



**MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ BAZI
MATEMATİKSEL KAVRAMLARI GÖRSELLEŞTİRME
SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ: KÜMELER VE FONKSİYONLAR**

İlknur Gülşen Turgut

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

AĞUSTOS, 2019

TELİF HAKKI VE TEZ FOTOKOPİ İZİN FORMU

Bu tezin tüm hakları saklıdır. Kaynak göstermek koşuluyla tezin teslim tarihinden itibaren 6 (altı) ay sonra tezden fotokopi çekilebilir.

YAZARIN

Adı : İlknur
Soyadı : Gülşen Turgut
Bölümü : Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi
İmza :
Teslim Tarihi :

TEZİN

Türkçe Adı : Matematik Öğretmen Adaylarının Bazı Matematiksel Kavramları
Görselleştirme Süreçlerinin İncelenmesi: Kümeler ve Fonksiyonlar
İngilizce Adı : Investigation of Prospective Mathematics Teachers' Visualization
Process of Some Mathematical Concepts: Sets And Functions

ETİK İLKELERE UYGUNLUK BEYANI

Tez yazma sürecinde bilimsel ve etik ilkelere uyduğumu, yararlandığım tüm kaynakları kaynak gösterme ilkelerine uygun olarak kaynakçada belirttiğimi ve bu bölümler dışındaki tüm ifadelerin şahsıma ait olduğunu beyan ederim.

Yazar Adı Soyadı: İlknur Gülşen Turgut

İmza:

JÜRİ ONAY SAYFASI

İlknur Gülşen Turgut tarafından hazırlanan “Matematik Öğretmen Adaylarının Bazı Matematiksel Kavramları Görselleştirme Süreçlerinin İncelenmesi: Kümeler ve Fonksiyonlar” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Gazi Üniversitesi Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı’nda Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Ahmet ARIKAN

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi ABD, Gazi Üniversitesi

Başkan: Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU

Matematik ABD, Ankara Üniversitesi

Üye: Prof. Dr. Ziya ARGÜN

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi ABD, Gazi Üniversitesi

Üye: Prof. Dr. Musa SARI

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi ABD, Gazi Üniversitesi

Üye: Doç. Dr. İ. Elif YETKİN ÖZDEMİR

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi ABD, Hacettepe Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 06/08/2019

Bu tezin Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı’nda Doktora tezi olması için yeterli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

Prof. Dr. Selma YEL

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEŞEKKÜR

Lisansüstü eğitimimin her aşamasında bana yol gösteren, her zaman vakit ayıran, araştırma sürecim boyunca desteğini hiç esirgemeyen, kendisini tanımaktan ve öğrencisi olmaktan mutluluk duyduğum değerli danışmanım Prof. Dr. Ahmet ARIKAN'a; tez izleme komitemde bulunarak araştırmamın her aşamasına katkı sağlayan değerli jüri üyelerim Prof. Dr. Ziya ARGÜN'e ve Prof. Dr. Musa SARI'ya; tez savunmamda görüş ve önerileriyle katkıda bulunan değerli jüri üyelerim Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU'na ve Doç. Dr. İ. Elif YETKİN ÖZDEMİR'e; araştırmamın şekillenmesinde fikirlerine başvurduğum değerli hocam Doç. Dr. Selda MANT MENAY'a ve değerli arkadaşım Arş. Gör. Fatma Çağlin AKILLIOĞLU'na; uygulamaya katılan, sürecin sonuna kadar sabır ve azimle çalışan matematik öğretmen adaylarına; doktora eğitimi sürecinin her aşamasını beraber yaşadığımız ve bu zorlu süreçte her zaman desteğini gördüğüm değerli arkadaşım Nur Şebnem BAKIR'a; desteğini hep yanımda hissettiğim sevgili eşim Arş. Gör. Dr. Sedat TURGUT'a sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

**MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ BAZI
MATEMATİKSEL KAVRAMLARI GÖRSELLEŞTİRME
SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ: KÜMELER VE FONKSİYONLAR
(Doktora Tezi)**

**İlknur Gülşen Turgut
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Ağustos, 2019**

ÖZ

Matematik ve matematik eğitiminde görselleştirme, bu alanların kendisi kadar eskidir. Görselleştirmenin matematikteki rolüne ilişkin tartışmalar sürerken, matematiği anlamanın özünü oluşturmada etkili olduğuna dair bir uzlaşma sağlanmıştır. Matematiksel kavramlar, görsel ilişkilerin çeşitli yollarla temsil edilebilen zenginliğine sahiptir. Dolayısıyla görselleştirme matematiksel kavramların ve matematiksel kavramlar arasındaki ilişkilerin ifade edilmesinde etkili bir araçtır. Bu araştırmada matematik öğretmen adaylarının bazı matematiksel kavramları görselleştirme süreçlerinin incelenmesi amaçlanmıştır ve bu kapsamda nitel araştırma yöntemi kullanılmıştır. Araştırmanın katılımcılarını bir devlet üniversitesinin matematik eğitimi anabilim dalı 2. yılında öğrenim gören 34 matematik öğretmen adayı oluşturmaktadır. Araştırmada matematik öğretmen adaylarına matematiksel kavramların formal tanımları verilmiş ve onlardan bu tanımları göz önünde bulundurarak kavramları resmetmeleri istenmiştir. Matematik öğretmen adayları, kavramlardaki ilişki ve özellikleri çizgi ve renklerden yararlanarak temsil etmeye çalışmışlardır. Resimlerin kavramları görsel olarak temsil etmesi bakımından uygun olup olmadığı ile ilgili sınıfta tartışmalar yapılmıştır. Bu tartışmalar sonucunda resimleri, kavramın görsel bir temsili olarak sınıf ve araştırmacı tarafından uygun bulunan gruplarla görüşmeler yapılmıştır. Matematik öğretmen adaylarının resimleri ve kavramları görselleştirme süreçlerine dair

açıklamaları gömülü teorinin tekniklerinden faydalanılarak analiz edilmiş ve analiz sonucunda matematik öğretmen adaylarının kavramların resimlerini rastgele çizmedikleri, kavramla ilişkilendirdikleri birikimlerinden yola çıkarak çizdikleri görülmüştür. Resimlerini temsil ve tasarım açısından kendi içinde ve diğer resimleri ile sürekli karşılaştırdıkları, yetersiz buldukları resimlerini kısmen ya da tamamen değiştirdikleri gözlemlenmiştir. Tek bir resimde birden fazla kavramı temsil etmeye eğilimli oldukları, kavramların bu şekilde temsil edilmesinin daha kullanışlı olduğunu düşündükleri ortaya çıkmıştır. Matematik öğretmen adaylarının kavramlarla ilgili diğer resimleri ya da açıklamaları ile çizdikleri kavram resimleri arasında bazı farklılıkların olduğu görülmüştür. Kavram resimlerini düşündüklerinden eksik veya fazla resmettikleri gözlemlenmiştir. Çizdikleri kavram resimleri aracılığıyla kavramlar arasında ya da kavramlar ile çizdikleri resimler arasında yeni ilişkiler keşfetmişler ve birtakım genellemelere ulaşmışlardır.

Anahtar Kelimeler : Görselleştirme, görsel temsil, resmetme, kavram resmi, gömülü teori.

Sayfa Adedi : 221

Danışman : Prof. Dr. Ahmet ARIKAN

**INVESTIGATION OF PROSPECTIVE MATHEMATICS TEACHERS'
VISUALIZATION PROCESS OF SOME MATHEMATICAL
CONCEPTS: SETS AND FUNCTIONS**

(Ph.D Thesis)

İlknur Gülşen Turgut

GAZI UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF EDUCATIONAL SCIENCES

August, 2019

ABSTRACT

Visualization in mathematics and mathematics education is as old as these fields itself. While there is an ongoing discussion on the role of visualization in mathematics, there is a consensus on the effects of visualization in building the core of understanding mathematics. Mathematical concepts have the richness of representing visual relationships in various ways. Accordingly, visualization is an effective tool in illustrating mathematical concepts and the relationships between mathematical concepts. This study aimed to examine the visualization process of certain mathematical concepts carried out by prospective mathematics teachers through qualitative research method. The participants of the study are 34 second year prospective teachers studying mathematics teaching at a public university. For the present study, formal definitions of the mathematic concepts were given to prospective mathematics teachers, and they were asked to draw pictures of these concepts by bearing these definitions in their minds. They attempted to visualize the relationships and features of concepts with the help of drawing and painting. Discussions were carried out in the classroom about whether the pictures were appropriate in terms of representing the concepts visually. Following these discussions, interviews were carried out with those groups whose pictures were determined to be suitable as the visualization of the concept by the class and the researcher. The pictures and views of the prospective mathematics teachers

regarding the visualization process of the concepts were analyzed through techniques of grounded theory method. In light of the study, it was determined that the prospective mathematics teachers did not produce pictures of the concept randomly, they rather set off their pictures from the ideas they associated with the concepts. It was observed that they compared their pictures internally and with other pictures constantly in terms of representation and design, and they completely or partly changed the ones which they found lacking. It was also determined that prospective mathematics teachers tend to produce pictures that illustrate more than one concept in one representation, and they think it is more useful this way. It was observed that there were some discrepancies between the prospective mathematics teachers' pictures of concepts and their previous pictures and their explanations regarding these concepts. It was also observed that there are either more or less pictures than they plan to draw in the beginning. Through their pictures of concepts, the prospective mathematics teachers discovered new relationships among concepts, or between concepts and pictures, and made some generalizations.

Key Words : Visualization, visual representation, drawing a picture, picture of the concept, grounded theory.

Page Number : 221

Supervisor : Prof. Dr. Ahmet ARIKAN

İÇİNDEKİLER

TELİF HAKKI VE TEZ FOTOKOPİ İZİN FORMU	i
ETİK İLKELERE UYGUNLUK BEYANI.....	ii
JÜRİ ONAY SAYFASI	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
ÖZ	v
ABSTRACT	vii
İÇİNDEKİLER.....	ix
TABLolar LİSTESİ.....	xv
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	xvi
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	xxvi
BÖLÜM I.....	1
GİRİŞ.....	1
1.1. Problem Durumu	1
1.2. Araştırmanın Amacı	6
1.3. Araştırmanın Önemi.....	6
1.4. Araştırmanın Sınırlılıkları.....	10
1.5.Tanımlar.....	10
BÖLÜM II.....	12

KAVRAMSAL ÇERÇEVE	12
2.1. Çoklu Temsiller.....	12
2.2. Görselleştirme	15
2.3. Matematiksel Kavramların Resmi	22
2.3.1. Kavram	22
2.3.2. Matematiksel Kavram.....	24
2.3.3. Resim.....	25
2.3.4. Matematiksel Kavramın Resmi	26
BÖLÜM III	29
YÖNTEM	29
3.1. Araştırmanın Yöntemi.....	29
3.2. Katılımcılar	29
3.3. Veri Toplama Araçları	30
3.3.1. Görüşme.....	31
3.3.2. Doküman Analizi	31
3.4. Pilot Uygulama	31
3.5. Veri Toplama Süreci.....	33
3.6. Verilerin Analizi.....	34
3.7. Verilerin Analiz Süreci	35
BÖLÜM IV	42
BULGULAR VE YORUM	42
4.1. MÖA’ların Matematiksel Kavramları Görselleştirme Süreçlerine İlişkin Kategoriler ve Kategorilerin İçerikleri	42
4.1.1. Kavram-Resim İlişkisi Üzerine Düşünme Kategorisi	42
4.1.2. Resmetme Kategorisi.....	43

4.1.3. Resmi Değerlendirme Kategorisi	44
4.1.4. Resmi Değiştirme Kategorisi.....	45
4.1.5. Resmi Analiz Etme Kategorisi	45
4.2. MÖA'ların Küme ve Fonksiyon Alt Öğrenme Alanları ile İlgili Görselleştirdikleri Kavramlar ve Tanımları	47
4.3. MÖA'ların Kümeler Alt Öğrenme Alanı ile İlgili Kavram Resimleri ve Resim Çizme Süreçleri.....	49
4.3.1. Kümeler: Kavram-Resim İlişkisi Üzerine Düşünme Kategorisi.....	50
4.3.1.1. Kavram Alt Kategorisi Tanımı İnceleme Boyutu	50
4.3.1.2. Kavram Alt Kategorisi Örneklendirme Boyutu	50
4.3.1.3. Kavram Alt Kategorisi Fikir Oluşturma Boyutu	51
4.3.1.4. Resim Alt Kategorisi Esinlenme Noktası Bulma Boyutu.....	51
4.3.1.5. Resim Alt Kategorisi Esinlenme Noktasını Geliştirme Boyutu.....	53
4.3.1.6. Resim Alt Kategorisi Temsil Belirleme Boyutu Çizgi Alt Boyutu	55
4.3.1.7. Resim Alt Kategorisi Temsil Belirleme Boyutu Renk Alt Boyutu.....	56
4.3.1.8. Yeni Bir Durumu Keşfetme Alt Kategorisi Kavram-Resim İlişkisini Keşfetme Boyutu	57
4.3.2. Kümeler: Resmetme Kategorisi	60
4.3.2.1. Somut Resim Alt Kategorisi.....	60
4.3.2.2. Taslak Resim Alt Kategorisi Amaçsız Taslak Resim Boyutu	60
4.3.2.3. Renklendirme Alt Kategorisi	61
4.3.2.4. Soyut Resim Alt Kategorisi Kavramları Temsil Etme Boyutu	63
4.3.3. Kümeler: Resmi Değerlendirme Kategorisi	73
4.3.3.1. Kendi İçinde Değerlendirme Alt Kategorisi Temsil Boyutu Yetersiz Alt Boyutu	73
4.3.3.2. Kendi İçinde Değerlendirme Alt Kategorisi Temsil Açısından Boyutu Yeterli Alt Boyutu	73

4.3.3.3. <i>Kendi İçinde Değerlendirme Alt Kategorisi Tasarım Açısından Boyutu Yetersiz Alt Boyutu</i>	75
4.3.4. Kümeler: Resmi Değiştirme Kategorisi	78
4.3.4.1. <i>Temsil Açısından Alt Kategorisi Tamamen Değiştirme Boyutu</i>	78
4.3.4.2. <i>Tasarım Açısından Alt Kategorisi Kısmen Değiştirme Boyutu</i>	79
4.3.5. Kümeler: Resmi Analiz Etme Kategorisi	83
4.3.5.1. <i>Doğrudan Alt Kategorisi Resmi İnceleme Boyutu</i>	84
4.3.5.2. <i>Doğrudan Alt Kategorisi Resmi Anlamlandırma Boyutu</i>	84
4.3.5.3. <i>Kavram Açısından Alt Kategorisi Kavramı Belirleme Boyutu</i>	85
4.3.5.4. <i>Kavram Açısından Alt Kategorisi Resmi Kavrama Göre İnceleme Boyutu</i>	87
4.3.5.5. <i>Kavram Açısından Alt Kategorisi Resmi Göre Anlamlandırma Boyutu</i> ..	88
4.3.5.6. <i>Doğrudan Alt Kategorisi Resmi İnceleme Boyutu</i>	91
4.3.5.7. <i>Doğrudan Alt Kategorisi Resmi Anlamlandırma Boyutu</i>	91
4.4. MÖA'ların Fonksiyonlar Alt Öğrenme Alanı ile İlgili Kavram Resimleri ve Resim Çizme Süreçleri	93
4.4.1. Fonksiyonlar: Kavram-Resim İlişkisi Üzerine Düşünme Kategorisi	93
4.4.1.1. <i>Kavram Alt Kategorisi Tanımı İnceleme Boyutu</i>	93
4.4.1.2. <i>Kavram Alt Kategorisi Örneklendirme Boyutu</i>	94
4.4.1.3. <i>Kavram Alt Kategorisi Fikir Oluşturma Boyutu</i>	97
4.4.1.4. <i>Resim Alt Kategorisi Esinlenme Noktası Bulma Boyutu</i>	99
4.4.1.5. <i>Resim Alt Kategorisi Esinlenme Noktasını Geliştirme Boyutu</i>	102
4.4.1.6. <i>Resim Alt Kategorisi Temsil Belirleme Boyutu Çizgi Alt Boyutu</i>	105
4.4.1.7. <i>Resim Alt Kategorisi Temsil Belirleme Boyutu Renk Alt Boyutu</i>	107
4.4.1.8. <i>Yeni Bir Durumu Keşfetme Alt Kategorisi Kavram-Resim İlişkisini Keşfetme Boyutu</i>	110

4.4.1.9. Yeni Bir Durumu Keşfetme Alt Kategorisi Kavram-Kavram İlişkisini Keşfetme Boyutu	112
4.4.2. Fonksiyonlar: Resmetme Kategorisi	115
4.4.2.1. Bildiği Bir Resim Alt Kategorisi Venn Şeması Boyutu	115
4.4.2.2. Bildiği Bir Resim Alt Kategorisi Fonksiyon Grafiği Boyutu	118
4.4.2.3. Bildiği Bir Resim Alt Kategorisi Koordinat Sistemi Boyutu	119
4.4.2.3. Somut Resim Alt Kategorisi	119
4.4.2.3. Taslak Resim Alt Kategorisi Amaçlı Taslak Resim Boyutu	121
4.4.2.4. Düşündüğünden Farklı Resim Alt Kategorisi Eksik Resmetme Boyutu	122
4.4.2.5. Düşündüğünden Farklı Resim Alt Kategorisi Fazla Resmetme Boyutu	124
4.4.2.6. Renklendirme Alt Kategorisi	125
4.4.2.7. Soyut Resim Alt Kategorisi Kavramı Temsil Etme Boyutu	128
4.4.2.8. Soyut Resim Alt Kategorisi Kavramları Temsil Etme Boyutu	148
4.4.3. Fonksiyonlar: Resmi Değerlendirme Kategorisi	158
4.4.3.1. Kendi İçinde Değerlendirme Alt Kategorisi Temsil Açısından Boyutu Yetersiz Alt Boyutu	158
4.4.3.2. Kendi İçinde Değerlendirme Alt Kategorisi Temsil Açısından Boyutu Yeterli Alt Boyutu	160
4.4.3.3. Kendi İçinde Değerlendirme Alt Kategorisi Tasarım Açısından Boyutu Yetersiz Alt Boyutu	162
4.4.3.4. Kendi İçinde Değerlendirme Alt Kategorisi Tasarım Açısından Boyutu Yeterli Alt Boyutu	169
4.4.3.5. Başka Bir Resimle Karşılaştırarak Değerlendirme Alt Kategorisi Tasarım Açısından Boyutu Başarılı Alt Boyutu	172
4.4.4. Fonksiyonlar: Resmi Değiştirme Kategorisi	175
4.4.4.1. Temsil Açısından Alt Kategorisi Kısmen Değiştirme Boyutu	175
4.4.4.2. Temsil Açısından Alt Kategorisi Tamamen Değiştirme Boyutu	175

4.4.4.3. <i>Tasarım Açısından Alt Kategorisi Kısmen Değiştirme Boyutu</i>	178
4.4.4.4. <i>Tasarım Açısından Alt Kategorisi Tamamen Değiştirme Boyutu</i>	183
4.4.4.5. <i>Ebat Alt Kategorisi Büyütme Boyutu</i>	185
4.4.5. Fonksiyonlar: Resmi Analiz Etme Kategorisi	188
4.4.5.1. <i>Doğrudan Alt Kategorisi Resmi İnceleme Boyutu</i>	191
4.4.5.2. <i>Doğrudan Alt Kategorisi Resmi Anlamlandırma Boyutu</i>	192
4.4.5.3. <i>Kavrama Göre Alt Kategorisi Kavramı Belirleme Boyutu</i>	192
4.4.5.4. <i>Kavrama Göre Alt Kategorisi Resmi Kavrama Göre İnceleme Boyutu</i> .	194
4.4.5.5. <i>Kavrama Göre Alt Kategorisi Resmi Göre Anlamlandırma Boyutu</i>	197
4.5. MÖA’ların Kavram Resimleri ile İlgili Görüşleri	201
BÖLÜM V	202
SONUÇ VE ÖNERİLER	202
5.1. Sonuçlar	202
5.1.1. MÖA’ların Matematiksel Kavramları Görselleştirme Süreci ile İlgili Bulguların Sonuçları	204
5.2. Öneriler	208
KAYNAKLAR	211

TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 3.1 <i>Kodlamaların ve Notların Oluşturulması, Yeni Bir Kategorinin Ortaya Çıkması</i>	37
Tablo 3.2 <i>Kategoriler Arasındaki İlişkilerin Ortaya Çıkması</i>	38
Tablo 3.3 <i>Kodlamaların ve Notların Oluşturulması, Kategoriler Arasındaki İlişkilerin Ortaya Çıkması</i>	39
Tablo 3.4 <i>Kodlamaların ve Notların Oluşturulması</i>	40
Tablo 3.5 <i>Kodlamaların ve Notların Oluşturulması, Kategori Adının Değiştirilmesi</i>	41

ŞEKİLLER LİSTESİ

<i>Şekil 2.1</i> Cetvel ve pergelin kullanıldığı bir resim.....	27
<i>Şekil 2.2</i> Cetvel ve pergelin kullanıldığı iki farklı resim.....	28
<i>Şekil 2.3</i> Farklı temalarda dört resim	28
<i>Şekil 2.4</i> Yan yana olmak temalı dört resim	28
<i>Şekil 3.1</i> Veri toplama süreci	34
<i>Şekil 4.1.1</i> MÖA'ların matematiksel kavramları görselleştirme sürecine ait kategori ve alt kategoriler	46
<i>Şekil 4.3.1.1</i> $G_1\ddot{O}$ 'in kümeleri örneklendirmesi	50
<i>Şekil 4.3.1.2</i> $G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ 'nin kümeleri örneklendirmesi.....	51
<i>Şekil 4.3.1.3</i> $G_1\ddot{O}$ 'in esinlenme noktası bulması: fraktal.....	52
<i>Şekil 4.3.1.4</i> $G_1\ddot{O}$ 'in esinlenme noktası bulması: perspektif çizim	52
<i>Şekil 4.3.1.5</i> $G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ 'nin esinlenme noktası bulması: Venn şeması.....	52
<i>Şekil 4.3.1.6</i> $G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ 'nin esinlenme noktası bulması: sayı doğrusu.....	53
<i>Şekil 4.3.1.7</i> $G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ 'nin esinlenme noktası bulması: liste yöntemi	53
<i>Şekil 4.3.1.8</i> $G_1\ddot{O}$ 'in esinlenme noktasını geliştirmesi: perspektif çizim	54
<i>Şekil 4.3.1.9</i> $G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ 'nin esinlenme noktasını geliştirmesi: Venn şeması.....	54
<i>Şekil 4.3.1.10</i> $G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ 'nin esinlenme noktasını geliştirmesi: sayı doğrusu	55
<i>Şekil 4.3.1.11</i> $G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ 'nin esinlenme noktasını geliştirmesi: liste yöntemi.....	55
<i>Şekil 4.3.1.12</i> $G_1\ddot{O}$ 'in kümelerle ilgili kavram resimlerinden bir örnek	56
<i>Şekil 4.3.1.13</i> $G_1\ddot{O}$ 'in kümelerle ilgili kavram resimlerinden bir örnek	56

Şekil 4.3.1.14 $G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ 'nin kümelerin elemanlarını renklerle işaretlemesi.....	57
Şekil 4.3.1.15 $G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ 'nin kümeler için renk belirlemesi	57
Şekil 4.3.1.16 $G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ 'nin kavram resminden bir örnek.....	57
Şekil 4.3.1.17 $G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ 'nin kavram resminden bir örnek.....	58
Şekil 4.3.1.18 Kümeler: kavram-resim ilişkisi üzerine düşünme kategorisi	59
Şekil 4.3.2.1 $G_1\ddot{O}$ 'nin somut resmi.....	60
Şekil 4.3.2.2 $G_1\ddot{O}$ 'nin taslak resmi: amaçsız taslak resim	61
Şekil 4.3.2.3 $G_1\ddot{O}$ 'nin kümelerin elemanlarını farklı renklerle göstermesi	61
Şekil 4.3.2.4 $G_1\ddot{O}$ 'nin kümelerin çizgilerini renklendirmesi	62
Şekil 4.3.2.5 $G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ 'nin küme ve elemanları renklendirmesi.....	62
Şekil 4.3.2.6. $G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ 'nin küme ve elemanları renklendirmesi	63
Şekil 4.3.2.7 $G_1\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek.....	63
Şekil 4.3.2.8 $G_1\ddot{O}$ 'nin çiziminden bir örnek.....	64
Şekil 4.3.2.9 $G_1\ddot{O}$ 'nin çiziminden örnekler.....	65
Şekil 4.3.2.10 $G_1\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek.....	65
Şekil 4.3.2.11 $G_1\ddot{O}$ 'nin kümelerle ilgili kavram resimleri.....	66
Şekil 4.3.2.12 $G_1\ddot{O}$ 'nin kümelerle ilgili kavram resmi	67
Şekil 4.3.2.13 $G_1\ddot{O}$ 'nin kümelerle ilgili kavram resmi	67
Şekil 4.3.2.14 $G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ 'nin kümelerle ilgili kavram resmi.....	68
Şekil 4.3.2.15 $G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ 'nin kümelerle ilgili kavram resmi.....	69
Şekil 4.3.2.16 $G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ 'nin kümelerle ilgili kavram resmi.....	70
Şekil 4.3.2.17 $G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ 'nin kümelerle ilgili kavram resmi.....	71
Şekil 4.3.2.18 Kümeler: resmetme kategorisi	72
Şekil 4.3.3.1 $G_1\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek.....	73
Şekil 4.3.3.2 $G_1\ddot{O}$ 'nin kümelerle ilgili kavram resmi	74
Şekil 4.3.3.3 $G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ 'nin kümelerle ilgili kavram resmi.....	74

<i>Şekil 4.3.3.4</i> $G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ 'nin kümelerle ilgili kavram resmi.....	75
<i>Şekil 4.3.3.5</i> Kümeler: resmi değerlendirme kategorisi	77
<i>Şekil 4.3.4.1</i> $G_1\ddot{O}$ 'nin resmini temsil açısından tamamen değiştirmesi	78
<i>Şekil 4.3.4.2</i> $G_1\ddot{O}$ 'nin çizimini temsil açısından tamamen değiştirmesi	79
<i>Şekil 4.3.4.3</i> $G_1\ddot{O}$ 'nin çizimini tasarım açısından kısmen değiştirmesi	80
<i>Şekil 4.3.4.4</i> $G_1\ddot{O}$ 'nin resmini tasarım açısından kısmen değiştirmesi	80
<i>Şekil 4.3.4.5</i> $G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ 'nin resmini tasarım açısından kısmen değiştirmesi	81
<i>Şekil 4.3.4.6</i> Kümeler: resmi değiştirme kategorisi	82
<i>Şekil 4.3.5.1</i> $G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ 'nin kümelerle ilgili kavram resmi.....	83
<i>Şekil 4.3.5.2</i> $G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ 'nin kümelerle ilgili kavram resmi.....	90
<i>Şekil 4.3.5.3</i> Kümeler: resmi analiz etme kategorisi	92
<i>Şekil 4.4.1.1</i> $G_3\ddot{O}$ 'in fonksiyonu örneklendirmesi	94
<i>Şekil 4.4.1.2</i> $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'in fonksiyonu örneklendirmesi.....	95
<i>Şekil 4.4.1.3</i> $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin fonksiyonu örneklendirmesi.....	95
<i>Şekil 4.4.1.4</i> $G_1\ddot{O}$ 'in fonksiyonu örneklendirmesi	95
<i>Şekil 4.4.1.5</i> $G_3\ddot{O}$ 'in birim fonksiyonu örneklendirmesi.....	96
<i>Şekil 4.4.1.6</i> $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'in birebir ve örten fonksiyonu örneklendirmesi	96
<i>Şekil 4.4.1.7</i> $G_6\ddot{O}$ 'in fonksiyonu örneklendirmesi	96
<i>Şekil 4.4.1.8</i> $G_4\ddot{O}$ 'in birim fonksiyonu örneklendirmesi.....	96
<i>Şekil 4.4.1.9</i> $G_4\ddot{O}$ 'in bileşke fonksiyonu örneklendirmesi	97
<i>Şekil 4.4.1.10</i> $G_1\ddot{O}$ 'in birebir ve örten fonksiyonu örneklendirmesi.....	97
<i>Şekil 4.4.1.11</i> $G_1\ddot{O}$ 'in bileşke fonksiyonu örneklendirmesi	97
<i>Şekil 4.4.1.12</i> $G_3\ddot{O}$ 'in esinlenme noktası bulması: açı ve yay	99
<i>Şekil 4.4.1.13</i> $G_4\ddot{O}$ 'in esinlenme noktası bulması: örüntü.....	100
<i>Şekil 4.4.1.14</i> $G_4\ddot{O}$ 'in esinlenme noktası bulması: fonksiyon grafiği.....	100
<i>Şekil 4.4.1.15</i> $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'in esinlenme noktası bulması: kutu ve pul.....	100

Şekil 4.4.1.16 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'in esinlenme noktası bulması: balık ve akvaryum.....	101
Şekil 4.4.1.17 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'in esinlenme noktası bulması-koordinat sistemi.....	101
Şekil 4.4.1.18 $G_1\ddot{O}$ 'in esinlenme noktası bulması: sayı doğrusu	101
Şekil 4.4.1.19 $G_6\ddot{O}$ 'nin esinlenme noktası bulması: koordinat sistemi	102
Şekil 4.4.1.20 $G_3\ddot{O}$ 'in esinlenme noktasını geliştirmesi: açı ve yay	102
Şekil 4.4.1.21 $G_4\ddot{O}$ 'in esinlenme noktasını geliştirmesi: fonksiyon grafiği	103
Şekil 4.4.1.22 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'in esinlenme noktasını geliştirmesi: kutu ve pul	103
Şekil 4.4.1.23 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'in esinlenme noktasının geliştirmesi: balık ve akvaryum.....	103
Şekil 4.4.1.24 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'in esinlenme noktasını geliştirmesi: koordinat sistemi	104
Şekil 4.4.1.25 $G_1\ddot{O}$ 'in esinlenme noktasını geliştirmesi: sayı doğrusu	104
Şekil 4.4.1.26 $G_6\ddot{O}$ 'nin esinlenme noktasını geliştirmesi: koordinat sistemi	104
Şekil 4.4.1.27 $G_3\ddot{O}$ 'in fonksiyonlarla ilgili kavram resimlerinden bir örnek.....	105
Şekil 4.4.1.28 $G_3\ddot{O}$ 'in bileşke fonksiyon resmi.....	105
Şekil 4.4.1.29 $G_4\ddot{O}$ 'in fonksiyonlarla ilgili kavram resimlerinden bir örnek.....	106
Şekil 4.4.1.30 $G_4\ddot{O}$ 'in fonksiyonlarla ilgili kavram resimlerinden bir örnek.....	107
Şekil 4.4.1.31 $G_4\ddot{O}$ 'in fonksiyonlarla ilgili kavram resimlerinden bir örnek.....	108
Şekil 4.4.1.32 $G_3\ddot{O}$ 'in fonksiyonlarla ilgili kavram resimlerinden bir örnek.....	108
Şekil 4.4.1.33 $G_4\ddot{O}$ 'in fonksiyonlarla ilgili kavram resimlerinden bir örnek.....	109
Şekil 4.4.1.34 $G_6\ddot{O}$ 'in fonksiyonlarla ilgili kavram resimlerinden bir örnek.....	109
Şekil 4.4.1.35 $G_6\ddot{O}$ 'in fonksiyonlarla ilgili kavram resimlerinden bir örnek.....	110
Şekil 4.4.1.36 $G_3\ddot{O}$ 'in fonksiyonlarla ilgili kavram resimleri	111
Şekil 4.4.1.37 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'in birim fonksiyon resmi	111
Şekil 4.4.1.38 $G_4\ddot{O}$ 'in bileşke fonksiyon resmi.....	112
Şekil 4.4.1.39 $G_1\ddot{O}$ 'in fonksiyonun tersinin resmi	112
Şekil 4.4.1.40 Fonksiyonlar: Kavram-resim ilişkisi üzerine düşünme kategorisi.....	114
Şekil 4.4.2.1 $G_3\ddot{O}$ 'nin bildiği bir resim: Venn şeması	115

Şekil 4.4.2.2 $G_4\ddot{O}$ 'nin bildiği bir resim: Venn şeması	115
Şekil 4.4.2.3 $G_4\ddot{O}$ 'nin bildiği bir resim: Venn şeması	116
Şekil 4.4.2.4 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin bildiği bir resim: Venn şeması.....	116
Şekil 4.4.2.5 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin bildiği bir resim: Venn şeması.....	117
Şekil 4.4.2.6 $G_6\ddot{O}$ 'nin bildiği bir resim: Venn şeması.....	118
Şekil 4.4.2.7 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin bildiği bir resim: Venn şeması.....	118
Şekil 4.4.2.8 $G_4\ddot{O}$ 'nin bildiği bir resim: fonksiyon grafiği	119
Şekil 4.4.2.9 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin bildiği bir resim: koordinat sistemi.....	119
Şekil 4.4.2.10 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'in somut resminden bir örnek	119
Şekil 4.4.2.11 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'in somut resminden bir örnek	120
Şekil 4.4.2.12 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin taslak resmi: amaçlı taslak resim	121
Şekil 4.4.2.13 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin taslak resmi: amaçlı taslak resim	121
Şekil 4.4.2.14 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin taslak resmi: amaçlı taslak resim	122
Şekil 4.4.2.15 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin taslak resmi: amaçlı taslak resim	122
Şekil 4.4.2.16 $G_4\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek.....	123
Şekil 4.4.2.17 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin resimlerinden örnekler	123
Şekil 4.4.2.18 $G_6\ddot{O}$ 'nin resimlerinden örnekler.....	124
Şekil 4.4.2.19 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin resimlerinden örnekler	125
Şekil 4.4.2.20 $G_4\ddot{O}$ 'nin fonksiyonda tanım ve değer kümesini renklendirmesi.....	126
Şekil 4.4.2.21 $G_6\ddot{O}$ 'nin elemanların eşleşmelerini renklendirmesi	126
Şekil 4.4.2.22 $G_6\ddot{O}$ 'nin elemanların eşleşmelerini renklendirmesi	127
Şekil 4.4.2.23 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin bileşke fonksiyonda elemanların eşleşmesini renklendirmesi	127
Şekil 4.4.2.24 $G_4\ddot{O}$ 'nin bileşke fonksiyonun elemanlarını renklendirmesi	127
Şekil 4.4.2.25 $G_3\ddot{O}$ 'nin elemanların eşleşmesini renklendirmesi.....	128
Şekil 4.4.2.26 $G_1\ddot{O}$ 'nin resimlerinden örnekler.....	128
Şekil 4.4.2.27 $G_1\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek.....	129

<i>Şekil 4.4.2.28</i> $G_1\ddot{O}$ 'nin fonksiyonun kavram resmi	129
<i>Şekil 4.4.2.29</i> $G_1\ddot{O}$ 'nin örten fonksiyonun kavram resmi.....	129
<i>Şekil 4.4.2.30</i> $G_1\ddot{O}$ 'nin birebir ve örten fonksiyonun kavram resmi.....	130
<i>Şekil 4.4.2.31</i> $G_1\ddot{O}$ 'nin birebir ve örten fonksiyonun kavram resmi.....	130
<i>Şekil 4.4.2.32</i> $G_1\ddot{O}$ 'nin birim fonksiyonun kavram resmi	130
<i>Şekil 4.4.2.33</i> $G_1\ddot{O}$ 'nin bileşke fonksiyonun kavram resmi.....	131
<i>Şekil 4.4.2.34</i> $G_1\ddot{O}$ 'nin fonksiyonun tersinin kavram resmi	131
<i>Şekil 4.4.2.35</i> $G_1\ddot{O}$ 'nin tersi olmayan örten fonksiyonun kavram resmi.....	132
<i>Şekil 4.4.2.36</i> $G_1\ddot{O}$ 'nin tersi olmayan birebir fonksiyonun kavram resmi	133
<i>Şekil 4.4.2.37</i> $G_3\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek.....	133
<i>Şekil 4.4.2.38</i> $G_3\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek.....	133
<i>Şekil 4.4.2.39</i> $G_3\ddot{O}$ 'nin resimlerinden örnekler.....	134
<i>Şekil 4.4.2.40</i> $G_3\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek.....	134
<i>Şekil 4.4.2.41</i> $G_3\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek.....	135
<i>Şekil 4.4.2.42</i> $G_4\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek.....	135
<i>Şekil 4.4.2.43</i> $G_4\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek.....	136
<i>Şekil 4.4.2.44</i> $G_4\ddot{O}$ 'nin resminden örnekler.....	136
<i>Şekil 4.4.2.45</i> $G_4\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek.....	136
<i>Şekil 4.4.2.46</i> $G_3\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek.....	137
<i>Şekil 4.4.2.47</i> $G_3\ddot{O}$ 'nin fonksiyonun kısıtlaması ve genişlemesinin kavram resimleri	137
<i>Şekil 4.4.2.48</i> $G_3\ddot{O}$ 'nin birim fonksiyonun kavram resmi	138
<i>Şekil 4.4.2.49</i> $G_3\ddot{O}$ 'nin bileşke fonksiyonun kavram resmi.....	138
<i>Şekil 4.4.2.50</i> $G_3\ddot{O}$ 'nin fonksiyonun tersinin kavram resmi	139
<i>Şekil 4.4.2.51</i> $G_3\ddot{O}$ 'nin tersi olmayan birebir fonksiyonun kavram resmi	139
<i>Şekil 4.4.2.52</i> $G_4\ddot{O}$ 'nin birim fonksiyonun kavram resmi	140
<i>Şekil 4.4.2.53</i> $G_4\ddot{O}$ 'nin bileşke fonksiyonun kavram resmi.....	140

Şekil 4.4.54 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin resimlerinden örnekler	141
Şekil 4.4.2.55 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin birebir ve örten fonksiyonun kavram resmi	141
Şekil 4.4.2.56 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin fonksiyon olmayan kavram resmi.....	142
Şekil 4.4.2.57 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin birebir ve örten olmayan fonksiyonun kavram resmi	142
Şekil 4.4.2.58 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin örten olmayan birebir fonksiyonun kavram resmi	142
Şekil 4.4.2.59 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin birebir olmayan örten fonksiyonun kavram resmi.....	143
Şekil 4.4.2.60 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin bileşke fonksiyonun kavram resmi	143
Şekil 4.4.2.61 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin fonksiyonun tersinin kavram resmi.....	144
Şekil 4.4.2.62 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin tersi olmayan fonksiyonun kavram resmi	145
Şekil 4.4.2.63 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin birim fonksiyonun kavram resmi.....	145
Şekil 4.4.2.64 $G_6\ddot{O}$ 'nin bileşke fonksiyonun kavram resmi.....	146
Şekil 4.4.2.65 $G_6\ddot{O}$ 'nin bileşke fonksiyonun kavram resmi.....	147
Şekil 4.4.2.66 $G_6\ddot{O}$ 'nin birim fonksiyonun kavram resmi	147
Şekil 4.4.2.67 $G_6\ddot{O}$ 'nin fonksiyonun tersinin kavram resimleri	148
Şekil 4.4.2.68 $G_3\ddot{O}$ 'nin çiziminden bir örnek.....	148
Şekil 4.4.2.69 $G_3\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek.....	149
Şekil 4.4.2.70 $G_3\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek.....	149
Şekil 4.4.2.71 $G_3\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek.....	150
Şekil 4.4.2.72 $G_4\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek.....	150
Şekil 4.4.2.73 $G_4\ddot{O}$ 'nin fonksiyonlarla ilgili kavram resmi	151
Şekil 4.4.2.74 $G_4\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek.....	152
Şekil 4.4.2.75 $G_4\ddot{O}$ 'nin fonksiyonun tersi ve tersi olmayan fonksiyonlarla ilgili kavram resmi	153
Şekil 4.4.2.76 $G_6\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek.....	154
Şekil 4.4.2.77 $G_6\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek.....	154
Şekil 4.4.2.78 $G_6\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek.....	155

<i>Şekil 4.4.2.79</i> $G_6\ddot{O}$ 'nin fonksiyonlarla ilgili kavram resmi	155
<i>Şekil 4.4.2.80</i> Fonksiyonlar: resmetme kategorisi	157
<i>Şekil 4.4.3.1</i> $G_3\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek.....	158
<i>Şekil 4.4.3.2</i> $G_4\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek.....	158
<i>Şekil 4.4.3.3</i> $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'in somut resminden bir örnek	159
<i>Şekil 4.4.3.4</i> $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'in somut resminden bir örnek.....	159
<i>Şekil 4.4.3.5</i> $G_1\ddot{O}$ 'nin birebir ve örten fonksiyonun kavram resmi.....	160
<i>Şekil 4.4.3.6</i> $G_1\ddot{O}$ 'nin birim fonksiyonun kavram resmi	160
<i>Şekil 4.4.3.7</i> $G_3\ddot{O}$ 'nin bileşke fonksiyonun kavram resmi.....	160
<i>Şekil 4.4.3.8</i> $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin resminden bir örnek.....	161
<i>Şekil 4.4.3.9</i> $G_6\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek.....	161
<i>Şekil 4.4.3.10</i> $G_6\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek.....	162
<i>Şekil 4.4.3.11</i> $G_1\ddot{O}$ 'nin resimlerinden örnekler.....	163
<i>Şekil 4.4.3.12</i> $G_3\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek.....	163
<i>Şekil 4.4.3.13</i> $G_3\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek.....	163
<i>Şekil 4.4.3.14</i> $G_3\ddot{O}$ 'nin resimlerinden örnekler.....	164
<i>Şekil 4.4.3.15</i> $G_4\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek.....	164
<i>Şekil 4.4.3.16</i> $G_4\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek.....	165
<i>Şekil 4.4.3.17</i> $G_4\ddot{O}$ 'nin resimlerinden örnekler.....	165
<i>Şekil 4.4.3.18</i> $G_4\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek.....	166
<i>Şekil 4.4.3.19</i> $G_4\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek.....	166
<i>Şekil 4.4.3.20</i> $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin resimlerinden örnekler	167
<i>Şekil 4.4.3.21</i> $G_6\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek.....	168
<i>Şekil 4.4.3.22</i> $G_6\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek.....	168
<i>Şekil 4.4.3.23</i> $G_6\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek.....	169
<i>Şekil 4.4.3.24</i> $G_1\ddot{O}$ 'nin resimlerinden örnekler.....	169

<i>Şekil 4.4.3.25</i> $G_1\ddot{O}$ 'nin bileşke fonksiyonun kavram resmi.....	170
<i>Şekil 4.4.3.26</i> $G_4\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek.....	171
<i>Şekil 4.4.3.27</i> $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin resminden bir örnek	171
<i>Şekil 4.4.3.28</i> $G_1\ddot{O}$ 'nin resimlerinden örnekler.....	172
<i>Şekil 4.4.3.29</i> $G_6\ddot{O}$ 'nin resimlerinden örnekler.....	172
<i>Şekil 4.4.3.30</i> Fonksiyonlar: resmi değerlendirme kategorisi	174
<i>Şekil 4.4.4.1</i> $G_3\ddot{O}$ 'nin resmini temsil açısından kısmen değiştirmesi	175
<i>Şekil 4.4.4.2</i> $G_3\ddot{O}$ 'nin resmini temsil açısından tamamen değiştirmesi	175
<i>Şekil 4.4.4.3.</i> $G_4\ddot{O}$ 'nin resmini temsil açısından tamamen değiştirmesi	176
<i>Şekil 4.4.4.4</i> $G_4\ddot{O}$ 'nin resmini temsil açısından tamamen değiştirmesi	176
<i>Şekil 4.4.4.5</i> $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin resmini temsil açısından tamamen değiştirmesi	177
<i>Şekil 4.4.4.6</i> $G_1\ddot{O}$ 'nin resimlerinden örnekler.....	178
<i>Şekil 4.4.4.7</i> $G_1\ddot{O}$ 'nin resimlerinden örnekler.....	178
<i>Şekil 4.4.4.8</i> $G_3\ddot{O}$ 'nin resmini tasarım açısından kısmen değiştirmesi	179
<i>Şekil 4.4.4.9</i> $G_3\ddot{O}$ 'nin resmini tasarım açısından kısmen değiştirmesi	179
<i>Şekil 4.4.4.10</i> $G_3\ddot{O}$ 'nin resmini tasarım açısından kısmen değiştirmesi.....	180
<i>Şekil 4.4.4.11</i> $G_4\ddot{O}$ 'nin resmini tasarım açısından kısmen değiştirmesi.....	180
<i>Şekil 4.4.4.12</i> $G_4\ddot{O}$ 'nin resmini tasarım açısından kısmen değiştirmesi.....	181
<i>Şekil 4.4.4.13</i> $G_4\ddot{O}$ 'nin resmini tasarım açısından kısmen değiştirmesi.....	182
<i>Şekil 4.4.4.14</i> $G_6\ddot{O}$ 'nin resmini tasarım açısından kısmen değiştirmesi.....	182
<i>Şekil 4.4.4.15</i> $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin resmini tasarım açısından tamamen değiştirmesi	183
<i>Şekil 4.4.4.16</i> $G_6\ddot{O}$ 'nin resmini tasarım açısından tamamen değiştirmesi.....	183
<i>Şekil 4.4.4.17</i> $G_6\ddot{O}$ 'nin resmini tasarım açısından tamamen değiştirmesi.....	184
<i>Şekil 4.4.4.18</i> $G_6\ddot{O}$ 'nin resmini tasarım açısından tamamen değiştirmesi.....	185
<i>Şekil 4.4.4.19</i> $G_4\ddot{O}$ 'nin resmini ebat olarak büyütmesi	185
<i>Şekil 4.4.4.20</i> $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin resmini ebat olarak büyütmesi.....	186

<i>Şekil 4.4.4.21</i> Fonksiyonlar: resmi değiştirme kategorisi	187
<i>Şekil 4.4.5.1</i> $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin fonksiyon olmayan kavram resmi.....	188
<i>Şekil 4.4.5.2</i> $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin birebir ve örten olmayan fonksiyonun kavram resmi	188
<i>Şekil 4.4.5.3</i> $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin örten olmayan birebir fonksiyonun kavram resmi.....	189
<i>Şekil 4.4.5.4</i> $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin birebir olmayan örten fonksiyonun kavram resmi.....	189
<i>Şekil 4.4.5.5</i> $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin fonksiyonun tersinin kavram resmi.....	189
<i>Şekil 4.4.5.6</i> $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin tersi olmayan fonksiyonun kavram resmi	190
<i>Şekil 4.4.5.7</i> $G_3\ddot{O}$ 'nin tersi olmayan fonksiyonun kavram resmi.....	190
<i>Şekil 4.4.5.8</i> $G_1\ddot{O}$ 'nin birebir ve örten fonksiyonun kavram resmi.....	190
<i>Şekil 4.4.5.9</i> $G_4\ddot{O}$ 'nin fonksiyonun tersi ve tersi olmayan fonksiyonlarla ilgili kavram resmi	191
<i>Şekil 4.4.5.10</i> $G_6\ddot{O}$ 'nin bileşke fonksiyonun kavram resmi.....	191
<i>Şekil 4.4.5.11</i> Fonksiyonlar: resmi analiz etme kategorisi	200
<i>Şekil 5.1</i> MÖA'ların matematiksel kavramları görselleştirme süreci	203

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

KPSS	Kamu Personeli Seçme Sınavı
MÖA	Matematik Öğretmen Adayı
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics (Amerikan Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi)
TDK	Türk Dil Kurumu

BÖLÜM I

GİRİŞ

1.1. Problem Durumu

Matematik eğitiminde görselleştirmenin tarihçesi oldukça uzundur. 1980'lerin başından beri matematik eğitimcileri görselleştirme öğretiminin uygulamalı zorluklarını, okulda bir uygulama olarak matematiğin görselleştirilmesini ve aynı zamanda eğitim psikolojisinde matematiğin görselleştirilmesi ile ilgili teorileri araştırmaktadırlar (Kadunz & Yerushalmy, 2015).

Özellikle son yirmi yılda, matematik eğitimi araştırmacıları görselleştirme ile giderek daha fazla ilgilenmeye başlamışlardır (Natsheh & Karsenty, 2014). Bununla birlikte görsel temsillere olan ilgi de artmaya başlamıştır. Bu durumun birkaç nedeni bulunmaktadır. Bu nedenlerden biri bilgisayarların görsel temsiller üretmesi ve bilgisayarlara herkesin kolayca ulaşabilmesidir. Üstelik teknoloji, matematiksel tartışmalarda ve problem çözmede şekillerin kullanımını engelleyen sınırlılıkların çoğunun üstesinden gelecek biçimde grafiklerde ayrıntıya ve hassasiyete izin vermektedir. Diğer bir neden matematiği öğrenmede ve öğretmede görsel temsillerin oynayabileceği rolün giderek daha fazla tanınır hale gelmesidir (Stylianou & Silver, 2004).

Matematik eğitiminde görselleştirmenin zamanla daha fazla yer edindiğine dair kanıtlar bulunmaktadır. Örneğin, matematik ders kitapları resimler, diyagramlar ve grafiklerle doludur. Teknolojik araçlar (örneğin, grafik hesap makinesi), özel bilgisayar programları (örneğin, Mathematica, Maple), istatistik derslerinde kullanılan veri görselleştirme programları, çevrimiçi uygulamalar bulunmaktadır (Macnab, Phillips, & Norris, 2012). Bu mevcut uygulamaların sayısı ve çeşidi gün geçtikçe artmaktadır. Dolayısıyla görselleştirme

matematik eğitiminin daha fazla bir parçası haline gelmektedir. Öğrencilerin bu imkânlardan etkili bir şekilde yararlanabilmesi için öğretmenlerin eğitilmesi dolayısıyla öğretmen eğitiminde görselleştirmeye daha fazla ağırlık verilmesinin gerektiği düşünülebilir.

