matematik öğretmen adaylarının, çalışma kağıtlarındaki anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmiş soruları çözerken ne tür davranışlarda bulunduklarını belirlemektir.

Sorular

1. Öğretmen adayı anahtar noktaları açmadan önce soruyu ne düzeyde çözebiliyor?
2. Öğretmen adayı anahtar nokta ve fikirleri açıyor mu?
3. Öğretmen adayı anahtar nokta ve fikirleri açtıktan sonra kullanabiliyor mu?
4. Anahtar nokta ve fikirlerin öğretmen adayının soruları yanıtlamasında ne derecede katkısı oluyor?

EK-2**GÖRÜŞME SORULARI**

1. Bu zamana kadar almış olduğunuz matematik derslerinde birçok teorem ispatladınız. Teoremleri ispatlarken nelerle karşılaşıyorsunuz?
2. Teoremleri ispat ederken nelerden faydalaniyorsunuz?
3. Bir teoremi ispat etmede başarılıyım çünkü.....Boşlukları doldurman gerekirse ne dersin?
4. Sorularda yer alan anahtar nokta ve fikirler hakkında ne düşünüyorsun?
5. Soruları çözerken bu anahtar noktalardan ne düzeyde faydalandın?
6. Anahtar noktaları vermemiş olsaydık soruları yanıtlarken nasıl davranırdın?
7. Teoremlerin ispatında anahtar noktalar ne düzeyde önemlidir?
8. Anahtar noktası verilmiş bir teoremle anahtar noktası verilmemiş bir teoremi kıyaslamam gerekirse neler söylersin?
9. Derslerde ya da sınavlarda teoremler anahtar noktaları ile birlikte verilse bu senin ispat yapma performansına nasıl yansır?
10. Sorulardaki anahtar nokta ve fikirleri belirlerken ne gibi kriterleri göz önünde bulundurdun?
11. Anahtar nokta ve fikirler, matematiğin dışında günlük hayatla ilişkilendirilebilir mi? Aklına gelen örneklerden bahsedebilir misin?