Görselleştirmenin matematik eğitimindeki varlığının artmasının yanında matematikte ve matematik eğitiminde görselleştirmeye atfedilen konum araştırmaya neden ihtiyaç duyulduğu açısından önemlidir. Duval (1999) görselleştirmenin ve temsil etmenin matematiği anlamının özünde bulunduğunu ifade etmektedir. Diğer bilimlerdeki (örneğin biyoloji) nesnelere doğrudan ulaşılabilir, fakat matematikteki nesnelere yalnızca işaretler yoluyla ulaşılabilir. Matematiği anlamadaki zorluğun büyüklüğü de bu noktadan kaynaklanmaktadır. Matematiği anlamının özünde bulunan semiyotik temsil, temsil birimleri arasındaki ilişkilerin bir organizasyonunu verir. Oysa görselleştirme herhangi bir ilişki organizasyonunun hızlı ve eksiksiz olarak anlaşılmasına olanak sağlar. Bu nedenlerle Duval (1999) görselleştirme olmadan anlamının olmayacağını belirtmektedir. Borba ve Villarreal (2005) görselleştirmeyi matematiği anlamak için bir araç, matematikte ve matematik öğreniminde bir akıl yürütme, standart cebir dili ile açıklanamayan matematiği ifade edebilen bir dil olarak görülebileceğini iddia etmiştir. Görselleştirme grafiksel, ikonik ve diyagramlı resimlemeler aracılığı ile yüksek düzeyde görsel düşünmeye hizmet etmenin ötesine geçmiştir. Bu nedenle de görselleştirme matematik öğretimi ve matematik öğrenimi için alternatif ve güçlü bir kaynak olarak görülmektedir (Natsheh & Karsenty, 2014).

Literatürde görselleştirmeye biçilen çeşitli roller ve bu roller ile ilgili tartışmalar kavramsal çerçeve bölümünde detaylı olarak açıklanmıştır. Tüm tartışmalara rağmen görselleştirmenin matematik ve matematik eğitimindeki rolü konusunda bir uzlaşma bulunmamaktadır. Bununla birlikte görselleştirmenin matematiği anlamaya yardımcı olduğu matematikçiler ve matematik eğitimcileri tarafından kabul edilmektedir. Görselleştirmenin rolünün ortaya konulabilmesi için daha fazla araştırmaya ihtiyaç vardır (Hanna & Sidoli, 2007). Ayrıca matematik eğitiminde görselleştirmenin en iyi nasıl kullanılacağına dair sağlam bir eğitim teorisi yoktur (Macnab vd., 2012). Bu araştırmada matematik öğretmen aday (MÖA)'larının bazı matematiksel kavramları görselleştirme süreçleri, bu kavramlara yönelik çizdikleri resimleri incelenmiş ve buna dayalı olarak matematik eğitiminde görselleştirme literatürüne katkıda bulunulmaya çalışılmıştır.

Matematikte görselleştirme, ilişkilerin doğrudan bir görüntüsü değildir; aksine ilişkilerin bir yorumudur. Ancak görsel ilişkilerin uygun bir şekilde okunması öğrenildiğinde bu yorum

yapılabilir (Guzman, 2002). Matematik camiasında kullanılan ve bir taktik olan görsel bir dil mevcuttur. Bu dili diğer bir ifadeyle görselleştirmeyi anlamak için deneyim önemlidir. Deneyimli bir matematikçi görsel bir temsilden matematiksel olarak anlamlı sonuçlara ulaşabilir. Öğrenciler ise aynı görsel temsili anlamakta bile zorlanabilir (Bråting & Pejlar, 2008). Benzer şekilde deneyimli bir matematikçi tarafından genellikle sezgisel olarak kabul edilen görsel fikirler deneyimsiz bir öğrenci için mutlaka sezgisel olmayabilir (Tall, 1991). Aslında görselleştirme doğrudan hazır bilgi sunmamaktadır. Görselleştirmede matematiksel bağlantıları görüp ortaya çıkarabilecek tecrübeye ve bakış açısına sahip olunması gerekmektedir. Dolayısıyla öğrencilerin matematikçiler gibi bakış açısına sahip olabilmesi için matematikte görselleştirme yönünden eğitilmeleri gerekmektedir. Bu noktada öğretmen eğitimi ön plana çıkmaktadır. Öncelikle MÖA'lara görselleştirme ile ilgili yeterli tecrübe kazandırılmalıdır. Görselleştirme ile ilgili verilecek eğitimin nasıl olacağı konusunda yol göstermesi açısından MÖA'lar ile yapılacak araştırmalara ihtiyaç vardır.

Matematikçiler görsel bir temsili keşif için kullanabilirler. Bilgiyi derinlemesine araştırabilmek için görsel temsilleri incelerler ya da görsel temsil oluştururlar. Matematik öğretmenleri de öğrencilerinde bu davranışın gelişimini teşvik etmelidir (Stylianou, 2002). Matematik öğretmenlerinin öğrencilerini görsel temsili inceleme veya görsel temsil oluşturma yönünden cesaretlendirebilmeleri için kendilerinin aynı deneyimi yaşamış olmaları gerekmektedir. Aksi takdirde öğrencilerine yeterli düzeyde rehberlik edemeyebilir ya da öğrencilerini yanlış yönlendirebilirler. MÖA'lar öncelikle kendi matematiksel görsel temsillerini oluşturma ve matematiksel keşif yapma yönünden teşvik edilmelidir.

Öğrenciler görselleştirmeye çok uzak değildir. Görselleştirme üzerine yapılan araştırmalar öğrencilerin matematiksel anlamı inşa etmede görselleştirmeyi kullandıklarını göstermiştir. Öğrencilerin matematiksel anlamayı geliştirebilmeleri için de önce görmeyi öğrenmeleri gerekir (Kasmer & Kim, 2012). Görsel temsillerin kullanımını düzenleyen kuralların ve normların, okulda öğrenciler tarafından üstü kapalı olarak öğrenilebileceğini ve anlaşılabilirliğini varsaymak yerine, görsel temsiller matematik öğretimi etkinliğinin önemli bileşenleri olarak düşünülmelidir (David & Tomaz, 2012). Görselleştirme matematiği anlamada öğrenciler tarafından da kullanılabilir. Fakat bu kullanım yeterli değildir, öğrencilerin bakış açılarının geliştirilmesine ihtiyaç vardır. Matematikte görmeyi öğrenmiş öğretmenler öğrencilere yardımcı olabilir.

Görselleştirme, matematik öğretiminde kullanılan en yaygın tekniklerden biridir. Birçok matematiksel kavramı, resimler, çizimler, grafikler, vb. ile temsil etmeden öğretmek düşünülemez (Zarzycki, 2004). Buna rağmen birçok öğrenci matematiksel kavramlarla uğraşmayı zor bulmaktadır. Görselleştirmeden daha fazla yararlanılarak öğrenciler matematiksel kavramlarla daha üst düzeyde etkileşim kurabilir. Soyut yapıları ve ilişkileri görselleştirme yeteneği matematiksel düşünmenin ve dolayısıyla öğrenmenin önemli bir yönüdür. Matematiksel kavramların zihinsel görselleştirilmesi, özellikle genç yaşta birçok öğrenci için zor olabilir. Görselleştirmelerin akıl yürütme ve öğrenmeye getirdiği yararları doğrulayan pek çok araştırma kapsamında dış görselleştirmeler öğrencilere yardımcı olmak için kapsamlı bir şekilde kullanılmıştır. Görselleştirmeler, öğrencilerin daha zor matematiksel kavramları keşfetmelerini sağlayan somut araçlar olarak düşünülmüştür (Liang & Sedig, 2010a). Dolayısıyla görselleştirme ile matematiksel kavramlar öğrencilerin anlayabilmesi bakımından somut ve anlaşılır hale gelebilir. Bu durum soyut yapı ve kavramların bir yığını olarak görülen matematiğe öğrencilerin farklı bir bakış açısıyla bakmalarının yolunu açabilir (S. Konyalioglu, Konyalioglu, Ipek & Isik, 2005). Nitekim matematiksel görselleştirme ve kavramların anlaşılması arasında da bir ilişkinin olduğu fikri araştırmacılar tarafından da desteklenmektedir (Trigueros & Martínez-Planell, 2010).

Matematikte görselleştirmenin öğretilmesi öğretmen ve öğrencilerin resimsel metotların kullanımına karşı olan negatif tavırlarını değiştirebilir. Aynı matematiksel kavramın görsel, analitik veya cebirsel temsilleri arasında köprü kurulmaya çalışılmalıdır (Zarzycki, 2004). Öğrenciler bir temsilin matematiksel kavramın uygun temsili olup olmadığını belirlemede, matematiksel bir kavramın formal tanımı ve görsel temsili ile arasındaki bağlantıları görmede başarısız olmaktadır (Alcock & Weber, 2008, 2010). Kavramın formal tanımı ve bir görsel temsil arasında nasıl bir bağlantı kurulabilir, bu bağlantılar kurulmaya çalışılırken karşılan zorluklar nelerdir ve bu zorluklara karşı nasıl bir çözüm üretilebilir sorularının cevapları görselleştirme ile ilgili karşılaşılan sorunların üstesinden gelmede yardımcı olabilir. MÖA'ların kavramların formal tanımını göz önünde bulundurarak kendi görsel temsillerini nasıl oluşturduklarının araştırılması bu soruların cevapları ile ilgili ipuçları verebilir.

Literatür taraması yapıldığında araştırma ile ilgili iki çalışma bulunmuş, fakat küme ve fonksiyon kavramlarının görselleştirilmesi ile ilgili bir çalışmaya rastlanılamamıştır.

Güler ve Temizyürek (2015) gönüllü 20 pedagojik formasyon öğrencisinden bir ders saatinde ardışık tek sayıların toplamını veren kuralı modellemelerini istemişlerdir. Öğrencilerin sözel, cebirsel ve şekilsel modeller oluşturdıklarını gözlemlemişlerdir. Modellerin daha çok cebirsel ve şekilsel ağırlıklı olduğu, sözel modellerin cebirsel ve şekilsel modellere ulaşmada öğrenciler tarafından yol gösterici olarak kullanıldığı sonucuna varmışlardır.

Uğurel, Morali, Karahan ve Boz (2016) matematik alanında özel yetenekli üç 9. sınıf öğrencisi ile çalışmışlardır. Öncelikle öğrencilere görsel ispatlar hakkında kısa bir bilgi verilmiş, sonrasında görsel ispatların yapısı ve örnekleri katılımcılar tarafından tartışılmıştır. Araştırmacı ve katılımcılar beş hafta boyunca haftada bir kez görüşmüşlerdir. Katılımcılar adım adım görsel ispat örnekleri geliştirmişlerdir. Katılımcılar tarafından geliştirilen görsel ispatların çoğu araştırmacılar tarafından başarılı bulunmuştur.

Yapılan araştırmalarda katılımcıların adım adım hangi çizimleri yaparak matematiksel ifadeleri görselleştirdiği, matematiksel ifadeleri görselleştirme sürecinde hangi fikirlerden yola çıktığı, matematiksel ifadelerin görsel temsiline hangi çizimi niçin yaptığı, matematiksel ifadelerin görsel temsiline hangi değerlendirmeleri yaparak karar verdiği, oluşturdıkları görsel temsilleri matematiksel ifade açısından nasıl yorumladıkları hakkında yeterli bilgiye rastlanılmamıştır.

Öğrenciler kavramları soyut yapılar olarak görmekte ve kavramlarla uğraşırken zorlanabilmektedirler. Diğer taraftan matematikçiler görselleştirme aracılığı ile yeni kavramlar keşfedebilirken öğrenciler kavramların görsel temsillerini bile anlamakta zorluk çekebilmektedir. Öğrencilerin matematikçiler gibi davranabilmesi için matematik öğretmenlerinin desteklerine ihtiyaçları vardır. Matematik yapanlar ve matematiği öğrenenlerin görselleştirmenin matematikte kavramlar açısından kullanımında birbirinden oldukça farklı durumları yaşandığı görünmektedir. Bu noktada aynı durumun matematiği öğrenenler açısından nasıl olduğu sorusu sorulabilir. MÖA'ların matematiksel kavramları matematikçiler gibi kendi oluşturdıkları görsel temsillerle nasıl keşfettiklerinin araştırılması bu soruya dair bir fikir verebilir.

1.2. Araştırmanın Amacı

Bu araştırmanın amacı, MÖA'ların bazı matematiksel kavramları görselleştirme süreçlerinin incelenmesidir. Bu genel amaç doğrultusunda, araştırmada “MÖA'ların matematiksel kavramların resimlerini oluşturma süreci nasıl gelişmektedir?” sorusu kapsamında aşağıdaki sorulara cevap aranacaktır:

- 1) MÖA'lar matematiksel kavramların resimlerini çizme sürecinde kavram ve resim ilişkisi üzerine nasıl düşünmektedir?
- 2) MÖA'lar matematiksel kavramları nasıl resmetmektedir?
- 3) MÖA'lar matematiksel kavramlarla ilgili çizdikleri resimleri nasıl değerlendirmektedir?
- 4) MÖA'ların matematiksel kavramların resimlerini çizme sürecinde yaptıkları değişiklikler nasıldır?
- 5) MÖA'lar matematiksel kavramlarla ilgili çizdikleri resimleri nasıl analiz etmektedir?

1.3. Araştırmanın Önemi

Görselleştirme, anlama gibi, her şeyin açık bir şekilde tamamen yeniden düzenlendiği yeni bir farkındalığa karşılık gelen bir sıçramadır. Görselleştirme ile herhangi bir görsel temsilden matematiksel bilginin çıkarımı yapılır. Görsel temsil hazır verilmiş veya kişinin kendisi tarafından üretilmiş olabilir. Görsel temsilden çıkarımı yapılan matematiksel bilgi az ya da çok olabilir ama bilginin görsel temsilden çıkarımı kendiliğinden ve hızlı olur (Duval, 2014). Görselleştirmenin anlamaya benzediği aynı zamanda matematiksel keşfi de içerdiği söylenebilir. Görselleştirmede bilginin edinimi daha hızlı gerçekleşir. Bu durum görselleştirmenin kullanılması açısından bir avantaj olarak görülebilir.

Süreç bakımından anlamaya benzerlik gösteren görselleştirme, matematik anlayışını artırabilir (Bråting & Pejlar, 2008). Çünkü görselleştirme pek çok ve çeşitli özelliğin özetini sunarak görselleştirilen durumla ilgili geniş çaplı ve bütüncül bir bakış açısı sağlar (Arcavi, 2003). Görselleştirmede temsiller, kavramsal anlama ve matematik öğrenme süreci birbiriyle ilişkilidir (Trigueros & Martínez-Planell, 2010). Görselleştirme matematiksel bir fikri iletme, açıklamak veya matematiksel fikre ikna etmek gibi çeşitli amaçlarla kullanılabilir (Hanna & Sidoli, 2007). Görselleştirme hem matematik yapmanın hem de

matematiği öğrenmenin içindedir. Süreç olarak anlamaya benzerken, aynı zamanda matematiği anlamının ya da anlatmanın da bir parçasıdır.

Görselleştirme sadece matematikte değil, birçok farklı alanda kavramları anlamaya yardımcı olur. Öğrenciler bilgisayar bilimi, kimya, fizik, biyoloji, mühendislik, uygulamalı istatistik ve matematik gibi birçok disiplindeki çeşitli kavramları anlamak için güçlü bir yöntem olarak görselleştirmeden faydalanılabilir (Rahim & Siddo, 2009). Matematik yapma ve matematik öğrenmede görselleştirmenin farklı rolleri vardır. Matematik yapanlar yeni bir şeyler keşfetmek, öğrenenler ise matematikteki bilgileri anlamak için görselleştirmeyi kullanabilir. Öğrenciler bir uzmanın sağlayabileceğinden daha fazlasını görselleştirme ile bir temsilde görebilir ve bu gördüklerini de kendi kavramsal yapılarıyla ilişkilendirebilir (Arcavi, 2003). Öğrencilerin kendi anlamlarını inşa etmelerine yardımcı olan görselleştirme matematik dersinde de çeşitli nedenlerden ötürü önemlidir. Birincisi görselleştirme öğrencilerin (özellikle görsel öğrenenlerin) ilgisini çeker. İkincisi öğrencinin kavramı anlamasını kolaylaştırır. Üçüncüsü görsel muhakeme becerilerini geliştirir. Dördüncüsü de matematiği keşfetmek ve anlamak için önemli bir araçtır (Rogness, 2011).

Görselleştirmenin bir ürünü olan görsel temsiller, görselleştirme gibi, her disiplinde ve farklı karmaşıklık seviyelerinde kullanılmaktadır (Barwise & Etchemendy, 1998). Görsel temsiller bilgiye dayanan çeşitli görevlerde yer alabilmektedir. Görsel temsillerin ya da başka bir ifadeyle görselleştirmelerin; öğrencilerin karmaşık, çetrefilli örüntüleri ve yapıları gözlemlemek, gizli ve beklenmedik eğilimleri keşfetmek, dikkat çekici özellikleri algılamak, tutarsızlıkları ve aykırılıkları belirlemek, ilişkileri algılamak, bilişsel fikir haritaları oluşturmak ve yeni bilgiler ortaya çıkarmak gibi bilgiye dayalı görevleri yerine getirmelerinde yardımcı olması amaçlanmaktadır (Liang & Sedig, 2010b). Görsel temsiller aracılığıyla öğrenciler gördüğünü farklı özelliklere göre değerlendirme becerisi kazanabilir, bilgiyi elde etmede farklı tecrübeler yaşayabilir.

Görsel temsillerin bilgiyi farklı şekillerde temsil etmeye yardımcı olmasının yanında bilişsel sürece de olumlu anlamda etkisi vardır. Görsel temsiller, öğrencilerin bilişsel süreçlerinin bir kısmının algısal sürece kaydırılmasını sağlar. Bu bilişsel sürecin olmadığı anlamına gelmemektedir. Görsel temsiller, daha yüksek seviyede ve daha kapsamlı süreçlerin (örneğin, muhakeme, anlamlandırma, örüntü analizi ve keşfetme) icrasını arttırırken aynı zamanda öğrencilerin bazı alt düzey bilişsel süreçlerini (örneğin, hafıza) ortaya çıkarır ve

diğer süreçlerin (örneğin, dikkat) yerini görselleştirmenin almasına yardımcı olur (Liang & Sedig, 2010b).

Görselleştirme ve görsel temsillerin hem farklı alanlarda hem de matematik ve matematik öğretiminde bahsedilen işlevlerinin yanında araştırma açısından matematiksel kavramlarla olan ilişkileri önemlidir. Görsel temsiller, kavramın kazanımına yardımcıdır (Duval, 2014). Görselleştirme ise matematiksel kavramlar ve kavramlar arasındaki ilişkilere anlam vermek için güçlü bir araçtır (Rösken & Rolka, 2006). Görselleştirme, matematik öğrenmede sezgiyi ve kavram oluşumunu desteklemede genellikle faydalı olarak kabul edilir (Dreyfus, 1991). Dolayısıyla görselleştirme kavram oluşumunu kolaylaştırma, kavramı anlama ve kavramlar arasında ilişkiler kurmada etkilidir. Kavram formal tanım tarafından ifade edilir. Fakat formal tanım içindeki anlam öğrenciler tarafından anlaşılmayabilir. Görselleştirme, formal tanımların gizli anlamını kavramaya yardımcı olur (Furinghetti, Morselli, & Antonini, 2011). Böylece görselleştirme kavramın tanımı içindeki anlaşılmayan noktaların açığa kavuşmasını sağlayabilir. Bu çalışmada da MÖA'ların matematiksel kavramların formal tanımlarını inceleyerek kavramları görselleştirmeleri istenmiştir. Araştırma, MÖA'ların formal tanımlardaki anlamları nasıl gördüğü ve yorumladığı açısından bir bakış açısı sunabilir. MÖA'ların kavramları görselleştirirken farklı kavramların tanımları arasında nasıl ilişkiler kurdukları hakkında bilgi verebilir.

Matematiksel kavramlar, fikirler, yöntemler sezgisel olarak çeşitli yollarla temsil edilebilen görsel ilişkilerin zenginliğine sahiptir (Guzman, 2002). Matematiksel kavramların görselleştirilmesi, matematiksel kavramların barındırdığı potansiyel görsel ilişkilerin açığa çıkarılmasına ve matematiksel kavramların farklı görsel temsilleriyle kavramların tekrar keşfedilmesine yardımcı olabilir. Herhangi bir eğitim verilmeden kavramların MÖA'lar tarafından görselleştirilmesi durum tespiti hakkında önemli ipuçları verebilir.

Matematiksel bir kavramın bir dizi temsiline sahip olması kavramın anlaşılmasında önemlidir. Çünkü farklı temsiller bir kavramın farklı yönlerini vurgular ve bu nedenle belirli bir kavramın anlaşılmasının gelişimi çeşitli temsillere sahip olmaya bağlıdır (Barmby, Bilsborough, Harries, & Higgins, 2009). Benzer şekilde matematiksel bir kavramın farklı görsel temsillerinin olması kavramı farklı görseller açısından görerek kavram açısından geniş bir bakış açısına sahip olmayı sağlayabilir. Aslında kavramlar, nesneler, yapılar ve süreçler, genel bir ifadeyle matematiksel bilgiler, önerme olmadan açıklayıcı bir şekilde görsel temsillerle kodlanabilir (Liang & Sedig, 2010b). Bu araştırma ise MÖA'ların kavrama

ait bilgileri resimde nasıl kodladığını ve bu kodlama sürecinin nasıl olduğunu ortaya koyması açısından önemlidir. Böylece MÖA'ların bakış açılarına göre kavramların görsel bir temsili olan kavram resimlerinin ve kavram resimlerinin ortaya çıkış sürecinin bir değerlendirmesi yapılabilir.

Matematiksel fikirlerin nasıl görselleştirileceği öğretilir. Uygun zorluktaki görsel temsillerin öğretilmesiyle, kavramların nasıl ayrımına varılabileceğinin geniş bir bakış açısını vermek mümkündür. Bu durum öğrencilere geleneksel bir yaklaşımdan çok daha güçlü sezgiler verir (Tall, 1991). Görselleştirme yönteminin öğretilmesinde rehberlik görevi öğretmenlere düşmektedir. Dolayısıyla öğretmen eğitimi önem arz etmektedir. MÖA'ların görselleştirmeyi nasıl kullandıkları hakkında bilgi sahibi olmak, MÖA'lara görselleştirmenin nasıl ve hangi seviyede öğretilmesi hakkında önemli fikirler verebilir. MÖA'ların matematiksel kavramları hiçbir eğitim almadan nasıl görselleştirdiğinin incelendiği bu araştırmanın görselleştirmenin MÖA'lara öğretimi ile ilgili fikir sağlayabileceği düşünülmektedir.

MÖA'lara görselleştirme eğitiminin verilmesinin düşünülmesi durumunda görselleştirmenin doğuştan gelen bir yetenek olup olmadığı ya da her MÖA'ya öğretilip öğretilmeyeceği göz önünde bulundurulması gereken önemli bir faktör olarak görülebilir. Fakat literatür "farklı görme"nin kendine özgü, doğuştan gelen bir süreç değil öğrenilen bir süreç olduğuna işaret etmektedir. Bilişsel bilimin önerdiği gibi görmeyi öğreniriz; gördüklerimizi oluştururuz, görselleştirme veya “düşünmeyi görme” öğrenilir, ayrıca öğretilir ve öğretilmesi de önemlidir. Böylelikle, görselleştirmeyi ve “düşünmeyi görmeyi” öğrenmiş ve bu alanda yetenekli hale gelmiş öğretmenler, matematiksel kavramları güçlendirebilir ve sınıfta öğrenme sürecini geliştirebilir (Rahim & Siddo, 2009).

Araştırmada MÖA'lardan matematiksel kavramları resim çizerek görselleştirmeleri istenmiştir. MÖA'lar için resim çizmek çok uzak, yabancı olunan bir aktivite değildir. Eğitimin her kademesinde resim dersi vardır ve öğrencilere resim çizdirilir. Hatta çocuklar, yazmayı öğrenmeden çok önce resim çizme becerisini geliştirir. Resim çizmek, birçok öğrenciyi, özellikle de gençleri, matematiksel fikirlerini temsil etmelerinde ve bu fikirlerini başkalarına anlatabilmelerinde güçlü bir yol olabilir. Matematik dersinde resim çizme stratejisi teşvik edilebilir. Resim çizmenin kullanışlılığı ve gücü ile ilgili varsayımlar matematik derslerinde resim çizme stratejisi için de kabul edilebilir. Resim çizme stratejisini kullanan öğrenciler matematikle uğraşmış olur; kendi düşüncelerine güvenirlir ve kâğıt

üzerinde fikirleri ile oynamaktan korkmazlar. Resim çizmek öğrencileri fikir üretmeye teşvik ettiğinden bağımsız öğrenmelerini besler (Crespo & Kyriakides, 2007).

MÖA'lar araştırmadaki kümeler ve fonksiyonlar alt öğrenme alanları ile ilgili kavramları ve bu kavramlarla ilgili görsel temsilleri (Venn şeması, fonksiyon grafiği gibi) öğrenim hayatları boyunca defalarca görmüşlerdir. Resim çizmek ise çocukluktan gelen doğal bir aktivitedir. Resim çizerek matematiksel kavramların görselleştirilmesi, MÖA'ların yabancı olmadığı iki bileşenin bir araya getirilmesi olarak düşünülebilir. Bu araştırma ile MÖA'ların resim çizerek kavramları nasıl temsil ettiği, kavramlarla ilgili önceden bildikleri görsel temsillerin MÖA'ların kavramları görselleştirme süreçlerini nasıl etkilediği, MÖA'ların kavramların resimlerini çizerken hangi kriterleri göz önünde bulundurduğu ortaya koyulmaya çalışılmıştır. Kavramların görselleştirilme sürecinin incelenmesi, oluşturulan kavram resimleri ile matematik eğitiminde resim çizerek görselleştirme ve kavramları, bilinen görsel temsillerinin dışında kendi bakış açısına göre temsil edebilme yönünden araştırmanın literatüre katkıda bulunacağı düşünülmektedir.

1.4. Araştırmanın Sınırlılıkları

Araştırmada MÖA'lara kavramların formal tanımları verilmiş ve onlardan kavramları resim çizerek görselleştirmeleri istenmiştir. Araştırmacı ders esnasında MÖA'ların kavramların formal tanımları üzerinde nasıl düşündüklerini, formal tanımları nasıl anladıklarını ve resme nasıl yansıtmaya çalıştıklarını gözlemlemiştir. Derste çizilen resimler sınıf tarafından değerlendirilmiştir. Resmi, kavramı görsel olarak temsil ettiği yönünde uzlaşılan MÖA'lar ile sürece dair görüşmeler ders sonrasında gerçekleştirilmiştir. Bu nedenle MÖA'ların kavramların formal tanımları ile ilgili düşünme süreçleri araştırmacının derste gözlemlediği gibi detaylı bir şekilde araştırmaya yansımamış olabilir.

Uygulama dersinde incelenen kavram sayısı çok fazla olduğu için araştırmaya dâhil edilen veriler kümeler ve fonksiyonlar alt öğrenme alanlarıyla sınırlandırılmıştır.

1.5.Tanımlar

Görselleştirme: Matematiksel problemler, prensipler veya kavramların elle çizilmiş veya bilgisayarla üretilmiş geometrik veya grafik temsillerini kullanma veya üretme sürecidir (Zimmerman & Cunningham, 1991).

Görsel Temsil: Somut veya soyut bir nesnenin veya nesneler topluluğunun nedensel, işlevsel, yapısal ve semantik özelliklerini ya da ilişkilerini görsel olarak kodlayan çizgisel sembollerdir (Sedig & Sumner, 2006).

Görsel Matematiksel Temsil: Matematiksel yapılar veya matematiksel kavramların özelliklerini ve ilişkilerini kodlayan görsellerdir (Sedig & Sumner, 2006).

Kavram: Nesneler, koşullar, olaylar ya da süreçlerin genel bazı özellikleri üzerine gruplanabilecek şekilde oluşturulan sınıflamadır (Demirel, 2012, s. 79).

Matematiksel Kavram: Bir araştırmacının belirli bir matematiksel ilişkide yer alan mantıksal gerekliliğin istenilen veya çıkarılan öğrenci bilgisini temiz şekilde ifade etmesidir (Simon, 2017, s. 124).

Resim: Bir yüzey üzerinde oluşturulmuş her tür iki boyutlu kompozisyonudur (Sözen & Tanyeli, 2017, s. 201).

Matematiksel Kavram Resmi: Matematiksel kavramdaki ilişkilerin veya özelliklerin çizim veya boyamayla görselleştirildiği bir temsildir (Araştırmacı tarafından tanımlanmıştır).

BÖLÜM II

KAVRAMSAL ÇERÇEVE

2.1. Çoklu Temsiller

Türk Dil Kurumu (TDK) temsili “birinin veya bir topluluğun adına davranma” olarak tanımlamaktadır. Palmer’den aktaran Goldin ve Kaput (1996) temsili bir şeyin kısmen ya da tamamen ima yoluyla ilişkilendirilmesine tekabül eden, anlamına gelen, sembolize eden, özel bir tarafla bağlantı kuran veya başka bir şeyi gösteren bir çeşit yapılandırma olarak ifade eder (s. 398). Temsilin yaygın olarak kullanılan tanımı ise başka bir şeyi temsil edebilecek bir yapılandırma şeklindedir (Goldin, 2002). Temsil, bir şeyin başka türlü ifade edilmesi olarak da düşünülebilir. Burada temsil bir şeyin taklidi değildir, dolayısıyla temsil etme bir şeyi kopyalama durumu değildir. Bunun yerine, temsil etme eldeki amaç için bir temsil sisteminin düzenini icat etmek veya uyarlamaktan ibarettir (Stylianou, 2010).

Matematikte temsilin kullanımı zorunludur. Çünkü matematikte, herhangi bir matematiksel nesneyi, ifadeyi, kavramı veya teoremi ifade etmek için mutlaka bir temsilin kullanılması gerekmektedir (Dreyfus & Eisenberg, 1996). Temsil olmadan matematikte bir şeyi ifade etmenin mümkün olmadığı söylenebilir. Dolayısıyla, temsil matematiksel faaliyetlerin önemli bir parçasıdır (Stylianou, 2010).

Matematik, temsil yardımıyla yapılmaktadır ve matematikte tek bir temsil yoktur. Temsiller, resimler (örneğin çizim, çizelgeler, grafikler), yazılı semboller (örneğin sayılar, denklemler, kelimeler), manipülatif modeller, sözlü dil (örneğin öğrenci çiftleri ve bütün sınıf tartışmaları arasındaki konuşma) ve gerçek dünya durumları dâhil olmak üzere farklı şekillerde olabilir (Van de Walle, 2004). Matematikte birden fazla temsilin olması bir avantaj olarak değerlendirilebilir. Nitekim Eisner (2004), çoklu temsillerin matematikte yeni anlayışların

oluşturulması ve var olan anlayışların yeniden oluşturulmasında rol oynadığını belirtmektedir.

Matematik öğrenen birinin matematikteki farklı temsillerin kullanımını bilmesi gerektiği söylenebilir. Dolayısıyla her bir matematiksel temsile ve farklı temsiller arasında bağlantı kurabilmeye dair anlam oluşturmada öğrenciler desteklenmelidir (Dreher, Kuntze, & Lerman, 2016). Öğrenci aynı kavramın farklı temsillerini akıcı bir şekilde kullanabilmelidir. Örneğin, bir tablo veya grafiği okuyabilmeli veya oluşturabilmelidir. Temsilleri esnek veya uyumlu bir şekilde seçebilmelidir. Yani, bir problemi çözmek için her defasında en uygun temsile karar verebilmelidir. Farklı temsiller arasında akıcı bir şekilde geçiş yapabilmelidir. Örneğin, talep üzerine alternatif bir temsil oluşturabilmelidir (De Jong vd., 1998). Bu araştırmada da MÖA’lardan bazı matematiksel kavramları görselleştirmeleri istenmektedir. Yani araştırmada MÖA’lar alternatif bir temsil oluşturmaya teşvik edilmektedir.

Aynı şeyi farklı temsiller içinde tanımlama, temsil etme ve bir temsili diğerine taşıma esnekliği, zengin ilişkileri görmeyi, daha iyi bir kavramsal anlayış geliştirmeyi, kişinin anlayışını genişletmeyi, derinleştirmeyi ve problemleri çözme yeteneğini güçlendirmeyi sağlar (Even, 1998). Eğer öğretmenler öğrencilere farklı görsel, fiziksel ve sembolik temsiller oluşturma ve analiz etme fırsatları sağlarsa, öğrencilerin matematikçiler ve bilim insanları tarafından kullanılan önemli bir süreci öğrenmelerine yardımcı olurlar (Ryken, 2009). Matematikçiler ve bilim insanlarının kullandığı sürecin öğrenilmesi, öğrencileri onlar gibi düşünmeye yönlendirebilir.

Temsillerin hiçbirinin diğerine göre bir üstünlüğü yoktur. Çünkü her bir temsil bağlamdaki farklı matematiksel özelliklerin veya ilişkilerin vurgulanmasını sağlar (Kirwan & Tobias, 2014). Temsil çeşidi olan görsel temsil, “bir problem durumunun temsili ilişkilerin görselleştirilebileceği veya gözle görülebileceği şekilde açıklamak için kullanılan bir terimdir” (George, 1997, s. 16). Bu araştırma da bazı matematiksel kavramlar resmedilmiştir. Araştırmadaki matematiksel kavramların resmi, yeni bir görsel temsil olarak değerlendirilmiştir.

Matematiksel düşünmeyi desteklemek için görsel temsiller sıklıkla kullanılmaktadır. İstatistikte verilerin görselleştirilmesi, cebirde fonksiyon grafikleri, geometride şematik çizimler görsel temsillere örnektir. Görsel temsil örnekleri sınırsızdır (Rau & Matthews, 2017). Görsel bir temsil, başka bir temsille gösterilen bilginin aynısını temsil edebilir. Hatta resimsel temsillerin kullanımı daha basit kullanım ve daha doğrudan çıkarım süreci ile

sonuçlanabilir (Larkin & Simon, 1987). Matematiksel kavramların görselleştirilmesi, onların daha iyi anlaşılması açısından pratik bir çözüm sağlayabilir. Bu araştırma bu süreçte dair ilk adım olarak sayılabilir. Öğretmenler, görsel temsilleri aşağıdaki amaçlar için kullanabilir:

- 1) Öğrencileri matematik camiasında yaygın olarak kullanılan görsel uzlaşmalar ile tanıştırmak,
- 2) Öğrencilerin öznel tercihlerini ve uzmanlıklarını geliştirmek,
- 3) Öğrencilerin matematikle ilgilenmek için kullandıkları araç takımını genişletmek,
- 4) Soyut karmaşık kavramları göstermek (Rau & Matthews, 2017).

Öğretmenlerin görsel temsilleri kullanarak soyut karmaşık kavramları gösterebilmesi için bu konuda bir alt yapısının olması gerektiği söylenebilir. Bu araştırmanın, MÖA'ları soyut kavramları görsel bir temsil (kavram resmi) ile ifade etmeye yönlendirme konusunda fikir vereceği söylenebilir.

Öğrencilerin çeşitli görsel temsillerle uğraşmaları onların soyut kavramları anlamalarına yardımcı olabilir (Singer, 2009). Araştırmada görsel bir temsil olarak kabul edilen matematiksel kavramların resmi de soyut kavramların anlaşılmasına katkıda bulunabilir. Öğretmenin matematiksel bir kavramın resmini kendisinin oluşturması, kavramı daha iyi anlamasına ve daha iyi öğretmesine yardımcı olabilir. Bu durumda öğretmen, öğrencisini de kendi kavram resmini oluşturması yönünde destekleyebilir. Öğrencilerin kendi kavram resimlerini oluşturmaları matematik bilgilerini artırabilir. Öğrencilere matematikle ilgilenmek için daha fazla fırsat sunabilir. Bu araştırma bu önerilerin gerçekleşebilmesi noktasında bir başlangıç olarak kabul edilebilir.

Matematiksel kavramlara sadece temsillerle ulaşılabildiği için, temsiller öğrencilerin kavramsal anlama süreçlerinin inşasında çok önemlidir (Duval, 2006; Goldin & Shteingold, 2001). Matematiksel kavramlar farklı şekillerde temsil edilebilir (Duncan, 2010). Matematiksel bir kavramın uygun bir temsilini seçme ve verilen bir temsilin güçlü yanlarını kullanabilme yeteneği, matematiksel fikirlerin anlaşılmasında önemli bir unsurdur (Lesh, Behr, & Post, 1987). Matematiksel kavramlar; sembolik ifadeler, yazılı kelimeler, grafiksel gösterimler, sayılar, diyagramlar ve çizimlerle temsil edilebilir (Stylianou, 2010). Bu araştırmada ise MÖA'lar tarafından matematiksel kavramlar resim çizerek temsil edilmeye çalışılmaktadır.

İlkokul ve Ortaokul Matematik Dersi Öğretim Programı'nın (2018) ulaşmaya çalıştığı genel amaçlardan biri öğrencinin kavramları farklı temsil biçimleri ile ifade edebilmesidir (s. 9). Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programı'nın (2018) matematik öğretim programının uygulanmasında dikkat edilecek hususlardan biri öğrencilerin matematiksel bilgiyi yapılandırma süreçlerinin çoklu temsiller ve materyallerle desteklenmesi üzerinedir (s. 11). Amerikan Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi (NCTM, 2000) öğretmenlerin öğrencileri kişisel temsillerini oluşturmaları yönünde teşvik etmesini, temsillerin sınıfla paylaşılmasını ve tartışılmasını önermektedir. Bu durumun öğretmenlere bilgiyi temsil etme ile ilgili sınıf tartışması başlatma, öğrencilerin anlayışlarını değerlendirme, bilginin temsiliyle ilgili kavram yanlışlarını anlama, yeni öğrenme ve öğretim durumları oluşturma fırsatlarını sunduğunu belirtmektedir. Bu araştırmada da MÖA'lar tarafından çizilen kavramların resmi sınıfta paylaşılmaktadır. Diğer MÖA'lar görsel temsil olarak kavram resimleri hakkında ne düşündüklerini belirtmektedir.

Öğretmenlerin temsil etme anlayışlarının, öğrencilerin temsilleri kullanma becerilerinin gelişimini etkilediği söylenebilir (Stylianou, 2010). Bu durumda öğretmenlerin temsil etme anlayışları hakkında fikir sahibi olmak, öğrencilerin temsilleri kullanma becerilerinin nasıl geliştirilebileceğine dair bakış açısı sunabilir. MÖA'ların bazı matematiksel kavramları görsel bir temsil (kavramın resmi) ile ifade etmeye çalışma süreçlerinin incelenmesi, öğretmenlerin görsel olarak temsil etme anlayışları hakkında fikir verebilir.

2.2. Görselleştirme

Görselleştirme ile ilgili pek çok uzmanlık alanında araştırmalar yapılmaktadır. Bu alanlara matematik, mühendislik, sanat, tıp, ekonomi, kimya, otomotiv ve psikoloji örnek olarak verilebilir (Gutiérrez, 1996). Görselleştirmenin çeşitli alanlarda kendisini göstermesinin yanında iletişimde de önemli bir işlevi vardır. Dil iletişimde nasıl bir rol oynuyorsa görselleştirme de iletişimde aynı ağırlıkta bir role sahiptir (Morgan, 2006). İnsanlar görsel bilgiye daha fazla güvenmekte, duysal bilginin diğer biçimleriyle karşılaştırıldığında görselleştirmeye daha fazla eğilim göstermektedir (Sinnott, Spence, & Soto-Faraco, 2007). İnsanların biyolojik ve sosyo-kültürel varoluşlarının temelinde görmenin bulunması bu durumun bir nedeni olabilir (Arcavi, 2003). Dolayısıyla insanların görselleştirmeye dair olumlu eğilimlerinin olduğu söylenebilir.

Görselleştirme çok farklı uzmanlık alanlarında araştırılmaktadır. Bununla birlikte bu araştırma alanları kendi ilgi alanları çerçevesinde görselleştirme ile ilgilenmektedir. Tüm bu araştırma alanları bir yana, görselleştirmenin temeli matematiğe dayanır (Zimmerman & Cunningham, 1991). Dayanağı matematik olan görselleştirmeye matematik eğitiminde de yer verilmesi ve görselleştirmeden yararlanılması gerektiği düşünülebilir. Matematikte görselleştirmenin yan anlamları açık değildir, dolayısıyla matematikte görselleştirme açısından belirsizlikler vardır. Matematikte görselleştirme ile psikoloji ve günlük hayatta yer alan görselleştirme arasında farklılıklar vardır. Psikoloji ve günlük hayatta zihinsel imaj oluşturmaya, zihinsel imajı kullanmaya ve şekillendirmeye odaklanılır. Psikolojide bireyin bu şekildeki yeteneği araştırılır. Psikolojide görselleştirme ile ilgili araştırmalar yapılırken kâğıt, kalem ve bilgisayar da kullanılmaz. Matematikte ise kâğıt ve kalem kullanmadan zihinsel imajlar yardımıyla görselleştirmeden faydalanmak çok söz konusu değildir. Başka bir ifadeyle görselleştirmenin matematikte sadece zihinsel temsillere kısıtlanmasının yapay olacağı söylenebilir. Esasında matematikte görselleştirmede öğrencinin kâğıt, kalem veya bilgisayar kullanarak diyagram çizmesi, matematiksel kavram ya da bir problemi temsil edebilmesi, problem çözme ya da matematiği anlama için diyagramları kullanması gibi aktivitelerle ilgilenilir (Zimmerman & Cunningham, 1991). Bu araştırmada MÖA’lardan bazı matematiksel kavramların resimlerini çizmeleri istenmektedir. Dolayısıyla araştırmanın burada bahsedilen matematiksel görselleştirmenin bir kavramı temsil etme amacına hizmet ettiği sonucuna varılabilir.

Matematikte amaç sadece görselleştirmek değildir, görselleştirme yardımıyla matematiği anlamaktır. Yani matematikte görselleştirme ile bir ürün elde etmek yerine, anlamayı sağlayabilmek için görselleştirmenin bir araç olarak kullanılmasının hedeflendiği söylenebilir. Örneğin bir diyagramın görselleştirilmesi o diyagramın zihinde bir imajının oluşturulması anlamına gelir. Benzer şekilde bir problemin görselleştirilmesi diyagram veya görsel bir imaj aracılığıyla problemin anlaşılmasını ifade eder. Matematiksel görselleştirmede hem imajlar oluşturulur hem de bu imajlar yardımıyla etkili bir matematiksel keşif ve anlama sürecinden geçilir (Zimmerman & Cunningham, 1991). Diğer bir deyişle matematiksel görselleştirmede keşfetmenin ve anlamının ön planda olduğu görselleştirmenin ise bu sürece dair bir vasıta olduğu söylenebilir. Benzer şekilde Pylyshyn (2003), resimlerin düşünmeyi geliştirebileceğini ifade etmektedir. Çünkü matematikte mantık kurallarının yardımıyla çıkarımlara ulaşılırken, resim olduğunda daha basit işlemlerle sonuca ulaşılabilir.

Matematikte görselleştirmenin amacı resimleri kullanarak matematiği anlamak da değildir. Matematiksel görselleştirmede sezgi söz konusudur. Matematiksel görselleştirmede olması beklenen sezgi; anlamayı sağlayan belirsiz, gelişigüzel değil tersine düşüncenin özünden kaynaklanan bir sezgidir (Zimmerman & Cunningham, 1991). Buradan matematiksel görselleştirmede oluşturulan temsilin rastgele değil, belli bir düşünce sistemi sonucu oluşturulduğu ifade edilebilir. Benzer şekilde bu araştırma da MÖA'lara matematiksel kavramların resimlerini oluştururken nasıl düşündükleri sorulmuş, kavramın görsel temsili oluşturulma süreçlerine dair düşünceleri hakkında ipuçları elde edilmeye çalışılmıştır. Zimmerman ve Cunningham (1991) tarafından ifade edilen sezgi anlamaya derinlik ve anlam katan, problem çözmede güvenilir bir rehber olan, yaratıcı keşifler oluşturmaya olanak sağlayan sezgidir. Görselleştirme matematikte sadece problem çözmede kullanılmamalıdır. Görsel düşünme ve grafiksel temsillerle matematiksel düşünme ile ilgili diğer yöntem ve temsiller arasında ilişki kurulmalıdır. Dolayısıyla fikirlerin sembolik, sayısal ve grafiksel biçimde nasıl temsil edilebileceği öğrenilmeli ve çok yönlü olarak kullanılabilmelidir. Zaten görselleştirme de görsel bilginin gösterilmesini, dönüştürülmesini, üretilmesini, kanıtlanmasını, görsel bilgiyle iletişime geçilmesini, görsel bilginin üzerinde derinlemesine düşünülmesini belirtir (Hershkowitz, 1989).

Görselleştirme; matematiksel bir problemin, bir prensibin veya bir kavramın geometrik ya da grafik temsili kullanılması ya da oluşturulması sürecidir. Bu temsiller elle çizilmiş ya da bilgisayar tarafından oluşturulmuş olabilir (Zimmerman & Cunningham, 1991). Bir akıl yürütme çeşidi olan görselleştirme ile problemler çözülebilir ya da ispatların özellikleri ispatlanabilir. Bu işlemler zihinsel, fiziksel, görsel veya uzamsal unsurlarla yapılabilir (Gutiérrez, 1996). Yani görselleştirme için görsel bilginin olması şarttır. Görselleştirmede matematiksel bir problemin, kavramın, prensibin veya özelliğin görsel bir temsili oluşturulur veya kullanılır. Burada akıl yürütme söz konusudur. Epistemolojik olarak bakıldığında ise matematiğin temelinde akıl yürütme bulunur. Bu noktada matematik ve fen birbirinden ayrılır. Fende doğrulamak için gözlem kullanılır oysa matematikte mantığa dayanılır (Steen, 1999). Akıl yürütme, gerçeklerden sonuç çıkarmak ya da bilgiyi sıralamak için genel prensipleri kullanarak olayları ya da durumları sınıflandırmak için doğrusal ve mantıklı bir şekilde düşünmedir (Matsumoto, 2009, s. 425). Akıl yürütme olduğu zaman düşünce veya görüş sırası geliştirilir. Matematiksel akıl yürütme ise matematiksel fikirler arasındaki bağlantıları ve ilişkileri görme ve bu anlayışı yeni problemlerin çözümüne uygulama yeteneğidir (English, 2004, s. 171). Bununla birlikte matematiksel bilginin elde edildiği

süreç karmaşıktır ve bu süreçte farklı yaklaşımların kullanılması gerekir (Duval, 2006). Matematikte ilerlemenin sağlanabilmesi için farklı akıl yürütme çeşitlerinin bir araya getirilmesi gerekmektedir (Healy & Hoyles, 1999). Dolayısıyla matematikte ilerlemenin sağlanabilmesi için bir akıl yürütme çeşidi olan görselleştirmenin de kullanılması gerektiği söylenebilir.

Görselleştirme, matematikçiler tarafından çalışmalarını ilerletebilmek için kullanılmaktadır. Görselleştirme yöntemi matematikçiler için yeni değildir. Matematikçiler görselleştirmeyi önemsemiş ve kullanmak için gayret göstermişlerdir (Borwein & Jorgenson, 2001). Matematikçilerin yaptıkları çalışmalarda görselleştirmenin anahtar bir rol üstlendiği uzun süredir kabul görmektedir (Noss, Healy, & Hoyles, 1997). Fakat görselleştirmenin nasıl bir anahtar rol üstlendiği ile ilgili farklı görüşler mevcuttur. Görselleştirmenin matematiğe yardımcı olarak kullanılabileceği, matematikte daha fazla bir rolünün olamayacağı bu görüşlerden biridir. Bu görüş ile ilgili bazı nedenler bulunmaktadır. Bir teoremi oluşturmada ya da bir teoremi ispatlamada görselleştirme esinlenme aracı olarak kullanılır, dolayısıyla görselleştirme keşif yapmanın bir parçasıdır. Görselleştirme matematikçiye çalışmalarında ilham vererek yardımcı olabilmektedir. Bu noktada görselleştirmenin biraz kişiye bağlı kaldığı söylenebilir. Problem çözmede görsel temsiller kullanılmakta ve görsel temsillerin problem çözmei kolaylaştırdığı durumlar olabilmektedir. Fakat her zaman görsel temsillerin problem çözümünü kolaylaştırması mümkün değildir (Stylianou & Silver, 2004). Dolayısıyla görsel temsillerin problem çözümünde belirli durumlar için yol gösterdiği söylenebilir. Ayrıca görselleştirme ve matematik farklı şekillerde algılanmaktadır. Matematik soyuttur, biçimseldir ve semboliktir. Ayrıca matematik kişisel değildir (Morgan, 2001). Diğer taraftan görselleştirme araştırmacı açısından önemli olsa ya da araştırmacıyı motive etse bile bilgiyi sınırlı olarak gösterir, biçimsel değildir ve kişiseldir (Alshwaikh, 2007). Matematik ve görselleştirmenin farklı rollere sahip olması her ikisine verilen önem üzerinde de etkiye sahip olabilir. Matematikte sonuca, sonucun elde edilme sürecinden daha fazla önem verilir. Dolayısıyla sembolik temsillere daha çok değer verilir (Noss vd., 1997). Matematikte görselleştirmenin kullanılan diğer yöntemlerden farklı olmadığı ikinci görüştür. Bu görüşü savunanlara göre görselleştirmenin matematikte kavramsal anlamaya yardımcı olması bakımından diğer yöntemlerden bir farkı yoktur (Elliott, Hudson, & O'Reilly, 2000). Üçüncü bir görüş ise görselleştirmenin matematiğin merkezinde yer alması gerektiğidir. Bu görüşü savunanlara göre matematik daima görselleştirmeden bağımsız değildir. Matematiğin bazı alanlarında (düzlem geometri) bir teoremin ispatını şekil

çizmeden yapmak zordur (Pylyshyn, 2003). Ayrıca görselleştirme ile matematikte yapılabilecek hatalar en aza indirilebilir. Önermelerle yapılan akıl yürütmeye yanlış ispat ya da hatalı çıkarımlar yapılabilmektedir. Fakat çeşitli görsel temsiller kullanılarak geçerli ispatlar yapılabilir (Borba & Villarreal, 2005). Son görüşe göre ise görselleştirme, matematiğin bir parçasıdır. Görselleştirme matematiği açıklamanın yanı sıra matematiği öğrenmede ve matematik yapmada da kullanılabilir (Alcock & Simpson, 2004).

Görselleştirmenin matematikte bir geçmişi vardır. Matematikte görsel temsiller, matematik kadar eskidir. Geometri ve matematiğin geçmişinde resim daha fazla yer almaktadır (Rival, 1987). Hatta matematik tarihinde pek çok gelişme görsel temsiller aracılığıyla elde edilmiştir. İlk görsel temsillerin kullanımı klasik Yunanistan ve Mezopotamya'da matematiğin ilk gelişim gösterdiği yüzyıllara kadar dayanır. Soyut ispatların ağırlıklı olarak diyagramlara dayandığı Euclid's Elements isimli kitap bu duruma örnek olarak verilebilir. Matematikte görsel temsillerin ağırlıklı olarak kullanılması, on sekizinci yüzyıla kadar devam etmiştir. On dokuzuncu yüzyılda yanlış ispatlara neden olması sonucu görsel temsillerden vazgeçilmeye başlanmıştır. Yirminci yüzyılın sonlarında, görsel temsillere dair ilgi yeniden başlamıştır. Bilişsel devrim ve teknolojinin gelişmesiyle görsel temsillerin itibarı yenilenmiş ve görsel temsillere yoğun bir ilgi başlamıştır (Stylianou & Silver, 2004).

Geçmişten itibaren matematiğin içinde yer alan görselleştirmenin matematikteki rolü ile ilgili tartışmalar bir yana, matematikçilerin çalışmalarında görselleştirmeden nasıl faydalanmaları gerektiği ile ilgili farklı görüşler de vardır. Pólya'dan aktaran Lean ve Clements (1981) hem matematiksel düşünme hem de problem çözmede başarılı olabilmek için görsel bakış açısına sahip olmanın önemli olduğunu ifade etmektedir. Pólya problem çözmede başarılı olabilmek için keşfe dayalı öneriler listesi hazırlamış, bu listede şekil çizmeyi öne çıkarmıştır. Bütün matematik çalışmalarının görselleştirmeyi kullanmayı gerektirdiğini savunan bazı matematikçiler vardır. Bu görüşü, Halmos (1985) daha ileri seviyeye taşımış, matematikte bilge olabilmek için doğuştan görselleştirme yeteneğine sahip olunması gerektiğine işaret etmiştir. Borwein ve Jorgenson (2001) görselleştirmenin matematikle uğraşanlara yardımcı olduğunu ifade etmiştir. Onlara göre matematikçi görselleştirme ile konusunu zihninde canlandırabilir, teknolojiye dayanarak çalışması ile ilgili özellikleri görebilir, böylece matematik ile ilgili çalışmalarını ilerletebilir. Bunun yanında matematikçilerin fikirlerini görselleştirdiğini de iddia edenler vardır. Hadamard matematikçilerin çoğunun problem çözerken kelimeleri, cebirsel ya da diğer sembolleri

kullanmadıklarını bunların yerine görselleştirmeyi kullandıklarını, elde ettikleri çözümü ise sembolik dilde ifade ettiklerini iddia etmektedir. Hatta Albert Einstein, Hadamard'a yazdığı bir mektupta bir şey düşündüğünde zihinsel resimler oluşturduğunu, kelimeleri ikinci planda bir yetenek olarak kullandığını belirtmiştir (Lean & Clements, 1981). Noss vd. (1997) matematikçilerin görsel bir temsilden neyin çıkarımını yapacaklarını, görsel temsil aracılığıyla nasıl genellemeye varacaklarını bildiklerini belirtmektedir. Görsel temsiller matematikçilerin keşif yapmalarında, problemleri çözmelerinde, genellemelere ulaşmalarında kısacası çalışmalarını ilerletmelerinde yardımcı olmaktadır. Dolayısıyla görsel temsillerin matematikçilerin kapasitesini artırdığı söylenebilir. Benzer şekilde görselleştirme ile öğrencilerin de matematikte daha başarılı olmalarına yardımcı olunabilir.

Görselleştirmenin matematik ve matematikçiler açısından ifade edilen işlevselliğinin yanında, görselleştirmeden matematikte nasıl yararlanıldığına dair bilgi eksikliği bulunmaktadır. Bu durumun nedenlerinden biri matematikçilerin görsel temsilleri çalışmalarının arka planına bırakmalarındır. Diğer bir neden ise matematikçilerin çalışmalarında görsel temsillerin kullanımını rapor etmemeleridir (Stylianou, 2002). Bazı matematiksel kavramların görselleştirilme süreçlerinin incelendiği bu araştırmada, görselleştirme aşamasında MÖA'ların nasıl düşündükleri ortaya koyulmaya ve bu alandaki ihtiyaca katkıda bulunulmaya çalışılmıştır.

Matematikçilerin görselleştirmeye önem vermeleri gibi matematik eğitimcileri tarafından da görselleştirmeye önem verilmektedir. Dolayısıyla, görselleştirmeden matematik eğitiminde de faydalanılmaktadır. Her iki alanda da görselleştirmeye olan ilgi artarak devam etmektedir. Görselleştirmenin matematiksel bir etkinliğin esas bileşeni olarak görülmesi (Hershkowitz, Arcavi, & Bruckheimer, 2001); akıl yürütme, problem çözme ve ispatta kullanılabilmesi (Arcavi, 2003); matematiksel yapılarla ilgili zihne farklı bir bakış açısı kazandırması (Borwein & Jorgenson, 2001); matematiksel bir nesnedeki tüm özelliklerin ve ilişkilerin kısa yoldan hızlı bir şekilde anlaşılmasına izin vermesi (Farmaki & Paschos, 2007) görselleştirmenin sağladığı faydalardan birkaç tanesidir. Sadece görselleştirme değil, görselleştirme sonucu oluşturulan görsel temsillerin de matematik eğitiminde sunduğu faydalar vardır. Dış görsel temsiller hafızaya ve bilişsel kapasiteyi artırmaya yardımcıdır (Corter & Zahner, 2007; Tversky, 2001). Dış görsel temsillerden dikkat çekmede, bilginin kaydedilmesinde, iletişimi sağlamada, model oluşturmada, çıkarım ve keşif yapmada

yararlanılabilir (Tversky, 2001). Araştırmada MÖA'lar tarafından oluşturulan görsel temsiller, diğer bir ifadeyle kavram resimleri, benzer amaçlara hizmet edebilir.

Borba ve Villarreal (2005) görselleştirmeyi matematiksel bilgiyi elde etmenin yollarından biri olarak değerlendirmektedir. Özellikle teknoloji ile görselleştirmenin zamanla matematiğin içeriğine daha fazla hâkim olacağını, okullarda öğretilen matematiğin bile içeriğinin değişebileceğini öngörmektedir. Onlara göre matematiksel kavramların anlaşılabilmesi için çoklu temsillere ihtiyaç vardır. Dolayısıyla görsel temsiller anlama yönünden başka bir bakış açısı sunabilir. Görselleştirme, matematik öğrenimini ve öğretimindeki güçlüklerin ortadan kaldırılmasında yardımcıdır (Tappenden, 2005). Diğer taraftan, matematikçiler çok karmaşık bile olsa sembolik temsilleri anlayabilmektedir. Matematikçiler için görselleştirme ikinci planda kalabilir ama matematik eğitiminde böyle düşünülmemelidir (Borba & Villarreal, 2005). Buradan matematikçiler görselleştirmeden vazgeçseler bile matematik eğitiminde görselleştirmenin yer alması gerektiği sonucuna varılabilir. Matematik eğitimcileri eğitimin farklı düzeylerinde, başta ortaokul, lise ve üniversitede, görsel temsillerin matematik öğretiminin doğal bir unsuru olmasını ve matematik öğretiminde daha fazla kullanılmasını önermektedir (Gutiérrez, 1996).

Tüm bunların gerçekleşebilmesi için, öncelikle matematik öğretmenlerinin görselleştirmeyi etkili bir şekilde kullanabilmeleri gerekmektedir. Matematik öğretmenlerinin rehberliği olmadan öğrencilerin matematik eğitiminde görselleştirmeyi verimli olarak kullanabilmeleri çok mümkün olmayabilir. Bu nedenle başlangıç olarak MÖA'ların lisansta görselleştirmeye dair eğitim almalarının gerektiği söylenebilir. MÖA'ların, herhangi bir eğitim almadan, matematiğin temeli olan kavramları görselleştirme süreçlerinin incelenmesi onlara verilmesi planlanan bir eğitim için önemli ipuçları verebilir. Bu çalışmanın esas amacı bu sürecin araştırılmasıdır.

Öğretmenlerde ve öğrencilerde düşünme süreçleri, akıl yürütme ve görselleştirme ile ilgili yanlış anlaşılmalarda bulunmaktadır (Duval, 2006). Çoğu öğretmenin görselleştirme sürecindeki zorluklar ile ilgili bir bilgisi yoktur. Görselleştirme sürecindeki zorluklarla baş edebilmek için öncelikle öğretmen farkındalığının artması gerekmektedir (Presmeg, 1986).

Özellikle belirli matematiksel kavramların öğrenilebilmesi için öğretmenlerin ve öğrencilerin görsel temsiller üzerinde düşünmeleri, görselleştirme ile uğraşmaları gerekir (Kotsopoulos & Cordy, 2009). Görselleştirme, matematiğin soyut kavramlarının somut hale getirildiği bir tekniktir. Görselleştirme ile öğrenciler somut temsilleri anlayabilecek ve soyut

kavramlarda daha derin anlamalara sahip olacaktır. Görselleştirme, aynı zamanda, öğrenciler matematiği uygulayabilsinler ve somut bir durum için önemli sonuçlar elde edebilsinler diye somutun soyut hale getirildiği bir teknik gibi görünmektedir. Görselleştirme, öğrencilerin somutu soyut ve soyutu somut hale getirmelerini sağlamaktadır. Böylece görselleştirme hem eğitsel olarak arzu edilen hem de ulaşılabilir hedefler oluşturulmasına imkân vermektedir (Macnab vd., 2012). Matematiksel kavramların görselleştirilmesinin kavramların daha iyi öğrenilmesine ve öğretilmesine yardımcı olacağı sonucuna varılabilir. Matematik öğretiminde görselleştirmenin kavramlarla ilgili bahsedilen getirilerinden daha iyi faydalanabilmek için matematik öğretmenlerinin kavramları görselleştirmeye yönlendirilmesinin gerektiği düşünülebilir. MÖA’ların matematiksel kavramları görselleştirme süreçlerinin incelenmesi, öğretmenlere görselleştirme becerilerinin kazandırılmasına dair atılacak ilk ve en gerekli adımlardan biri olarak kabul edilebilir. Sürecin incelenmesi sonucu elde edilen veriler, öğretmenlere görselleştirme becerisinin nasıl kazandırılacağına dair fikirler sunabilir. Araştırmaya duyulan ihtiyaç ve araştırmanın önemi de bu noktada ortaya çıkmaktadır.

2.3. Matematiksel Kavramların Resmi

Matematiksel kavramın resmi tanımlanmadan önce kavram, matematiksel kavram ve resim terimlerinin anlamları üzerinde durulmuştur. Terimlerin her biri ayrı başlıklar altında açıklanmıştır. Bu açıklamalar göz önünde bulundurularak matematiksel kavramın resminin tanımı yapılmıştır.

2.3.1. Kavram

Kavram terimi, dil bakımından “yakalamak” ve “içermek” anlamlarını ifade eden kavramak kökünden türetilmiştir. Kavram, “kavranılmış olanı” belirtir (Hançerlioğlu, 1997, s. 219). *Açıklamalı Dilbilim Terimleri Sözlüğü*’nde kavram “ortak özellikler taşıyan bir dizi olgu, varlık ya da nesneye ilişkin genel nitelikli bir anlam içeren, değişik deneyimlere uygun düşen, dilsel kökenli her türlü tasarım, düşünüş, imge; bir nesne, varlık ya da oluşun anlıksal imgesi; gösterilen” olarak ifade edilmektedir (Vardar, 2002, s. 132). Kavram kelime anlamı olarak TDK tarafından “nesnelerin veya olayların ortak özelliklerini kapsayan ve ortak bir ad altında toplayan genel tasarım” olarak tanımlanmaktadır. Bu üç tanımda da kavramın

tasarım olduğundan bahsedilmektedir. Tasarım ise TDK'da “daha önce algılanmış olan bir nesne veya olayın bilinçte sonradan ortaya çıkan kopyası” olarak geçmektedir. Nesnelerin veya olayların ortak özelliklerinin ortak bir isim altında bilinçteki kopyasına kavram denilebileceği sonucuna varılabilir.

Historical Dictionary of Epistemology sözlüğünde kavram “bir fikrin (veya bir ögesinin) veya bir prensibin belirli bir sınıfa ait olduğunu belirleme içeriği”dir. Kişi bunu doğru bir şekilde uygulayabilirse kavrama hâkim olur. Bununla birlikte, kişi kavramla ilgili diğer kavramlara hâkim olmadan o kavrama hâkim olamaz (Baergen, 2006, s. 44). *Eğitim Sözlüğü*'nde kavram “nesneler, koşullar, olaylar ya da süreçlerin genel bazı özellikleri üzerine gruplanabilecek şekilde oluşturulan sınıflama”dır (Demirel, 2012, s. 79). Bu iki tanıma göre kavram sınıflamayla ilgilidir. *Dictionary of Education: A Practical Approach* eğitim sözlüğünde kavram “belirli deneyimlerden elde edilmiş bir soyutlamadır” (Lohithakshan, 2002, s. 86) ve soyutlama ise “nesnelerde, durumlarda, olgularda vb. ortak unsurları ayırmaya ve tanımlamaya dair zihinsel bir süreçtir” (Lohithakshan, 2002, s. 4). *Dictionary of Education: A Practical Approach* sözlüğünde kavramın oluşturulması şu şekilde açıklanmaktadır:

Farklı ağaç türlerini görme, dokunma vb. deneyimler “ağaç” kavramını oluşturmaya gider. “Ağaç” kavramı soyuttur ve belirli bir şekli, boyutu vb. yoktur. Tüm ağaçlarda mevcut olan ortak özellikler, özel nitelikleri göz ardı edilerek soyutlanır. Aynı şekilde, “insan” kavramı ırk, milliyet veya mevcudiyet dönemine bakılmaksızın tüm insanları içerir. Soyutlama, bir dizi algısal deneyimin ardından zihinsel olarak yapılır. Genel olarak, bir sınıf adı bir kavramdır (masa, çiçek, yıldız gibi). Kavram soyuttur ve sınıfın tüm üyelerini barındırabilir (örneğin, masa için yuvarlak masa, metal masa, yemek masası vb. her şey olabilir) çünkü kavram sadece sınıfın tüm üyelerinde mevcut olan ortak nitelikleri içerir. Sözcükler, kavramları sembolik formda göstermek için kullanılır (Lohithakshan, 2002, s. 86).

Bu açıklamaya göre kavramda sınıflandırma söz konusudur ve kavram bir sınıf adıdır. Bu sınıflandırma soyutlama yardımıyla yapılmaktadır ve zihinsel süreç vardır. Başka bir eğitim sözlüğü *International Dictionary of Adult And Continuing Education* kavramı iki şekilde açıklamaktadır. Birincisi “soyut bir fikir veya düşünce”, ikincisi “benzer özelliklere sahip olguların bir ailesini oluşturmak için kullanılan bir terim” (Jarvis & Wilson, 1999, s. 37). Kavram benzer şekilde *Büyük Türkçe Sözlük*'te “bir şey hakkında sahip olunan umumi fikir, genel düşünce” (Doğan, 2001, s. 732) olarak tanımlanmaktadır. Kavramın benzer

özelliklerin bir araya getirilmesiyle ortaya çıkan bir düşünce olduğu söylenebilir. Ayas (2016), *Kuramdan Uygulamaya Fen ve Teknoloji Öğretimi* kitabında kavramı “insan zihninde anamlanan, farklı obje ve olguların değişebilen ortak özelliklerini temsil eden bir bilgi formu/yapısı” olarak ifade etmektedir (s. 193). Bu tanıma göre kavram, farklı nesne ve olgulara dair bir bilgi biçimidir. Buradaki bilgi biçimi değişebilen ortak özellikleri ifade etmektedir. Tanımlar incelendiğinde kavramın tasarım, sınıflama, düşünce veya bilgi yapısı olduğundan bahsedilmektedir. Bununla birlikte tanımlar kavramın kapsadığı şeylere dair ortak veya benzer özellikleri barındırması gerektiğine vurgu yapmaktadır. Tanımlar kavramı hangi kelimeyle açıklarsa açıklasın, kavramın soyutlama sonucu ortaya çıktığına işaret etmektedir. Ayrıca kavramlar, duyularla değil, ancak düşünceyle kavranabilir (Hançerlioğlu, 1997, s. 219).

2.3.2. Matematiksel Kavram

Matematiksel kavramı tanımlamak, herhangi bir tanımın tam olarak tanımlanmayan diğer terimlerini (anlayış, düşünme, anlam, bilmek vb.) içerdiği için sorunludur. Dolayısıyla, kesin bir tanım üretmeye çalışmak yerine, matematiksel kavramı gelişen teorik yapı olarak değerlendirmek daha doğru olabilir. Matematiksel kavramlar, matematiksel (zihinsel) nesneler ve bu nesneler arasındaki ilişkileri kapsar (Simon, 2017). Matematiksel nesneler mantıksal gerekliliklerden ve matematiksel nesnelerin diğer matematiksel nesnelerle olan ilişkilerinin sonuçlarından oluşan bir sisteme gömülüdürler. Matematiksel nesneler keşfedilmesi, ispatlaması veya çürütmesi zor olan özelliklere sahip olabilirler (Sierpinski, 1994). Matematiksel, matematik bilimi ile ilgili olan demektir (TDK, t.y.). Matematiksel kavram ise, matematik bilimiyle ilgili kavram olarak düşünülebilir. Matematiksel bir kavram, “bir araştırmacının belirli bir matematiksel ilişkide yer alan mantıksal gerekliliğin istenilen veya çıkarılan öğrenci bilgisini temiz şekilde ifade etmesi” şeklinde tanımlanabilir (Simon, 2017, s. 124). Matematiksel kavramlar da soyutlama sonucu oluşturulmaktadır. Fakat buradaki soyutlama yansıtıcı soyutlamadır. Yansıtıcı soyutlama matematiksel kavramların kişinin gözlemlerinin soyutlaması değil, kendi aktivitesinin soyutlamasıdır. Kişinin gözlemlerine dayalı soyutlamada deneysel bir öğrenme süreci vardır. Kişinin kendi aktivitesine dayalı olduğunda ilkel saymadan sayı olarak çokluk kavramı veya bir takım verinin dengelenmesinden aritmetik ortalama kavramı soyutlanır. Yansıtıcı soyutlama süreci öğrenilmiş bir beklenti ile sonuçlanır, böylece öğrencinin sonucunu bilmek için aktiviteyi

artık harekete geçirmesine gerek kalmaz. Yani matematiksel bir kavram, yansıtıcı soyutlamanın sonucudur, öğrencinin aktivitesine dayanan öğrenilmiş bir beklentidir (Piaget’den aktaran Simon, 2017).

2.3.3. Resim

TDK tarafından, *resim* “varlıkların, doğadaki görünüşlerinin kalem, fırça gibi araçlarla kâğıt, bez vb. üzerinde yapılan biçimleri” olarak tanımlanmaktadır. Tanım incelendiğinde, resmin sadece varlıkların doğadaki görünüşleriyle sınırlı olabileceği düşünebilir. Fakat sanat açısından resmin tanımı ele alındığında durumun daha farklı olduğu, resmin aslında çok daha geniş bir anlama sahip olabileceği ortaya çıkmaktadır. Şöyle ki, *Sanat Kavram ve Terimleri Sözlüğü*’nde resim, “her tür iki boyutlu beti” ve “bir yüzey üzerinde oluşturulmuş her tür iki boyutlu kompozisyon” olarak ifade edilmektedir (Sözen & Tanyeli, 2017, s. 201). *Kompozisyon* ise aynı sözlükte “yapıtı oluşturan öğelerin belirli düzen bağıntıları içinde bir araya getirilmesi ve bu çalışma sonucunda ortaya çıkan yapıtın kendisi” olarak belirtilmektedir (Sözen & Tanyeli, 2017, s. 135). Resim ve kompozisyon tanımları göz önüne alındığında resmin iki boyutlu olması gerektiği, resmin konusu ile ilgili herhangi bir sınırlamanın olmadığı, bununla birlikte resimde yer alan öğelerin belirli bir düzen dâhilinde bir arada olması gerektiği sonuçlarına varılabilir. *Resim Sanatı Sözlüğü*’nde ise resim gerçekliğin nesnelerini ve olaylarını, sağlam bir yüzey üzerinde renkler yardımıyla tasarlanması olarak tanımlanmaktadır (Eroğlu, 2006, s. 298). Bu tanımdan hareketle resimde renklerin etken olduğu ve resmin tasarım sonucu ortaya çıktığı söylenebilir.

Resmin Türkçe anlamının tartışılmasının yanında, İngilizce’de hangi kelimelere karşılık geldiği ve bu kelimelerin hangi anlamlarda kullanıldığı önemlidir. Çünkü resmin İngilizce karşılığının hangi kelime olarak alınacağı ve resim kavramının daha iyi anlaşılması bir noktada bu tartışmaya da bağlıdır. *Sanat Kavram ve Terimleri Sözlüğü*’nde resmin İngilizce karşılığı “painting, drawing” olarak geçmektedir (Sözen & Tanyeli, 2017, s. 201). Yani resmin İngilizce olarak hem “painting” hem de “drawing” anlamlarında kullanılabileceğinden bahsedilmektedir. İngilizce’de *painting* “boyalı bir resim” (Longman, 2008, s. 721) ya da “boya ile yapılmış bir sanat eseri” (Webster, 2009, s. 487) anlamındadır. *Drawing*, “dolma veya kurşun kalemle (pen or pencil) yapılan resim” (Longman, 2008, s. 306) ya da “bir yüzey üzerinde çizgi çizerek oluşturulan resim” (Webster, 2009, s. 507) anlamlarında kullanılmaktadır. Görüldüğü gibi, “painting” ve “drawing” her ikisi de birer

resimdir. Fakat “drawing” söz konusu olduğunda resim yalnız çizgilerle oluşturulurken, “painting” söz konusu olduğunda resimde renkler de yer almaktadır. İngilizce sözlüklerde *picture* kelimesi daha geniş kapsamlı olup “painting” ve “drawing” anlamlarını içermektedir (Longman, 2008, s. 753; Webster, 2009, s. 213). Lopes (1996) *Understanding Pictures* adlı kitabında “picture” kavramını “uygun donanımlı bir algılayıcı tarafından bilginin kaynağının tanımlanabilmesini sağlayan söz konusu bilgiyi somutlaştıran bir temsil” olarak tanımlamaktadır (s. 151). O halde resim bir bilgi üzerine kuruludur. Aslında uygun bir algılayıcı tarafından resmin oluşturulmasıyla bilgi varlığı duyularla algılanabilen bir temsil haline dönüşür.

2.3.4. Matematiksel Kavramın Resmi

Bir önceki başlıkta Türkçe olarak “resim”, İngilizce olarak “picture” kelimelerinin anlamları tartışılmıştır. Bununla birlikte, resim kelimesinin araştırmada kullanılmaya uygun olup olmadığı en temel soru olarak akla gelebilir. “Resim” ve “picture” kelimeleri ile ilgili bahsedilen anlamlar göz önünde bulundurularak bu kelimelerin araştırmada neden kullanıldığı açıklanmaya çalışılmıştır. Araştırmada, bazı matematiksel kavramlar MÖA’lar tarafından görsel olarak temsil edilmeye çalışılmaktadır. Bu temsiller kâğıt üzerine yapılmaktadır, yani iki boyutludur. Kavramın temsili, kavramın tanımı göz önünde bulundurularak yapılmaktadır. MÖA’lar, tanımda yer alan öğeleri bir araya getirmeye çalışmaktadır. Bu öğeler MÖA’ların bakış açılarına göre belli bir düzen içindedir, yani kompozisyon söz konusudur. Kavramlar MÖA’lar tarafından çizgiler ya da çizgilerin yanında renkler de kullanılarak temsil edilmektedir, yani kavramların temsili “drawing” ve “painting” bulunmaktadır. Kavramın temsili, kavramın tanımından çıkarılan bilgi üzerine kuruludur. MÖA’lar uygun donanımlı bir algılayıcı olarak bu bilgiyi somutlaştıran temsiller oluşturmaktadır. Dolayısıyla araştırmada MÖA’lar tarafından oluşturulan kavramlara dair temsiller *matematiksel kavramların resmi* olarak adlandırılmıştır.

Görsel temsiller, temsil edilen somut veya soyut bir dünyanın nedensel, işlevsel, yapısal ve semantik özelliklerini ya da ilişkilerini görsel olarak kodlayan çizgisel sembollerdir. Görsel matematiksel temsiller, matematiksel yapılar veya matematiksel kavramların özelliklerini ve ilişkilerini kodlayan görsellerdir (Sedig & Sumner, 2006). Grafikler (topolojik, fonksiyonel ve istatistiksel), şekil örüntüleri, geometrik yapılar, diyagramlar, kesir, işlem ve sayma gibi soyut kavramların temsilleri matematiğin farklı alanlarında kullanılan bazı görsel

matematiksel temsillere örnek olarak verilebilir (Barwise & Etchemendy, 1998). Kavramdaki ilişkilerin ya da özelliklerin çizgilerle veya renklerle görselleştirildiği temsile *matematiksel kavramın resmi* denir. Bu durumda matematiksel kavramın resmi de görsel matematiksel bir temsildir.

Matematiksel kavramların görsel temsiliinde cetvel ve pergelin kullanılabilmesinin bu temsillere resim denilmesini anlamsız kılacağı düşünülebilir. Fakat resim çizilirken cetvel ve pergel kullanılabilir. Resimde kurşun kalemle dairesel çizim yapabilmek için pergelden, boya ile dairesel çizim yapabilmek için trilinden faydalanılmaktadır. Bunun yanında ip yardımıyla pergel kullanmış gibi dairesel çizimler ya da bantlar yardımıyla boyaların taşmaması sağlanarak cetvel kullanmış gibi düzgün boyamalar yapılabilmektedir. İçerisinde cetvel ya da pergelin kullanıldığı resimler olduğu gibi sadece cetvel veya pergel yardımıyla çizilen resimler de bulunmaktadır. Sadece cetvel ve pergelin kullanıldığı resimlerde renk ve kompozisyon önemlidir. Aşağıda bahsedilen resimlere dair örnekler verilmiştir.



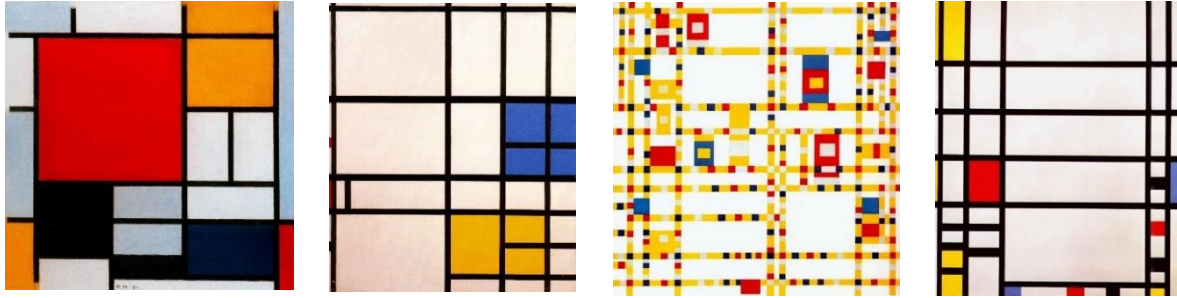
Şekil 2.1 Cetvel ve pergelin kullanıldığı bir resim

Şekil 2.1’de yer alan resimde tünelin ve tünelde yer alan taşların düzgün dizilimini yansıtabilmek için pergel ve cetvel kullanılmıştır.



Şekil 2.2 Cetvel ve pergelin kullanıldığı iki farklı resim

Şekil 2.2’de geometrik şekillerden oluşan iki farklı resim bulunmaktadır. Bu geometrik şekillerin çiziminde pergel ve cetvel kullanılmıştır. Şekil 2.1 ve Şekil 2.2’deki resimler bir devlet üniversitesinin güzel sanatlar fakültesi resim bölümü öğrencileri tarafından yapılmıştır. Bununla birlikte benzer çalışmaları olan ressam ve akademisyenler de bulunmaktadır. Şekil 2.3’teki dört resim ressam Piet Mondrian tarafından yapılmıştır.



Şekil 2.3 Farklı temalarda dört resim. www.piet-mondrian.org sayfasından erişilmiştir.

Şekil 2.4’teki dört resim akademisyen Prof. Hayri Esmer tarafından yapılmıştır.



Şekil 2.4 Yan yana olmak temalı dört resim. <http://hayriesmer.com/resimler/yanyana-olmak?ln=tr> sayfasından erişilmiştir.

BÖLÜM III

YÖNTEM

3.1. Araştırmanın Yöntemi

MÖA'ların bazı matematiksel kavramları görselleştirme süreçlerinin incelenmesinin amaçlandığı bu araştırmada; MÖA'ların matematiksel kavramların resimlerini oluşturma süreçlerinin nasıl geliştiği ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Dolayısıyla araştırmada matematiksel kavramların görselleştirilme sürecinin ve bu süreç sonucunda ortaya çıkan matematiksel kavramların resimlerinin anlamlarının açığa çıkarılması amaçlandığından nitel araştırma yöntemi kullanılmıştır (Merriam & Tisdell, 2015). Araştırmada nitel araştırma yöntemi kullanılmasının diğer bir nedeni; matematiksel kavramların görselleştirilme süreçlerinin doğal ortamında incelenmek istenmesi ve MÖA'ların kavramları görselleştirme sürecinde neler yaşadıklarını, kavram resimlerinin oluşturulmasında nelerin etken olduğunu onların bakış açılarına göre anlamlandırılmaya çalışılmasıdır (Denzin & Lincoln, 2005; Merriam & Tisdell, 2015). Başka bir neden ise literatürde araştırma olgusu ile ilgili çok az bilgi bulunmasıdır. Araştırma probleminin değişkenleri bilinmiyorsa ve bu araştırma probleminin keşfedilmesi gerekiyorsa en uygun yöntem nitel araştırmadır. Literatürde araştırmanın olgusu ile ilgili çok az bilgi bulunabilir. Fakat nitel araştırma sayesinde katılımcılardan daha fazla bilgi edinme imkânı ortaya çıkar (Creswell, 2012).

3.2. Katılımcılar

Araştırmanın pilot uygulaması 2017-2018 eğitim öğretim yılı güz döneminde bir devlet üniversitesinde gerçekleştirilmiştir. Pilot uygulamanın katılımcıları matematik eğitimi anabilim dalında öğrenim gören ve gönüllülük ilkesine göre belirlenen iki 4. yıl MÖA'dır. MÖA'ların resimlerini araştırmacının gözetiminde yapması, Kamu Personeli Seçme

Sınavı'na (KPSS) hazırlanmaları ve gönüllü katılım hususları nedeniyle iki MÖA ile çalışılmıştır. MÖA'ların matematiksel kavramları görselleştirme süreçleri ile ilgili hazırbulunuşluklarını tespit etmek, kavramların formal tanımlarından yola çıkarak kavramların resimlerini nasıl çizdiklerini, kavramların görselleştirilmesi ile ilgili düşünce ve tepkilerini açığa çıkarmak, araştırmanın amacına hizmet etmeyecek ön durumları belirlemek, araştırmaya etki edecek olumsuzlukları ortaya çıkarmak (Fraenkel, Wallen, & Hyun, 2012) ve araştırmanın asıl uygulamasında ne kadar süreye ihtiyaç duyulabileceğini belirlemek (Merten, 2010) için pilot çalışma yapılmıştır.

Pilot çalışma sürecinde 4. yıl MÖA'ların derslerinin yoğunluğu, öğretmenlik uygulaması ve özellikle de KPSS'ye hazırlanmaları nedenleriyle araştırma sürecini (uygun görüşme zamanı ayarlama, görüşmeyi yapma, MÖA'ların araştırmaya odaklanmaları) yürütmede zorlandıkları görülmüştür. Buna bağlı olarak 4. yıl MÖA'lar ile araştırma sürdürülememiştir. Sayılarının çok az olması (11 öğrenci) ve araştırmaya katılmada isteksiz olmaları gerekçeleriyle 3. yıl MÖA'larla da çalışılamamıştır. Araştırmanın asıl uygulaması, 2017-2018 eğitim öğretim yılı bahar döneminde aynı devlet üniversitesinin matematik eğitimi anabilim dalı 2. yıl seçmeli dersini alan 34 MÖA ile yapılmıştır. MÖA'ların 26'sı kız, 8'i erkektir. Erkek MÖA'lardan biri yabancı uyrukludur. Seçmeli dersi alanlardan 3'ü 3.yıl, 31'i 2. yıl MÖA'dır. MÖA'ların yaklaşık olarak %60'ı Anadolu Öğretmen Lisesi mezunudur. Araştırmaya katılan MÖA'lar Analiz I, II ve III, Matematiğin Temelleri I ve II, Matematik Tarihi, Soyut Matematik, Analitik Geometri, Lineer Cebir I lisans derslerini almışlardır.

3.3. Veri Toplama Araçları

Araştırmada MÖA'ların kavramları görselleştirme süreçleri araştırmacı tarafından sürekli gözlemlenmiştir. Araştırmacı gözlemlerini desteklemek amacıyla kavramların görselleştirme süreçleri ile ilgili MÖA'lar ile görüşmeler gerçekleştirmiş ve çizdikleri kavram resimlerinin doküman analizini yapmıştır. Böylece araştırma olgusu çeşitli belge ve kayıtlarla desteklenerek ayrıntılı bir şekilde incelenmeye çalışılmıştır (Fraenkel vd., 2012).

3.3.1. Görüşme

Araştırmanın pilot uygulamasında iki MÖA ile görüşme yapılmıştır. Bu görüşmeler esnasında MÖA'lara resimlerini nasıl oluşturduklarına dair sorular sorulmuştur. Pilot uygulamada, görüşmeler MÖA'lardan izin alınarak ses kayıt cihazıyla kaydedilmiştir. Asıl uygulamada ise çizdikleri kavram resimlerini oluşturma süreçleri ve kavram resimleri ile ilgili MÖA'larla görüşmeler yapılmıştır. Yapılan görüşmeler MÖA'ların izniyle video kaydına alınmıştır.

3.3.2. Doküman Analizi

Dokümanlar, kaydedilmiş metin ve görüntülerden oluşur. Dokümanların kaydedilmesinde araştırmacının müdahalesi yoktur (Bowen, 2009). Bu araştırmadaki dokümanlar, MÖA'ların matematiksel kavramlarla ilgili çizdikleri tüm resimlerdir. MÖA'ların kavramları görselleştirme süreçlerini yansıtabilmek amacıyla onlardan resim çizerken bilgi kullanmamaları ve çizdikleri tüm resimleri teslim etmeleri istenmiştir. Bu süreçte araştırmacının müdahalesi olmamıştır. MÖA'ların çizdikleri resimler oluşturulma sırasına göre analiz edilmiştir. Böylece MÖA'ların kavramları görselleştirme süreçleri anlaşılmaya ve kavramlara ait resimlerin nasıl olduğuna dair bilgiler açığa çıkarılmaya çalışılmıştır.

3.4. Pilot Uygulama

Pilot çalışma, iki 4. yıl MÖA ile iki oturumda gerçekleştirilmiştir. Birinci oturumda MÖA'lara görselleştirmenin matematik ve matematik eğitimindeki yeri ve öneminden kısaca bahsedilmiştir. MÖA'lara fonksiyonlar alt öğrenme alanı ile ilgili tanımlar (fonksiyon, birebir fonksiyon, örten fonksiyon, bileşke fonksiyon, birim fonksiyon, fonksiyonun tersi) verilerek onlardan kavramları kendi oluşturdukları resimler aracılığıyla görselleştirmeleri istenmiştir. Katılımcılar resimlerini araştırmacının gözleminde yapmışlardır. MÖA'lardan kavramları resmederken sesli düşünceleri istenmiştir. MÖA'lar, daha önce benzer örnekler görmedikleri ve kavramları kendi resimleriyle görselleştirmeyi şimdiye kadar hiç düşünmedikleri için akıllarına ilk başta görselleştirmeye dair herhangi bir fikrin gelmediğini belirtmişlerdir. MÖA'ların fonksiyonlar alt öğrenme alanı ile ilgili kavramları ilk önce Venn şeması çizerek temsil etmeye çalıştıkları gözlemlenmiştir. Bu çizimlerinin nedeni sorulduğunda, matematik derslerinde genellikle bu şemayı gördüklerini ve dolayısıyla farklı düşünemediklerini ifade etmişlerdir. MÖA'lardan bilinen görsel

temsillerden farklı resimler istendiği için resim arayışlarına girdikleri ve çeşitli denemelerde bulundukları gözlemlenmiştir. MÖA'lardan biri; birebir fonksiyonun Venn şeması çizimini hatırladığını, o çizimden birebir fonksiyon ile ilgili kendi tanımını çıkarabildiğini, sembolik dildeki tanımını defalarca görmesine rağmen hala tanımın aklında kalmadığını belirtmiştir. Kavramların akılda kalıcılığı açısından kavramların resmini çizmenin faydalı olacağını düşündüğünü ifade etmiştir. MÖA'lara incelemeleri için matematikçiler tarafından yapılmış görsel ispat örnekleri verilmiş, bir sonraki oturuma kadar kendi kavram resimlerini çizmeleri istenmiştir. İki gün sonra tekrar görüşülmüştür.

İkinci oturumda katılımcılar çizdikleri resimleri araştırmacıya göstermiş ve çizim sürecinde nasıl düşündüklerini açıklamışlardır. MÖA'lar ile resimlerinin fonksiyonlar alt öğrenme alanı ile ilgili kavramların tanımlarını tam olarak yansıtıp yansıtmadığı ve resimlerindeki eksiklikler üzerinde tartışılmıştır. MÖA'lar, bazı noktalarda eksikliklerinin olduğunu, kavramın resmini çizerken bunları fark ettiklerini fakat uygun resmi çizemediklerini belirtmişlerdir. MÖA'lar bazı noktalardaki eksikliklerini ise araştırmacı ile tartışırken fark etmişlerdir. MÖA'lardan biri, kavramların formal tanımını hiç bu kadar irdelemediğini, kavramı resmetmeye çalışırken tanımın zihninde daha iyi oturduğunu ifade etmiştir. MÖA'lara incelemeleri için verilen görsel ispatların, kavramların resimlerini oluşturma süreçlerinde herhangi bir etkisinin olup olmadığı sorulmuştur. MÖA'lar, görsel ispatların matematikte görsel temsillere yönelik fikir verdiğini fakat görsel ispat örneklerinin kavramların resimlerini oluşturmalarında doğrudan yardımcı olmadığını çünkü doğrudan yardımcı olacak bir görsel ispat örneği bulunmadığını belirtmişlerdir.

Pilot görüşme sırasında MÖA'ların benzer örnekler bulmaya çalıştıkları ve bu örnekler yardımıyla kavramların resimlerini oluşturmaya eğilimli oldukları görülmüştür. Fakat resmi çizilmesi istenen kavramlarla ilgili farklı çizimlerin olduğu örnekler bulamadıklarından yakınmışlardır.

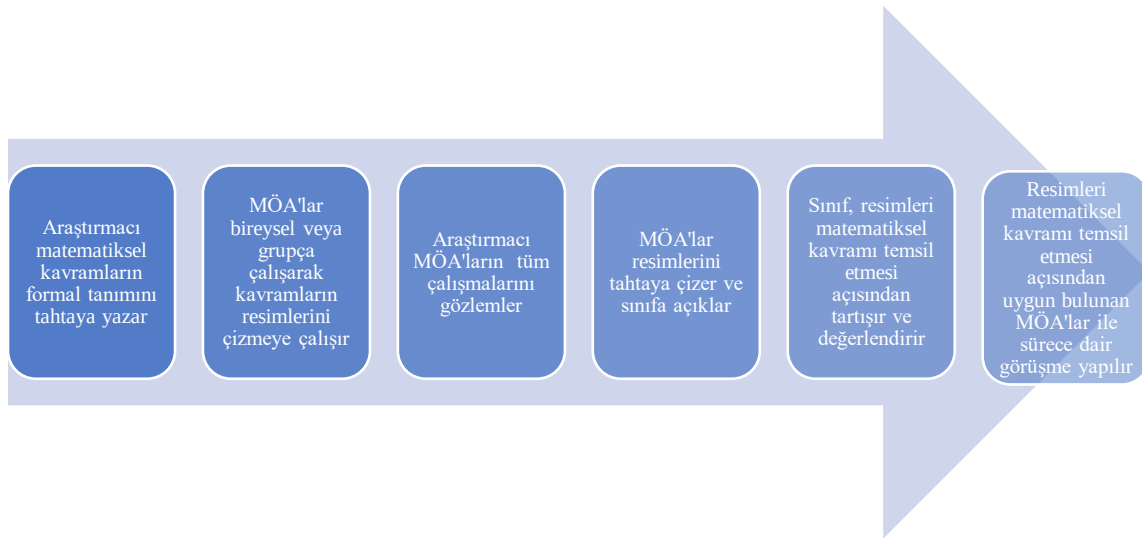
Pilot çalışmada kavramların görselleştirilme süreçlerinin çok uzun sürdüğü, MÖA'ların sabırla yeterli zaman ayırarak ve dikkatlerini toplayarak resim çizmeye odaklanmaları gerektiği görülmüştür. Bu nedenle uygulama dersi MÖA'ların diğer dersleriyle çakışmayacak şekilde esnek bir saate koyulmuştur. MÖA'lara ders süresinin esnek olduğu bilgisi verilmiş ve varsa katıldıkları etkinlikleri buna göre ayarlamaları istenmiştir.

3.5. Veri Toplama Süreci

Araştırmanın asıl uygulaması, 2017-2018 eğitim öğretim yılı bahar döneminde bir devlet üniversitesinin matematik eğitimi anabilim dalının 2. yılında bulunan ve haftada 3 saat olan seçmeli bir dersi alan 34 MÖA ile 12 hafta yapılmıştır. İlk hafta yapılan derste kavram resimlerinin oluşturulma sürecinin uzun zaman alması ve sınıf mevcudunun kalabalık olması nedenleriyle dersin akışı ve araştırma süreci olumsuz etkilenmiştir. MÖA'ların da istekleri doğrultusunda ders, 20 kişi ve 14 kişiden oluşan iki şubeye ayrılmıştır. Kalan haftalarda ders iki farklı şubede ve ayrı günlerde yapılmıştır.

MÖA'lardan daha önceden aşına oldukları, karşılaştıkları görsel temsillerin dışında kavramları resim çizerek görselleştirmeleri istenmiştir. MÖA'lara kavramların resimlerini nasıl oluşturacaklarına dair herhangi bir eğitim verilmemiştir. Çünkü araştırmada MÖA'ların kendi bakış açılarına göre çizdikleri kavram resimlerine odaklanılmıştır. Çizdikleri kavram resimleri sınıf ve araştırmacı tarafından uygun bulunan MÖA'lar ile görüşülmüştür. Bu nedenle başlangıçtan itibaren belirli MÖA'lar seçilip resimlerinin gelişim süreci incelenmemiştir. Dersin ilk 9 haftasında MÖA'lar formal tanımları verilen bazı matematiksel kavramlarla ilgili resimler çizmişler ve bu resimler sınıfta tartışılmıştır. Resimlerde doğada rastlanan gerçek varlıklar ile ilgili öğelerin yani somut resimlerin daha ağırlıklı olduğu görülmüştür. 10., 11. ve 12. haftalarda formal tanımları verilen kümeler ve fonksiyonlar alt öğrenme alanları ile ilgili bazı matematiksel kavramların resimleri MÖA'lar tarafından çizilmeye çalışılmıştır. Araştırmacı kavramları doğada rastlanan gerçek varlıklarla ilişkili olmayacak şekilde görselleştirmelerini yani soyut resim çizmelerini istemiştir. Derste MÖA'lar tercihlerine göre 2'şerli ve 3'erli gruplar halinde veya bireysel olarak çalışmışlardır. Dersin ilerleyen haftalarında MÖA'ların grupça çalışmak yerine bireysel çalışmayı daha çok tercih etmeye başladıkları gözlemlenmiştir. Bu durumun nedeni MÖA'lara sorulduğunda, MÖA'lar dersin ilk haftalarında nasıl resim çezeceklerini bilemedikleri için grupça çalışmayı tercih ettiklerini, ilerleyen haftalarda gruptaki üyelerin kavramın görselleştirilmesi ile ilgili çok sayıda farklı fikirlerinin ortaya çıktığını, bu nedenle bireysel çalışarak herkesin kendi fikri üzerinde çalışmayı tercih etmeye başladığını belirtmişlerdir. Uygulama esnasında MÖA'lardan dağıtılan boş kâğıtlara resimlerini çizmeleri ve bu sırada silgi kullanmamaları istenmiştir. Tüm MÖA'lar kavram resimleri ile ilgili çizimlerini bitirdiklerinde, kavram resimlerinin sunumuna geçilmiştir. MÖA'lar kavram resimlerini tahtaya çizmiş ve resimler tartışılmıştır. Araştırmada derslerin süreleri esnek tutulmuştur. Her iki şubede de ders süreleri ortalama 6'şar saati bulmuştur.

Uygulama süresince çizdikleri kavram resimlerinin kavramın görsel temsili olarak uygunluğu konusunda sınıf ve araştırmacı tarafından uzlaşılan gruplarla görüşülmüştür. Bu şekilde MÖA'ların kavramları ifade eden görsel temsilleri oluşturma süreci açığa çıkarılmaya çalışılmıştır. Bu nedenle her hafta görüşme yapılan gruplar (grup üyeleri ve grup sayısı) değişiklik göstermiştir. Araştırmacı grup üyeleriyle kavramı görselleştirme sürecinde neleri göz önünde bulundurdıkları, nasıl düşündükleri, resme nasıl karar verdikleri, nelerle karşılaştıkları, kavrama dair çizdiği resminde çizgi ve renklerin neyi temsil ettiği ile ilgili görüşmüştür. Veri toplama süreci Şekil 3.1'de gösterilmiştir.



Şekil 3.1 Veri toplama süreci

3.6. Verilerin Analizi

Araştırma olgusu ile ilgili literatürde yeterli bilgi yoksa, olgu ile ilgili bağlantı ve özelliklerin nasıl olduğu incelenmek isteniyorsa gömülü teori kullanılır (Cohen, Lawrence, & Morrison 2011). Literatürde MÖA'ların matematiksel kavramları görselleştirme süreçleri ile ilgili bir çalışmaya rastlanılmamıştır. Araştırmada MÖA'ların matematiksel kavramları görselleştirme süreçleri ve kavram resimlerindeki bağlantı ve özelliklerin nasıl olduğu ortaya çıkarılmaya çalışıldığından verilerin analizinde gömülü teorisinin analiz teknikleri olan açık, eksensel ve seçici kodlamadan yararlanılmıştır. Bu kapsamda veriler kodlanmış, verilerle ilgili notlar oluşturulmuş ve diyagramlar çizilmiştir. Öncelikle kategorilerin oluşturulması amacıyla açık kodlama yapılmış; bu doğrultuda veriler parçalanmış, incelenmiş, karşılaştırılmış, kavramsallaştırılmış ve kategorilere ayrılmıştır. Ardından kategoriler arasındaki, kategoriler ve alt kategoriler arasındaki ilişkiler kurulmaya ve açık kodlamayla parçalanmış veriler yeni yollarla yeniden oluşturulmaya çalışılmış, yani eksensel kodlama

yapılmıştır. Sonrasında kategorilerin seçilmesi amacıyla seçici kodlama yapılmıştır. Seçici kodlama aşamasında sistematik olarak diğer kategorilerle ilişkilendirilen, bu ilişkileri doğrulayan ve daha fazla geliştirme veya iyileştirme gerektiren kategoriler geliştirilerek ana kategoriler seçilmiştir (Punch, 2000).

3.7. Verilerin Analiz Süreci

Verilerin analiz süreci şu şekilde gerçekleştirilmiştir:

- 1) MÖA'lar ile yapılan görüşmeleri içeren video kayıtlarının tamamının transkripti yapılmıştır.
- 2) Analiz sürecinde MÖA'ların isimleri kullanılmamış, her grup ve MÖA için kodlama yapılmıştır. Örneğin $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ ve $G_6\ddot{O}$ kodlarındaki G_5 ve G_6 araştırmadaki grubu ve numarasını (G_5 ifadesi 5. grubu ve G_6 ifadesi 6. grubu), $\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ ve $\ddot{O}$ grubun kaç MÖA'dan ($\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ ifadesi iki, $\ddot{O}$ ifadesi bir MÖA) oluştuğunu belirtmektedir.
- 3) Görüşülen her grubun video kayıtlarının transkriptleri, kavramla ilgili dersteki resimleri defalarca gözden geçirilmiştir. Her görüşme için kendi içinde kavram etiketlemeleri yapılmış ve notlar alınmıştır. Bu notlar görüşmelerde öne çıkan ifadeler ve hangi kavram etiketlemesinin neden yapıldığı ile ilgilidir. Bazı durumlarda araştırmacı birden fazla kavram etiketlemesi yapmış, en uygun kodlamayı sonra belirlemek üzere düşünülen tüm kavram etiketlemelerini not etmiştir.
- 4) Kavram etiketlemeleri yapılırken benzer ya da aynı ifadeleri tespit etmek ve tutarlı kodlamalar yapmak için baştan itibaren nelerin yapıldığı sürekli gözden geçirilmiştir. Böylece araştırmacı kavram etiketlemelerinde kelime ve cümleleri hangi amaçla kodladığını sürekli zihninde tutmaya çalışarak benzer yerleri tespit etmeye çalışmıştır. Ayrıca her görüşmeye dair kodlama bitirildiğinde tüm kodlamalar tekrar gözden geçirilmiş ve duruma göre değişiklikler yapılmıştır. Kavram etiketlemesi değiştirilirse önceki etiketleme de silinmemiş, oluşturulan kodlama tablosuna neden değiştirildiğine dair açıklama eklenmiştir.
- 5) Bir kategorinin alt kategorileri belirlenirken en baştan itibaren o kategorinin tüm alt kategorileri kontrol edilmiştir. Duruma göre önceki oluşturulan alt kategoriler kullanılmaya devam edilmiş, alt kategori ve kategorilerin isimleri değiştirilmiş ya da yeni bir alt kategori oluşturulmuştur.
- 6) Araştırmacı kategori, alt kategori ve boyutlar oluşmaya başladığında ilgili örnekleri açıklamalarıyla birlikte başka bir belgede bir araya getirmiştir. Böylece hangi kategori ve boyutun hangi düşünceyle oluşturulduğuna dair genel bir açıklama oluşturulmuştur. Sonraki

kodlamalarda bu açıklamalar göz önünde bulundurularak kavram etiketlemeleri yapılmaya devam edilmiştir.

7) Analiz yapılırken kategorilerin hangi sırayla ortaya çıktığı takip edilmeye çalışılmış ve bu süreç ile ilgili notlar alınmıştır. Kategori, alt kategori ve boyutlar arasındaki ilişkiler bu notlar incelenerek oluşturulmuştur. Yeni bir kodlamayı önceden var olan bir kategoriye dâhil edip etmeme konusunda tereddüt yaşıyorsa o kategoriye örnek olan tüm cümleler açıklamalarıyla birlikte tekrar okunarak karar verilmiştir.

8) Yeni bir kategori oluşturulduğunda bu kategori renklendirilmiştir. Burada amaç ilk olarak o kategorinin nerede hangi amaçla kullanıldığına işaret etmektir. Böylece sonraki kodlamalarda kategorinin ilk çıkış yeri ve açıklaması dikkate alınmış ve ona göre bu kategori altına yeni cümleler eklenmiştir.

9) Her defasında kodlamalar gözden geçirilirken araştırmacı önce cümleyi okumuş ve hangi kodlamaya ait olduğuna bakmamıştır. O cümlenin hangi kodlamalara ait olduğunu tahmin etmeye çalışmış ve sonra verilen kategori isimleri ve açıklamasına bakmıştır. Böylece önceki kodlamalarla tutarlılığın olup olmadığı kontrol edilmiştir.

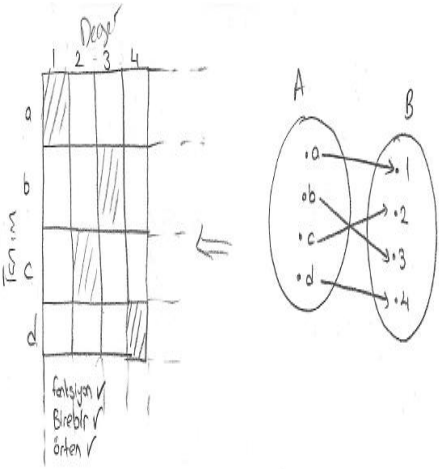
Aşağıda video kayıtlarından elde edilen transkriptlerin ve resimlerin incelenmesi sonucu verilerin analizinin nasıl yapıldığını gösteren örnek kodlama tabloları bulunmaktadır (Tablo 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 ve 3.5).

Kodlamaların ve Notların Oluşturulması, Yeni Bir Kategorinin Ortaya Çıkması

37

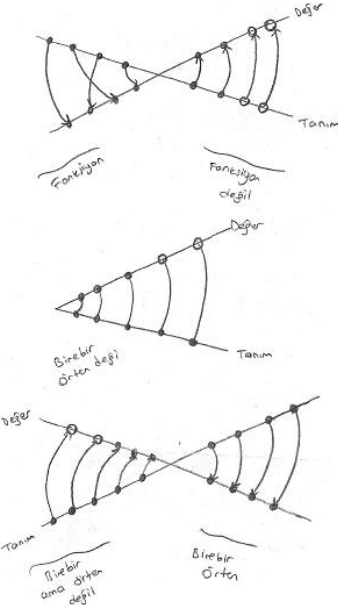
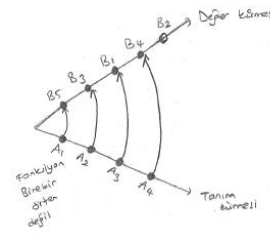
Tablo 3.2

Kategoriler Arasındaki İlişkilerin Ortaya Çıkması

Resimler	Görüşme Metni	Kodlamalar	Notlar
	A: Bu resminizde yan taraflara Venn şeması da çizmişsiniz. Bunu niçin yaptığınızı paylaşır mısınız? G₅Ö₁: Onu niye çizdik? Bir görelim dedik önce. Venn şeması üzerinde	Resmetme: Bildiği Bir Resim: Venn Şeması	Burada MÖA'lar önce bildikleri bir resim üzerinde düşünüp onu yeni resme uyarlıyor. Yani önce bildikleri bir resmi çiziyorlar ve kavramın resmini nasıl çizecekleri ile ilgili fikir oluşturuyorlar. Sonra kendi soyut resimlerini çiziyorlar.
	kuralları hatırlayıp, birebir ve örtlenliği görüp sonra da	Kavram-Resim İlişkisi Üzerine Düşünme: Kavram: Fikir Oluşturma	Burada kategoriler arasındaki ilişkilerin şu şekilde ortaya çıktığı görülmektedir: Resmetme: Bildiği Bir Resim: Venn Şeması
	onu yeni resmimize uyarlamaya çalıştık.	Resmetme: Soyut Resim	Kavram-Resim İlişkisi Üzerine Düşünme: Kavram: Fikir Oluşturma Resmetme: Soyut Resim Görüşmelerin devamında da benzer durumların tekrarlandığı görülmüştür.

Tablo 3.3

Kodlamaların ve Notların Oluşturulması, Kategoriler Arasındaki İlişkilerin Ortaya Çıkması

Resimler	Görüşme Metni	Kodlamalar	Notlar
	A: Ama ilk resimlerinde boştaki elemanlar da eşleşiyor gözüküyordu? Sonradan vazgeçtin sanırım değil mi? G₃Ö: Evet, öyle yapıyordum. Sonrasında yine karışacak diye... Çünkü şey karışıyordu o zaman fonksiyon olma durumu karışıyordu. Buradan da boşa giden oluyordu. Mesela ben buradaki bir elemanı buradaki boş bir elemana götürsem burada eleman olmadığı için bu fonksiyonu sağlamayacaktı. Buradaki eleman eşleşemiyor olacaktı.	Resmi Değerlendirme: Kendi İçinde Değerlendirme: Tasarım Açısından: Yetersiz	MÖA resimler çiziyor. Bu resimlerinde görünüm açısından karışıklığın olduğunu düşünüyor. Devamındaki konuşmada görüldüğü gibi resmini değiştiriyor. Yaptığı değişikliğe göre kavramların resmini çizmeye devam ediyor. Bu durumda kategoriler aşağıdaki sırayla ortaya çıkıyor: -Resmetme: Soyut Resim: Kavramları Temsil Etme -Resmi Değerlendirme: Kendi İçinde Değerlendirme: Tasarım Açısından: Yetersiz -Resmi Değiştirme: Tasarım: Kısmen -Resmetme: Soyut Resim: Kavramı Temsil Etme: Örtün Olmayan Birebir Fonksiyon
	O yüzden de onu kaldırdım sonradan. Direkt boş bıraktım onu. Örtün olmamasını da öyle gösterdim.	Resmi Değiştirme: Tasarım: Kısmen Resmetme: Soyut Resim: Kavramı Temsil Etme: Örtün Olmayan Birebir Fonksiyon	MÖA burada resminin belirli bir kısmı üzerinde değişiklik yapıyor. Bu değişikliği yapmasındaki neden görünüm olarak resmini beğenmemesi.

Tablo 3.4

Kodlamaların ve Notların Oluşturulması

Resimler	Görüşme Metni	Kodlamalar	Notlar
	A: Bana ilk baştan itibaren nasıl resim çizdiğini anlatır mısın? G₁Ö: Şimdi fonksiyon bir kümeden diğer kümeye tanımlanan bir bağıntı aslında. Özel bir bağıntı... A kümesi tanım kümesi, B kümesi değer kümesi. Bir fonksiyonun fonksiyon olabilmesi için birinci şart tanım kümesinde eşleşmeyen elemanın kalmaması gerekiyor. Ayrıca da tanım kümesindeki hiçbir elemanın birden fazla görüntüsü olmayacak. Onları ele aldıktan sonra ben...	Kavram-Resim İlişkisi Üzerine Düşünme: Kavram: Tanımı İnceleme	
	G₁Ö: Benim aklıma şey geldi önce. Fonksiyon tanımı gelince dedim $y = x^2$ gibi mi eğriler gibi mi diye düşündüm ben ilk önce. Sonradan bağıntı gibi düşündüm. Biz şimdi öyle görüyoruz.	Kavram-Resim İlişkisi Üzerine Düşünme: Kavram: Fikir Oluşturma	
	Ben A ve B kümesi için $A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{1, 2, 6\}$ olacak şekilde elemanlar seçtim rastgele. a, b ve c'yi, 1 ile; a'yı, 2 ile eşleştirdim.	Kavram-Resim İlişkisi Üzerine Düşünme: Kavram: Örneklendirme	MÖA'lar kavramların resimlerini çizebilmek için öncelikle kavramları örneklendirmişlerdir. Bu kategori tüm görüşmelerde ortaya çıkmıştır.

Tablo 3.5

Kodlamaların ve Notların Oluşturulması, Kategori Adının Değiştirilmesi

Resimler	Görüşme Metni	Kodlamalar	Notlar
	G₂Ö₁Ö₂Ö₃: Altküme dediğimiz şey de baktığımız zaman 1, 2, 3, 4 elemanlarından oluşan A kümesi, F kümesinin bir altkümesidir. A: Peki, kavram resminde nasıl anlatırsın bunu? G₂Ö₁Ö₂Ö₃: Şekil üzerinden mavi ve sarı renklerine bakalım mesela. Mavi 1, 2, 3 ve 4'te var. Sarı da 1, 2, 3 ve 4'te var. G₂Ö₁Ö₂Ö₃: Yani A kümesi, sarı renkli F kümesinin altkümesi. Yani A kümesinin mavi renginin bulunduğu tüm elemanlarda, F kümesinin sarı rengi de bulunduğu için A kümesi F kümesinin altkümesi oluyor.	Resmi Analiz Etme: Kavram Açısından: Kavramı Belirleme Resmi Analiz Etme: Kavram Açısından: Resmi Kavrama Göre İnceleme Resmi Kavrama Göre Değerlendirme- Resmi Analiz Etme: Kavram Açısından: Resmi Kavrama Göre Anlamlandırma	Burada MÖA altkümeyle örnek veriyor. Araştırmacı MÖA'dan bunu kavram resmi üzerinden açıklamasını istiyor. Dolayısıyla MÖA resimle ilgili açıklamasını önceden belirlenen kavrama göre yapmış oluyor. Burası daha önce resmi kavrama göre değerlendirme olarak kodlanmıştı. Sonra resmi analiz etme olarak kodlama değiştirildi. Resmi değerlendirme kategorisi, görselleştirme sürecinde resmin kavramı temsil edip etmediğini değerlendiren ifadeler olarak belirlendi. Resim bittikten sonra resmin açıklanmasına dair ifadeler resmi analiz etme kategorisi altında toplandı. Resimden kavramlarla ilgili çıkarılan anlamları taşıyan ifadeler resmi analiz etme kategorisinin altında resmi kavrama göre anlamlandırma olarak alındı.

BÖLÜM IV

BULGULAR VE YORUM

Bu bölümde MÖA'ların çizdikleri resimlere ve resimler ile ilgili yapılan görüşmelere dayalı olarak bazı matematiksel kavramları görselleştirme süreçlerine ilişkin bulgular ve yorumlara yer verilmiştir. MÖA'ların çizdikleri resimler ve resimler ile ilgili açıklamalarına yönelik ana ve alt kategoriler oluşturulmuş, bulgular doğrudan alıntılarla desteklenmiştir.

4.1. MÖA'ların Matematiksel Kavramları Görselleştirme Süreçlerine İlişkin Kategoriler ve Kategorilerin İçerikleri

MÖA'ların matematiksel kavramları görselleştirme süreçlerine ilişkin kategoriler alt başlıklar halinde alt kategori, boyut ve alt boyutları ile açıklanmıştır.

4.1.1. Kavram-Resim İlişkisi Üzerine Düşünme Kategorisi

MÖA'lar matematiksel kavramları görselleştirirken aynı zamanda bir düşünme sürecinden geçmektedir. Düşünceler kavramın kendisi, resmin oluşturulması veya kavramlar ve resim arasında ortaya çıkan ilişkiler ile ilgilidir. Bu kategori bu düşüncelere dair MÖA'ların açıklamalarını içermektedir. Kavram-resim ilişkisi üzerine düşünme kategorisi; kavram, resim ve yeni bir durumu keşfetme olarak üç alt kategoride ele alınmıştır.

Kavram alt kategorisi MÖA'ların kavramla ilgili olan düşüncelerini içermektedir. Tanımı inceleme, örneklendirme ve fikir oluşturma olarak üç boyutta incelenmiştir. MÖA'lara kavramların tanımları verilmiş, bu tanımlara göre kavramları resmetmeleri istenmiştir. MÖA'lardan bazıları çizdikleri resimleri anlatırken ilgili tanımlardan da bahsetmişlerdir.

Tanımı inceleme boyutu bu açıklamaları içermektedir. MÖA'lar kavramlarla ilgili örnekler belirlemiş ve resimlerini bu örnekler üzerinden kurgulamışlardır. Örneklendirme boyutu MÖA'ların kavramlarla ilgili belirledikleri örnekleri ifade etmektedir. MÖA'lar kavramların görselleştirilmesi ile ilgili fikir oluşturmak için resim çizdikleri durumlar ortaya çıkmıştır. Resimlerini kavramla ilgili fikir edinmek için çizdiklerini ifade ettikleri açıklamaları içeren boyut fikir oluşturmaktır.

Resim alt kategorisi oluşturulan kavram resminin çıkış noktasında yer alan düşünceleri, kavram resmindeki çizgi ve renklerin hangi amaçla kullanıldığını yansıtır. Resim alt kategorisi esinlenme noktası ve temsil belirleme olmak üzere iki boyuta ayrılmıştır. MÖA'ların önceki bilgileri kavramları görselleştirirken MÖA'lara çeşitli bakış açıları sunmuştur. Bu bilgilerin ortaya çıkması ve kavramın görsel temsilini oluşturmaya çalışırken geliştirilmesi esinlenme noktası boyutunu oluşturmaktadır. MÖA'ların resimlerinin arka planında yer alan önceki bilgileri esinlenme noktası bulma alt boyutunu, bu bilgilerin kavramın resminin oluşturulmasında etken haline gelmesi ise esinlenme noktasını geliştirme alt boyutunu oluşturmaktadır. MÖA'lar resimlerini oluştururken bazı renk ve çizgilere kavramın temsili açısından anlamlar yükledikleri boyut temsil belirleme olarak alınmış, renk ve çizgi olmak üzere iki alt boyutta incelenmiştir.

Yeni bir durumu keşfetme alt kategorisi, MÖA'ların resimlerini çizerken kavramlar arasında ya da kavram ve resim arasında genellemelere vardıkları durumları ifade etmektedir. Bu genellemeler kavram ve resim ilişkisi ile ilgili ise kavram-resim ilişkisi, kavramlar arasında ise kavram-kavram ilişkisi alt boyutunda ele alınmıştır.

4.1.2. Resmetme Kategorisi

MÖA'ların kavramları görselleştirme sürecinde oluşturdukları tüm çizim ve renklendirmelerden yani resimlerden oluşmaktadır. Resmetme kategorisi; bildiği bir resim, somut resim, taslak resim, düşündüğünden farklı resim, renklendirme ve soyut resim olmak üzere altı ayrı alt kategoride incelenmiştir.

Bildiği bir resim alt kategorisi MÖA'ların kavramların görsel temsili ile ilgili önceden bildikleri çizimleri temsil etmektedir. Bildiği bir resim kategorisi Venn şeması, fonksiyon grafiği ve koordinat sistemi şeklinde üç ayrı boyuttan oluşmaktadır.

Somut resim alt kategorisi, MÖA'ların kavramı temsil etmeye yönelik doğada rastlanan gerçek varlıkları betimleyen resimlerini içermektedir.

Taslak resim alt kategorisi, MÖA'ların kavramların resmini oluşturmaya çalışırken deneme niyetiyle çizdiklerini ifade ettikleri resimlerdir. Belli bir amaç doğrultusunda denemek için çizdiklerini ifade ettikleri resimler amaçlı taslak resim, çizerken herhangi bir düşüncelerinin olmadığını ifade ettikleri resimler amaçsız taslak resim boyutunu oluşturmaktadır.

Düşündüğünden farklı resim alt kategorisi, MÖA'ların yaptıkları açıklamaları ve diğer benzer resimlerine göre farklılık gösteren resimlerini temsil etmektedir. Diğer resimlerine ve açıklamalarına göre resimlerin eksik çizilmesi eksik resmetme, fazla çizilmesi fazla resmetme boyutunu oluşturmaktadır.

Renklendirme kategorisi, MÖA'ların kavram resimlerindeki tüm renklendirmeleri içerir.

Soyut resim alt kategorisi, MÖA'ların doğada rastlanan gerçek varlıkları betimlemeyen resimlerini içermektedir. MÖA'ların soyut resimlerinin bazıları bir kavramı temsil ederken bazıları birden fazla kavramı temsil etmektedir. Bu nedenle soyut resim alt kategorisi kavramı temsil etme ve kavramları temsil etme olmak üzere iki ayrı boyutta ele alınmıştır.

4.1.3. Resmi Değerlendirme Kategorisi

MÖA'ların resimleri ile ilgili yaptıkları durum tespitlerini içeren kategoridir. Resmi değerlendirme kategorisi; kendi içinde değerlendirme ve başka bir resimle karşılaştırarak değerlendirme alt kategorilerinden oluşmaktadır. Kendi içinde değerlendirme alt kategorisi resmin kendisine odaklanarak yapılan durum tespitlerini içermektedir. Bu durum tespitleri temsil ve tasarım boyutlarından oluşmaktadır. Temsil boyutu MÖA'ların resmi kavramı temsil etmesi açısından yeterli bulup bulmadığı ile ilgilidir, yeterli ve yetersiz alt boyutlarından oluşmaktadır. Benzer şekilde tasarım boyutu, MÖA'ların resmi tasarım açısından değerlendirdiği ifadeleri içermektedir, yeterli ve yetersiz olmak üzere iki alt boyutu vardır. Başka bir resimle karşılaştırarak değerlendirme alt kategorisi MÖA'ların çizdikleri resimleri temsil ve tasarım bakımından birbirleri ile kıyaslamalarını ifade etmektedir. Temsil ve tasarım boyutlarından oluşmaktadır. Her iki boyut da başarılı ve başarısız alt boyutlarını içermektedir.

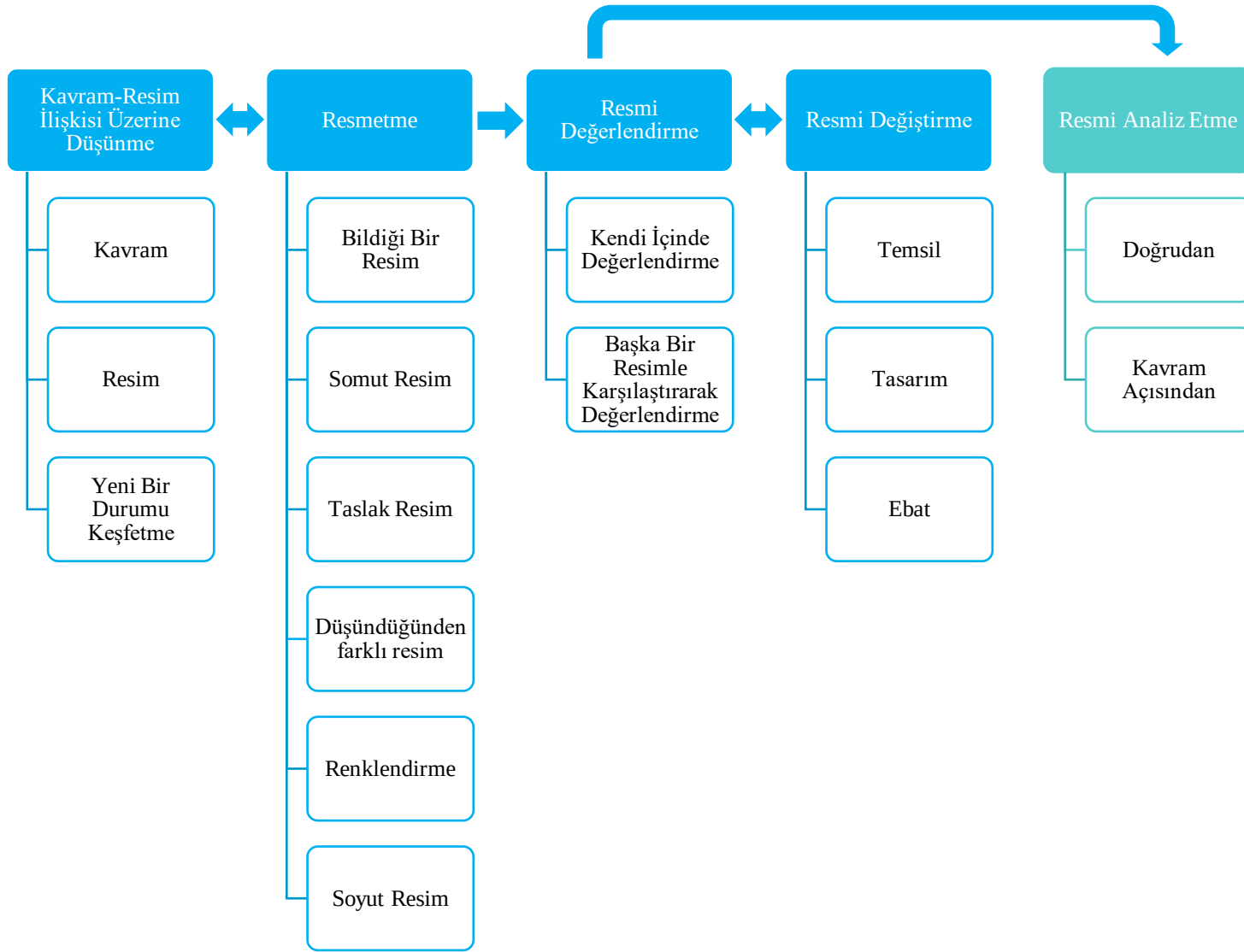
4.1.4. Resmi Değiştirme Kategorisi

MÖA'ların resimleri ile ilgili yaptıkları tüm değişiklikleri ifade etmektedir. MÖA'ların yaptıkları değişiklikler temsil, tasarım veya ebat olarak ortaya çıkmıştır. MÖA'ların resim üzerinde yaptıkları değişikliklerin durumuna göre temsil ve tasarım boyutları kısmen ve tamamen alt boyutlarına ayrılmıştır. Ebat boyutu, küçültme ve büyütme olmak üzere iki ayrı alt boyutta incelenmiştir.

4.1.5. Resmi Analiz Etme Kategorisi

MÖA'ların resimlerinin kavramlar açısından ifade ettiği anlamlarla ilgili analizlerini içermektedir. Resmi analiz etme kategorisi; doğrudan ve kavram açısından olmak üzere iki alt kategoriden oluşmaktadır. Doğrudan alt kategorisi MÖA'ların resimle ilgili herhangi bir kavrama işaret etmeden yaptıkları analizlerden oluşmaktadır. Resmi inceleme ve resmi anlamlandırma boyutlarından oluşmaktadır. Resmi inceleme boyutu MÖA'nın resimde bulunan belirli noktaları ifade ettiği açıklamaları içermektedir. Resmi anlamlandırma boyutu MÖA'nın resmi inceleme boyutunda yer alan resimle ilgili açıklamalarının anlam açısından hangi kavramı temsil ettiğini belirtir. Kavram açısından alt kategorisi MÖA'ların belirledikleri bir kavrama göre resimleri ile ilgili yorumlarını içermektedir. Kavram açısından alt kategorisi kavramı belirleme, resmi kavrama göre inceleme, resmi kavrama göre anlamlandırma alt boyutlarından oluşmaktadır. Kavramı belirleme boyutunda MÖA'nın resmi yorumlayacağı kavramı ifade eder. Resmi kavrama göre inceleme boyutu, MÖA'nın belirlediği kavrama göre resimde bulunan belirli noktaları ifade ettiği açıklamaları içerir. Resmi kavrama göre anlamlandırma boyutunda resimle ilgili açıklamalarının anlam açısından kavramı temsil edip etmediğini belirtir.

Verilerin analizi sonucunda ortaya çıkan kategori, alt kategori ve aralarındaki ilişkiler şekil 4.1.1'deki gibidir. Kavram-resim ilişkisi üzerine düşünme, resmetme, resmi değerlendirme, resmi değiştirme kategorileri MÖA'ların matematiksel kavramların resimlerini oluşturma aşamaları ile ilgilidir. Bu kategoriler mavi kutucuklarla gösterilmiştir. Resmi analiz etme kategorisi MÖA'ların çizdikleri resimlerin kavramlarla olan ilişkisini açıkladıkları ifadeleri içermektedir. Bu nedenle yeşil kutucukla gösterilmiştir.



Şekil 4.1.1 MÖA'ların matematiksel kavramları görselleştirme sürecine ait kategori ve alt kategoriler

4.2. MÖA'ların Küme ve Fonksiyon Alt Öğrenme Alanları ile İlgili Görselleştirdikleri Kavramlar ve Tanımları

MÖA'lara kavramların aşağıdaki tanımları verilmiştir. Bu tanımları inceleyerek kavramları resmetmeleri istenmiştir.

Altküme: $\mathcal{E}$ bir evrensel küme ve $A, B \subseteq \mathcal{E}$ olmak üzere, eğer

$$\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

ise o zaman A ya, B nin bir altkümesi denir ve $A \subseteq B$ ya da $B \supseteq A$ şeklinde gösterilir (Arıkan ve Halıcıoğlu, 2018, s. 82).

Eşit Kümeler: A ve B iki küme olmak üzere, eğer $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ ise o zaman A ve B kümeleri eşittir denir ve $A = B$ şeklinde gösterilir (Arıkan ve Halıcıoğlu, 2018, s. 83).

Boş Küme: Hiçbir elemana sahip olmayan kümeye boş küme adı verilir. Boş küme $\{ \}$ ya da $\emptyset$ şeklinde gösterilir (Arıkan ve Halıcıoğlu, 2018, s. 83).

Kümelerin Birleşimi: $\mathcal{E}$ bir evrensel küme ve $A, B \subseteq \mathcal{E}$ olmak üzere A ve B kümelerinin birleşimi

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

şeklinde tanımlıdır (Arıkan ve Halıcıoğlu, 2018, s. 91).

Kümelerin Kesişimi: $\mathcal{E}$ bir evrensel küme ve $A, B \subseteq \mathcal{E}$ olmak üzere A ve B kümelerinin kesişimi (arakesiti)

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

şeklinde tanımlıdır (Arıkan ve Halıcıoğlu, 2018, s. 91).

Mutlak Tümlen: $\mathcal{E}$ bir evrensel küme ve $A \subseteq \mathcal{E}$ olsun. O zaman

$$\{x | x \in \mathcal{E} \wedge x \notin A\}$$

kümesine A nın $\mathcal{E}$ ye göre tümleniyeni veya A nın mutlak tümleniyeni denir ve $\mathcal{E} \setminus A$ veya $\bar{A}$ ile gösterilir. Diğer bir ifadeyle

$$\bar{A} = \{x \mid x \in \mathcal{E} \wedge x \notin A\}$$

dır (Arıkan ve Halıcıoğlu, 2018, s. 92).

Göreceli Tümleyen: $\mathcal{E}$ bir evrensel küme ve $A, B \subseteq \mathcal{E}$ olsun. O zaman B nin A içindeki göreceli tümleyeni

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

ve benzer şekilde A nin B içindeki göreceli tümleyeni

$$B \setminus A = \{x \mid x \in B \wedge x \notin A\}$$

şeklinde tanımlanır (Arıkan ve Halıcıoğlu, 2018, s. 93).

Fonksiyon: A ve B iki küme, f de A dan B ye bir bağıntı olsun. Eğer her $a \in A$ için $(a, b) \in f$ olacak şekilde bir tek $b \in B$ varsa o zaman f ye A dan B ye bir fonksiyon denir ve $f : A \rightarrow B$ ile gösterilir. A kümesine f nin tanım kümesi, B kümesine de f nin değer kümesi adı verilir. $a \in A$ için $(a, b) \in f$ ise b ye a nın f fonksiyonu altındaki görüntüsü denir ve $b = f(a)$ şeklinde gösterilir (Arıkan ve Halıcıoğlu, 2018, s. 173).

Fonksiyonun Kısıtlaması ve Genişlemesi: A, B iki küme ve $A_1 \subseteq A$ olsun.

(1) $f : A \rightarrow B$ fonksiyonu verildiğinde her $a \in A_1$ için $f|_{A_1(a)} = f(a)$ şeklinde

tanımlanan $f|_{A_1} : A_1 \rightarrow B$ fonksiyonuna f nin A_1 kümesine kısıtlaması denir.

(2) $f : A_1 \rightarrow B$ fonksiyonu verildiğinde her $a \in A_1$ için $g(a) = f(a)$ şartını

sağlayan bir $g : A \rightarrow B$ fonksiyonuna f nin A kümesine genişlemesi denir

(Arıkan ve Halıcıoğlu, 2018, s. 177).

Birebir Fonksiyon: A, B iki küme ve f de A dan B ye bir fonksiyon olsun. Eğer $f(x) = f(y)$ şartını sağlayan her $x, y \in A$ için $x = y$ ise o zaman f ye bir birebir fonksiyon denir (Arıkan ve Halıcıoğlu, 2018, s. 179).

Örten Fonksiyon: A, B iki küme ve $f : A \rightarrow B$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $b \in B$ için $b = f(a)$ olacak şekilde bir $a \in A$ bulunabiliyorsa o zaman f ye bir örten fonksiyon denir (Arıkan ve Halıcıoğlu, 2018, s. 180).

Birebir Eşleme: Birebir ve örten olan bir fonksiyona birebir eşleme denir (Arıkan ve Halıcıoğlu, 2018, s. 181).

Birim Fonksiyon: $\emptyset \neq A$ bir küme olsun. Her $a \in A$ için $i(a) = a$ şeklinde tanımlı $i_A : A \rightarrow A$ fonksiyonuna A kümesi üzerinde birim fonksiyon denir (Arıkan ve Halıcıoğlu, 2018, s. 182).

Bileşke Fonksiyon: Boş kümeden farklı A, B ve C kümeleri verilmiş olsun. $f : A \rightarrow B$ ve $g : B \rightarrow C$ fonksiyonları verildiğinde her $a \in A$ için $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ şeklinde tanımlanan $g \circ f : A \rightarrow C$ fonksiyonuna f ve g nin bileşkesi denir (Arıkan ve Halıcıoğlu, 2018, s. 184).

4.3. MÖA'ların Kümeler Alt Öğrenme Alanı ile İlgili Kavram Resimleri ve Resim Çizme Süreçleri

Kümeler alt öğrenme alanı ile ilgili kavramları görselleştirmeye çalışırken MÖA'ların çoğu Venn şeması gösteriminin etkisinde kaldıklarını, başka bir şey düşünemediklerini, denemelerine rağmen Venn şeması dışında başka bir gösterimin mümkün olduğuna çok da inanmadıklarını belirtmişlerdir. Hatta şimdiye kadar kümeleri Venn şeması ile temsil etmeyi öğrendiklerini, Venn şeması yetersiz olsaydı zaten başka bir çözümün onlara sunulabileceğini, başka bir çözüm sunulmadığı için Venn şemasının yeterli olduğunu ifade eden MÖA'lar olmuştur. MÖA'ların çoğunun kare, üçgen ve dikdörtgen çizmeye meyilli oldukları ve bunları kesiştirdikleri, Venn şemasına benzer şekilde düşündükleri, bu düşüncenin dışına çıkamadıkları gözlemlenmiştir. MÖA'lar uygulama süresince kavram resmini oluşturmada ilk defa çaresiz kaldıklarını dile getirmişlerdir. Venn şeması dışına çıkan çok az öğrenci grubu (2 grup) olmuştur.

MÖA'ların kümeler alt öğrenme alanı ile ilgili kavramları görselleştirme süreçleri kategori, alt kategori ve boyutları içeren alt başlıklar altında bulgularla desteklenerek incelenmiştir.

4.3.1. Kümeler: Kavram-Resim İlişkisi Üzerine Düşünme Kategorisi

Kümeler alt öğrenme alanındaki kavramlarla ilgili kavram-resim ilişkisi üzerine düşünme kategorisine ait alt kategori, boyut ve alt boyutlar aşağıdaki gibidir.

4.3.1.1. Kavram Alt Kategorisi Tanımı İnceleme Boyutu

MÖA'lara kavramların tanımları verilmiş, bu tanımlara göre kavramların resimlerini çizmeleri istenmiştir. MÖA'lardan bazıları resimlerini açıklarken ilgili tanımlara da vurgu yapmışlardır.

G₂Ö₁: Kümelerin sahip olduğu elemanların sembolleri hiç fark etmez. Rakam olabilir, alfabe olabilir, şekil olabilir, hiçbir şekilde fark etmez.

G₂Ö₃: İki veya üç boyutlu semboller bile kullanabiliriz.

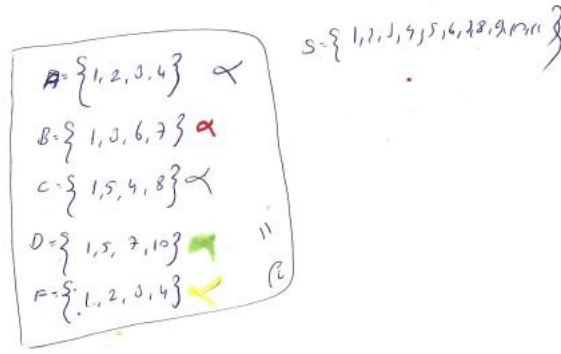
4.3.1.2. Kavram Alt Kategorisi Örneklendirme Boyutu

MÖA'lar kavramların resimlerini çizmeye çalışırken kavramları örneklendirmişlerdir. Kavram resimlerinin tümünü kavramla ilgili örnekler oluşturarak çizmişlerdir.

$$\begin{aligned} &= \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \\ E &= \{-3 \leq x \leq 7\} \\ A &= \{-3, -2, -1, 0, 1\} \quad -3 \leq x \leq 2 \\ B &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \quad 0 \leq x \leq 5 \\ A \cap B &= \{0, 1, 2\} \\ A \cup B &= \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\} \\ E &= \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \end{aligned}$$

Şekil 4.3.1.1 G₁Ö'in kümeleri örneklendirmesi

G₁Ö: Şu şekilde ilk önce kendime bir küme aldım. Evrensel küme -3 ile 10 arasındaki tüm tam sayılardan oluşan bir küme. A, B ve C olmak üzere üç tane küme aldım. Bu kümelere elemanlar belirledim. Bunların kesişimlerini ve birleşimlerini yazdım.



Şekil 4.3.1.2 $G_2\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ 'nin kümeleri örneklendirmesi

$G_2\bar{O}_1$: Sonra şuradaki kendi kümelerimizden oluşan biz beş tane küme gösterdik ilk seferde. A, B, C, D ve F kümeleri, bir de bunları kapsayan bir evrensel küme var, ayrıca 11 sayısına sahip.

A: 11 sayısı sadece evrensel kümeye mi ait?

$G_2\bar{O}_1$: Evet.

4.3.1.3. Kavram Alt Kategorisi Fikir Oluşturma Boyutu

MÖA'lar kavramları görselleştirmeye çalışırken kavramı anlamaya yönelik resimler çizmiş, kavramla ilgili fikir edinmeye çalışmışlardır.

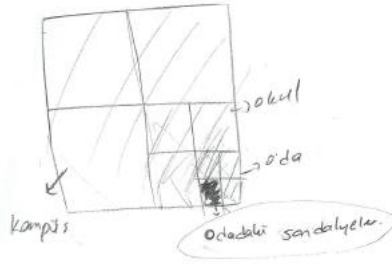
A: İlk şeklinden itibaren, en baştan nasıl düşündün, nasıl çizdin? Anlat istersen.

$G_1\bar{O}$: Ben ilk önce bu resmi çizerken... Gördüğünüz üzere karelerin içinde kareler var. Bu da biraz fraktal örneğine benziyor. Burada aslında kümenin anlamının ne olduğunu kendi içimde kavramak için yaptım.

4.3.1.4. Resim Alt Kategorisi Esinlenme Noktası Bulma Boyutu

MÖA'lar önceki bilgileriyle kavramlar arasında bağlantı kurarak resim çizmeye çalışmışlardır. Bu bilgiler bazen kavram resmini oluşturmalarına yardımcı olmuş bazen de sadece çizilen bir düşünce olarak kalmıştır.

$G_1\bar{O}$ kümeyi görselleştirmeye çalışırken fraktala benzeyen bir örnek çizdiğini ifade etmiştir (Şekil 4.3.1.3).



Şekil 4.3.1.3 $G_1\ddot{O}$ 'in esinlenme noktası bulması: fraktal

A: İlk şeklinden itibaren, en baştan nasıl düşündün, nasıl çizdin? Anlat istersen.

$G_1\ddot{O}$: Ben ilk önce bu resmi çizerken... Gördüğünüz üzere karelerin içinde kareler var. Bu da biraz fraktal örneğine benziyor. Burada aslında kümenin anlamının ne olduğunu kendi içimde kavramak için yaptım.

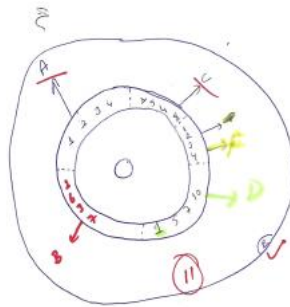
$G_1\ddot{O}$ kümeyi temsil etmeye çalışırken perspektif çizimin aklına geldiğini ifade etmiştir (Şekil 4.3.1.4).



Şekil 4.3.1.4 $G_1\ddot{O}$ 'in esinlenme noktası bulması: perspektif çizim

$G_1\ddot{O}$: Sonra şurada bir perspektif çizim yapmıştım. Resim dersinde biz perspektif çizimi yaptığımızda sonsuza doğru giden bir yol canlanıyordu gözümün önünde ve ben de bunu üçgensel bir bölgeyi kümelerin gösterimde kullanayım diye düşündüm.

$G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ kavram resimlerini Venn şeması fikrinden yola çıkarak çizdiklerini ifade etmişlerdir (Şekil 4.3.1.5).

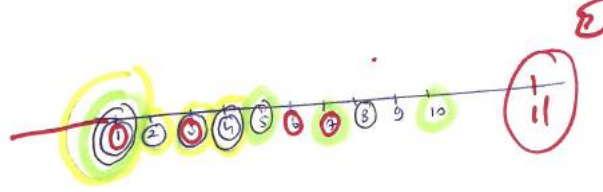


Şekil 4.3.1.5 $G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ 'nin esinlenme noktası bulması: Venn şeması

G₂Ö₁: Kümelerin gösterim yöntemi olan liste ve Venn şeması var. Birden fazla kümenin kesişimini gösterebilmek için önce bir Venn şemasını düşündük.

G₂Ö₂: Hocam bunu biz Venn şemasından düşünerek yaptık.

G₂Ö₁Ö₂Ö₃ resminde sayı doğrusu fikrinin olduğunu belirtmiştir (Şekil 4.3.1.6).

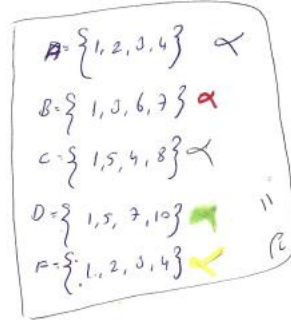


Şekil 4.3.1.6 G₂Ö₁Ö₂Ö₃'nin esinlenme noktası bulması: sayı doğrusu

A: Peki, bunu sayı doğrusu fikrinden yola çıkarak mı çizdiniz?

G₂Ö₁: Evet, sayı doğrusu fikri var ama sayı doğrusu değil bu.

G₂Ö₁Ö₂Ö₃ resimlerinde kümelerin liste yöntemiyle gösteriminden de yararlandıklarını belirtmiştir (Şekil 4.3.1.7).



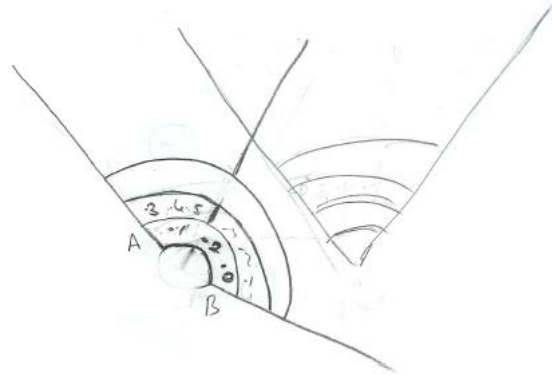
Şekil 4.3.1.7 G₂Ö₁Ö₂Ö₃'nin esinlenme noktası bulması: liste yöntemi

G₂Ö₂: Buna Venn şemasından gitmiştik hocam. Oraya da biraz liste yönteminden gittik gibi oldu.

4.3.1.5. Resim Alt Kategorisi Esinlenme Noktasını Geliştirme Boyutu

Bu aşamada MÖA'lar esinlenme noktasında buldukları fikirleri geliştirerek kavramları görselleştirmeye çalışmışlardır.

G₁Ö perspektif çizimden yararlanarak kümenin kavram resmini çizmeye çalıştığını ifade etmiştir. Küme kavramının kendisine sonsuzluğu hatırlattığı için perspektif çizimden faydalandığını, kümenin kavram resmini de bu nedenle kolları açık çizdiğini belirtmiştir (Şekil 4.3.1.8).



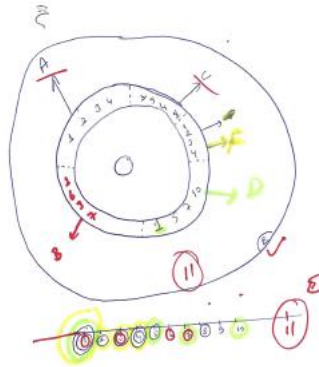
Şekil 4.3.1.8 $G_1\ddot{O}$ 'in esinlenme noktasını geliştirmesi: perspektif çizim

$G_1\ddot{O}$: Sonra şurada bir perspektif çizim yapmıştım. Resim dersinde biz perspektif çizimi yaptığımızda sonsuza doğru giden bir yol canlanıyordu gözümün önünde ve ben de bunu üçgensel bir bölgeyi kümelerin gösterimde kullanayım diye düşündüm.

A: Peki perspektif çizim neden sana kümeyi düşündürdü?

$G_1\ddot{O}$: Çünkü küme deyince aklıma sonsuza kadar gidebileceği, içine her şeyi koyabileceğim, hani bir topluluk ya, sonsuza giden bir kavram olarak düşünüyorum ben küme kavramını yani. O yüzden kolları açık olarak yaptım.

$G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ Venn şeması fikrinden yola çıktıklarını bu fikri geliştirerek ek çizimler yapmaya yöneldiklerini belirtmiştir (Şekil 4.3.1.9).



Şekil 4.3.1.9 $G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ 'nin esinlenme noktasını geliştirmesi: Venn şeması

A: Peki bunu nasıl yaptınız Venn şemasından?

$G_2\ddot{O}_1$: Venn şeması olarak düşündük biz. Ama Venn şemasında maksimum üç tane kümenin kesişimini, farkını çok rahat görebileceğimiz için, üçten fazla kümenininkini göremeyeceğimiz için, bizim yapacağımız şekil birçok kümeyi barındıracak. Bunu da tek seferde görmemiz imkânsız olacağı için ona ek bir çizim daha düşündük biz, mecburiyetten.

$G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ sayı doğrusu fikrinden yola çıkarak resim çizdiklerini ama resimlerinin sayı doğrusu olmadığını ifade etmiştir (Şekil 4.3.1.10).



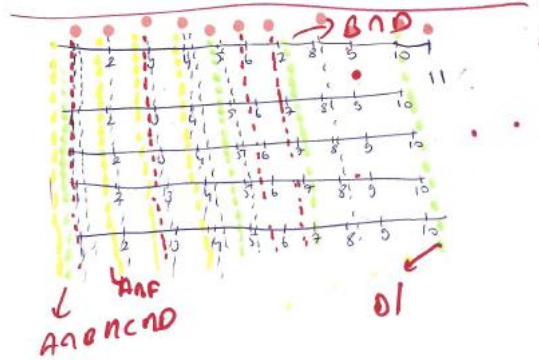
Şekil 4.3.1.10 $G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ 'nin esinlenme noktasını geliştirmesi: sayı doğrusu

$G_2\ddot{O}_1$: Ayrıca burada çizdiğimiz sayı doğrusu değil. Sayı doğrusu almak anlamsız geldi bize. Çünkü neden? Kümelerin elemanları illa rakamlardan oluşacak diye bir şey yok, alfabeden de oluşabilir.

A: Peki, bunu sayı doğrusu fikrinden yola çıkarak mı çizdiniz?

$G_2\ddot{O}_1$: Evet, sayı doğrusu fikri var ama sayı doğrusu değil bu. Bu kümeler a, b, c, d gibi alfabenin harflerinden de oluşabilir. O zaman buraya harfleri yerleştiririz ya da şekilleri kafamıza göre sırayla yerleştiririz.

$G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ resimlerini kümelerin liste yöntemiyle gösterimini kullanarak geliştirdiklerini ifade etmiştir (Şekil 4.3.1.11).

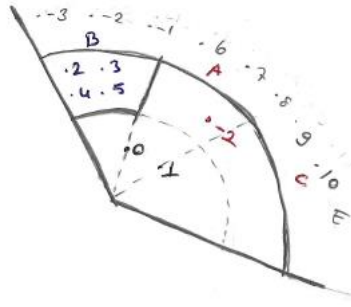


Şekil 4.3.1.11 $G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ 'nin esinlenme noktasını geliştirmesi: liste yöntemi

$G_2\ddot{O}_2$: Buna Venn şemasından gitmiştik hocam. Oraya da biraz liste yönteminden gittik gibi oldu.

4.3.1.6. Resim Alt Kategorisi Temsil Belirleme Boyutu Çizgi Alt Boyutu

MÖA'lar resimlerinde çizgilere temsil bakımından anlamlar yüklemişlerdir. $G_1\ddot{O}$ kümelerde ortak elemanları göstermek için kesikli çizgi kullanmış ve kümelerin ortak elemanlarını bu çizgi üzerine yazmıştır (Şekil 4.3.1.12).



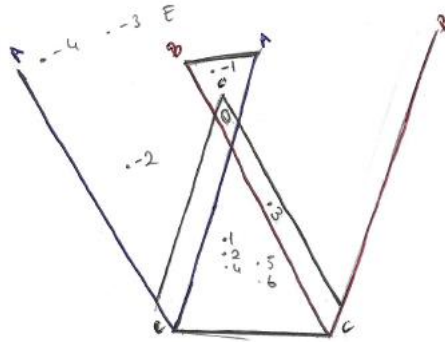
Şekil 4.3.1.12 $G_1\ddot{O}$ 'in kümelerle ilgili kavram resimlerinden bir örnek

$G_1\ddot{O}$: Sonra ben bunları nasıl birleştiririm dediğim zaman aradaki düz çizgiyi kesikli çizgi haline getirdim, birleştirmek açısından.

4.3.1.7. Resim Alt Kategorisi Temsil Belirleme Boyutu Renk Alt Boyutu

MÖA'lar kavramlarla ilgili öğeleri temsil etmek ve kavram resimlerinin anlaşılabilirliğini artırmak amacıyla renklerden faydalanmışlardır.

$G_1\ddot{O}$, A kümesini temsil eden çizgileri mavi, B kümesini temsil eden çizgileri kırmızı kalemle çizmiştir (Şekil 4.3.1.13).



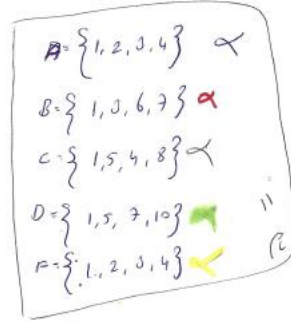
Şekil 4.3.1.13 $G_1\ddot{O}$ 'in kümelerle ilgili kavram resimlerinden bir örnek

$G_1\ddot{O}$: Şimdi A kümesini temsil eden üçgeni şöyle çizdim, açık bir üçgen ve mavi renkle boyadım karışmasın diye. B kümesi için de yine şu tarafta açık bir üçgen. Bunu da kırmızı renkle boyadım.

$G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ resminde yer alan kümelerle renk belirlediğini ve bu renklere göre kümelerin elemanlarını işaretlediğini ifade etmiştir (Şekil 4.3.1.14 ve Şekil 4.3.1.15).



Şekil 4.3.1.14 $G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ 'nin kümelerin elemanlarını renklerle işaretlemesi



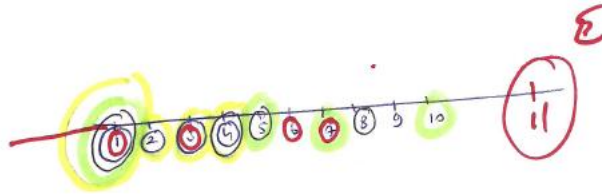
Şekil 4.3.1.15 $G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ 'nin kümeler için renk belirlemesi

$G_2\ddot{O}_1$: Bunların, kümelerin her birine bir renk verdik. A kümesini mavi renk oluşturuyor. B kümesi kırmızı renkli, C kümesi siyah renkli, D kümesi yeşil renk ve F kümesi sarı renkten oluşuyor. Bu elemanlara sahip olanları rengine göre yuvarlak içine aldık.

4.3.1.8. Yeni Bir Durumu Keşfetme Alt Kategorisi Kavram-Resim İlişkisini Keşfetme Boyutu

MÖA'lar resim ve kavram ilişkisine dair resimlerinden sonuçlar çıkarmışlar, genellemeler yapmışlardır.

$G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ kavram resminde kümelerin elemanlarının üzerine çizdiği renkli çemberlerin kümelerin ortak elemanlarını gösterdiği sonucuna varmıştır (Şekil 4.3.1.16).



Şekil 4.3.1.16 $G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ 'nin kavram resminden bir örnek

$G_2\ddot{O}_1$: Bunların, kümelerin her birine bir renk verdik. A kümesini mavi renk oluşturuyor. B kümesi kırmızı renkli, C kümesi siyah renkli, D kümesi yeşil renk ve F kümesi sarı renkten oluşuyor. Bu elemanlara sahip olanları rengine göre yuvarlak içine aldık. Elemanlar

üzerinde hangi kümelerin renk çemberleri varsa, o elemanlar kümelerin ortak elemanıdır demektir.

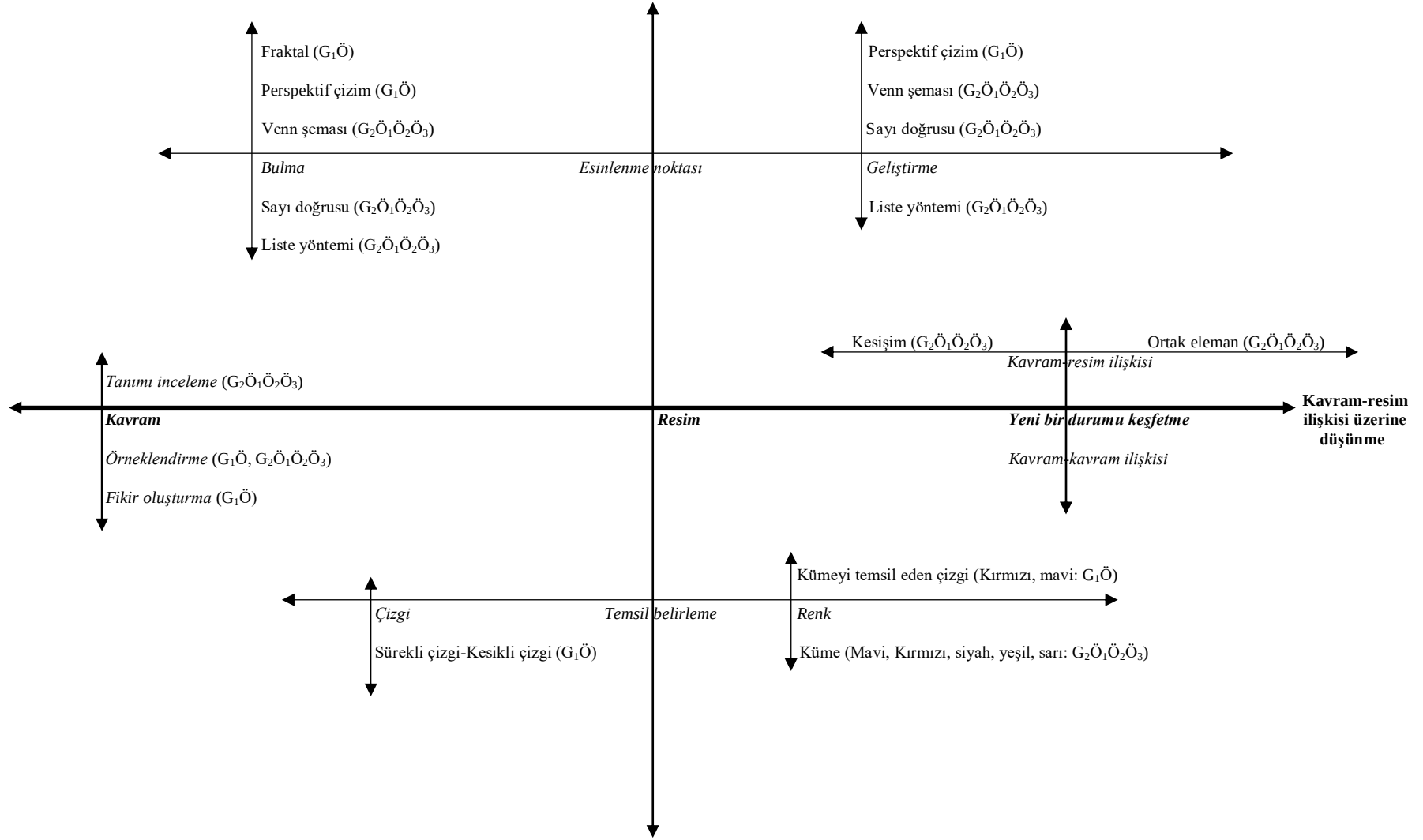
$G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ elemanların üzerinde bulunan renklerin o renkleri temsil eden kümelerin kesişiminde olduğunu belirtmiştir (Şekil 4.3.1.17).



Şekil 4.3.1.17 $G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ 'nin kavram resminden bir örnek

$G_2\ddot{O}_1$: Bu şekilde kümelerin elemanlarını üçgen gibi çizgilerle gösterdik. Bu çizgilerin aynı yerde olduğu elemanlar kümelerin kesişimindedir.

MÖA'ların kümeler alt öğrenme alanındaki kavram-resim ilişkisi üzerine düşünme durumları Şekil 4.3.1.18'de gösterilmiştir.



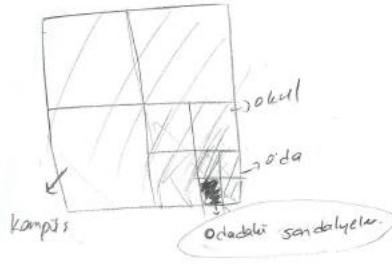
Şekil 4.3.1.18 Kümeler: kavram-resim ilişkisi üzerine düşünme kategorisi

4.3.2. Kümeler: Resmetme Kategorisi

Kümeler alt öğrenme alanındaki kavramlarla ilgili resmetme kategorisine ait alt kategori, boyut ve alt boyutlar aşağıdaki gibidir.

4.3.2.1. Somut Resim Alt Kategorisi

G₁Ö kampüs, okul, oda ve sandalye nesnelerinin arasında bağlantı kurmuş ve bu bağlantıyı küme kavramı ile ilişkilendirmiştir (Şekil 4.3.2.1).



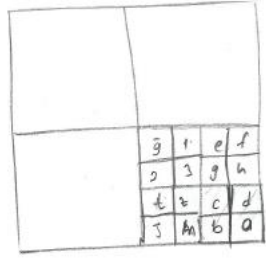
Şekil 4.3.2.1 G₁Ö'nin somut resmi

A: İlk şeklinden itibaren, en baştan nasıl düşündün, nasıl çizdin? Anlat istersen.

G₁Ö: Ben ilk önce bu resmi çizerken... Gördüğünüz üzere karelerin içinde kareler var. Bu da biraz fraktal örneğine benziyor. Burada aslında kümenin anlamının ne olduğunu kendi içimde kavramak için yaptım. Mesela odadaki sandalyeler odanın içindeki bir kümeyi oluşturur. Oda okulun içindeki bir kümeyi oluşturur. Okul da kampüsün içindeki bir kümeyi oluşturur. Bu benim başlangıç düşüncemdi. İç içe kümeler düşündüm. Böyle düşündünce sonsuza kadar devam etmesi de gayet açık bir şey.

4.3.2.2. Taslak Resim Alt Kategorisi Amaçsız Taslak Resim Boyutu

G₁Ö deneme amaçlı bir resim çizmiştir. Resmi çizerken herhangi bir düşüncesinin olmadığını belirtmiştir (Şekil 4.3.2.2).



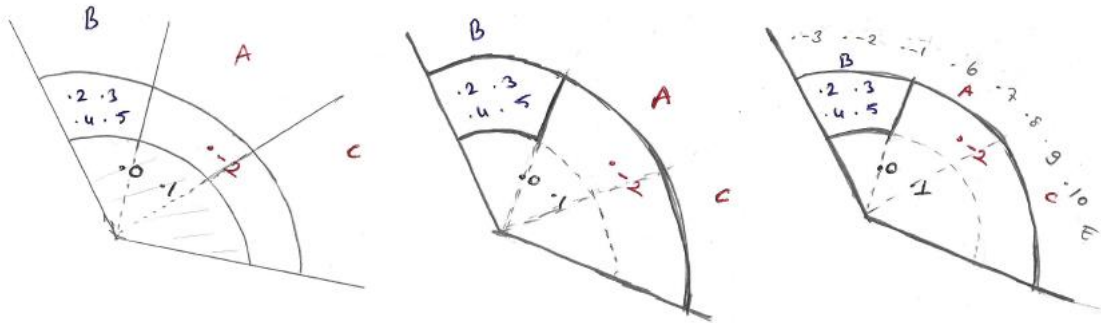
Şekil 4.3.2.2 G₁Ö'nin taslak resmi: amaçsız taslak resim

A: Bu resmin hemen yanındaki resim nedir? Oraya mı çizmeye devam ettin?

G₁Ö: Orada sadece harflendirme yapıp öyle bir denedim, bununla ilgili herhangi bir düşüncem yoktu. Sadece bunu başlangıç düşüncesi olarak ele aldım, yani iç içe olan şeyler ve sonsuza giden şeyler küme dediğimizde...

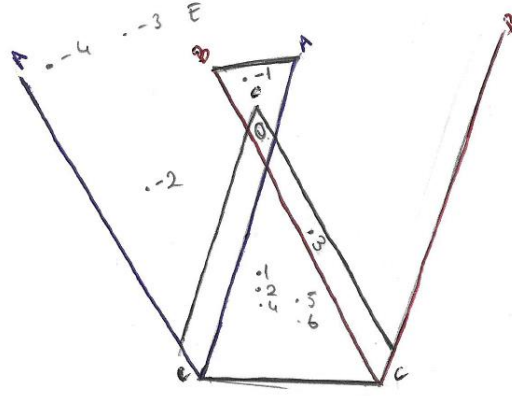
4.3.2.3. Renklendirme Alt Kategorisi

G₁Ö A, B ve C kümelerini ve kümelerin bazı elemanlarını farklı renklerle göstermiştir (Şekil 4.3.2.3).



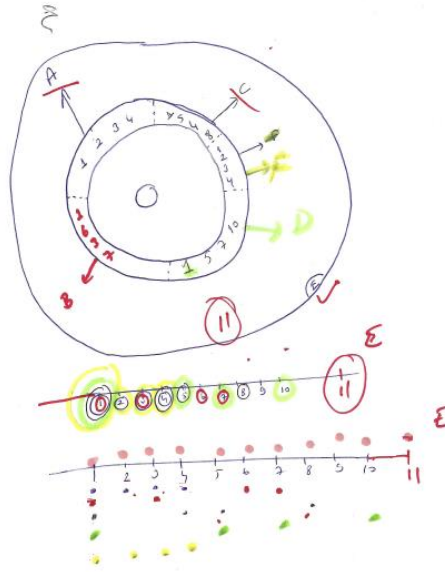
Şekil 4.3.2.3 G₁Ö'nin kümelerin elemanlarını farklı renklerle göstermesi

G₁Ö A kümesini temsil eden çizgileri kırmızı, B kümesini temsil çizgileri mavi, C kümesini temsil eden çizgileri siyah renkle göstermiştir (Şekil 4.3.2.4).



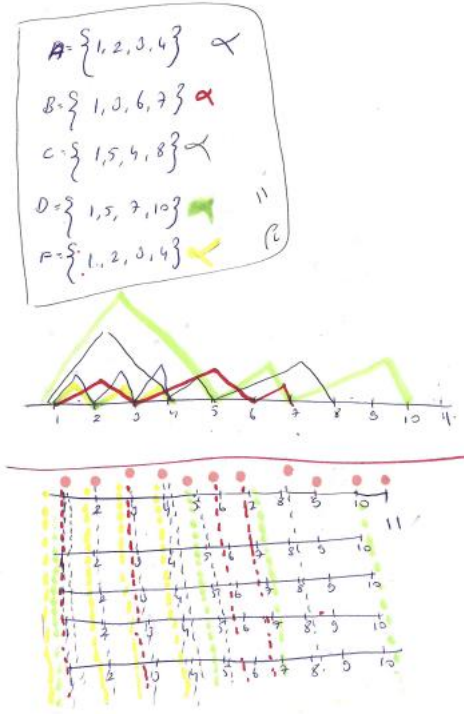
Şekil 4.3.2.4 $G_1\ddot{O}$ 'nin kümelerin çizgilerini renklendirmesi

$G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ A kümesi için mavi, B kümesi için kırmızı, C kümesi için siyah, D kümesi için yeşil, F kümesi için sarı rengini belirlemiştir. Çizdiği bir doğruya tüm elemanları yerleştirmiş ve elemanların ait oldukları kümelerin renklerine göre çember çizmiş veya nokta koymuştur (Şekil 4.3.2.5).



Şekil 4.3.2.5 $G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ 'nin küme ve elemanları renklendirmesi

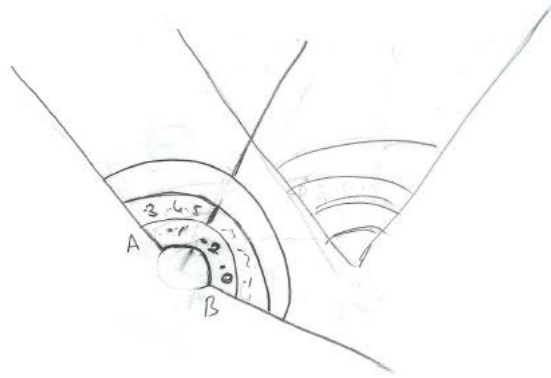
$G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ benzer şekilde A kümesi için mavi, B kümesi için kırmızı, C kümesi için siyah, D kümesi için yeşil, F kümesi için sarı rengini belirlemiştir. Tüm elemanları bir doğruya veya ayrı doğrulara yerleştirmiş, elemanların ait oldukları kümelerin renklerine göre çizgiler çizmiştir. (Şekil 4.3.2.6).



Şekil 4.3.2.6. $G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ 'nin küme ve elemanları renklendirmesi

4.3.2.4. Soyut Resim Alt Kategorisi Kavramları Temsil Etme Boyutu

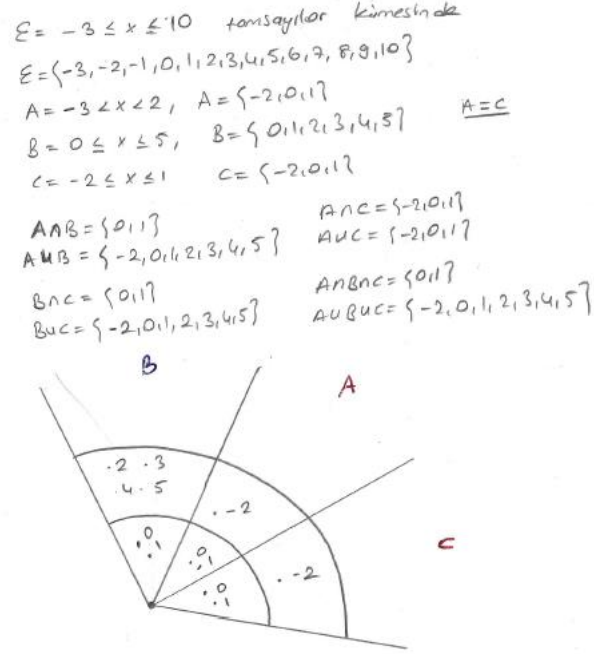
$G_1\ddot{O}$ perspektif çizimden etkilenerek kümeleri temsil etmeye çalışmıştır (Şekil 4.3.2.7).



Şekil 4.3.2.7 $G_1\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek

$G_1\ddot{O}$: Sonra şurada bir perspektif çizim yapmıştım. Resim dersinde biz perspektif çizimi yaptığımızda sonsuza doğru giden bir yol canlanıyordu gözümün önünde ve ben de bunu üçgensel bir bölgeyi kümelerin gösterimde kullanayım diye düşündüm.

$G_1\ddot{O}$ A, B ve C olmak üzere üç küme belirlemiştir. Kümelerin elemanlarını yerleştirdiği resimler çizmeye başlamıştır. İlk olarak kümelerin ortak elemanlarını birden fazla yazdığı bir resim çizmiştir (Şekil 4.3.2.8).



Şekil 4.3.2.8 $G_1\ddot{O}$ 'nin çiziminden bir örnek

$G_1\ddot{O}$: A, B ve C kümelerini üçgensel bir şekilde birinci katman ve ikinci katman olarak çizdim. Benim amacım burada ilk ve orta katmanda ortak elemanları yazmak, kesişimi belirtmek yani. İkinci adımda A, B ve C kümesinin ortak elemanları...

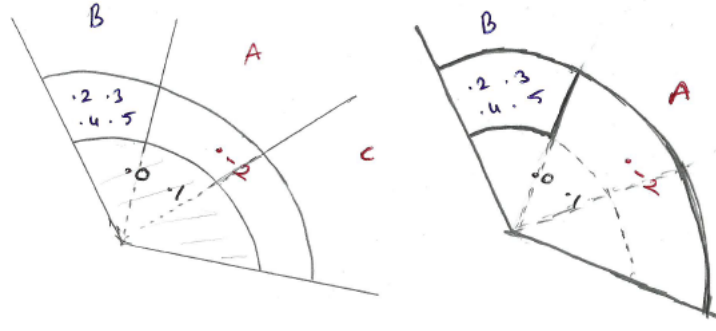
A: İlk örneğe dönecek olursak, ortak elemanlar ne oluyor?

$G_1\ddot{O}$: 0 ve 1 elemanları.

A: 0 ve 1 derken, nasıl yani? Nasıl yazdın? 0 ve 1'i hepsine mi yazdın?

$G_1\ddot{O}$: Aynen, hepsine yazdım.

$G_1\ddot{O}$ kümeleri birbirinden ayıran çizgileri kesikli çizmiş ve üzerine ortak elemanları yazmıştır (Şekil 4.3.2.9).



Şekil 4.3.2.9 $G_1\ddot{O}$ 'nin çiziminden örnekler

$G_1\ddot{O}$: Sonra ben bunları nasıl birleştiririm dediğim zaman aradaki düz çizgiyi kesikli çizgi haline getirdim, birleştirmek açısından. A, B ve C kümesinin kesişimi burası oluyor. Sonra dedim ki A ve C kümesinin diğer elemanı da ortak.

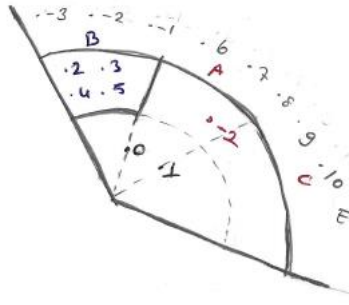
A: Hangi elemanı?

$G_1\ddot{O}$: -2 elemanı oluyor, benim aldığım kümede.

A: -2 elemanı A ve C kümelerinin ortak elemanı, kesişimlerinde.

$G_1\ddot{O}$: Ben yine onu aynı şekilde düz olan çizgisini kesikli çizgi olarak gösterdim.

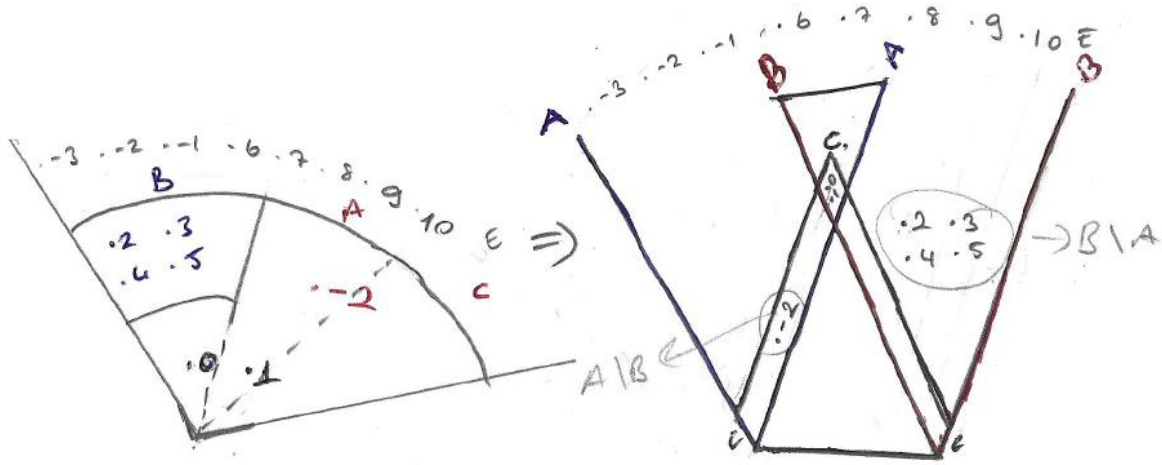
$G_1\ddot{O}$ resmine evrensel kümeyi eklemiştir (Şekil 4.3.2.10).



Şekil 4.3.2.10 $G_1\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek

$G_1\ddot{O}$: Ondan sonra dördüncü resmimde ise evrensel kümeyi nasıl çizerim dedim. Çünkü bunların, A, B ve C'nin birleşimi evrensel kümenin bir altkümesi oluyor. Evrensel kümeyi de şu şekilde etrafına bir yelpaze şeklinde çizdim buna da evrensel küme dedim.

$G_1\ddot{O}$, Şekil 4.1.6'da çizdiği A, B ve C kümelerini başka bir temsilde tekrar çizmiştir (Şekil 4.3.2.11).



Şekil 4.3.2.11 $G_1\ddot{O}$ 'nin kümelerle ilgili kavram resimleri

$G_1\ddot{O}$: İkinci küme şurada -4 ile 6 arasında aldığım bir küme, evrensel küme burası. Burada B ve C'nin kesişiminde iki eleman, A ve C'nin kesişiminde bir eleman bulunuyor. Ben onu şu şekilde resmettiğim zaman kafa karışıklığı yaşıyorum çünkü A ile B'nin kesişimleri 0 ve 1. Tamam orayı hallettim, kesikli çizgi ile gösterdim ama B ve C'nin kesişimleri 0 ve 3 ve ayrıca A ile C'nin kesişimi de 0. Ben A ve C kümesinin kesişimini bu resimde gösteremediğimi fark ettim.

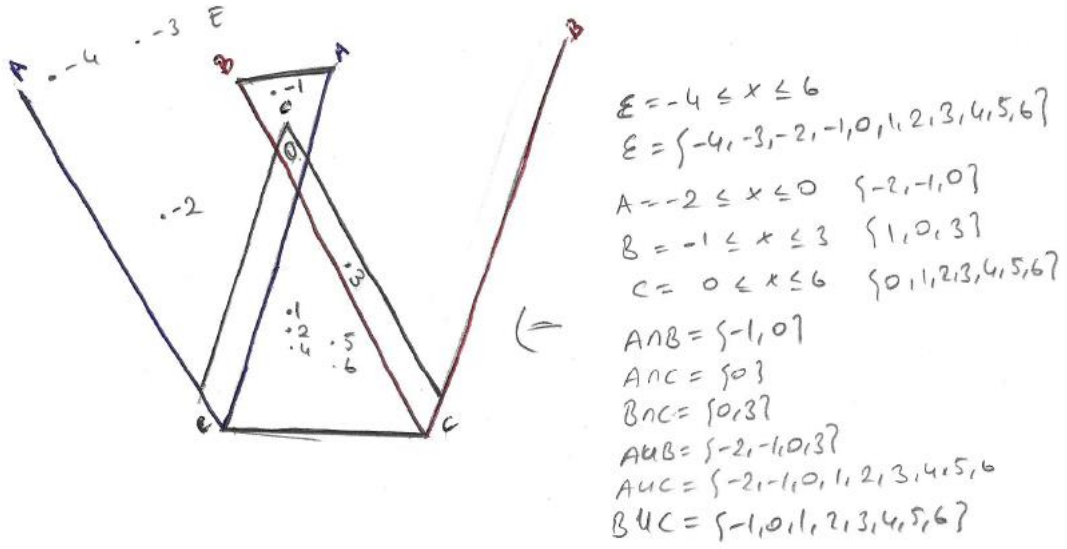
A: A ile C'nin ortak elemanı olan 0'ı nasıl göstereceksin, B kümesini atlayarak?

$G_1\ddot{O}$: Aynen, C'yi nereye çizeyim bu şekilde yaparsam. O yüzden ben de biraz daha düşündüm ve şu şekilde bir model oluşturdum. İlk önce bu modeli şurada çıkan model üzerinde denedim.

A: Hangisi?

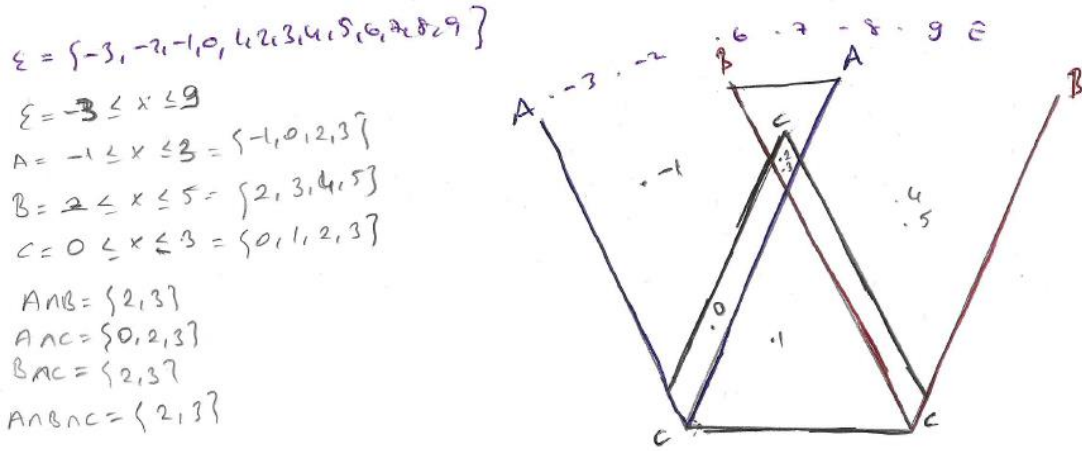
$G_1\ddot{O}$: İlk yaptığım model. İlk kümeyi şu şekilde düzelttim, şu hale çevirdim. Bu resmimde üçgensel bölgeleri kullanmak istedim. Şimdi A kümesini temsil eden üçgeni şöyle çizdim, açık bir üçgen ve mavi renkle boyadım karışmasın diye. B de yine şu tarafta bir üçgen. B kümesi için de yine şu tarafta açık bir üçgen. Bunu da kırmızı renkle boyadım. C üçgenini ise düşündüm ki hem A ile kesişecek hem B ile kesişecek, ben bunu bir ortaya çizeyim de üçünün de kesişimlerinin olduğu noktayı bulayım diye. Şurası üçünün de kesiştiği noktayı bana verecek. Sonra dedim ki A ve B'nin kesişimlerini nasıl göstereceğim? Onu da şurayı kapatarak yaptım. Aynı şekilde altını da kapattım. Böylelikle C kümesini elde ettim şurada.

$G_1\ddot{O}$ seçtiği iki farklı örneğe göre kümelerle ilgili kavram resmini oluşturmuştur (Şekil 4.3.2.12 ve Şekil 4.3.2.13).



Şekil 4.3.2.12 $G_1\ddot{O}$ 'nin kümelerle ilgili kavram resmi

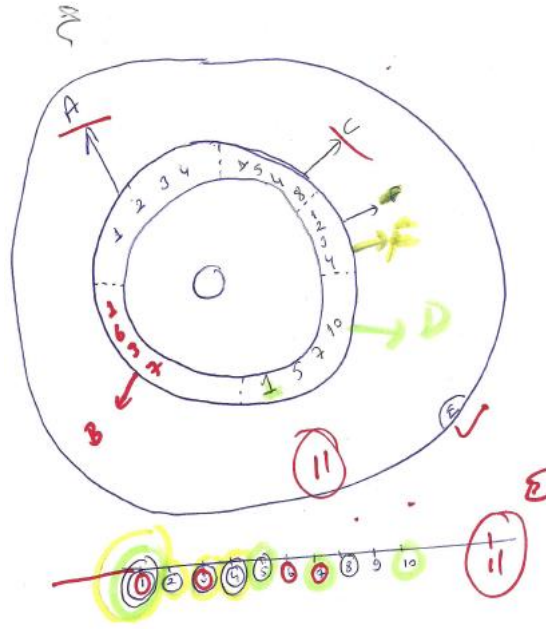
$G_1\ddot{O}$: Rastgele seçtiğim başka bir kümeyi bu modelde tekrar denedim.



Şekil 4.3.2.13 $G_1\ddot{O}$ 'nin kümelerle ilgili kavram resmi

$G_1\ddot{O}$: Bu kümeleri de bu modelde şu şekilde gösterdim.

$G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ kümelerle ilgili kavram resmini çizmiştir (Şekil 4.3.2.14).



Şekil 4.3.2.14 $G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ 'nin kümelerle ilgili kavram resmi

$G_2\ddot{O}_1$: Kümelerin gösterim yöntemi olan liste ve Venn şeması var. Birden fazla kümenin kesişimini gösterebilmek için önce bir Venn şemasını düşündük.

$G_2\ddot{O}_2$: Hocam bunu biz Venn şemasından düşünerek yaptık.

$G_2\ddot{O}_1$: Ama Venn şemasında maksimum üç tane kümenin kesişimini, farkını çok rahat görebileceğimiz için, üçten fazla kümenin kesişimini göremeyeceğimiz için, bizim yapacağımız şekil birçok kümeyi barındıracak. Bunu da tek seferde görmemiz imkânsız olacağı için ona ek bir çizim daha düşündük biz, mecburiyetten. Biz şöyle iç içe çemberler çizerek kümeler oluşturduk. İlk çizdiğimiz çemberimiz boş kümeyi oluşturuyor buradaki. Sonra şuradaki kendi kümelerimizden oluşan biz beş tane küme gösterdik ilk seferde. A, B, C, D ve F kümeleri, bir de bunları kapsayan bir evrensel küme var, ayrıca 11 sayısına sahip.

A: 11 sayısı sadece evrensel kümeye mi ait?

$G_2\ddot{O}_1$: Evet. Ondan sonra biz düz bir çizgi ele aldık.

A: Peki neden düz çizgi çizdiniz?

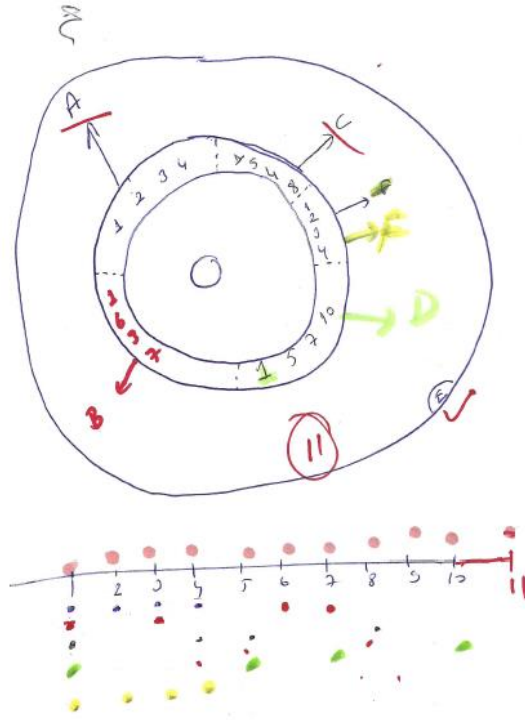
$G_2\ddot{O}_1$: Şimdi şöyle diyeyim, bu çizgiyi çizmemizin nedeni tüm kümelerin elemanlarını bu çizgi üzerinde gösterebilmek. Bunların, kümelerin her birine bir renk verdik. A kümesini mavi renk oluşturuyor. B kümesi kırmızı renkli, C kümesi siyah renkli, D kümesi yeşil renk ve F kümesi sarı renkten oluşuyor. Bu elemanlara sahip olanları rengine göre yuvarlak içine aldık. Elemanlar üzerinde hangi kümelerin renk çemberleri varsa, o elemanlar kümelerin

ortak elemanıdır demektir. Ayrıca burada çizdiğimiz sayı doğrusu değil. Sayı doğrusu almak anlamsız geldi bize. Çünkü neden? Kümelerin elemanları illa rakamlardan oluşacak diye bir şey yok, alfabeden de oluşabilir.

A: Peki, bunu sayı doğrusu fikrinden yola çıkarak mı çizdiniz?

G₂Ö₁: Evet, sayı doğrusu fikri var ama sayı doğrusu değil bu. Bu kümeler a, b, c, d gibi alfabenin harflerinden de oluşabilir. O zaman buraya harfleri yerleştiririz ya da şekilleri kafamıza göre sırayla yerleştiririz.

G₂Ö₁Ö₂Ö₃ kümelerin elemanlarını renkli noktalarla gösteren bir kavram resmi çizmişlerdir (Şekil 4.3.2.15).



Şekil 4.3.2.15 G₂Ö₁Ö₂Ö₃'nin kümelerle ilgili kavram resmi

G₂Ö₃: İkinci resimde altına noktalar şeklinde koyduk.

A: Nasıl?

G₂Ö₃: Aslında çember çizmiştik ama biraz daha karışık oluyordu. O yüzden nokta koymayı daha uygun gördük.

G₂Ö₁: Evet, burada üst üste oluyor çok çizgi yapınca...

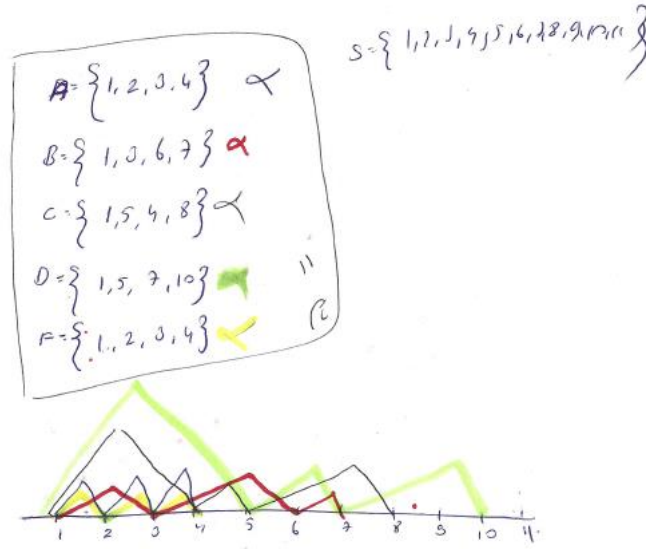
A: O zaman onu neden değiştirdiğinizi de açıklayın.

G₂Ö₂: Çember olunca yarıçapı büyüyüp gidiyor, düzgün gözükmemeye başlıyor. Birine bir çiziyoruz, birine iki çiziyoruz, birine üç, birine dört çiziyoruz...

A: İlk resminiz iç içe çemberler şeklindeydi, şekil büyüdükçe düzgün gözükmeyeceğini düşündüğünüz için mi şeklin altına noktalar koydunuz?

G₂Ö₁: Evet, şöyle baktığımız zaman...

G₂Ö₁Ö₂Ö₃ önce Venn şemasından sonra da liste yönteminden esinlenerek kavram resimlerini oluşturduklarını belirtmiştir. Benzer şekilde bir doğru çizmiş ve kümelerin elemanlarını sıralamışlardır. Elemanları kümelerin renklerine göre çizgilerle göstermişlerdir (Şekil 4.3.2.16).



Şekil 4.3.2.16 G₂Ö₁Ö₂Ö₃'nin kümelerle ilgili kavram resmi

G₂Ö₂: Buna Venn şemasından gitmiştik hocam. Oraya da biraz liste yönteminden gittik gibi oldu.

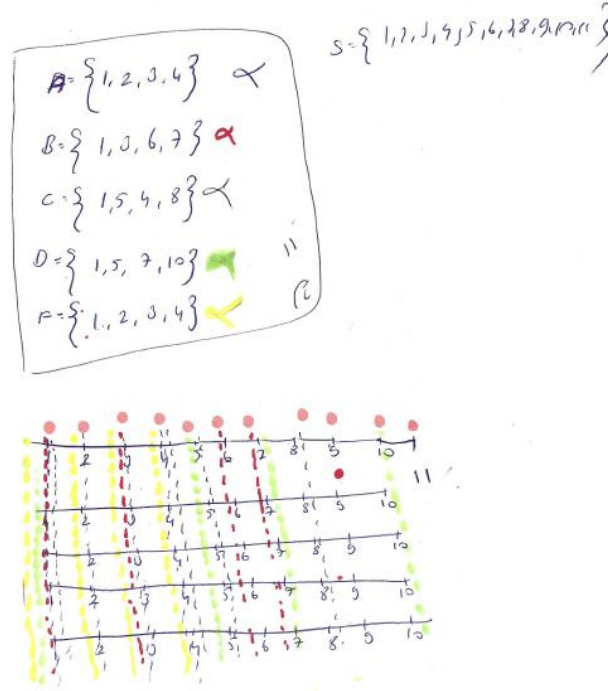
A: Bunu Venn şemasından, diğerini de liste yönteminden düşündünüz.

G₂Ö₁: Evet. Burada A, B, C, D, F kümelerini önce liste yöntemiyle yazdık. Bu kümelerin elemanlarını yine sayı doğrusu gibi bir çizgi üzerinde gösterdik. Bir de bu kümeleri kapsayan bir küme olduğunu, bir evrensel kümenin içinde olduğunu düşündük. Evrensel küme de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11. Bunda da şöyle düşündük. Yine aynı şekilde bir doğru üzerine kümelerin elemanlarını yazdık.

A: Bu kavram resmini nasıl çizdiniz?

G₂Ö₁: Bunda da hocam iki farklı yöntem düşündük. Birinci yöntem dediğimiz, mesela baktığımızda A kümesi mavi renkten oluşuyor. Çok net gözüküyor mudur? Bilmiyorum. Şunlar 1, 2, 3 ve 4; bunları yaptık. B kümesini yaptık. B kümesi kırmızı renkten oluşuyor. B kümesi 1, 3, 6 ve 7. Bu şekilde kümelerin elemanlarını üçgen gibi çizgilerle gösterdik.

G₂Ö₁Ö₂Ö₃ evrensel kümenin elemanlarını ayrı doğrular üzerine yazmış ve renkli kesikli çizgilerle kümelerin elemanlarını göstermişlerdir (Şekil 4.3.2.17).



Şekil 4.3.2.17 G₂Ö₁Ö₂Ö₃'nin kümelerle ilgili kavram resmi

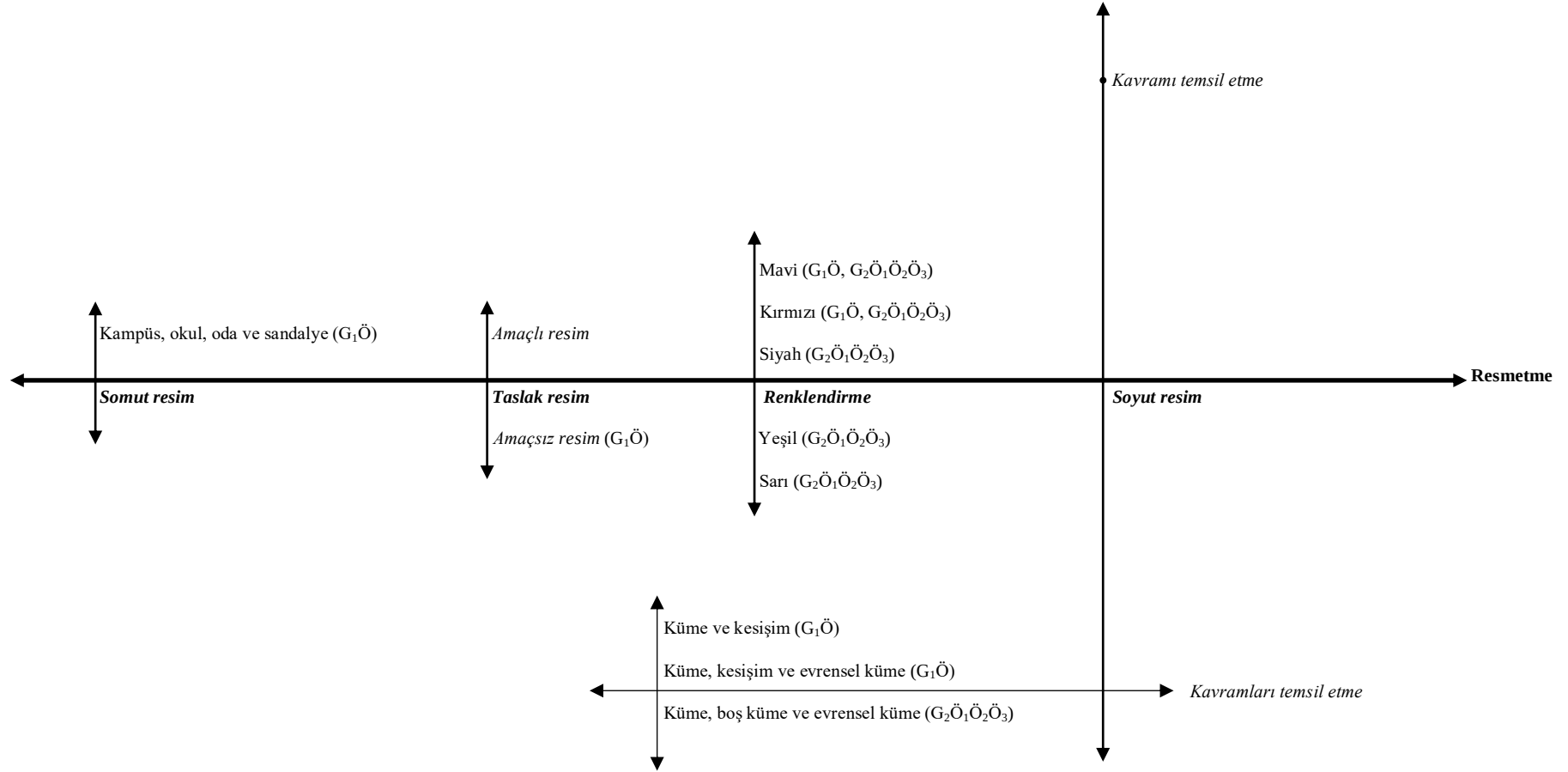
A: Diğer alttaki şekli nasıl düşündünüz?

G₂Ö₁: Bu alttakinde her biri için ayrı bir çizgi yaptık.

G₂Ö₃: Bu birleştirilmiş, bu da ayrılmış hali.

G₂Ö₁: Böyle nokta, nokta, nokta indirdik.

MÖA'ların kümeler alt öğrenme alanındaki resmetme durumları Şekil 4.3.2.18'de gösterilmiştir.



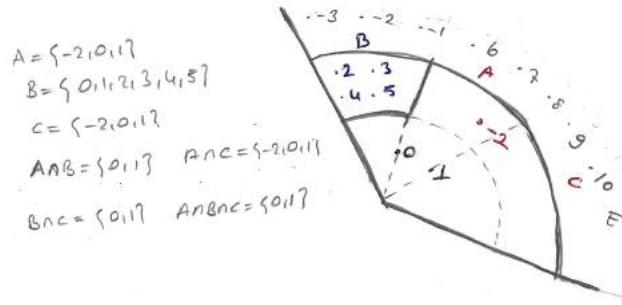
Şekil 4.3.2.18 Kümeler: resmetme kategorisi

4.3.3. Kümeler: Resmi Değerlendirme Kategorisi

Kümeler alt öğrenme alanındaki kavramlarla ilgili resmi değerlendirme kategorisine ait alt kategori, boyut ve alt boyutlar aşağıdaki gibidir.

4.3.3.1. Kendi İçinde Değerlendirme Alt Kategorisi Temsil Boyutu Yetersiz Alt Boyutu

G₁Ö, A ve C kümesinin ortak elemanı olan 0'ı resminde temsil edemediğini fark etmiştir. Resmini temsil açısından yetersiz bulmuştur (Şekil 4.3.3.1).



Şekil 4.3.3.1 G₁Ö'nin resminden bir örnek

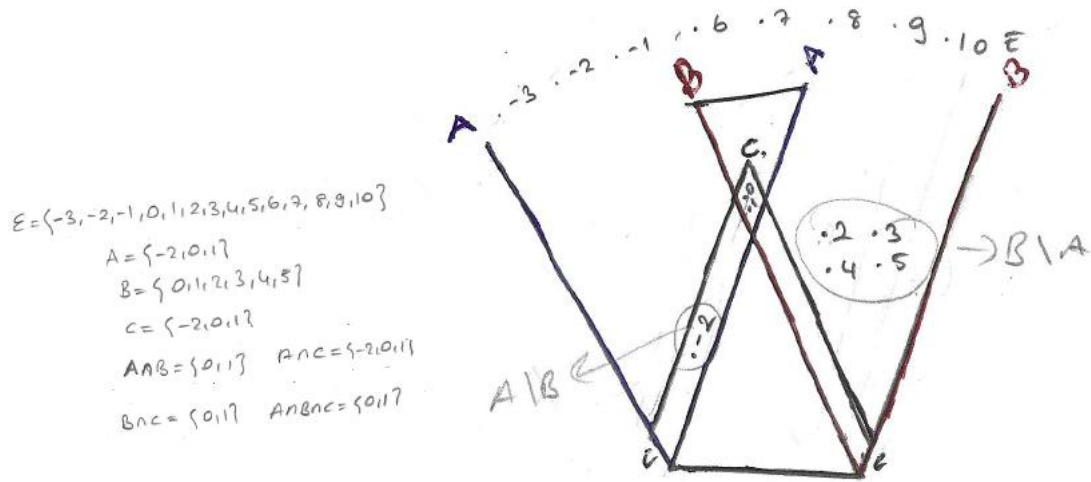
G₁Ö: İkinci küme şurada -4 ile 6 arasında aldığım bir küme, evrensel küme burası. Burada B ve C'nin kesişiminde iki eleman, A ve C'nin kesişiminde bir eleman bulunuyor. Ben onu şu şekilde resmettiğim zaman kafa karışıklığı yaşıyorum çünkü A ile B'nin kesişimleri 0 ve 1. Tamam orayı hallettim, kesikli çizgi ile gösterdim ama B ve C'nin kesişimleri 0 ve 3 ve ayrıca A ile C'nin kesişimi de 0. Ben A ve C kümesinin kesişimini bu resimde gösteremediğimi fark ettim.

A: A ile C'nin ortak elemanı olan 0'ı nasıl göstereceksin, B kümesini atlayarak?

G₁Ö: Aynen, C'yi nereye çizeyim bu şekilde yaparsam.

4.3.3.2. Kendi İçinde Değerlendirme Alt Kategorisi Temsil Açısından Boyutu Yeterli Alt Boyutu

G₁Ö, kavram resmini temsil açısından yeterli bulmuştur (Şekil 4.3.3.2).

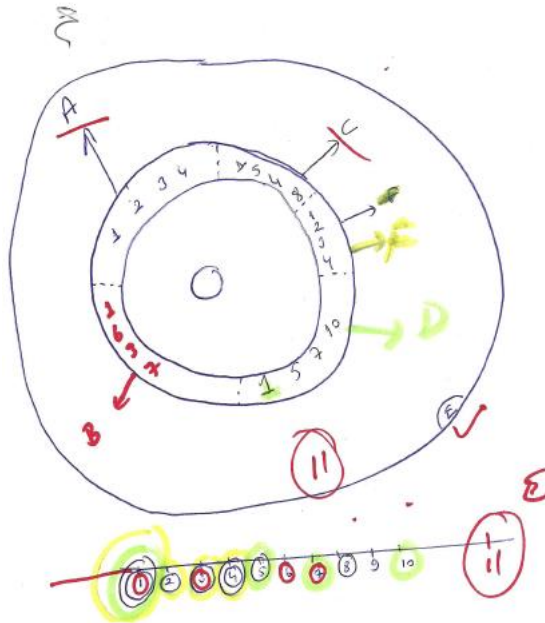


Şekil 4.3.3.2 $G_1\ddot{O}$ 'nin kümelerle ilgili kavram resmi

A: Peki bu şekilde çizdiğin zaman çözüm bulmuş oldun mu?

$G_1\ddot{O}$: Evet, çok daha rahat gözükiyordu burada. Çünkü A ve C'nin kesişimini ben burada görebiliyorum. B ve C'nin kesişimlerini ben burada görebiliyorum. Üçünün kesişimlerini burada görebiliyorum. Ayrıca A'da olup B'de olmayan rakamları da burada görebiliyorum. B'de olup A'da olmayan rakamları da burada görebiliyorum.

$G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ renkli çemberlerle kümelerin elemanlarını kolaylıkla temsil edebildiklerini ifade etmiştir. Bu şekilde gösterimi temsil açısından yeterli bulmuştur (Şekil 4.3.3.3).

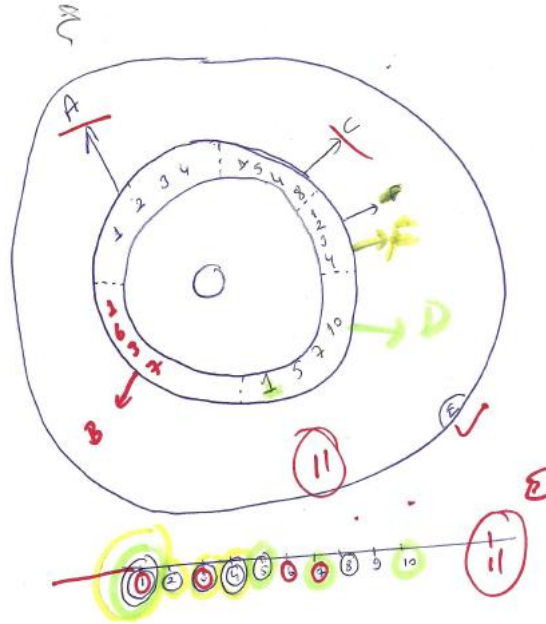


Şekil 4.3.3.3 $G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ 'nin kümelerle ilgili kavram resmi

G₂Ö₁: İlk önce şöyle düşündük biz çemberlerle her bir elemanı yuvarlak içine aldığımız zaman o renklere sahip olan kümelerin kesişimlerini ya da tek renge sahip olan elemanın diğer kümelerde olup olmadığını çok net görebildik.

4.3.3.3. Kendi İçinde Değerlendirme Alt Kategorisi Tasarım Açısından Boyutu Yetersiz Alt Boyutu

G₂Ö₁Ö₂Ö₃ kümelerin elemanlarını iç içe geçmiş renkli çemberle göstermenin görünüm açısından karışıklık oluşturacağını düşünmüş, tasarım açısından yetersiz bulmuşlardır (Şekil 4.3.3.4).



Şekil 4.3.3.4 G₂Ö₁Ö₂Ö₃'nin kümelerle ilgili kavram resmi

G₂Ö₃: İkinci resimde altına noktalar şeklinde koyduk.

A: Nasıl?

G₂Ö₃: Aslında çember çizmiştik ama biraz daha karışık oluyordu. O yüzden nokta koymayı daha uygun gördük.

G₂Ö₁: Evet, burada üst üste oluyor çok çizgi yapınca...

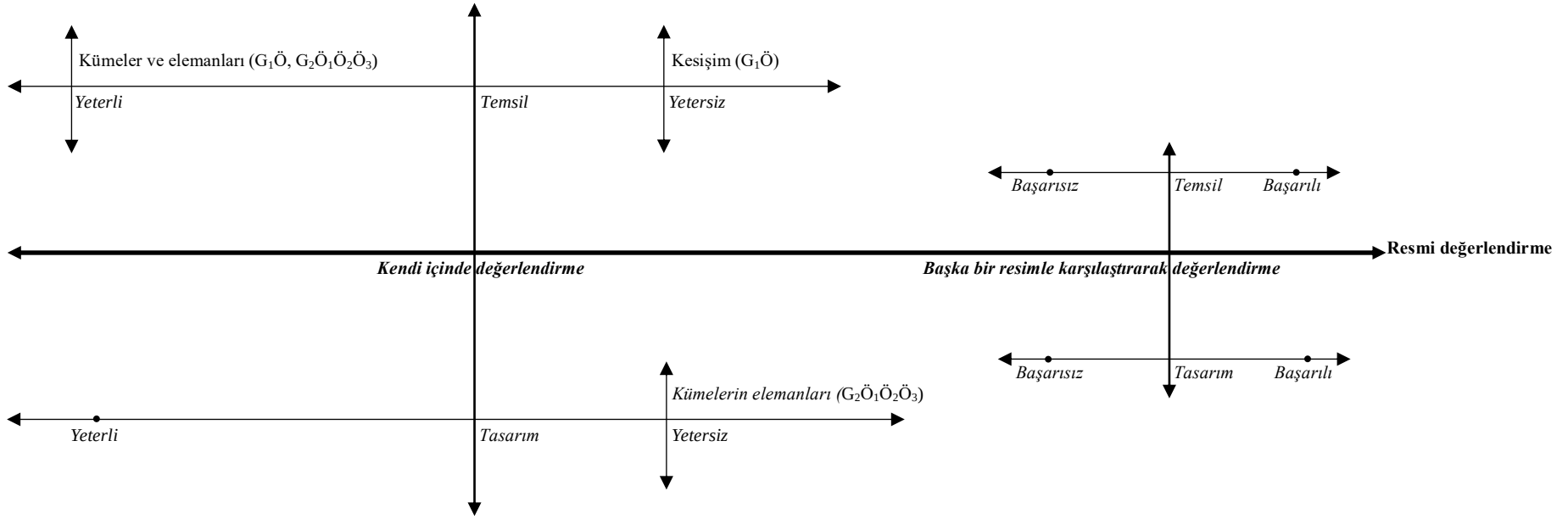
A: O zaman onu neden değiştirdiğinizi de açıklayın.

G₂Ö₂: Çember olunca yarıçapı büyüyüp gidiyor, düzgün gözükmemeye başlıyor. Birine bir çiziyoruz, birine iki çiziyoruz, birine üç, birine dört çiziyoruz.

A: İlk resminiz iç içe çemberler şeklindeydi, şekil büyüdükçe düzgün gözükmeyeceğini düşündüğünüz için mi şeklin altına noktalar koydunuz?

G₂Ö₁: Evet, şöyle baktığımız zaman...

MÖA'ların kümeler alt öğrenme alanındaki resmi değerlendirme durumları Şekil 4.3.3.5'te gösterilmiştir.



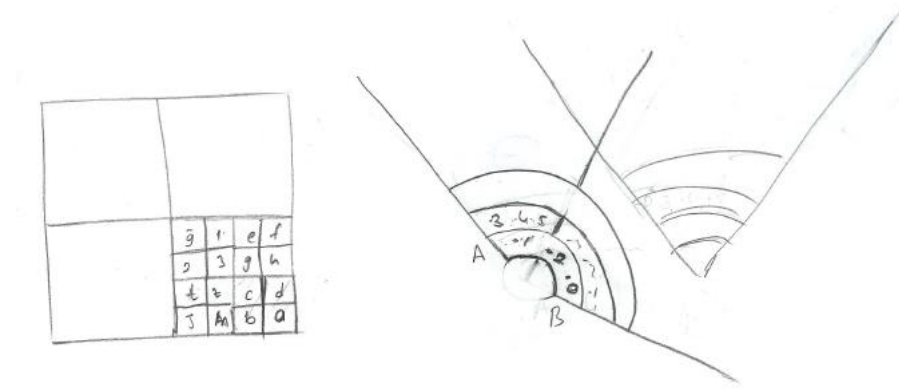
Şekil 4.3.3.5 Kümeler: resmi değerlendirme kategorisi

4.3.4. Kümeler: Resmi Değiştirme Kategorisi

Kümeler alt öğrenme alanındaki kavramlarla ilgili resmi değiştirme kategorisine ait alt kategori, boyut ve alt boyutlar aşağıdaki gibidir.

4.3.4.1. Temsil Açısından Alt Kategorisi Tamamen Değiştirme Boyutu

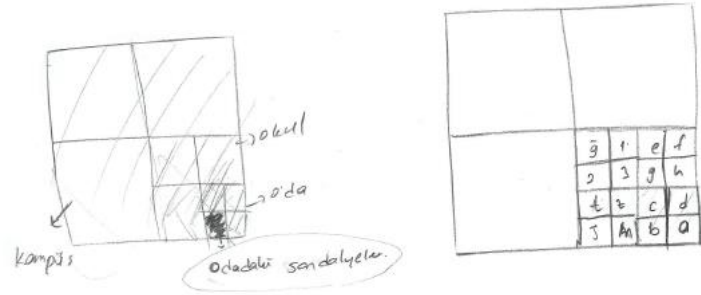
G₁Ö iç içe kareler çizerek deneme amaçlı bir resim çizmiştir. Sonra resmini tamamen değiştirmiş ve kümeleri perspektif çizimden yararlanarak temsil etmeye çalışmıştır (Şekil 4.3.4.1).



Şekil 4.3.4.1 G₁Ö'nin resmiyi temsil açısından tamamen değiştirmesi

G₁Ö: Orada sadece harflendirme yapıp öyle bir denedim, bununla ilgili herhangi bir düşüncem yoktu. Sadece bunu başlangıç düşüncesi olarak ele aldım, yani iç içe olan şeyler ve sonsuza giden şeyler küme dediğimizde... Sonra şurada bir perspektif çizim yapmıştım. Resim dersinde biz perspektif çizimi yaptığımızda sonsuza doğru giden bir yol canlanıyordu gözümün önünde ve ben de bunu üçgensel bir bölgeyi kümelerin gösterimde kullanayım diye düşündüm.

G₁Ö resminin kümelerin kesişimini göstermede yetersiz olduğunu düşünmüş ve resmini tamamen değiştirmiştir (Şekil 4.3.4.2).



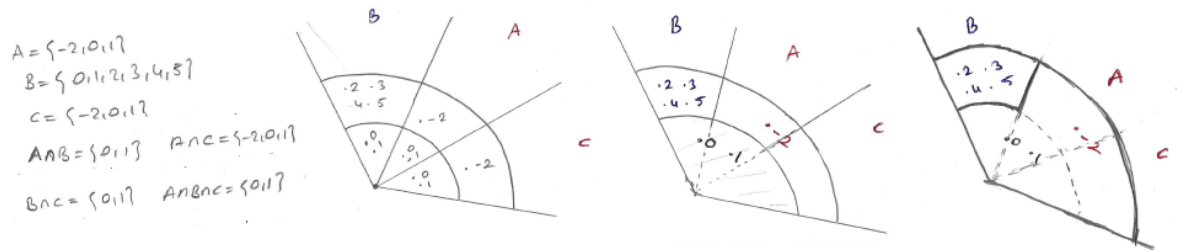
Şekil 4.3.4.3 $G_1\ddot{O}$ 'nin çizimini tasarım açısından kısmen değiştirmesi

$G_1\ddot{O}$: Ben ilk önce bu resmi çizerken... Gördüğünüz üzere karelerin içinde kareler var. Bu da biraz fraktal örneğine benziyor. Burada aslında kümenin anlamının ne olduğunu kendi içimde kavramak için yaptım. Mesela odadaki sandalyeler odanın içindeki bir kümeyi oluşturur. Oda okulun içindeki bir kümeyi oluşturur. Okul da kampüsün içindeki bir kümeyi oluşturur. Bu benim başlangıç düşüncemdi. İç içe kümeler düşündüm. Böyle düşündünce sonsuza kadar devam etmesi de gayet açık bir şey.

A: Bu resmin hemen yanındaki resim nedir? Oraya mı çizmeye devam ettin?

$G_1\ddot{O}$: Orada sadece harflendirme yapıp öyle bir denedim, bununla ilgili herhangi bir düşüncem yoktu. Sadece bunu başlangıç düşüncesi olarak ele aldım, yani iç içe olan şeyler ve sonsuza giden şeyler küme dediğimizde...

$G_1\ddot{O}$ A, B ve C kümelerinin ortak elemanları olan 0 ve 1'i üç kere, A ve C kümesinin ortak elemanı olan -2'yi resminde iki kere yazmıştır (soldan birinci resim). Yani $G_1\ddot{O}$ 'in resminde ortak elemanlar ait olduğu küme sayısı kadar resme yazılmıştır. $G_1\ddot{O}$ bu durumu ortadan kaldırmak için ortak elemanların bulunduğu yerlerdeki çizgileri kesikli çizgi haline getirmiş ve ortak elemanları bu çizgilerin üzerine yazmıştır (soldan ikinci ve üçüncü resim) (Şekil 4.3.4.4).



Şekil 4.3.4.4 $G_1\ddot{O}$ 'nin resmini tasarım açısından kısmen değiştirmesi

$G_1\ddot{O}$: Sonra ben bunları nasıl birleştiririm dediğim zaman aradaki düz çizgiyi kesikli çizgi haline getirdim, birleştirmek açısından. A, B ve C kümesinin kesişimi burası oluyor. Sonra dedim ki A ve C kümesinin diğer elemanı da ortak.

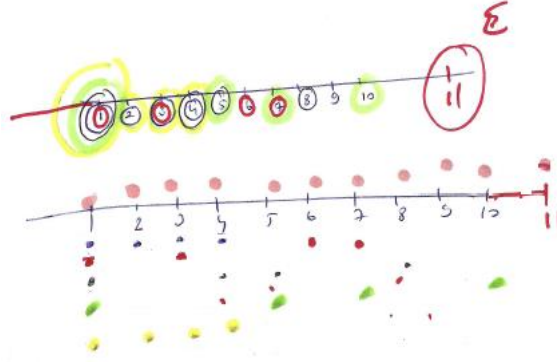
A: Hangi elemanı?

G₁Ö: -2 elemanı oluyor, benim aldığım kümede.

A: -2 elemanı A ve C kümelerinin ortak elemanı, kesişimlerinde.

G₁Ö: Ben yine onu aynı şekilde düz olan çizgisini kesikli çizgi olarak gösterdim.

G₂Ö₁Ö₂Ö₃ kümelerin elemanlarını iç içe geçmiş renkli çemberle göstermek yerine renkli noktalarla göstermeye başlamışlardır (Şekil 4.3.4.5).



Şekil 4.3.4.5 G₂Ö₁Ö₂Ö₃'nin resmini tasarım açısından kısmen değiştirmesi

G₂Ö₃: İkinci resimde altına noktalar şeklinde koyduk.

A: Nasıl?

G₂Ö₃: Aslında çember çizmiştik ama biraz daha karışık oluyordu. O yüzden nokta koymayı daha uygun gördük.

G₂Ö₁: Evet, burada üst üste oluyor çok çizgi yapınca...

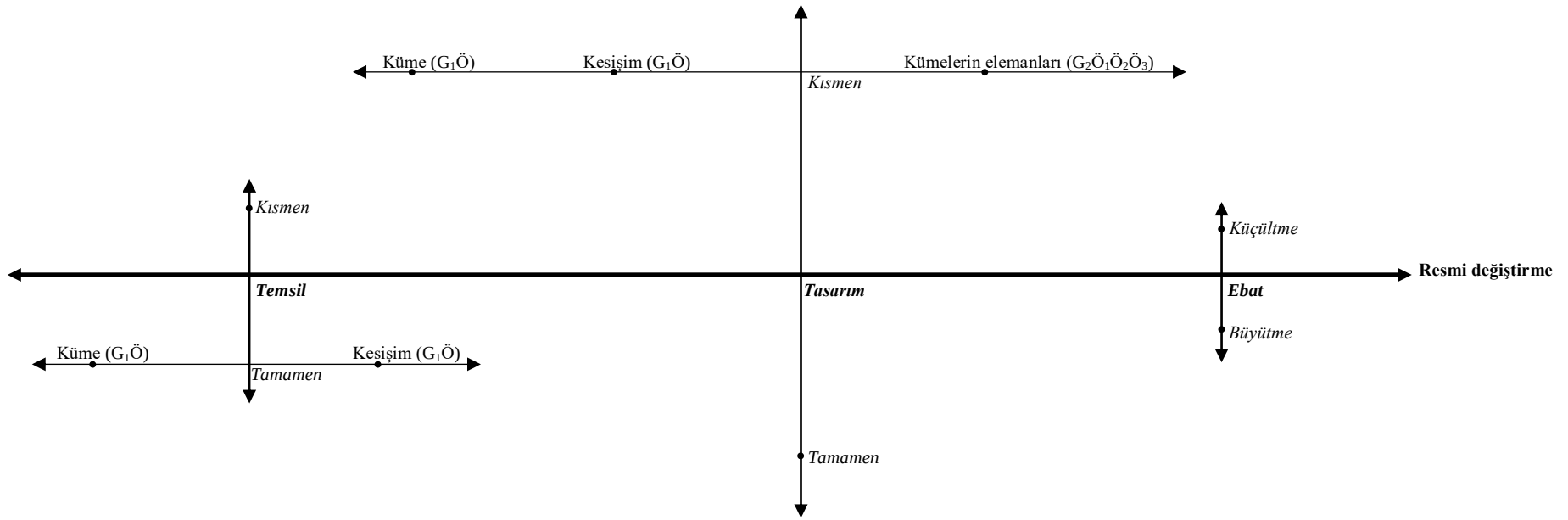
A: O zaman onu neden değiştirdiğinizi de açıklayın.

G₂Ö₂: Çember olunca yarıçapı büyüyüp gidiyor, düzgün gözükmemeye başlıyor. Birine bir çiziyoruz, birine iki çiziyoruz, birine üç, birine dört çiziyoruz...

A: İlk resminiz iç içe çemberler şeklindeydi, şekil büyüdükçe düzgün gözükmeyeceğini düşündüğünüz için mi şeklin altına noktalar koydunuz?

G₂Ö₁: Evet, şöyle baktığımız zaman...

MÖA'ların kümeler alt öğrenme alanındaki resmi değiştirme durumları Şekil 4.3.4.6'da gösterilmiştir.



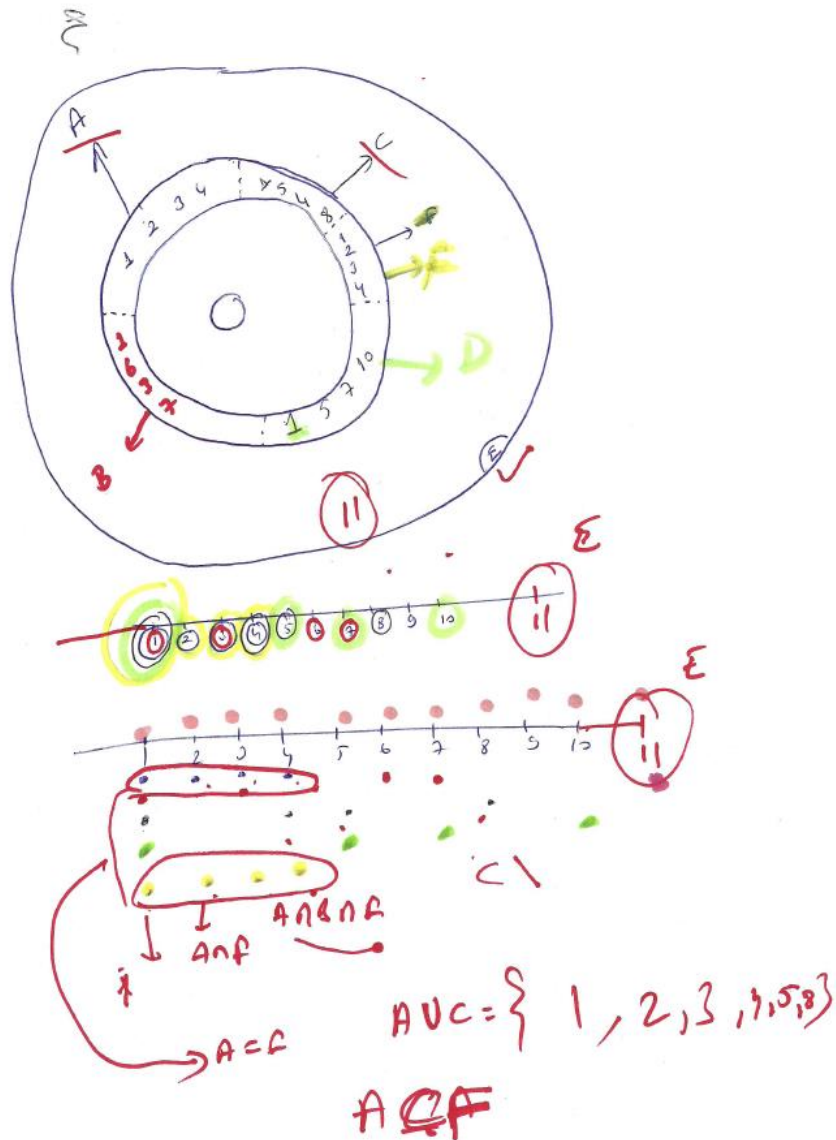
Şekil 4.3.4.6 Kümeler: resmi değiştirme kategorisi

4.3.5. Kümeler: Resmi Analiz Etme Kategorisi

MÖA'lar resimleri oluşturma süreçlerini açıklarken resimlerinin kavramlar açısından ifade ettiği anlamlardan da bahsetmişlerdir.

Bu bölümde, diğer bölümlerde olduğu gibi, kategori, alt kategori ve boyutlar ayrı ayrı ele alınarak ilgili başlıklar altında resimler açıklamalarıyla birlikte verilmemiştir. Anlaşılabilirlik açısından önce MÖA'lar tarafından çizilen kavram resimlerine sonra MÖA'ların resimle ilgili analizlerine yer verilmiştir.

G₂Ö₁Ö₂Ö₃ tarafından çizilen kümelerle ilgili kavram resmi (Şekil 4.3.5.1) ve resim analizleri aşağıdaki gibidir:



Şekil 4.3.5.1 $G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ 'nin kümelerle ilgili kavram resmi

4.3.5.1. Doğrudan Alt Kategorisi Resmi İnceleme Boyutu

$G_2\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ oluşturdukları kavram resimlerini ortak eleman ve kesişim kavramları ile ilgili olarak aşağıdaki gibi incelemiştir.

$G_2\bar{O}_1$: Yeşil renkte olan D kümesi, mavi renkte olan A kümesi, siyah renkte olan C kümesi, kırmızı renkte olan B kümesi ve de sarı renkte olan F kümesi. Hepsinin 1'de kesiştiğini görüyoruz. Çünkü her birinin burada bir çemberi ya da bir noktası var. O zaman diyoruz ki 1 burada bulunan bütün kümelerin ortak elemanı.

$G_2\bar{O}_1$: 2'ye baktığımız zaman, 2'de sadece mavi ve sarı noktalar var. Burada da baktığımız zaman mavi ve sarı çember var. Sarı F kümesi, mavi A kümesi. O zaman buradaki eleman A ile F'nin kesişiminde bulunur.

$G_2\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ oluşturdukları kavram resimlerini eşit küme kavramı ile ilgili olarak aşağıdaki gibi incelemiştir.

$G_2\bar{O}_1$: Buraya baktığımız zaman mavi, kırmızı ve sarı. A kümesi mavi, kırmızı B kümesi, sarı F kümesi, bu üç kümenin kesişiminde. Şimdi baktığımız zaman 1'e, 2'ye, 3'e ve 4'e sadece maviler sahip. Bir de aynı zamanda F kümesi sahip. Bu kümelere aynı zamanda eşit kümeler diyebiliriz. Yani $A=F$ diyebilirim.

$G_2\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ oluşturdukları kavram resimlerini fark kavramı ile ilgili olarak aşağıdaki gibi incelemiştir.

$G_2\bar{O}_1$: Mesela baktığımız zaman 8'de sadece siyah renk var. Siyah renk neydi, C kümesi. Sadece C kümesi 8 rakamına sahip olduğu için bu C'nin diğer bütün kümelerden farklıdır.

$G_2\bar{O}_1$: 10'da mesela sadece D kümesinin rengi var. 10, D kümesinin diğer kümelerden farkını göstermektedir.

4.3.5.2. Doğrudan Alt Kategorisi Resmi Anlamlandırma Boyutu

$G_2\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ oluşturdukları kavram resimlerini ortak eleman ve kesişim kavramları ile ilgili olarak aşağıdaki gibi anlamlandırmıştır.

$G_2\bar{O}_1$: Yeşil renkte olan D kümesi, mavi renkte olan A kümesi, siyah renkte olan C kümesi, kırmızı renkte olan B kümesi ve de sarı renkte olan F kümesi. Hepsinin 1'de kesiştiğini görüyoruz. Çünkü her birinin burada bir çemberi ya da bir noktası var. O zaman diyoruz ki 1 burada bulunan bütün kümelerin ortak elemanı.

$G_2\ddot{O}_1$: 2'ye baktığımız zaman, 2'de sadece mavi ve sarı noktalar var. Burada da baktığımız zaman mavi ve sarı çember var. Sarı F kümesi, mavi A kümesi. O zaman buradaki eleman A ile F 'nin kesişiminde bulunur.

$G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ oluşturdukları kavram resimlerini eşit küme kavramı ile ilgili olarak aşağıdaki gibi anlamlandırmıştır.

$G_2\ddot{O}_1$: Buraya baktığımız zaman mavi, kırmızı ve sarı. A kümesi mavi, kırmızı B kümesi, sarı F kümesi, bu üç kümenin kesişiminde. Şimdi baktığımız zaman 1'e, 2'ye, 3'e ve 4'e sadece maviler sahip. Bir de aynı zamanda F kümesi sahip. Bu kümelere aynı zamanda eşit kümeler diyebiliriz. Yani $A=F$ diyebilirim.

$G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ oluşturdukları kavram resimlerini fark kavramı ile ilgili olarak aşağıdaki gibi anlamlandırmıştır.

$G_2\ddot{O}_1$: Mesela baktığımız zaman 8'de sadece siyah renk var. Siyah renk neydi, C kümesi. Sadece C kümesi 8 rakamına sahip olduğu için bu C 'nin diğer bütün kümelerden farklıdır.

$G_2\ddot{O}_1$: 10'da mesela sadece D kümesinin rengi var. 10, D kümesinin diğer kümelerden farkını göstermektedir.

4.3.5.3. Kavram Açısından Alt Kategorisi Kavramı Belirleme Boyutu

$G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ birleşim kavramına göre oluşturdukları kavram resimlerini incelemeyi amaçlamıştır.

$G_2\ddot{O}_1$: Birleşim olarak da baktığımız zaman da şimdi, mesela bakalım. A ve C kümelerinin birleşimine bakalım. Her birinden birer tane alacağız. A ve C 'ye baktığımız zaman, yani siyah ve mavi renklere baktığımız zaman, 1'de ikisi de var. O zaman 1'i alabilirim, iki renkten birinin olması yeterli. Baktığımız zaman 2'de mavi var, siyah yok. 2'yi de alabilirim. 3'e bakıyorum sadece mavi var, yine alıyorum. 4'e bakıyorum hem siyah hem mavi renk var, 4'ü alıyorum. Ondan sonra 5'e bakıyorum sadece siyah renk var, yani 5 sadece C kümesinde var, 5'i alıyorum. Bir de 8'de siyah renk var, 8'i alıyorum. Bu da A ile B 'nin birleşimi oluyor.

$G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ altküme kavramına göre oluşturdukları kavram resimlerini incelemeyi amaçlamıştır.

G₂Ö₁: Altküme dediğimiz şey de baktığımız zaman 1, 2, 3, 4 elemanlarından oluşan A kümesi, F kümesinin bir altkümesidir.

A: Peki, kavram resminde nasıl anlatırsın bunu?

G₂Ö₁: *Şekil üzerinden mavi ve sarı renklerine bakalım mesela. Mavi 1, 2, 3 ve 4'te var. Sarı da 1, 2, 3 ve 4'te var. Yani A kümesi, sarı renkli F kümesinin altkümesi. Yani A kümesinin mavi renginin bulunduğu tüm elemanlarda, F kümesinin sarı rengi de bulunduğu için A kümesi F kümesinin altkümesi oluyor.*

G₂Ö₁Ö₂Ö₃ evrensel küme kavramına göre oluşturdukları kavram resimlerini incelemeyi amaçlamıştır.

G₂Ö₁: Evrensel küme zaten en büyük çember, evrensel kümeyi gösterdik.

G₂Ö₁Ö₂Ö₃ boş küme kavramına göre oluşturdukları kavram resimlerini incelemeyi amaçlamıştır.

G₂Ö₁: Boş kümeye geldiğimiz zaman zaten çemberimizin ilk halkası boş kümeyi oluşturmaktadır.

G₂Ö₁Ö₂Ö₃ mutlak tümleyen kavramına göre oluşturdukları kavram resimlerini incelemeyi amaçlamıştır.

G₂Ö₁: Mutlak tümleyen dediğimiz şey bir kümenin evrensel kümeden farkı. Bunu da şöyle bulabilirim. A'nın rengine ait bütün noktaları çıkarırım. 5, 6, 7, 8, 9, 10 ve 11 geriye kalan. Evrensel küme de şunların hepsi mesela. A'nın renklerini çıkarırım, geriye kalanların hepsi A'nın mutlak tümleyeni.

G₂Ö₁Ö₂Ö₃ göreceli tümleyen kavramına göre oluşturdukları kavram resimlerini incelemeyi amaçlamıştır.

G₂Ö₁: Göreceli tümleyen dediğimiz de mesela A kümesinde olup C kümesinde olmayan elemanlar. Mesela baktığımız zaman A kümesi mavi 1, 2, 3, 4; C kümesi dediğimiz siyah. Siyahlara baktığımız zaman mesela 2 ve 3. A kümesinin 1 ve 4; ortak elemanları A ile C'nin, 2 ve 3 sadece A kümesine ait eleman; yani A'nın C'den farkı.

G₂Ö₁Ö₂Ö₃ kesişim kavramına göre oluşturdukları kavram resimlerini incelemeyi amaçlamıştır.

G₂Ö₁: Bu çizgilerin aynı yerde olduğu elemanlar kümelerin kesişimindedir. Mesela baktığımız zaman 1'den hem yeşil geçiyor, hem siyah geçiyor, hem mavi geçiyor, hem sarı geçiyor, hem kırmızı geçiyor. 1, tüm kümelerin kesişiminde var.

G₂Ö₂: Beş kümenin de kesişiminde var hocam.

4.3.5.4. Kavram Açısından Alt Kategorisi Resmi Kavrama Göre İnceleme Boyutu

G₂Ö₁Ö₂Ö₃ oluşturdukları kavram resimlerini birleşim kavramı ile ilgili olarak aşağıdaki gibi incelemiştir.

G₂Ö₁: Birleşim olarak da baktığımız zaman da şimdi, mesela bakalım. A ve C kümelerinin birleşimine bakalım. Her birinden birer tane alacağız. A ve C'ye baktığımız zaman, yani siyah ve mavi renklere baktığımız zaman, 1'de ikisi de var. O zaman 1'i alabilirim, iki renkten birinin olması yeterli. Baktığımız zaman 2'de mavi var, siyah yok. 2'yi de alabilirim. 3'e bakıyorum sadece mavi var, yine alıyorum. 4'e bakıyorum hem siyah hem mavi renk var, 4'ü alıyorum. Ondan sonra 5'e bakıyorum sadece siyah renk var, yani 5 sadece C kümesinde var, 5'i alıyorum. Bir de 8'de siyah renk var, 8'i alıyorum. Bu da A ile B'nin birleşimi oluyor.

G₂Ö₁Ö₂Ö₃ oluşturdukları kavram resimlerini altküme kavramı ile ilgili olarak aşağıdaki gibi incelemiştir.

G₂Ö₁: Altküme dediğimiz şey de baktığımız zaman 1, 2, 3, 4 elemanlarından oluşan A kümesi, F kümesinin bir altkümesidir.

A: Peki, kavram resminde nasıl anlatırsın bunu?

G₂Ö₁: Şekil üzerinden mavi ve sarı renklerine bakalım mesela. Mavi 1, 2, 3 ve 4'te var. Sarı da 1, 2, 3 ve 4'te var. Yani A kümesi, sarı renkli F kümesinin altkümesi. Yani A kümesinin mavi renginin bulunduğu tüm elemanlarda, F kümesinin sarı rengi de bulunduğu için A kümesi F kümesinin altkümesi oluyor.

G₂Ö₁Ö₂Ö₃ oluşturdukları kavram resimlerini evrensel küme kavramı ile ilgili olarak aşağıdaki gibi incelemiştir.

G₂Ö₁: Evrensel küme zaten en büyük çember, evrensel kümeyi gösterdik.

G₂Ö₁Ö₂Ö₃ oluşturdıkları kavram resimlerini boş küme kavramı ile ilgili olarak aşağıdaki gibi incelemiştir.

G₂Ö₁: *Boş kümeye geldiğimiz zaman zaten çemberimizin ilk halkası boş kümeyi oluşturmaktadır.*

G₂Ö₁Ö₂Ö₃ oluşturdıkları kavram resimlerini mutlak tümleyen kavramı ile ilgili olarak aşağıdaki gibi incelemiştir.

G₂Ö₁: *Mutlak tümleyen dediğimiz şey bir kümenin evrensel kümeden farkı. Bunu da şöyle bulabilirim. A'nın rengine ait bütün noktaları çıkarırım. 5, 6, 7, 8, 9, 10 ve 11 geriye kalan. Evrensel küme de şunların hepsi mesela. A'nın renklerini çıkarırım, geriye kalanların hepsi A'nın mutlak tümleyeni.*

G₂Ö₁Ö₂Ö₃ oluşturdıkları kavram resimlerini göreceli tümleyen kavramı ile ilgili olarak aşağıdaki gibi incelemiştir.

G₂Ö₁: *Göreceli tümleyen dediğimiz de mesela A kümesinde olup C kümesinde olmayan elemanlar. Mesela baktığımız zaman A kümesi mavi 1, 2, 3, 4; C kümesi dediğimiz siyah. Siyahlara baktığımız zaman mesela 2 ve 3. A kümesinin 1 ve 4; ortak elemanları A ile C'nin. 2 ve 3 sadece A kümesine ait eleman; yani A'nın C'den farkı.*

G₂Ö₁Ö₂Ö₃ oluşturdıkları kavram resimlerini kesişim kavramı ile ilgili olarak aşağıdaki gibi incelemiştir.

G₂Ö₁: *Bu çizgilerin aynı yerde olduğu elemanlar kümelerin kesişimindedir. Mesela baktığımız zaman 1'den hem yeşil geçiyor, hem siyah geçiyor, hem mavi geçiyor, hem sarı geçiyor, hem kırmızı geçiyor. 1, tüm kümelerin kesişiminde var.*

G₂Ö₂: *Beş kümenin de kesişiminde var hocam.*

4.3.5.5. Kavram Açısından Alt Kategorisi Resmi Göre Anlamlandırma Boyutu

G₂Ö₁Ö₂Ö₃ oluşturdıkları kavram resimlerini birleşim kavramı ile ilgili olarak aşağıdaki gibi anlamlandırmıştır.

G₂Ö₁: *Birleşim olarak da baktığımız zaman da şimdi, mesela bakalım. A ve C kümelerinin birleşimine bakalım. Her birinden birer tane alacağız. A ve C'ye baktığımız zaman, yani siyah ve mavi renklere baktığımız zaman, 1'de ikisi de var. O zaman 1'i alabilirim, iki*

renkten birinin olması yeterli. Baktığımız zaman 2'de mavi var, siyah yok. 2'yi de alabilirim. 3'e bakıyorum sadece mavi var, yine alıyorum. 4'e bakıyorum hem siyah hem mavi renk var, 4'ü alıyorum. Ondan sonra 5'e bakıyorum sadece siyah renk var, yani 5 sadece C kümesinde var, 5'i alıyorum. Bir de 8'de siyah renk var, 8'i alıyorum. Bu da A ile B'nin birleşimi oluyor.

G₂Ö₁Ö₂Ö₃ oluşturdukları kavram resimlerini altküme kavramı ile ilgili olarak aşağıdaki gibi anlamlandırmıştır.

G₂Ö₁: Altküme dediğimiz şey de baktığımız zaman 1, 2, 3, 4 elemanlarından oluşan A kümesi, F kümesinin bir altkümesidir.

A: Peki, kavram resminde nasıl anlatırsın bunu?

G₂Ö₁: Şekil üzerinden mavi ve sarı renklerine bakalım mesela. Mavi 1, 2, 3 ve 4'te var. Sarı da 1, 2, 3 ve 4'te var. Yani A kümesi, sarı renkli F kümesinin altkümesi. Yani A kümesinin mavi renginin bulunduğu tüm elemanlarda, F kümesinin sarı rengi de bulunduğu için A kümesi F kümesinin altkümesi oluyor.

G₂Ö₁Ö₂Ö₃ oluşturdukları kavram resimlerini evrensel küme kavramı ile ilgili olarak aşağıdaki gibi anlamlandırmıştır.

G₂Ö₁: Evrensel küme zaten en büyük çember, evrensel kümeyi gösterdik.

G₂Ö₁Ö₂Ö₃ oluşturdukları kavram resimlerini boş küme kavramı ile ilgili olarak aşağıdaki gibi anlamlandırmıştır.

G₂Ö₁: Boş kümeye geldiğimiz zaman zaten çemberimizin ilk halkası boş kümeyi oluşturmaktadır.

G₂Ö₁Ö₂Ö₃ oluşturdukları kavram resimlerini mutlak tümleyen kavramı ile ilgili olarak aşağıdaki gibi anlamlandırmıştır.

G₂Ö₁: Mutlak tümleyen dediğimiz şey bir kümenin evrensel kümeden farkı. Bunu da şöyle bulabilirim. A'nın rengine ait bütün noktaları çıkarırım. 5, 6, 7, 8, 9, 10 ve 11 geriye kalan. Evrensel küme de şunların hepsi mesela. A'nın renklerini çıkarırım, geriye kalanların hepsi A'nın mutlak tümleyeni.

G₂Ö₁Ö₂Ö₃ oluşturdukları kavram resimlerini göreceli tümleyen kavramı ile ilgili olarak aşağıdaki gibi anlamlandırmıştır.

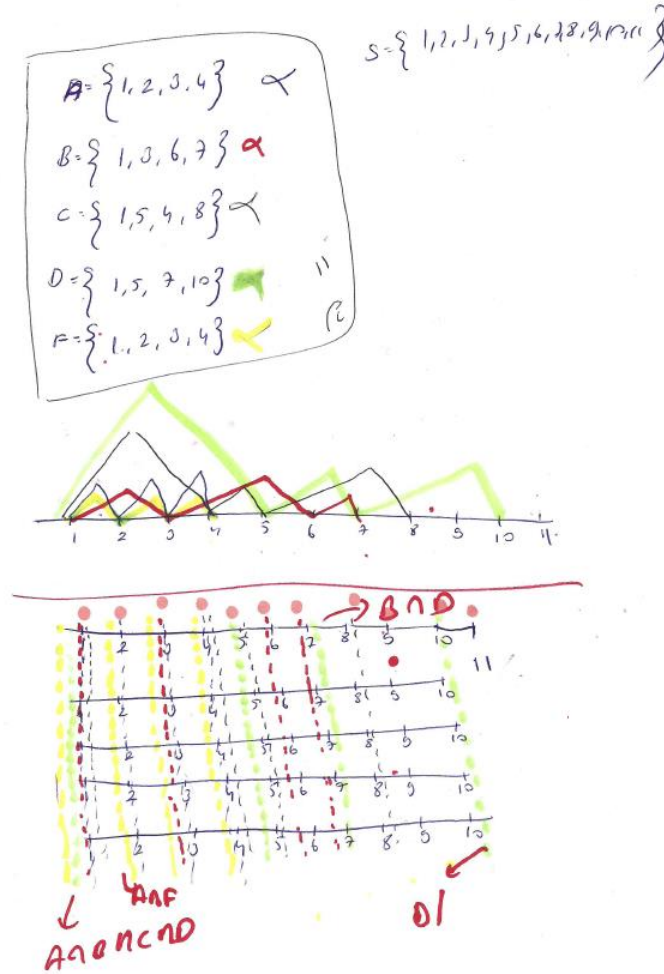
G₂Ö₁: Göreceli tümleyen dediğimiz de mesela A kümesinde olup C kümesinde olmayan elemanlar. Mesela baktığımız zaman A kümesi mavi 1, 2, 3, 4; C kümesi dediğimiz siyah. Siyahlara baktığımız zaman mesela 2 ve 3. A kümesinin 1 ve 4; ortak elemanları A ile C'nin, 2 ve 3 sadece A kümesine ait eleman; yani A'nın C'den farkı.

G₂Ö₁Ö₂Ö₃ oluşturdukları kavram resimlerini kesişim kavramı ile ilgili olarak aşağıdaki gibi anlamlandırmıştır.

G₂Ö₁: Bu çizgilerin aynı yerde olduğu elemanlar kümelerin kesişimindedir. Mesela baktığımız zaman 1'den hem yeşil geçiyor, hem siyah geçiyor, hem mavi geçiyor, hem sarı geçiyor, hem kırmızı geçiyor. 1, tüm kümelerin kesişiminde var.

G₂Ö₂: Beş kümenin de kesişiminde var hocam.

G₂Ö₁Ö₂Ö₃ tarafından çizilen kümelerle ilgili kavram resmi (Şekil 4.3.5.2) ve resim analizleri aşağıdaki gibidir:



Şekil 4.3.5.2 G₂Ö₁Ö₂Ö₃'nin kümelerle ilgili kavram resmi

4.3.5.6. Doğrudan Alt Kategorisi Resmi İnceleme Boyutu

$G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ oluşturdıkları kavram resimlerini kesişim ve ortak eleman kavramları ile ilgili olarak aşağıdaki gibi incelemiştir.

$G_2\ddot{O}_1$: 7'ye baktığımız zaman hem kırmızı yani B kümesi hem yeşil D kümesinin elemanı olacağı için, şurası daha basit görünüyor, B ve D'nin kesişiminde yer alan bir eleman.

$G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ oluşturdıkları kavram resimlerini eşit küme ve altküme kavramları ile ilgili olarak aşağıdaki gibi incelemiştir.

$G_2\ddot{O}_1$: Mesela baktığımız zaman A kümesi 1, 2, 3, 4. F kümesi, sarı renkli çizgiler, 1, 2, 3 ve 4'ten geçiyor. O zaman A ve F kümeleri eşit kümeler oluyor. Aynı zamanda A kümesinin F kümesini kapsadığını görüyoruz. Ya da F kümesinin A kümesini kapsadığını, ya da altkümesi olduğunu görüyoruz.

4.3.5.7. Doğrudan Alt Kategorisi Resmi Anlamlandırma Boyutu

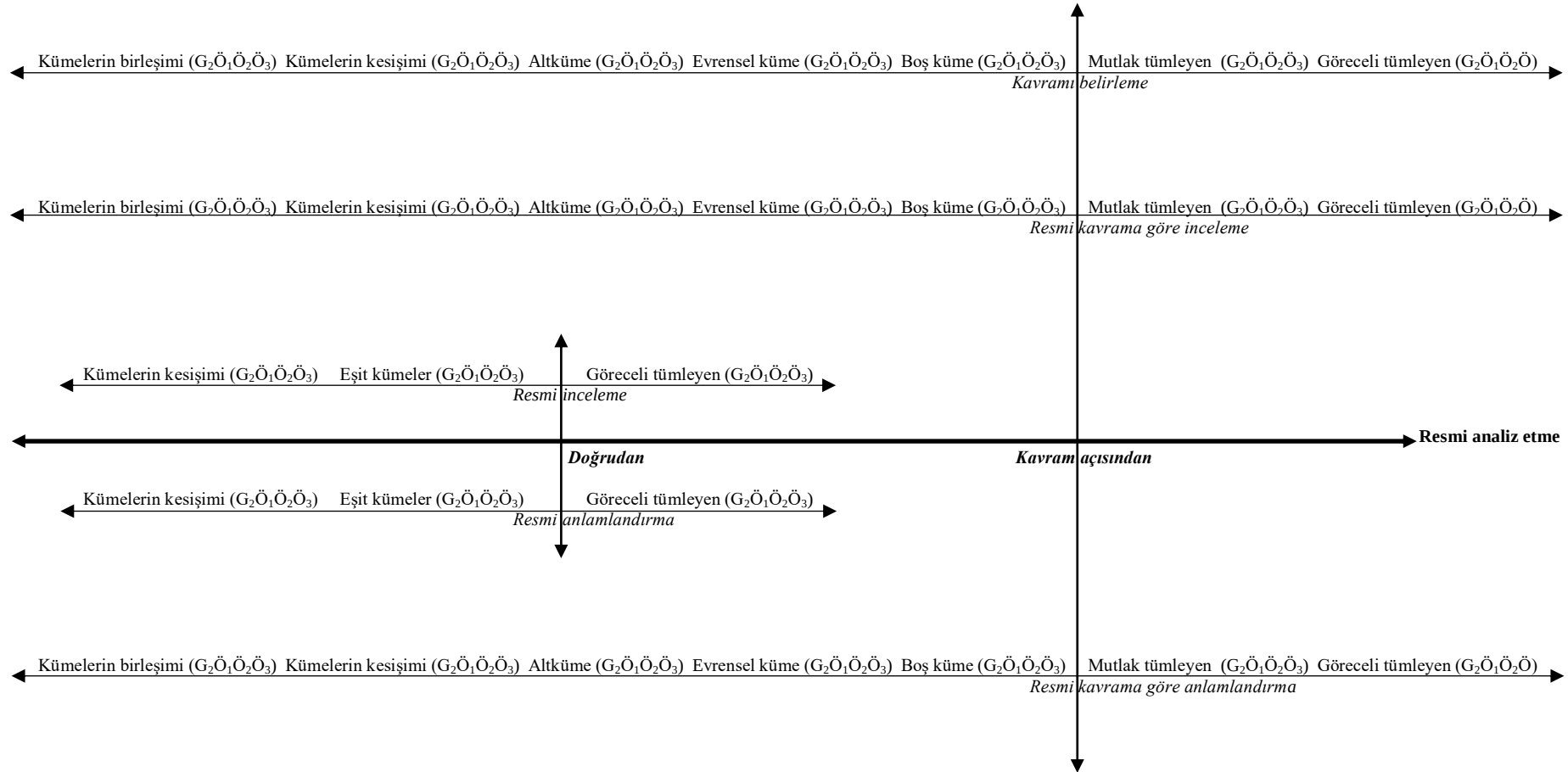
$G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ oluşturdıkları kavram resimlerini kesişim ve ortak eleman kavramları ile ilgili olarak aşağıdaki gibi anlamlandırmıştır.

$G_2\ddot{O}_1$: 7'ye baktığımız zaman hem kırmızı yani B kümesi hem yeşil D kümesinin elemanı olacağı için, şurası daha basit görünüyor, B ve D'nin kesişiminde yer alan bir eleman.

$G_2\ddot{O}_1\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ oluşturdıkları kavram resimlerini eşit küme ve altküme kavramları ile ilgili olarak aşağıdaki gibi anlamlandırmıştır.

$G_2\ddot{O}_1$: Mesela baktığımız zaman A kümesi 1, 2, 3, 4. F kümesi, sarı renkli çizgiler, 1, 2, 3 ve 4'ten geçiyor. O zaman A ve F kümeleri eşit kümeler oluyor. Aynı zamanda A kümesinin F kümesini kapsadığını görüyoruz. Ya da F kümesinin A kümesini kapsadığını, ya da altkümesi olduğunu görüyoruz.

MÖA'ların kümeler alt öğrenme alanındaki resmi analiz etme durumları Şekil 4.3.5.3'te gösterilmiştir.



Şekil 4.3.5.3 Kümeler: resmi analiz etme kategorisi

4.4. MÖA'ların Fonksiyonlar Alt Öğrenme Alanı ile İlgili Kavram Resimleri ve Resim Çizme Süreçleri

MÖA'lar fonksiyonlar alt öğrenme alanı ile ilgili kavramları görselleştirmeye çalışırken, fonksiyonların kendilerine genellikle Venn şeması ile gösterildiği için Venn şemasının etkisinden çıkamadıklarını ifade etmişlerdir. MÖA'ların fonksiyonları ağırlıklı olarak öncelikle somut resimlerden başlayarak temsil etmeye çalıştıkları, genelde ise fonksiyonları tablo ve doğrularla temsil etmeye eğilimli oldukları görülmüştür. MÖA'lar fonksiyon kavramını şimdiye kadar tam anlayamadıklarını fark ettiklerini fakat derste çizdikleri resimlerle birlikte kavramın anlamının zihinlerine daha iyi yerleştiğini belirtmişlerdir. Derste MÖA'ların kavram resimleri tartışılırken bazı MÖA'lar fonksiyonların kendi oluşturdukları kavram resimlerinin, bazı MÖA'lar ise Venn şeması ile temsil edilmesinin daha kullanışlı olduğunu düşündüklerini söylemişlerdir.

MÖA'ların fonksiyonlar alt öğrenme alanı ile ilgili kavramları görselleştirme süreçleri kategori, alt kategori ve boyutları içeren alt başlıklar altında bulgularla desteklenerek incelenmiştir.

4.4.1. Fonksiyonlar: Kavram-Resim İlişkisi Üzerine Düşünme Kategorisi

Fonksiyonlar alt öğrenme alanındaki kavramlarla ilgili kavram-resim ilişkisi üzerine düşünme kategorisine ait alt kategori, boyut ve alt boyutlar aşağıdaki gibidir.

4.4.1.1. Kavram Alt Kategorisi Tanımı İnceleme Boyutu

MÖA'lara kavramların tanımları verilmiş, bu tanımlara göre kavramların resimlerini çizmeleri istenmiştir. MÖA'lardan bazıları resimlerini açıklarken ilgili tanımlara da vurgu yapmışlardır.

A: Bana ilk baştan itibaren fonksiyon kavramından başlayarak nasıl çizim yaptığını anlatır mısın?

G₁Ö: Şimdi fonksiyon bir kümeden diğer kümeye tanımlanan bir bağıntı aslında. Özel bir bağıntı... A kümesi tanım kümesi, B kümesi değer kümesi. Bir fonksiyonun fonksiyon olabilmesi için birinci şart tanım kümesinde eşleşmeyen elemanın kalmaması gerekiyor.

Ayrıca da tanım kümesindeki hiçbir elemanın birden fazla görüntüsü olmayacak. Onları ele aldıktan sonra ben...

G₁Ö: Birim fonksiyon da her eleman kendisiyle eşleşecek hem birebir hem de örten olacak.

G₁Ö: Bileşke fonksiyonunun tanımını verdiniz. f fonksiyonu A'dan B'ye, g fonksiyonu B'den C'ye ise gof fonksiyonu A'dan C'ye dir.

G₁Ö: Fonksiyonun tersinin olması için birebir ve örten olması gerekiyordu.

G₁Ö: Değer kümesinde açıkta eleman kalmıyorsa fonksiyon örten, tanım kümesindeki herhangi farklı iki elemanın görüntüsü aynı değilse birebir...

G₁Ö: Birebir eşleme olması için fonksiyonun birebirlik ve örtenlik şartlarını sağlaması gerekiyordu.

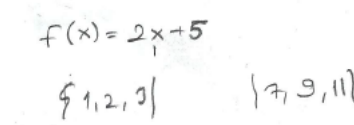
G₄Ö: Buranın boş olmasının amacı hiçbir eleman olmadan bir elemana götürmek. Yani zaten hiç olmayan bir şeyi götüremediğimiz için buna boş fonksiyon diyoruz... Orada değer kümesinde eleman var ama tanım kümesinde eleman yok.

G₄Ö: Şimdi birim fonksiyon zaten fonksiyonun tanım ve değer kümesinin aynı olması ve her elemanın yine kendisiyle eşleşmesi.

G₄Ö: Bir fonksiyonun tersinin olması için birebir ve örten olması gerekiyor fonksiyonun bunu biliyoruz.

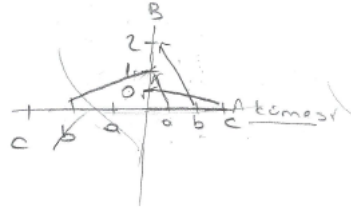
4.4.1.2. Kavram Alt Kategorisi Örneklendirme Boyutu

MÖA'lar kavramların resimlerini çizmeye çalışırken kavramları örneklemiştir. Kavram resimlerinin tümünü kavramla ilgili örnekler oluşturarak çizmişlerdir. Bu durumun yanında herhangi bir resme ait olmayan kavram örnekleri de bulunmaktadır.


$$f(x) = 2x + 5$$
$$\{1, 2, 3\} \quad \{7, 9, 11\}$$

Şekil 4.4.1.1 G₃Ö'in fonksiyonu örneklemesi

G₃Ö: Sonra bir tane örnek fonksiyon almaya çalıştım.

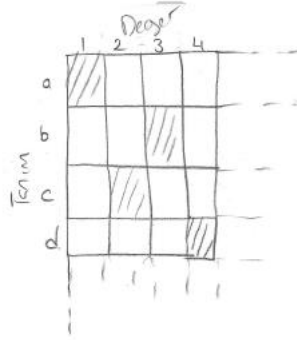


Şekil 4.4.1.2 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'in fonksiyonu örneklendirmesi

A: Peki bu resimlerinizde nasıl düşündünüz?

$G_5\ddot{O}_1$: Burada ilk çizdiğimiz fonksiyon olup olmaması ile ilgili.

Tanım kümesi A kümesi, yani x eksenine denk gelmiş oluyor, elemanları a, b, c. Değer kümesi B kümesi, elemanları 0, 1, 2.



Şekil 4.4.1.3 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin fonksiyonu örneklendirmesi

$G_5\ddot{O}_1$: Tanım kümesi A kümesi, yani x eksenine denk gelmiş oluyor, elemanları a, b, c. Değer kümesi B kümesi, elemanları 0, 1, 2. Ondan sonra bunları rast gele birbiriyle eşledik.

funksiyon tanımı

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A \in \mathbb{R}$$

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$B = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\}$$

$$f: A \rightarrow B$$

$$A = \{a, b, c\}$$

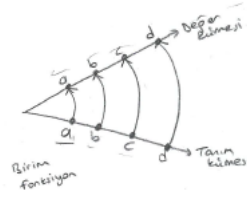
$$B = \{1, 2, 6\}$$

$$f(A) = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (a, 2)\}$$

$$f: A \rightarrow B: \{(1, 1), (2, \frac{1}{2}), (3, \frac{1}{3}), (4, \frac{1}{4})\}$$

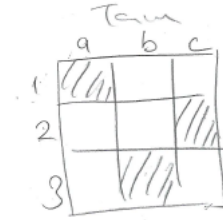
Şekil 4.4.1.4 $G_1\ddot{O}$ 'in fonksiyonu örneklendirmesi

$G_1\ddot{O}$: Ben A ve B kümesi için $A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{1, 2, 6\}$ olacak şekilde elemanlar seçtim rastgele. a, b ve c'yi, 1 ile; a'yı, 2 ile eşleştirdim.



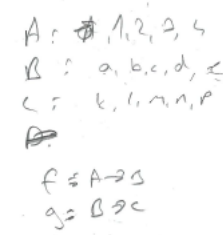
Şekil 4.4.1.5 $G_3\ddot{O}$ 'in birim fonksiyonu örneklendirmesi

$G_3\ddot{O}$: a 'dan a 'ya, b 'den b 'ye, c 'den c 'ye gidiyor, d 'den de d 'ye gidiyor diye, tanım kümesinden değer kümesine doğru. Böyle gösterdim.



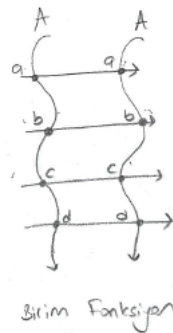
Şekil 4.4.1.6 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'in birebir ve örten fonksiyonu örneklendirmesi

$G_5\ddot{O}_2$: Daha sonra burada birebir ve örten olmasını gösterdik. a, b, c tanım kümesinin 1, 2, 3 de değer kümesinin elemanları.



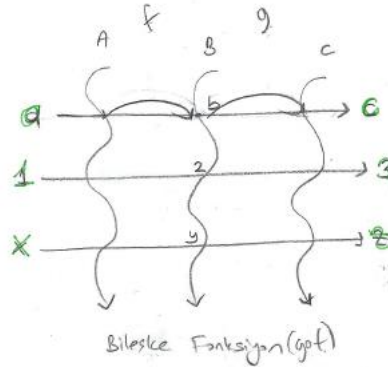
Şekil 4.4.1.7 $G_6\ddot{O}$ 'in fonksiyonu örneklendirmesi

$G_6\ddot{O}$: Burada da baktığımız zaman A, B ve C kümeleri var. A kümesi 1, 2, 3, 4; B kümesi a, b, c, d, e; C de k, l, m, n, p elemanlarından oluşuyor.



Şekil 4.4.1.8 $G_4\ddot{O}$ 'in birim fonksiyonu örneklendirmesi

$G_4\ddot{O}$: A kümesinden A kümesine gidiyor, a'dan a'ya, b'den b'ye, c'den c'ye, d'den d'ye eşleşiyor.



Şekil 4.4.1.9 $G_4\ddot{O}$ 'in bileşke fonksiyonu örneklendirmesi

$G_4\ddot{O}$: f, a'dan b'ye gitmiş; sonra g fonksiyonunda b'den c'ye gitmiş; bileşke için de a'dan c'ye gidiyor.

$$\begin{array}{l} \text{Birebir ve} \\ \text{örten} \end{array} \quad \begin{array}{l} A: \{a, b, c, d\} \\ B: \{1, 2, 3, 4\} \end{array} \\ f: A \rightarrow B = \{(a, 1), (b, 3), (c, 2), (d, 4)\}$$

Şekil 4.4.1.10 $G_1\ddot{O}$ 'in birebir ve örten fonksiyonu örneklendirmesi

$G_1\ddot{O}$: Bir fonksiyonum olsun. A'dan B'ye tanımlı olsun. Bu fonksiyonun birebir eşleme durumunda birebirlik ve örtenlik şartını sağlaması gerekiyordu. Ben de ona göre elemanlarımı seçtim.

$$\begin{array}{l} f: A \rightarrow B \quad g: B \rightarrow C \quad g \circ f: A \rightarrow C \\ A = \{a, b, c, d\} \quad B = \{1, 2, 3\} \quad C = \{x, y\} \\ f: A \rightarrow B = \{(a, 1), (b, 1), (c, 2), (d, 3)\} \\ g: B \rightarrow C = \{(1, x), (2, x), (3, y)\} \\ g \circ f: A \rightarrow C = \{(a, x), (b, x), (c, x), (d, y)\} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Bileşke} \\ \text{fonks.} \end{array}$$

Şekil 4.4.1.11 $G_1\ddot{O}$ 'in bileşke fonksiyonu örneklendirmesi

$G_1\ddot{O}$: a ve b, 1 ile; c, 2 ile; d, 3 ile eşleşiyor. B kümesinden C kümesine baktığımız zaman da 1 ve 2 elemanları x ile; 3, y ile eşleşiyor.

4.4.1.3. Kavram Alt Kategorisi Fikir Oluşturma Boyutu

MÖA'lar kavramları görselleştirmeye çalışırken oluşturdukları resimlerin bazıları kavramla ilgili fikir edinmeye yöneliktir. MÖA'ların kavramla ilgili fikir edinmeye yönelik

oluşturdukları resimleri ve açıklamaları resmetme kategorisinde tekrar ele alınmıştır. Burada sadece ilgili açıklamalara yer verilmiştir.

A: İlk baştan itibaren nasıl düşündüğünü, resmini nasıl çizdiğini anlatır mısın? İlk olarak Venn şemaları çizdin sanırım?

G₃Ö: Evet. İlk olarak birebir ve örten olan örnekler buldum, kafamda bir şey oluşması için, daha iyi özümsemek için.

A: Baştan itibaren anlatabilirsin.

G₄Ö: İlk başta iki tane küme... Venn Şeması çizdim. Kafamda net bir şey oluşması için. Zaten var olan bildiğimiz fonksiyonlarla ilgili. Yani küçük bir küme üzerinden deneyelim, bakalım. Nasılmış, neymiş, durumu bir çözmeye çalışalım diye Venn şeması üzerinden.

A: Venn şemasını da çizmişsiniz sanırım onun üzerinden de mi düşündünüz?

G₅Ö₂: Evet, mantığını oradan çıkarıp koordinat düzlemine ona göre yerleştirelim diye.

G₅Ö₁: Böyle hem görelim hem de yerleştirmek daha kolay olur diye düşündük.

A: Siz bu resminizde yine Venn şeması da çizmişsiniz yan taraflara. Neden çizdiniz? Neden çizdiğinizizi öğrenmek için soruyorum.

G₅Ö₁: Onu niye çizdik? Bir görelim dedik önce. Venn şeması üzerinde kuralları hatırlayıp, birebir ve örtenliği görüp sonra da onu yeni resmimize uyarlamaya çalıştık.

G₅Ö₂: Evet, kuralları da hatırlamaya çalıştık bir yandan. Elemanları yerleştirip Venn şemasında baktık.

G₁Ö: Benim aklıma şey geldi önce. Fonksiyon tanımı gelince dedim $y = x^2$ gibi mi eğriler gibi mi diye düşündüm ben ilk önce. Sonradan bağıntı gibi düşündüm.

A: Şu Venn şemasını neden çizmiştin peki?

G₆Ö: Çizmemin sebebi Venn şeması üzerinde düşünüp bu Venn şemasını başka hangi benzetmeyle kullanabilirim diye düşünüyorum genelde çizdiğim şekillere göre.

G₅Ö₂: Sonra önce Venn şemasında yerleştirdik. Bir fonksiyon belirleyelim ona göre bileşkesi nasıl oluyor diye Venn şemasında bakalım dedik. Hem de bileşke nasıl oluyordu Venn şeması üzerinde görmek istedik.

A: Venn Şemasını neden çizdin?

G₄Ö: Hocam zihinde tam canlansın şekil olarak diye. Bildiğimizden yola çıkarak...

A: Bilmediğinizi keşfetmek için mi?

G₄Ö: Evet, biraz yol göstereyim mantığıyla çiziyoruz bunu genelde. Sonra şu kendi şeklime aktarmaya çalıştım bunu.

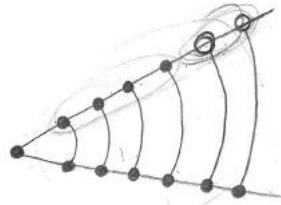
A: Sen önce Venn şemasını çizdin. Sonra kendi şekline nasıl uyarlayabileceğine mi baktın?

G₄Ö: Evet. Normalde, sadece görmek için... Onu bu şekilde kendi şeklime aktardım.

4.4.1.4. Resim Alt Kategorisi Esinlenme Noktası Bulma Boyutu

MÖA'lar resim çizerken bazen resimlerini çeşitli fikirler yardımıyla geliştirmeye çalışmışlardır. Bunların bazıları sadece fikir aşamasında kalırken bazıları da MÖA'lar tarafından geliştirilmiş ve kavramın resminin oluşturulmasında etken olmuştur.

G₃Ö fonksiyonu çizerken aç ve yay fikirlerinden esinlendiğini belirtmiştir (Şekil 4.4.1.12).



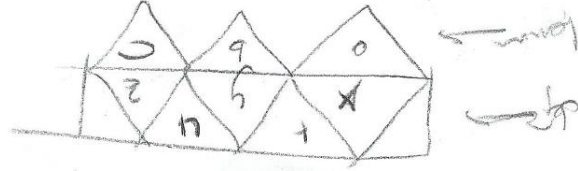
Şekil 4.4.1.12 G₃Ö'in esinlenme noktası bulması: aç ve yay

G₃Ö: Daha sonra yay gibi bir şey, açılı bir şey olsun dedim.

A: Onu neden çizdin?

G₃Ö: *Çünkü şey... Çarpı falan çıksın istemedim ben. Böyle düz, düz çizgiler oluşması için açılı gibi olsun dedim.*

G₄Ö fonksiyonu görselleştirmek için uğraşırken örüntü fikrini denemiştir (Şekil 4.4.1.13).

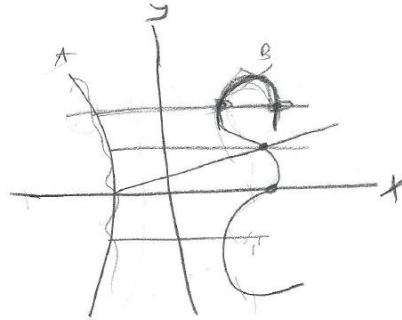


Şekil 4.4.1.13 G₄Ö'in esinlenme noktası bulması: örüntü

A: *Sonra ne çizdin?*

G₄Ö: *Hocam, bu... Şurası tanım kümesi, şurası değer kümesi. Ben benzer şekillerden farklı böyle örüntü gibi bir şeyler oluşturmaya çalıştım ama. Bu da dediğim gibi sınırlı oluyor yine mesela.*

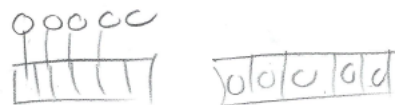
G₄Ö, başka bir resminde ise fonksiyonların grafiklerinden yararlanmaya çalıştığını, grafik fikri üzerinden resmini nasıl geliştirebileceğini düşündüğünü belirtmiştir (Şekil 4.4.1.14).



Şekil 4.4.1.14 G₄Ö'in esinlenme noktası bulması: fonksiyon grafiği

G₄Ö: *Sonra işte grafiklere geçtik. Düşündük grafik üzerinden nasıl gidebiliriz diye. Nasıl çiziyorduk, nasıl fonksiyon oluyordu...*

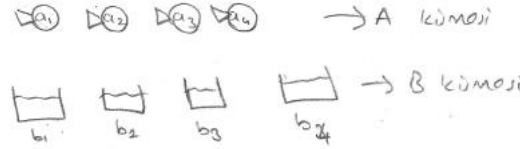
G₅Ö₁Ö₂ ilk olarak kutuların içine pullar yerleştirme düşüncesiyle resimlerine başlamışlardır (Şekil 4.4.1.15). G₅Ö₁ sonrasında bu fikri pul yerine balık ve kutu yerine akvaryum olarak değiştirmişlerdir. (Şekil 4.4.1.16).



Şekil 4.4.1.15 G₅Ö₁Ö₂'in esinlenme noktası bulması: kutu ve pul

A: *Fonksiyon, birim, örten ve birebir fonksiyonu nasıl çizdiniz? Resimleri oluşturma süreciniz nasıl gerçekleşti? Anlatınız.*

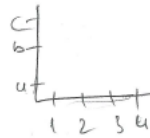
G₅Ö₁: Aklımıza aslında ilk şey gelmişti. Bir kutunun içine pullar yerleştirmek, her kutunun içine bir pul.



Şekil 4.4.1.16 G₅Ö₁Ö₂'in esinlenme noktası bulması: balık ve akvaryum

G₅Ö₁: Sonra biz bunu balık ve akvaryum olarak düşündük.

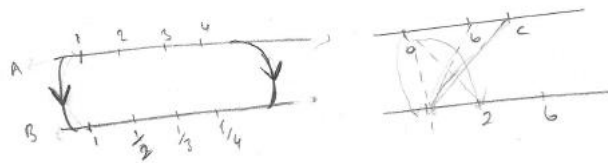
G₅Ö₁ fonksiyon ile ilgili başka bir resimlerinde koordinat sistemi düşüncesinden yola çıkarak resim çizmeye çalışmışlardır (Şekil 4.4.1.17).



Şekil 4.4.1.17 G₅Ö₁Ö₂'in esinlenme noktası bulması-koordinat sistemi

G₅Ö₂: *Aslında tam koordinat düzlemiyle aynı mantıkta yapmadık. Oklar yardımıyla birbiriyle eşledik. İki tane doğru var ve kümelerin elemanları var. Koordinat sisteminin sadece birinci bölgesini aldık.*

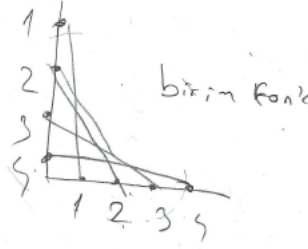
G₁Ö fonksiyonu çizdiği resminde sonsuzluğu ifade edebilmek için sayı doğrusu fikrinden esinlenmiştir (Şekil 4.4.1.18).



Şekil 4.4.1.18 G₁Ö'ün esinlenme noktası bulması: sayı doğrusu

G₁Ö: İlk önce ben sayı doğrusu çizmiştim hocam. Sayı doğrusu neden çizdim? Sonsuzluğu yansıtsın diye. Ama tam bir sayı doğrusu da değil. Çünkü sıfır falan da yok.

G₆Ö birim fonksiyonu çizerken koordinat sisteminden esinlendiğini belirtmiştir (Şekil 4.4.1.19).



Şekil 4.4.1.19 G₆Ö'nin esinlenme noktası bulması: koordinat sistemi

G₆Ö: Birim fonksiyonu da bu şekilde gösterebilirim diye düşündüm. L şeklinde doğruları çizip, sonsuza kadar uzatabildiğimiz doğrular şeklinde düşündüm. Bu şekilde uzatabiliyoruz. Bu koordinat sistemine de benziyor. Oradan biraz aklıma geldi.

4.4.1.5. Resim Alt Kategorisi Esinlenme Noktasını Geliştirme Boyutu

Bu aşamada MÖA'lar esinlenme noktasında düşündükleri fikirleri kavramlara göre geliştirmişlerdir.

G₃Ö fonksiyonu açılı ve yay fikrini geliştirerek fonksiyonu açılı, fonksiyonun elemanlarının birbirini ile eşleşmesini yarım yay şeklinde çizdiğini ifade etmiştir (Şekil 4.4.1.20).



Şekil 4.4.1.20 G₃Ö'in esinlenme noktasını geliştirmesi: açılı ve yay

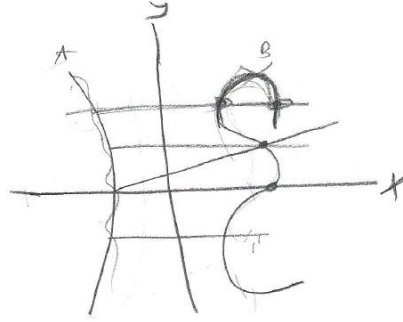
G₃Ö: Daha sonra önce aslında şu yay gibi olan şeyleri çizdim. Sonra açılı aklıma geldi.

A: Önce yarım yay gibi olan eşleşmeleri mi çizdin?

G₃Ö: Aynen, yarım yay gibi düşündüm önce. Sonra açılı oradan direkt böyle aklıma geldi yani öyle açılı bir şey olsun dedim.

G₄Ö fonksiyonların grafiği üzerinde düşündükten sonra resminde tanım ve değer kümesini çizgilerle göstermeye karar vermiştir. Tanım kümesindeki tek elemanın değer kümesindeki

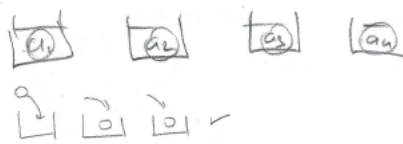
iki elemanı ile eşleşecek şekilde çizmek yani fonksiyon olmadığını göstermek için fonksiyonların grafiklerindeki eğrilerden yararlandığını belirtmiştir (Şekil 4.4.1.21).



Şekil 4.4.1.21 $G_4\ddot{O}$ 'in esinlenme noktasını geliştirmesi: fonksiyon grafiği

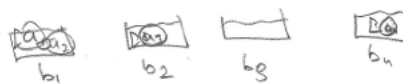
$G_4\ddot{O}$: Sonra işte grafiklere geçtim. Düşündüm grafik üzerinden nasıl gidebiliriz diye. Nasıl çiziyorduk, nasıl fonksiyon oluyordu... Ben aslında ilk şöyle düşündüm. Şimdi tanım ve değer kümesini illa yuvarlak ile değil de dedim kümeler çizgi şeklinde olsun. Şu çizgi bir küme olsun, karşısındaki de bir küme olsun diye düşündüm. Sonra burayı eğri yapmamın sebebi de ilk başta fonksiyon nasıl olmaz onu göstereyim diye düşündüm... Ya da burayı çizgiyi kesmem lazım o da biraz estetik durmaz. O yüzden eğri aklıma geldi. Buradan başladım, böyle bir eğri şeklinde yaptım. Aynı zamanda şöyle de düşündüm, tanım ve değer kümesi birbirinden ayrı olsun diye biraz.

$G_5\ddot{O}_2$ fonksiyonu önce pul ve kutu sonra balık ve akvaryum fikirleriyle temsil etmeye çalışmışlardır (Şekil 4.4.1.22 ve Şekil 4.4.1.23).



Şekil 4.4.1.22 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'in esinlenme noktasını geliştirmesi: kutu ve pul

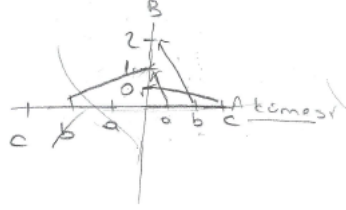
$G_5\ddot{O}_2$: Mesela şey olarak düşündük. Bir pulu iki kutuya koyamayız ama iki pulu bir kutuya koyabiliriz.



Şekil 4.4.1.23 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'in esinlenme noktasının geliştirmesi: balık ve akvaryum

G₅Ö₂: Sonra da balık için de aynı şeyi düşündük. Dedik ki daha anlaşılır olur. Her balığın bir akvaryuma girmesi lazım yaşayabilmesi için dedik... Boş akvaryum olabilir ama boş balık kalmaması gerekiyor.

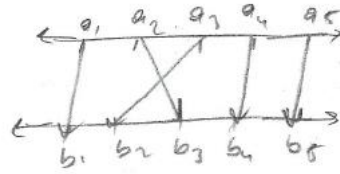
G₅Ö₂ koordinat sistemi fikrini değiştirmeye çalışarak fonksiyonu temsil etmeye çalışmıştır (Şekil 4.4.1.24).



Şekil 4.4.1.24 G₅Ö₁Ö₂'in esinlenme noktasını geliştirmesi: koordinat sistemi

G₅Ö₂: Aslında tam koordinat düzlemiyle aynı mantıkta yapmadık. Oklar yardımıyla birbiriyle eşledik. İki tane doğru var ve kümelerin elemanları var. Koordinat sisteminin sadece birinci bölgesini aldık.

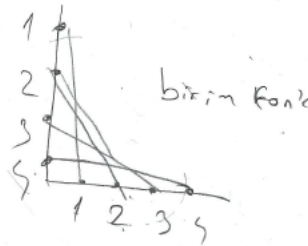
G₁Ö sayı doğrusu fikrini geliştirerek fonksiyonu çizdiğini belirtmiştir (Şekil 4.4.1.25).



Şekil 4.4.1.25 G₁Ö'ün esinlenme noktasını geliştirmesi: sayı doğrusu

G₁Ö: Kümenin elemanlarını yazacağım bir doğru çizdim aslında hocam, tam sayı doğrusu da değil. Doğrunun üzerine istediğim elemanları yazabilirim ve sonsuza doğru gidiyor, oklar olduğu için sağda ve solda. Doğruyu öyle düşündüm.

G₆Ö koordinat sisteminden esinlenerek birim fonksiyonu çizmiştir (Şekil 4.4.1.26).



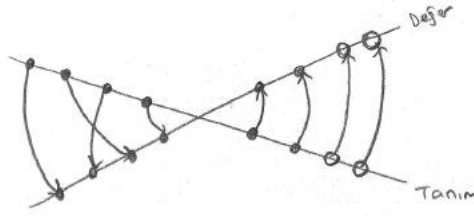
Şekil 4.4.1.26 G₆Ö'nin esinlenme noktasını geliştirmesi: koordinat sistemi

G₆Ö: Birim fonksiyonu da bu şekilde gösterebilirim diye düşündüm. L şeklinde doğruları çizip, sonsuza kadar uzatabildiğimiz doğrular şeklinde düşündüm. Bu şekilde uzatabiliyoruz. Bu koordinat sistemine de benziyor. Oradan biraz aklıma geldi.

4.4.1.6. Resim Alt Kategorisi Temsil Belirleme Boyutu Çizgi Alt Boyutu

MÖA'lar resimlerini çizerken bazen çizgiler aracılığıyla temsiller belirlemişlerdir.

G₃Ö fonksiyonun tanım ya da değer kümesinde herhangi bir eleman ile eşleşmeyen elemanları içi boş nokta ile temsil etmiştir (Şekil 4.4.1.27).

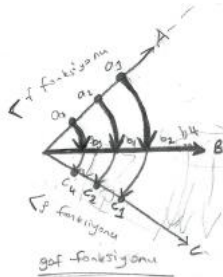


Şekil 4.4.1.27 G₃Ö'in fonksiyonlarla ilgili kavram resimlerinden bir örnek

A: Örtün olması için de şurada içi boş bir nokta ile belirttiğin gibi bir elemanın olmaması değil mi? O eleman ile hiçbir elemanı eşleştirmediğin için sanırım içini boş bırakıyorsun?

G₃Ö: Evet, aynen. Ya da normal dolu nokta da koyabilirdim ama direkt eşleşmediği bariz gözüksün diye icini boş bıraktım.

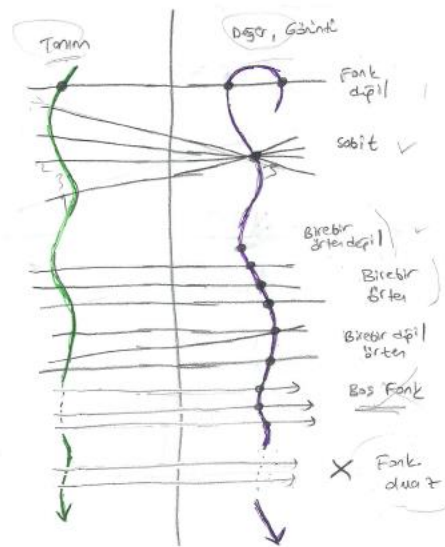
G₃Ö, f fonksiyonunun değer aynı zamanda g fonksiyonun tanım kümesi olan B kümesini temsil eden çizgiyi ve f fonksiyonunda elemanların eşleşmesini gösteren çizgiyi daha kalın çizmiştir. Bileşke fonksiyondaki fonksiyonların daha net gözükmesini amaçladığını ifade etmiştir (Şekil 4.4.1.28).



Şekil 4.4.1.28 G₃Ö'in bileşke fonksiyon resmi

A: Bazı yerleri kalın bazı yerleri ince çizmişsin. Neden öyle yaptın?

G4Ö fonksiyonun tanım ve değer kümesini tek yönlü ok şeklinde eğri, tanım ve değer kümesinde bulunan elemanların eşleşmesini düz, boş fonksiyonun tanım kümesini ve fonksiyon olmama durumu için değer kümesini eğri ve kesikli çizgilerle temsil etmiştir (Şekil 4.4.1.29).



A: Eğri çizgiler kümeyi, düz çizgiler eşleşmeyi mi temsil ediyor?

A: Boş fonksiyonu nasıl gösterdin?

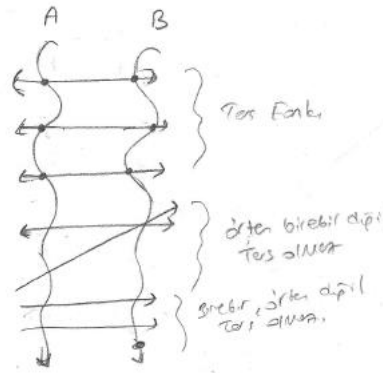
A: Fonksiyon olmamasını nasıl gösterdin?

106

A: Tanım ve değer kümelerini tek yönlü ok olarak göstermişsin.

G₄Ö: Hocam aslında şöyle aşağı ve yukarı doğru uzayabilir ama bir başlangıç alalım istedim. Bu taraf yine sonsuza doğru gidiyor zaten.

G₄Ö fonksiyonun tersinin fonksiyon olduğu durumlar için elemanların eşleşmesini çift yönlü okla, olmadığı durumlar için elemanların eşleşmesini tek yönlü okla temsil etmiştir (Şekil 4.4.1.30).



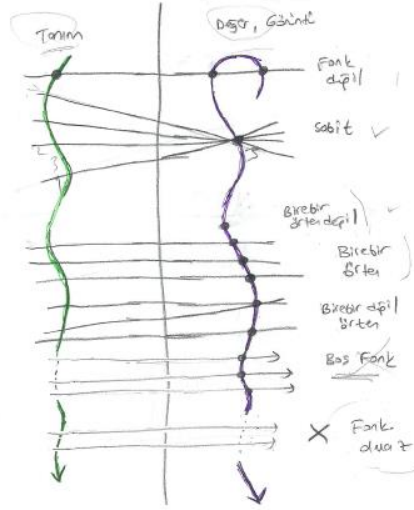
Şekil 4.4.1.30 G₄Ö'in fonksiyonlarla ilgili kavram resimlerinden bir örnek

G₄Ö: Mesela şu ilk bölmede fonksiyon birebir ve örten olduğu için burada tersi de fonksiyon oluyor. Yani çift ok olarak gösterdim onları da.

G₄Ö: Doğrunun diğer ucuna ok çizmedim, tersinin fonksiyon olmadığı gözüksün diye.

4.4.1.7. Resim Alt Kategorisi Temsil Belirleme Boyutu Renk Alt Boyutu

G₄Ö fonksiyonun tanım kümesini yeşil renkle değer kümesini mor renkle göstermiştir. (Şekil 4.4.1.31). G₄Ö renklerin herhangi bir anlamının olmadığını renkleri resmin daha anlaşılır olması için kullandığını ifade etmiştir.



Şekil 4.4.1.31 G₄Ö'nün fonksiyonlarla ilgili kavram resimlerinden bir örnek

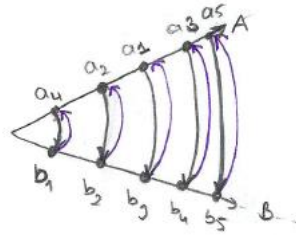
A: Yeşil olan tanım kümesi, mor olan değer kümesi olarak belirlemiştin.

G₄Ö: Evet. Önce siyah kurşun kalemle çizdim. Baktım belli olmuyor kümeler, karışık duruyor. Renklendirdim. Bunun tanım kümesi olduğu, bunun değer kümesi olduğu, elemanların buradan buraya doğru eşleştiği belli olsun, görünsün diye.

A: Böyle düşündün. Peki renkler kullanmışsın yeşil ve mor. Onların bir anlamı var mı?

G₄Ö: Sadece net görünmesi açısından.

G₃Ö fonksiyonun tersine vurgu yapmak için f fonksiyonunun elemanlarının eşleşmesini siyah, fonksiyonun tersinin elemanlarının eşleşmesini mor renkle temsil etmiştir (Şekil 4.4.1.32).

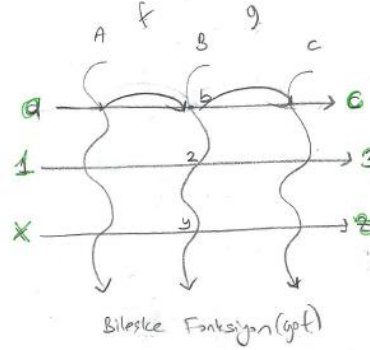


Şekil 4.4.1.32 G₃Ö'nün fonksiyonlarla ilgili kavram resimlerinden bir örnek

A: Bu resminde siyah renkle f fonksiyonunun elemanlarının eşleşmesini, mor renkle fonksiyonun tersinin elemanlarının eşleşmesini mi gösterdin?

G₃Ö: Evet.

$G_4\ddot{O}$ bileşke fonksiyonun tanım ve değer kümesinde bulunan elemanları yeşil renkle temsil etmiştir. Amacının bileşke fonksiyona dikkat çekmek olduğunu belirtmiştir (Şekil 4.4.1.33).



Şekil 4.4.1.33 $G_4\ddot{O}$ 'in fonksiyonlarla ilgili kavram resimlerinden bir örnek

$G_4\ddot{O}$: Bunları renklendirdim ki bileşke gözüksün diye.

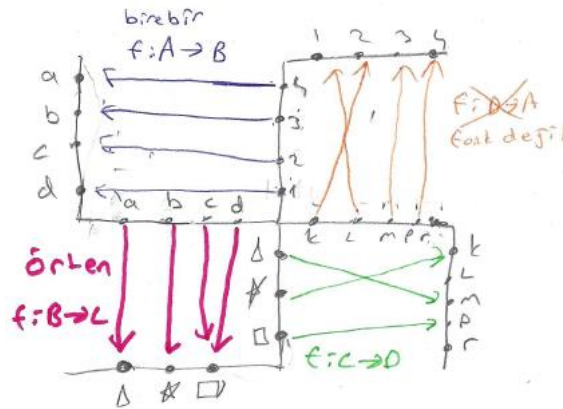
A: Tamam. Kendi bakış açına göre renklendiriyorsun.

$G_4\ddot{O}$: Evet. Bir de hocam şöyle neyi vurgulamak istiyorsam genelde onu renklendirmeye çalışıyorum burada. Burada önemli olan bileşkeyi göstermek yani böyle gittiğini en sonunda da x ile z'nin eşleştiğini göstermek için şu kenarda bulunan elemanları renkli kalemle yazdım. gof fonksiyonuna dikkat çekmek için.

A: Tamam, gof fonksiyonunun elemanları gözüksün diye renklendirdin.

$G_4\ddot{O}$: Evet.

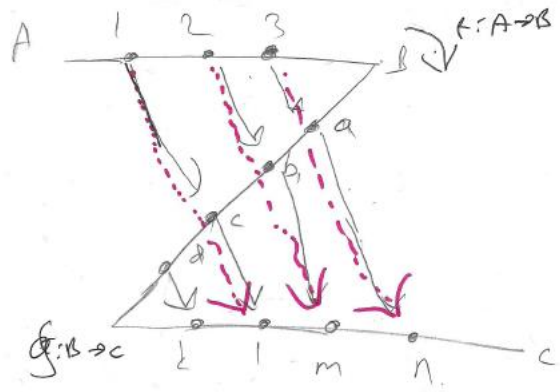
$G_6\ddot{O}$ fonksiyon (yeşil), birebir fonksiyon (mavi) ve örten fonksiyon olduğunu (pembe), ayrıca fonksiyon olmadığını (turuncu) göstermek için renkler kullanmıştır. Renkleri kullanmasındaki amacının resimde kavramların ayırt edilebilmesini sağlamak olduğunu söylemiştir (Şekil 4.4.1.34).



Şekil 4.4.1.34 $G_6\ddot{O}$ 'in fonksiyonlarla ilgili kavram resimlerinden bir örnek

G₆Ö: Bu kısmın birebir olduğunu görmek için mavi renk, bu kısmın örten olduğunu görmek için pembe renk, aynı şekilde bu klasik fonksiyon tanımı aslında onu göstermek için de yeşil renge, fonksiyon değil, yani fonksiyon olmadığını göstermek için de turuncu rengi kullandım. Renklerle ayırt edilebilmesini istedim.

G₆Ö bileşke fonksiyonda bileşkeyi oluşturan elemanların eşleşmesini pembe renkle göstermiş, bileşke fonksiyona dikkat çekmek istemiştir (Şekil 4.4.1.35).



Şekil 4.4.1.35 G₆Ö'in fonksiyonlarla ilgili kavram resimlerinden bir örnek

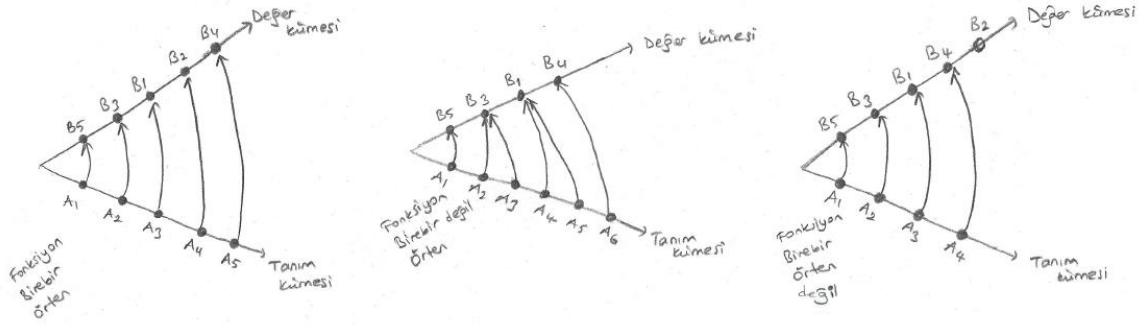
A: f ve g fonksiyonlarında elemanların eşleşmesini kurşun kalemle, bileşke fonksiyondaki eleman eşleşmelerini pembe renk ve kesikli çizgilerle gösterdin sanırım?

G₆Ö: Aynen, öyle. Bileşkeyi pembe noktalarla gösterdim. A ve B ile B ve C kümelerine dair fonksiyonları ise kurşun kalemle gösterdim. Bileşkeye dikkat çekmek istedim. Baktığımız zaman ise... gof fonksiyonuna baktığımız zaman ise A'dan C'ye oluyor. 3'ten n'ye; 2'den m'ye; 1'den l'ye gidecek şekilde bir bileşke fonksiyon oluşturmuş oluyoruz.

4.4.1.8. Yeni Bir Durumu Keşfetme Alt Kategorisi Kavram-Resim İlişkisini Keşfetme Boyutu

MÖA'ların resim ve kavram ilişkisi üzerine ettikleri genel düşünceleri ifade etmektedir.

G₃Ö kavram resminde eşleşmeyi gösteren çizgilerin görünümlerine göre şeklin birebir ya da birebir olamayacağı ile ilgili genelleme yapmıştır. Aynı şekilde fonksiyonun örten olmasını da değer kümesinde içi boş nokta ile gösterilen elemanların olup olmamasına göre anladığını belirtmiştir (Şekil 4.4.1.36).



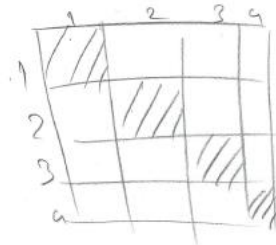
Şekil 4.4.1.36 $G_3\ddot{O}$ 'in fonksiyonlarla ilgili kavram resimleri

$G_3\ddot{O}$: Bu çizgiler düz olursa birebirdir dedim.

$G_3\ddot{O}$: Birebir olmaması da şöyle düz çizgiler gitmiyorsa birebir değildir demiştim. Zaten mantığım oydu.

$G_3\ddot{O}$: Değer kümesinde de mesela boş elaman yoksa örtendir dedim.

$G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ kavram resminde birim fonksiyonun temsili ile ilgili bir genellemeye varmıştır. Taralı alanlar karenin köşegenine denk geliyorsa bu kareyi temsil eden fonksiyonun birim fonksiyon olduğunu ifade etmiştir (Şekil 4.4.1.37).



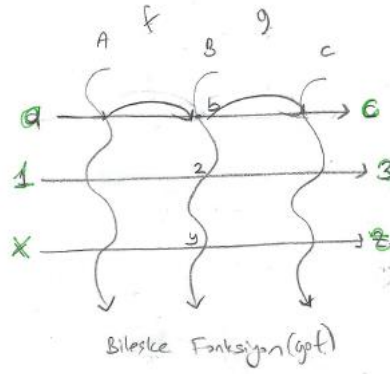
Şekil 4.4.1.37 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'in birim fonksiyon resmi

$G_5\ddot{O}_2$: Burada birim fonksiyonu çizdik.

$G_5\ddot{O}_1$: 1'i, 1 ile; 2'yi, 2 ile; 3'ü, 3 ile; hepsini yine kendisi ile eşleştirdik.

$G_5\ddot{O}_2$: Yani köşegen üzerinde yer alan kareler tarandığı zaman birim fonksiyon oluyor.

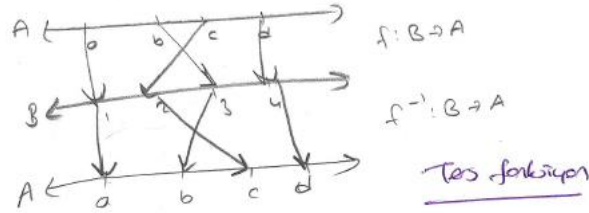
$G_4\ddot{O}$ kavram resminde bileşke fonksiyonun nasıl oluştuğuna dair bir genelleme yapmıştır (Şekil 4.4.1.38).



Şekil 4.4.1.38 $G_4\ddot{O}$ 'in bileşke fonksiyon resmi

$G_4\ddot{O}$: Şurası f fonksiyonu, şurası g fonksiyonu, giriş ve çıkış da bize $g \circ f$ fonksiyonunu veriyor.

$G_1\ddot{O}$ çizdiği kavram resminden fonksiyonun değer kümesine göre fonksiyonun tersinin simetrik olacağı genellemesine varmıştır (Şekil 4.4.1.39).



Şekil 4.4.1.39 $G_1\ddot{O}$ 'in fonksiyonun tersinin resmi

$G_1\ddot{O}$: B kümesinden A kümesine tanımlı olduğu için tersi için direkt A kümesini aşağıya yazdım ve her halükârda B kümesini temsil eden doğruya göre resim simetrik çıkacak. Yani bir ipucum da bu olabilir. Diğer başka kümelerden de örnek verelim, hep simetrik çıkacak.

A: Önce resmini çizdin, sonra simetrik olduğunu mu gördün?

$G_1\ddot{O}$: Aynen, kesinlikle. Önce gösterdim, sonra simetrik çıktığını fark ettim.

4.4.1.9. Yeni Bir Durumu Keşfetme Alt Kategorisi Kavram-Kavram İlişkisini Keşfetme Boyutu

MÖA'ların resim çizerken kavramın özelliklerini, kavramlar arasındaki ilişkileri keşfettikleri durumlar ortaya çıkmıştır. MÖA'lara fonksiyonun tersinin tanımı verilmiş ve kavram resmini çizmeleri istenmiştir. Tanıma göre bir fonksiyonun tersinin de fonksiyon olması için birebir eşleme (birebir ve örten fonksiyon) şartı vardır. MÖA'lardan bazıları fonksiyonda birebir veya örten olma durumlarını kaldırarak kavram resimlerinde bu

şekildeki fonksiyonların tersinin fonksiyon olmadığını keşfetmişlerdir. Bahsedilen kavram resimleri, resmetme kategorisi soyut resim alt kategorisinde bulunmaktadır.

G₃Ö: Burada da tersi olmayan fonksiyonu gösterdim... B'de boş bir tane eleman olduğu için örten olmaz. O zaman da fonksiyonun tersi fonksiyon olmuyor. Tersini alacak olursam da b₅ ile eşleşen eleman yok.

G₅Ö₁: Sonra birebir ve örten olmayan bir fonksiyon aldık. Burada a, 2 ile eşleşti. b ve c, 1 ile eşleşti ve burada fonksiyon birebir değil. Aynı zamanda değer kümesindeki 4 tanım kümesindeki hiçbir eleman ile eşleşmediği için örten de değil. Sonra yine yerlerini değiştiriyoruz, tanım ve değer kümesinin. Bu sefer tanım kümesindeki 1, b ve c ile eşleşmek zorunda kaldı. O yüzden tersi olmadı fonksiyonun. Ayrıca tanım kümesindeki 4 boşta kaldı, hiçbir elemanla eşleşmedi yine buradan da fonksiyon değildir.

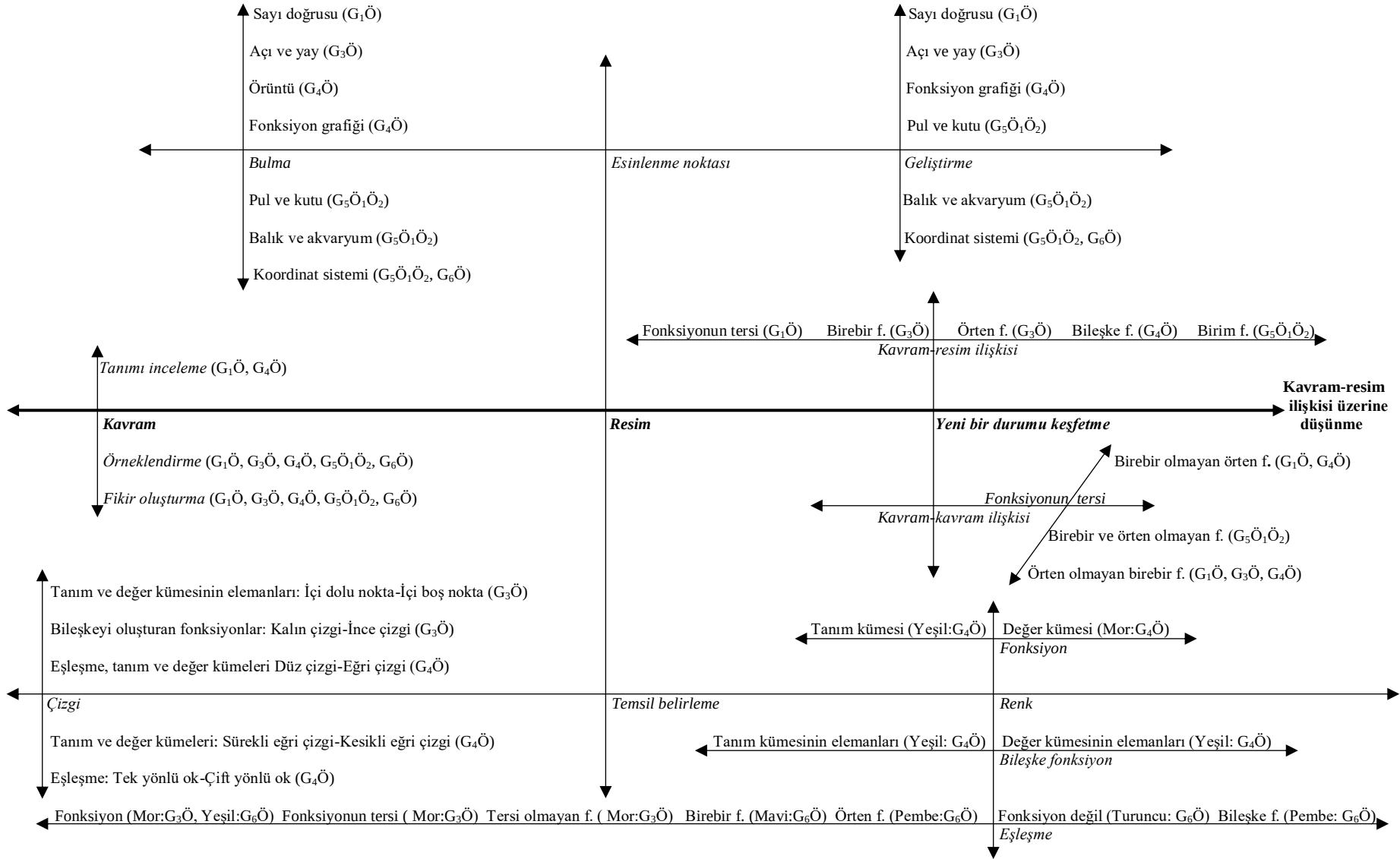
G₄Ö: Ama mesela devamındaki şu üçlü kısma bakarsak, aradaki üçlüye, burası örten ama birebir gitmemiş yani tersten baktığımız zaman bir eleman iki farklı yere gittiği için tersi fonksiyon olmaz. Tersinin fonksiyon olabilmesi için mutlaka birebir de olması gerekiyordu.

G₄Ö: Aynı şekilde altta kalan yere bakarsak burası da birebir ama değer kümesinde açıkta eleman var yani örten değil. Yine tersten baktığımız zaman tanım kümesinde boş eleman kaldığı için yine tersinin fonksiyon olmadığını görebiliyoruz. Yani buradan anlaşılıyor ki hem birebir hem örten olursa bir fonksiyonun tersi fonksiyon olur.

G₁Ö: Ama tanım kümesindeki bir eleman değer kümesinde iki farklı elemanla eşleşmiş. Bu bizim fonksiyon olma şartımıza aykırı olduğu için, bir fonksiyon sadece örtense tersi fonksiyondur diyemeyiz.

G₁Ö: Bunu sadece birebirlik için yaptım. Rastgele iki tane küme aldım. f fonksiyonu da A'dan B'ye örten değil, ama birebir. Şimdi B kümesinden A kümesine fonksiyonun tersini aldığım zaman tanım kümesinde iki eleman boşta kalıyor. Eşlemeyen elemanlar kalıyor. Tersini yine bir fonksiyon belirtmiyor.

MÖA'ların fonksiyonlar alt öğrenme alanındaki kavram-resim ilişkisi üzerine düşünme durumları Şekil 4.4.1.40'ta gösterilmiştir.



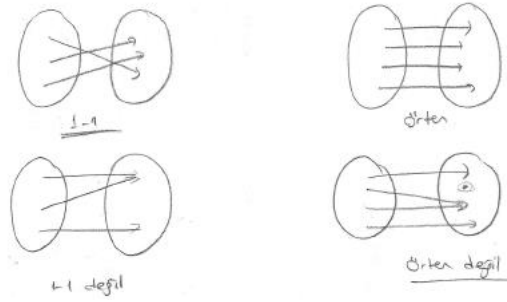
Şekil 4.4.1.40 Fonksiyonlar: Kavram-resim ilişkisi üzerine düşünme kategorisi (“f.” fonksiyon ifadesinin kısaltmasını temsil etmektedir)

4.4.2. Fonksiyonlar: Resmetme Kategorisi

Fonksiyonlar alt öğrenme alanındaki kavramlarla ilgili resmetme kategorisine ait alt kategori, boyut ve alt boyutlar aşağıdaki gibidir.

4.4.2.1. Bildiği Bir Resim Alt Kategorisi Venn Şeması Boyutu

G₃Ö resmine bildiği bir resim olan Venn şemasını kullanarak birebir, örten olan ve olmayan fonksiyon örnekleri çizerek başlamıştır (Şekil 4.4.2.1).

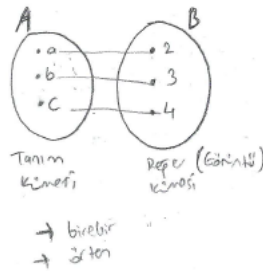


Şekil 4.4.2.1 G₃Ö'nin bildiği bir resim: Venn şeması

A: İlk baştan itibaren nasıl düşündüğünü, resmini nasıl çizdiğini anlatır mısın? İlk olarak Venn şemaları çizdin sanırım?

G₃Ö: Evet. İlk olarak birebir ve örten olan örnekler buldum, kafamda bir şey oluşması için, daha iyi özümsemek için.

G₄Ö resmine Venn şeması çizerek başladığını ifade etmiştir (Şekil 4.4.2.2).

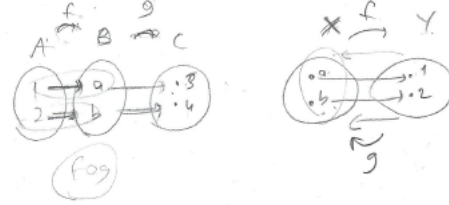


Şekil 4.4.2.2 G₄Ö'nin bildiği bir resim: Venn şeması

A: Baştan itibaren anlatabilirsin.

G₄Ö: İlk başta iki tane küme... Venn Şeması çizdim. Kafamda net bir şey oluşması için. Zaten var olan bildiğimiz fonksiyonlarla ilgili. Yani küçük bir küme üzerinden deneyelim, bakalım. Nasılmış, neymiş, durumu bir çözmeye çalışalım diye Venn şeması üzerinden.

G₄Ö bileşke fonksiyonu ve fonksiyonun tersini önce Venn şemasında çizmiştir. Venn şemasını kendi resminde yol göstermesi, resme dair fikir vermesi açısından çizdiğini belirtmiştir (Şekil 4.4.2.3).



Şekil 4.4.2.3 G₄Ö'nün bildiği bir resim: Venn şeması

A: Venn Şemasını neden çizdin?

G₄Ö: Hocam zihinde tam canlansın şekil olarak diye. Bildiğimizden yola çıkarak...

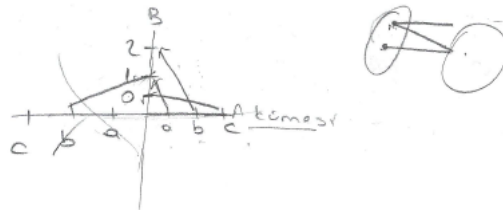
A: Bilmediğinizi keşfetmek için mi?

G₄Ö: Evet, biraz yol göstereyim mantığıyla çiziyoruz bunu genelde. Sonra şu kendi şeklime aktarmaya çalıştım bunu.

A: Sen önce Venn şemasını çizdin. Sonra kendi şekline nasıl uyarlayabileceğine mi baktın?

G₄Ö: Evet. Normalde, sadece görmek için... Onu bu şekilde kendi şeklime aktardım.

G₅Ö₁Ö₂ koordinat sistemi fikrini geliştirerek fonksiyonu temsil etmeye çalışmıştır. Bu sırada resimlerinin yanına Venn şeması da çizmişlerdir (Şekil 4.4.2.4).



Şekil 4.4.2.4 G₅Ö₁Ö₂'nin bildiği bir resim: Venn şeması

G₅Ö₁: Sonra koordinat sistemini düşündük. Şöyle çizdik.

A: Venn şemasını da çizmişsiniz sanırım onun üzerinden de mi düşündünüz?

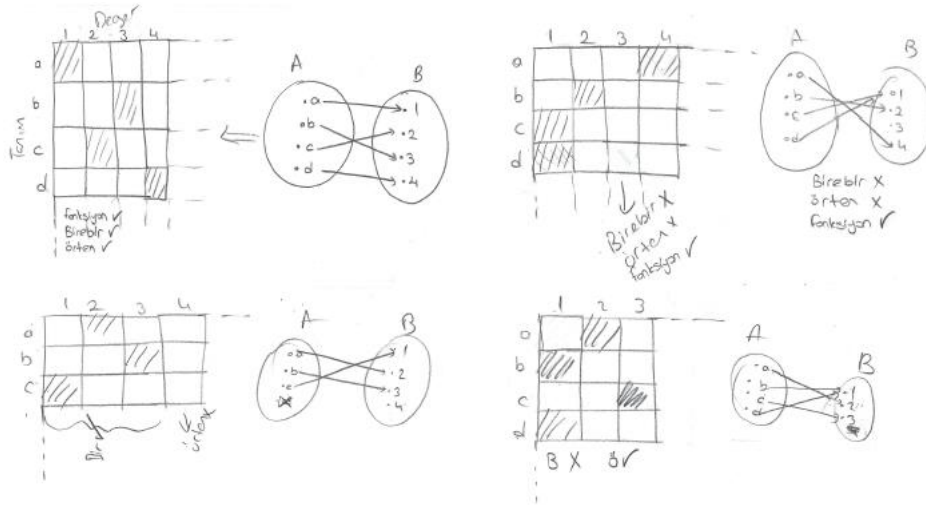
G₅Ö₂: Evet, mantığını oradan çıkarıp koordinat düzlemine ona göre yerleştirelim diye.

G₅Ö₁: Böyle hem görelim hem de yerleştirmek daha kolay olur diye düşündük.

A: Siz önce Venn şemasını çizdiniz sonra koordinat sistemi üzerinde düşünmeye başladınız. öyle mi?

G₅Ö₁: Aynen, gözüümü önünde dursun diye.

G₅Ö₁Ö₂ fonksiyon ile ilgili kavram resimlerini çizerken Venn şeması da çizmişlerdir. Kuralları hatırlamak amacıyla Venn şemasını çizdiklerini ifade etmişlerdir (Şekil 4.4.2.5).



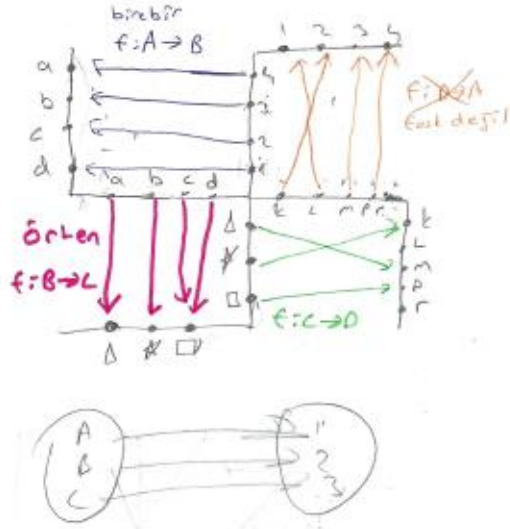
Şekil 4.4.2.5 G₅Ö₁Ö₂'nin bildiği bir resim: Venn şeması

A: Siz bu resminizde yine Venn şeması da çizmişsiniz yan taraflara. Neden çizdiniz? Neden çizdiğinizizi öğrenmek için soruyorum.

G₅Ö₁: Onu niye çizdik? Bir görelim dedik önce. Venn şeması üzerinde kuralları hatırlayıp, birebir ve örtenliği görüp sonra da onu yeni resmimize uyarlamaya çalıştık.

G₅Ö₂: Evet, kuralları da hatırlamaya çalıştık bir yandan. Elemanları yerleştirip Venn şemasında baktık.

Benzer şekilde G₆Ö fonksiyon ile ilgili kavram resmini çizerken Venn şeması da çizmiştir. Venn şemasını kavramın resmi ile ilgili fikir oluşturmak için çizdiğini ifade etmiştir (Şekil 4.4.2.6).

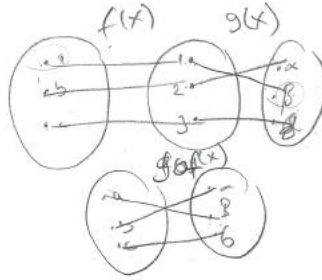


Şekil 4.4.2.6 $G_6\ddot{O}$ 'nin bildiği bir resim: Venn şeması

A: Şu Venn şemasını neden çizmiştin peki?

$G_6\ddot{O}$: Çizmemin sebebi Venn şeması üzerinde düşünüp bu Venn şemasını başka hangi benzetmeyle kullanabilirim diye düşünüyorum genelde çizdiğim şekillere göre.

$G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ bileşke fonksiyonla ilgili kavram resimlerini çizmeden önce Venn şemasını çizmiştir. Fonksiyonun bileşkesini önce Venn şeması üzerinde görmek istediklerini belirtmişlerdir (Şekil 4.4.2.7).

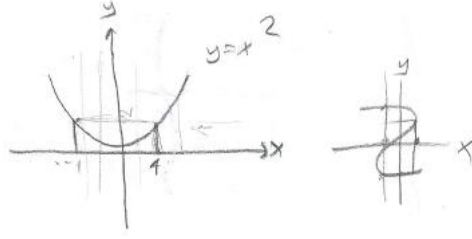


Şekil 4.4.2.7 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin bildiği bir resim: Venn şeması

$G_5\ddot{O}_1$: Sonra önce Venn şemasında yerleştirdik. Bir fonksiyon belirleyelim ona göre bileşkesi nasıl oluyor diye Venn şemasında bakalım dedik. Hem de bileşke nasıl oluyordu Venn şeması üzerinde görmek istedik.

4.4.2.2. Bildiği Bir Resim Alt Kategorisi Fonksiyon Grafiği Boyutu

$G_4\ddot{O}$, fonksiyon grafikleri çizmiştir ve resmini grafikleri düşünerek geliştirmeye çalışmıştır (Şekil 4.4.2.8).

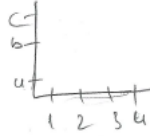


Şekil 4.4.2.8 G₄Ö'nin bildiği bir resim: fonksiyon grafiği

G₄Ö: Sonra işte grafiklere geçtik. Düşündük grafik üzerinden nasıl gidebiliriz diye. Nasıl çiziyorduk, nasıl fonksiyon oluyordu.

4.4.2.3. Bildiği Bir Resim Alt Kategorisi Koordinat Sistemi Boyutu

G₅Ö₁Ö₂ önceden bildiği bir resim olan koordinat sistemini çizmiş, bu fikirden yola çıkarak fonksiyonu temsil etmeye çalışmıştır (Şekil 4.4.2.9).



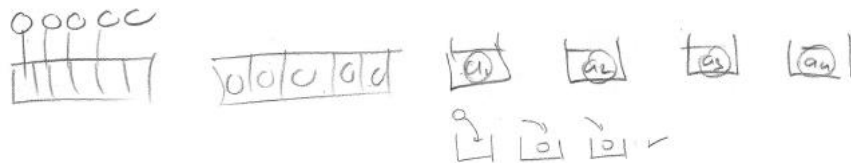
Şekil 4.4.2.9 G₅Ö₁Ö₂'nin bildiği bir resim: koordinat sistemi

G₅Ö₁: Sonra koordinat sistemini düşündük. Şöyle çizdik.

G₅Ö₂: Aslında tam koordinat düzlemiyle aynı mantıkta yapmadık. Oklar yardımıyla birbiriyle eşledik. İki tane doğru var ve kümelerin elemanları var. Koordinat sisteminin sadece birinci bölgesini aldık.

4.4.2.3. Somut Resim Alt Kategorisi

G₅Ö₁Ö₂ ilk olarak kutuların içine pullar yerleştirmeyi düşünerek birebir ve örten fonksiyonu temsil etmek istemişlerdir. Pullar tanım kümesinin elemanlarını, kutular değer kümesinin elemanlarını temsil etmektedir (Şekil 4.4.2.10).



Şekil 4.4.2.10 G₅Ö₁Ö₂'in somut resminden bir örnek

A: Fonksiyon, birim, örten ve birebir fonksiyonu nasıl çizdiniz? Resimleri oluşturma süreciniz nasıl gerçekleşti? Anlatınız.

G₅Ö₁: Aklımıza aslında ilk şey gelmişti. Bir kutunun içine pullar yerleştirmek, her kutunun içine bir pul.

A: Fonksiyon ile bunları nasıl ilişkilendirmeye çalıştınız?

G₅Ö₁: Her kutunun içine bir pul girecek şekilde düşündük. Her kutuda birer tane olduğu için bu birebir ve örtendir diye düşündük.

A: Her kutuya sadece bir pul mu girecek?

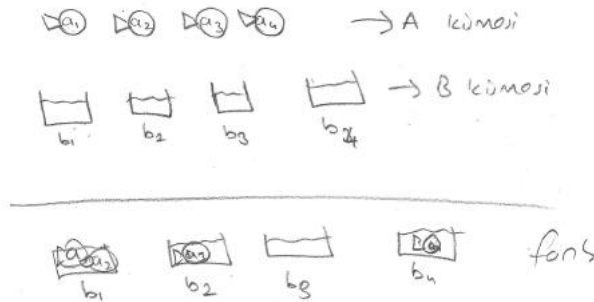
G₅Ö₁: Yok, bir değil. Mesela şöyle anlatayım. Üç kutu var ve hepsine birer tane pul girdi.

A: O zaman tanım ve değer kümeleriniz hangisi oluyor?

G₅Ö₁: Tanım kümesi pullar, değer kümesi kutular oluyor.

G₅Ö₂: Mesela şey olarak düşündük. Bir pulu iki kutuya koyamayız ama iki pulu bir kutuya koyabiliriz.

G₅Ö₁Ö₂ balıkları akvaryumun içine yerleştirmeyi düşünerek fonksiyonu temsil etmeye çalışmıştır. Balıklar tanım kümesinin, akvaryumlar değer kümesinin elemanlarıdır (Şekil 4.4.2.11).



Şekil 4.4.2.11 G₅Ö₁Ö₂'in somut resminden bir örnek

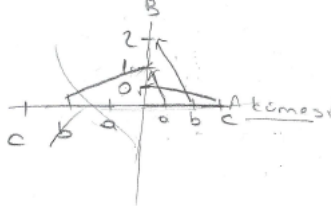
G₅Ö₂: Sonra biz bunu balık ve akvaryum olarak düşündük. Dedik ki daha anlaşılır olur. Her balığın bir akvaryuma girmesi lazım yaşayabilmesi için dedik. Balık hiçbir akvaryuma girmezse o zaman yaşayamaz, ölür, yani fonksiyon olmaz.

G₅Ö₁: Bir akvaryuma aynı anda iki tane, üç tane balık girebilir. O zaman fonksiyon birebir olmuyor. Boş akvaryum olabilir ama boş balık kalmaması gerekiyor.

4.4.2.3. Taslak Resim Alt Kategorisi Amaçlı Taslak Resim Boyutu

MÖA'ların bir kavramı temsil etmeye çalışırken deneme düşüncesiyle oluşturdukları resimlerdir. Resmin taslak veya deneme resim olduğu MÖA'lar tarafından ifade edilmiştir.

G₅Ö₁Ö₂ koordinat sistemi fikrinden yararlanarak fonksiyonu temsil etmeye çalıştıkları taslak bir resim çizdiğini ifade etmiştir (Şekil 4.4.2.12).

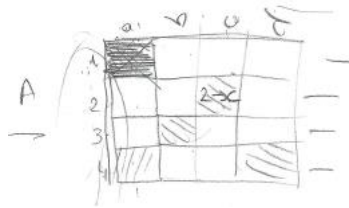


Şekil 4.4.2.12 G₅Ö₁Ö₂'nin taslak resmi: amaçlı taslak resim

A: Peki bu resimlerinizde nasıl düşündünüz?

G₅Ö₁: Hocam, burada ilk çizdiğimiz fonksiyon olup olmaması ile ilgili. Bu taslak aslında. Bu resimlerimizin denemesi acaba böyle yapsak olur mu diye. Tanım kümesi A kümesi, yani x eksenine denk gelmiş oluyor, elemanları a, b, c. Değer kümesi B kümesi, elemanları 0, 1, 2. Ondan sonra bunları rast gele birbiriyle eşledik. Şimdi ilk başta hocam şey dedik fonksiyon olduğunu gösterelim. Yani tanım kümesindeki her eleman değer kümesindeki bir elemanla eşleşsin. Burada gösterdik.

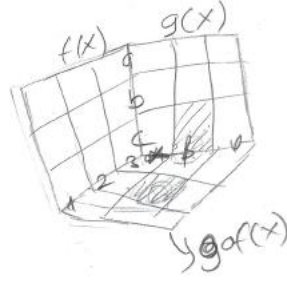
G₅Ö₁Ö₂ fonksiyonu temsil etmek için karelerden oluşan taslak bir resim çizdiğini ve resim üzerinde fonksiyonu nasıl temsil edeceğini araştırdığını ifade etmiştir (Şekil 4.4.2.13).



Şekil 4.4.2.13 G₅Ö₁Ö₂'nin taslak resmi: amaçlı taslak resim

G₅Ö₁: Bir tane kare çizdim ben önce taslak olarak. Kareyi, tekrar karelere böldük. Sonra karenin şu kısmını tanım kümesi, A kümesi olarak alalım dedik yani öyle düşündük o an. Burası da B kümesi oldu işte, değer kümesi. Sonra bu küçük karelerin içini boyarsak 1'in, a'ya gittiğini gösterebiliriz dedik.

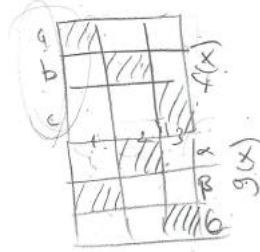
G₅Ö₁Ö₂ bileşke fonksiyonu nasıl temsil edeceklerini denedikleri bir resim çizmişlerdir (Şekil 4.4.2.14).



Şekil 4.4.2.14 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin taslak resmi: amaçlı taslak resim

$G_5\ddot{O}_1$: Şurada da gof bileşke fonksiyonunu gösterelim dedik. Şu an sadece rastgele yerleştirdik olur mu diye denemek için.

$G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ bileşkeyi oluşturan fonksiyonları nasıl resmedebileceklerini denemişlerdir (Şekil 4.4.2.15).



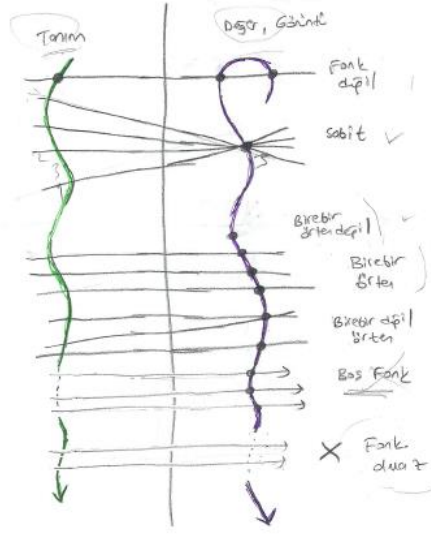
Şekil 4.4.2.15 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin taslak resmi: amaçlı taslak resim

$G_5\ddot{O}_1$: Ondan sonra ilk olarak f ve g fonksiyonları için bir resim çizdik ve elemanlarını nasıl yerleştirebileceğimizi denedik ilk önce.

4.4.2.4. *Düşündüğünden Farklı Resim Alt Kategorisi Eksik Resmetme Boyutu*

MÖA'ların bazı resimlerinde farklılıklar bulunabilmektedir. MÖA'lar farklılıkların olduğu resimlerini kendi açıklamalarına veya diğer benzer resimlerine göre eksik veya fazla resmetmişlerdir. Bu farklılıkların bazıları araştırmacı tarafından fark edilmiş ve bu durumun nedeni MÖA'lara sorulmuştur. MÖA'lar ise durumun farkında olmadıklarını belirtmişlerdir.

$G_4\ddot{O}$ fonksiyonda elemanları noktalarla ve elemanların eşleşmesini tek yönlü oklarla göstermiştir. Resmin bazı yerlerinde farkında olmadan nokta ve tek yönlü ok kullanmadığını belirtmiştir (Şekil 4.4.2.16).



Şekil 4.4.2.16 $G_4\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek

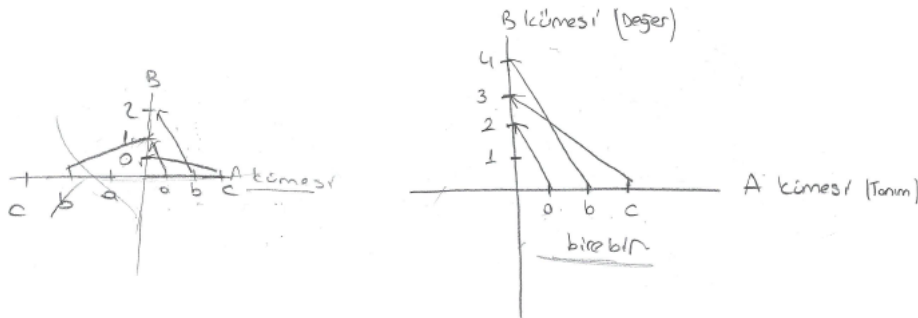
A: Fonksiyonlarla ilgili çizdiğin resimlerde bazı yerlerde nokta var bazı yerlerde yok. Bunun bir nedeni var mı?

$G_4\ddot{O}$: Unutmuşum ben oralara nokta koymayı. Yoksa çizgilerin kesiştiği her yerde bir eleman var. Elemanı göstermek için nokta koydum ben oraya. Yani birazını gösterip birazını yapmamışım. Anlaşıyor yani.

A: Fonksiyonda elemanların eşleşmesini farklı çizgilerle göstermişsin. Bunları neden farklı çizdin?

$G_4\ddot{O}$: Dikkat etmemişim. Yoksa eşleşmeleri tanım kümesinden değer kümesine tek yönlü ok ile göstermek istedim.

$G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ fonksiyonun elemanlarının eşleşmesini taslak resimde doğru parçası ve yönlü oklarla diğer resimlerinde sadece yönlü oklarla göstermiştir. Araştırmacı nedenini sorduğunda farkında olmadığını ifade etmiştir (Şekil 4.4.2.17).

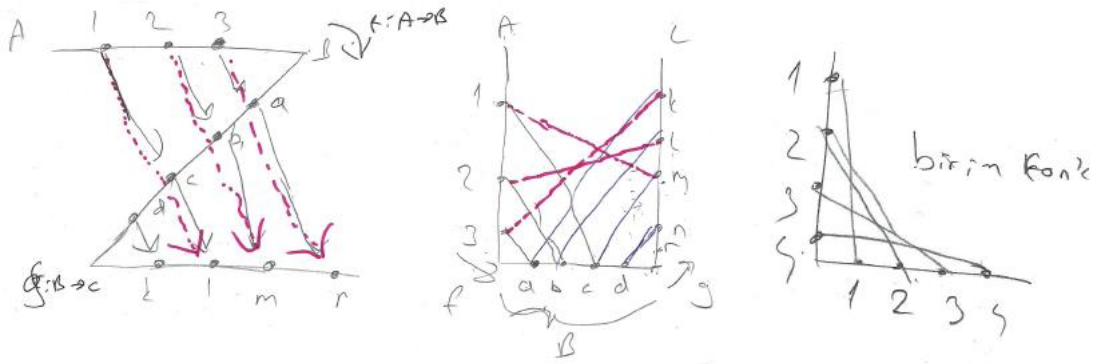


Şekil 4.4.2.17 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin resimlerinden örnekler

A: Bu taslak resminizde doğru parçası ve yönlü oklar var. Diğer resimlerinizde yönlü oklar var sadece.

G₅Ö₁: Sonra buralara koyduk hocam, buraya koymayı unutmuşuz.

G₆Ö fonksiyon ile ilgili resimlerinde elemanların eşleşmesini gösterirken bazen tek yönlü ok kullanmıştır. Bazı resimlerinde hızlı çizmek için ok kullanmadığını, resimlerinde elemanların eşleşmesini oklarla gösterme niyetinde olduğunu ifade etmiştir (Şekil 4.4.2.18).



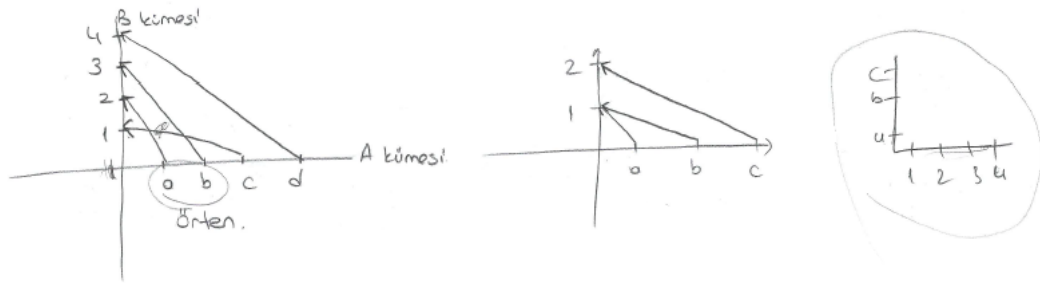
Şekil 4.4.2.18 G₆Ö'nin resimlerinden örnekler

A: Resimlerinde okları neye göre kullandın ya da kullanmadın?

G₆Ö: Bir kümenin elemanlarının diğer kümenin elemanları ile eşleşecek şekilde ok şeklinde düşünmüştüm ben. Hızlı çizmek için ok koymadım ben bazı resimlere. Ben şu an konuyu bildiğim için ok olması ya da olmaması benim açımdan bir fark yaratmıyor. Ama öğrencinin bir kümeden diğer kümeye giden elemanları göstermesi için ok kullanmasının daha akılda kalıcı olacağını düşünüyorum.

4.4.2.5. Düşündüğünden Farklı Resim Alt Kategorisi Fazla Resmetme Boyutu

G₅Ö₁Ö₂ fonksiyon ile ilgili resmini açıklarken koordinat sisteminin birinci bölgesini düşündüklerini belirtmiştir. Araştırmacı resimlerinde koordinat sisteminin diğer bölgelerinin de çizilmiş gibi görüldüğünü sormuştur (soldan birinci ve ikinci resim). G₅Ö₁Ö₂ el alışkanlığı olarak çizdiklerini esas resimlerinin koordinat sisteminin birinci bölgesi gibi (soldan üçüncü resim) olduğunu ifade etmiştir (Şekil 4.4.2.19).



Şekil 4.4.2.19 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin resimlerinden örnekler

$G_5\ddot{O}_1$: Sonra bu resim dört bölgeyi gösteriyor gibi olmasın tek bölgeyi gösteriyor gibi olsun, öğrenci karıştırabilir dedik.

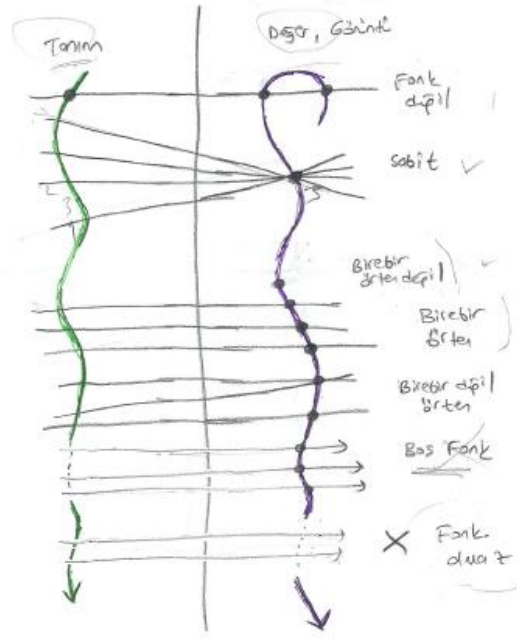
A: Öyle düşündünüz. Ama yine o bölgeleri diğer resimlerinizde çizmişsiniz gibi sanki?

$G_5\ddot{O}_1$: Hocam, o biraz elimiz kaymış bizim. Ama çizmek istediğimiz şu yani, şurada gözüküyor aslında. Aslında çizip göstermeye çalıştık önce. Sonra tasarım olarak en aza indirmeye çalıştık. Şu köşeye çizdiğimiz şekil gibi olmasına karar verdik.

4.4.2.6. Renklendirme Alt Kategorisi

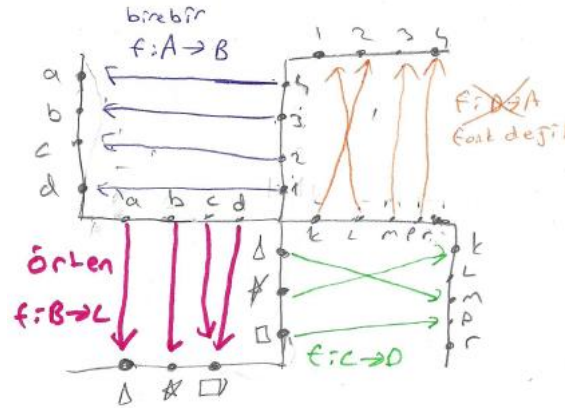
MÖA'lar kavramları görselleştirirken resimlerinde renkler de kullanmıştır. Bu kategoride MÖA'ların resimlerindeki renkler ve renklerin kavramların temsilinde kullanıldığı yerlerden bahsedilmiştir. Renklerin anlamları ve MÖA'ların renklendirme nedenleri kavram-resim ilişkisi üzerine düşünme kategorisinde yer alan resim alt kategorisi temsil belirleme boyutu renk alt boyutunda tartışılmıştır.

$G_4\ddot{O}$ fonksiyonun tanım ve değer kümesini renklendirmiştir. Tanım kümesinde yeşil, değer kümesinde mor renk kullanmıştır (Şekil 4.4.2.20).



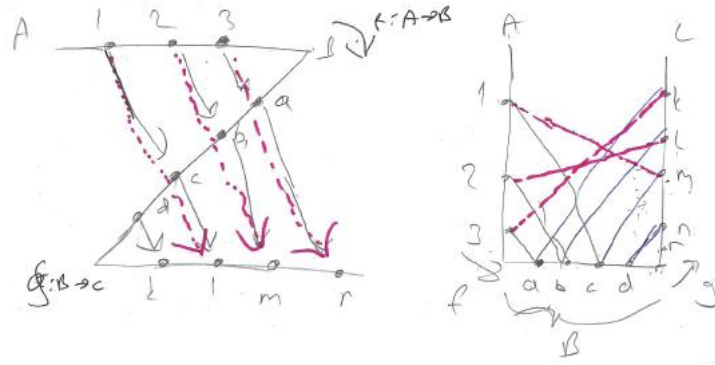
Şekil 4.4.2.20 $G_4\ddot{O}$ 'nin fonksiyonda tanım ve değer kümesini renklendirmesi

$G_6\ddot{O}$ elemanların eşleşmesini fonksiyonda yeşil, birebir fonksiyonda mavi, örten fonksiyonda pembe, ayrıca fonksiyon olmama durumunda turuncu renkle göstermiştir (Şekil 4.4.2.21).



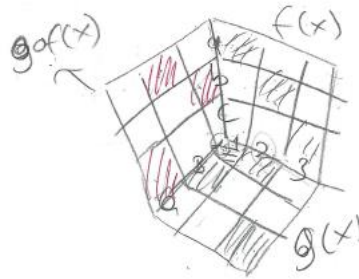
Şekil 4.4.2.21 $G_6\ddot{O}$ 'nin elemanların eşleşmelerini renklendirmesi

$G_6\ddot{O}$ bileşke fonksiyonu temsil ettiği iki resminde de elemanların eşleşmesini pembe renkle göstermiştir. z şeklindeki resminde f ve g fonksiyonlarındaki elemanların eşleşmesini siyah renkle göstermiştir. u şeklindeki resminde ise f fonksiyonunun elemanlarının eşleşmesini siyah, g fonksiyonunun elemanlarının eşleşmesini mavi renkle temsil etmiştir (Şekil 4.4.2.22).



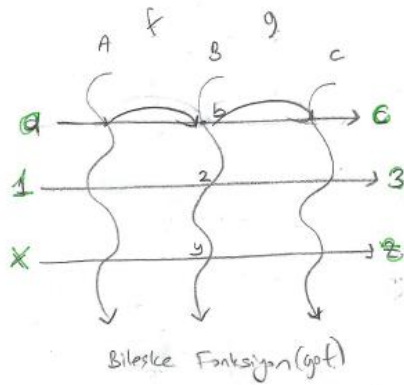
Şekil 4.4.2.22 $G_6\ddot{O}$ 'nin elemanların eşleşmelerini renklendirmesi

$G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ bileşke fonksiyonda elemanların eşleşmesini kırmızı renkle göstermiştir (Şekil 4.4.2.23).



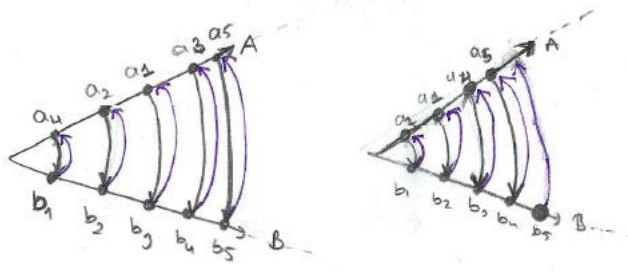
Şekil 4.4.2.23 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin bileşke fonksiyonda elemanların eşleşmesini renklendirmesi

$G_4\ddot{O}$ bileşke fonksiyonun tanım ve değer kümesindeki elemanları temsil etmede yeşil renk kullanmıştır (Şekil 4.4.2.24).



Şekil 4.4.2.24 $G_4\ddot{O}$ 'nin bileşke fonksiyonun elemanlarını renklendirmesi

$G_3\ddot{O}$ fonksiyonun tersinin ve tersi olmayan fonksiyonun elemanlarının eşleşmesini mor renkle göstermiştir (Şekil 4.4.2.25).

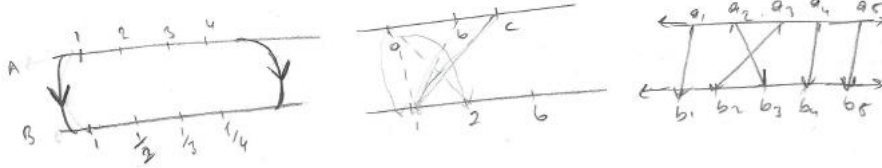


Şekil 4.4.2.25 $G_3\ddot{O}$ 'nin elemanların eşleşmesini renklendirmesi

4.4.2.7. Soyut Resim Alt Kategorisi Kavramı Temsil Etme Boyutu

MÖA'ların bir kavramı temsil etmeye çalıştıkları resimlerdir.

$G_1\ddot{O}$ sayı doğrusu fikrinden yararlanarak fonksiyonu temsil etmeye çalışmıştır. Fonksiyonun elemanlarının eşleşmesini önce yönlü yay şeklinde, sonra kesikli çizgilerden oluşan doğru parçası ve en son ışın ile göstermiştir (Şekil 4.4.2.26).



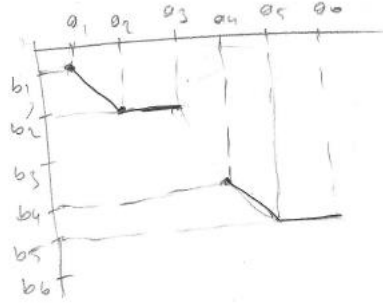
Şekil 4.4.2.26 $G_1\ddot{O}$ 'nin resimlerinden örnekler

$G_1\ddot{O}$: İlk önce ben sayı doğrusu çizmiştim hocam. Sayı doğrusu neden çizdim? Sonsuzluğu yansıtsın diye. Ama tam bir sayı doğrusu da değil. Çünkü sıfır falan da yok. Kümenin elemanlarını yazacağım bir doğru çizdim aslında hocam, tam sayı doğrusu da değil. Doğrunun üzerine istediğim elemanları yazabilirim ve sonsuza doğru gidiyor, oklar olduğu için sağda ve solda. Doğruyu öyle düşündüm. Eşleşme mantığı var, bir elemanın diğerine gitmesi gerekiyor.

A: Bir de ilk resminde elemanların eşleşmesini yönlü yay ile göstermişsin sonra kesikli çizgilerden oluşan doğru parçası ve en son da ışın. Resmini neden değiştirdin?

$G_1\ddot{O}$: İlk resmimde şu şekilde fonksiyonda bir kümenin elemanları diğeriyle eşleşiyordu. Burada o mantığı görmek istedim. Yay olmasını tasarım açısından da değiştirdim. Hem düz çizgi olunca daha kolay çiziliyor. Sonra dedim ki madem kümeleri doğrularla temsil edeceğim, a , 1 ile eşleşiyor, bu eşleşmeyi de kesikli çizgilerle gösterdim. Diğerleriyle karışmasın istedim. Ama sonra birleştirdince ve yön belirleyince daha güzel bir görüntü ortaya çıktı.

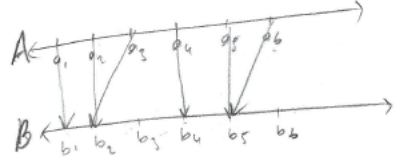
$G_1\ddot{O}$ koordinat sistemine benzeyen bir resimle fonksiyonu temsil etmeye çalışmıştır (Şekil 4.4.2.27).



Şekil 4.4.2.27 $G_1\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek

$G_1\ddot{O}$: Tasarım olarak daha güzel bir şey bulabilir miyim diye şunu denedim. Fonksiyonun tanım ve değer kümelerini çapraz olarak çizdim. Ama ilk çizdiğim şeklinin daha basit ve göz yormadığını düşündüm. Bu resim görsellik nedeniyle karışık olacağından dolayı ilk resmime karar verdim.

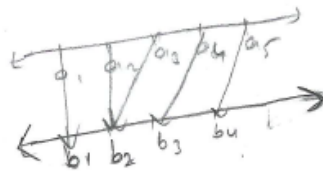
$G_1\ddot{O}$ fonksiyonun kavram resmini çizmiştir (Şekil 4.4.2.28).



Şekil 4.4.2.28 $G_1\ddot{O}$ 'nin fonksiyonun kavram resmi

$G_1\ddot{O}$: Bu fonksiyon; tanım kümesindeki tüm elemanlar bir elemanla eşleşmiş ve tanım kümesinde açıkta eleman yok, bu örten fonksiyon; değer kümesinde açıkta eleman yok, bu birebir ve örten fonksiyon; her eleman bir elemanla eşleşmiş değer kümesinde açıkta eleman yok.

$G_1\ddot{O}$ örten fonksiyonun kavram resmini çizmiştir (Şekil 4.4.2.29).

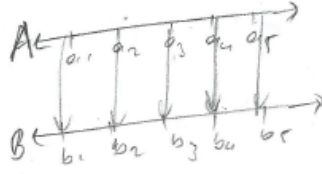


Şekil 4.4.2.29 $G_1\ddot{O}$ 'nin örten fonksiyonun kavram resmi

$G_1\ddot{O}$: Bu fonksiyon; tanım kümesindeki tüm elemanlar bir elemanla eşleşmiş ve tanım kümesinde açıkta eleman yok, bu örten fonksiyon; değer kümesinde açıkta eleman yok, bu

birebir ve örten fonksiyon; her eleman bir elemanla eşleşmiş değer kümesinde açıkta eleman yok.

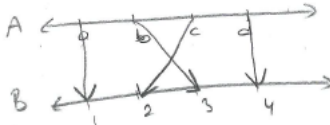
$G_1\ddot{O}$ birebir ve örten fonksiyonun kavram resmini çizmiştir (Şekil 4.4.2.30).



Şekil 4.4.2.30 $G_1\ddot{O}$ 'nin birebir ve örten fonksiyonun kavram resmi

$G_1\ddot{O}$: Bu fonksiyon; tanım kümesindeki tüm elemanlar bir elemanla eşleşmiş ve tanım kümesinde açıkta eleman yok, bu örten fonksiyon; değer kümesinde açıkta eleman yok, bu birebir ve örten fonksiyon; her eleman bir elemanla eşleşmiş değer kümesinde açıkta eleman yok.

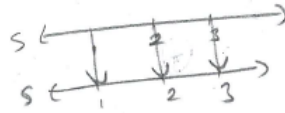
$G_1\ddot{O}$ birebir ve örten fonksiyonun kavram resmini çizmiştir (Şekil 4.4.2.31).



Şekil 4.4.2.31 $G_1\ddot{O}$ 'nin birebir ve örten fonksiyonun kavram resmi

$G_1\ddot{O}$: Birebir eşleme çizdim. Birebir eşleme olması için fonksiyonun birebirlik ve örtenlik şartlarını sağlaması gerekiyordu. O yüzden ben de tanımladığım fonksiyonda elemanlarımı ona göre seçtim. Burası hem birebir hem örten. Belli oluyor zaten. Açıkta eleman yok, her eleman diğer elemana gitmiş, tanım kümesindeki her eleman farklı bir elemana gitmiş.

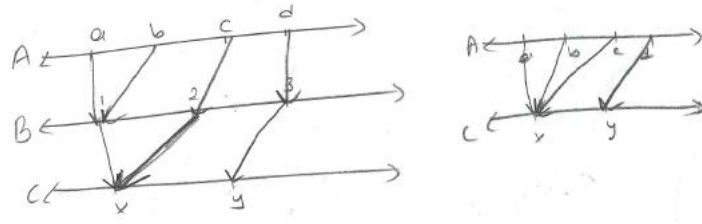
$G_1\ddot{O}$ birim fonksiyonun kavram resmini çizmiştir (Şekil 4.4.2.32).



Şekil 4.4.2.32 $G_1\ddot{O}$ 'nin birim fonksiyonun kavram resmi

$G_1\ddot{O}$: Birim fonksiyonda her eleman kendisiyle eşleşecek hem birebir hem de örten olacak. Onu da tek yönlü oklar, yani her eleman kendisiyle eşleşiyor görünüyor burada da. Bu da hem birebir hem de örten.

$G_1\ddot{O}$ bileşke fonksiyonun kavram resmini çizmiştir (Şekil 4.4.2.33).



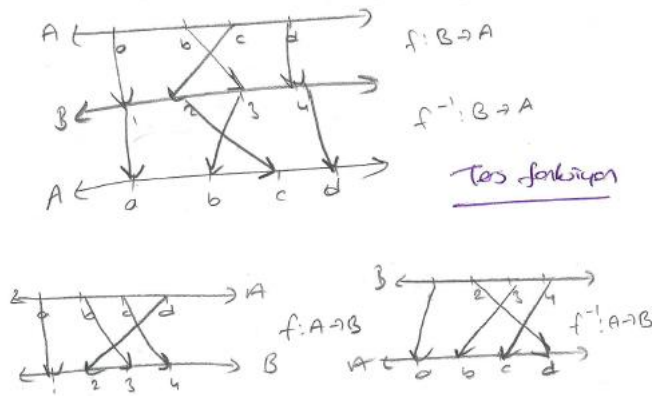
Şekil 4.4.2.33 $G_1\ddot{O}$ 'nin bileşke fonksiyonun kavram resmi

$G_1\ddot{O}$: Bu bileşke fonksiyon. A kümesinden B kümesine bir fonksiyon tanımladım. O fonksiyonun elemanlarını resmime yerleştirdim şu şekilde eşleştirdim yani. a ve b, 1 ile; c, 2 ile; d, 3 ile eşleşiyor. B kümesinden C kümesine baktığımız zaman da 1 ve 2 elemanları x ile; 3, y ile eşleşiyor. A'dan C'ye olan bileşke fonksiyonu ben nasıl bulurum diye düşündüm. Okları takip ettim. a, 1'e gitmişse; 1 de x'e gidiyorsa; a, x'e gider. b, 1'e gittiysen; 1 de x'e gidiyorsa; b de x'e gider. c, 2'ye gidiyorsa; 2 de x'e gitmişse; c yine x'e gidiyor. d, 3'e gidiyorsa; 3 de y'ye gidiyorsa; d, y'ye gidecek. Yani görsel olarak bu şekilde takip ettikleri için birbirlerini görülmesi kolay diye düşünüyorum. Burada da A'dan C'ye giden gof fonksiyonu var.

A: Nasıl bir bileşke fonksiyon ortaya çıktı, onu mu çizdin tekrar?

$G_1\ddot{O}$: Evet. Ama zaten buradan da belli oluyor.

$G_1\ddot{O}$ fonksiyonun tersinin kavram resmini çizmiştir (Şekil 4.4.2.34).



Şekil 4.4.2.34 $G_1\ddot{O}$ 'nin fonksiyonun tersinin kavram resmi

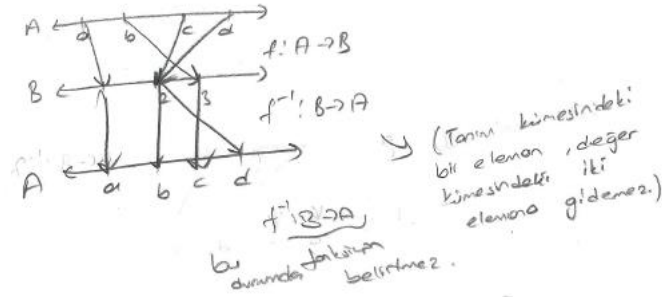
$G_1\ddot{O}$: Fonksiyonun tersinin olması için birebir ve örten olması gerekiyordu. İlk önce o şartları sağladım. Yani tanım kümesi yukarıda, değer kümesi aşağıda, eşliyorsun. Değer kümesinde açıkta eleman kalmıyorsa fonksiyon örten, tanım kümesindeki herhangi farklı iki elemanın görüntüsü aynı değilse birebir... f fonksiyonu A'dan B kümesine tanımlı bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyonun birebir ve örten olarak belirledim ilk önce. Tersini nasıl

düşündüm? B kümesinden A kümesine tanımlı olduğu için tersi için direkt A kümesini aşağıya yazdım ve her halükârda B kümesini temsil eden doğruya göre resim simetrik çıkacak. Yani bir ipucum da bu olabilir. Diğer başka kümelerden de örnek verelim, hep simetrik çıkacak.

A: Önce resmini çizdin, sonra simetrik olduğunu mu gördün?

G₁Ö: Aynen, kesinlikle. Önce gösterdim, sonra simetrik çıktığını fark ettim.

G₁Ö fonksiyonun tersinin fonksiyon olmadığı durumları resim çizerek araştırmıştır. Birebir olmayan örten fonksiyonun tersinin fonksiyon olmadığını resim çizerek görmüştür. Ters olmayan örten fonksiyonun kavram resmini oluşturmuştur (Şekil 4.4.2.35).



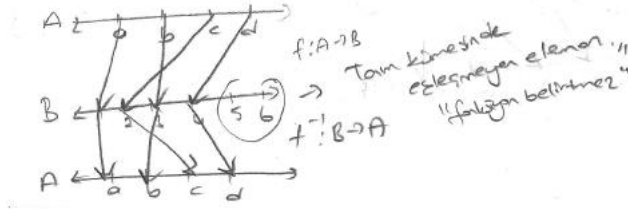
Şekil 4.4.2.35 G₁Ö'nin tersi olmayan örten fonksiyonun kavram resmi

G₁Ö: Fonksiyonun tersinin fonksiyon olmadığı durumları araştırdım.

A: Bunu peki neden yaptın sağlayıp sağlamadığını?

G₁Ö: Aslında biraz merak ettim. Hep böyle bir ezberde kalıyordum, birebir ve örten olma şartı. Önce birebir olmayan sadece örten fonksiyon aldım. A'dan B'ye rastgele bir fonksiyon belirledim. f fonksiyonu da A'dan B'ye tanımlı olsun. Birebir değil ama örten bir fonksiyon olsun. B kümesi tanım kümesi olduğu zaman bir elemanın iki tane görüntüsü oluyor. Bu zaten fonksiyon belirtmiyor. Bu bizim fonksiyon olma şartımıza aykırı olduğu için, bir fonksiyon sadece örtense tersi fonksiyondur diyemeyiz.

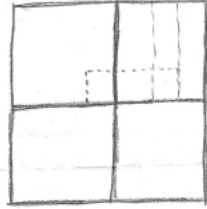
G₁Ö örten olmayan birebir fonksiyonun tersinin fonksiyon olmadığını resim çizerek araştırmıştır. Ters olmayan birebir fonksiyonun kavram resmini oluşturmuştur (Şekil 4.4.2.36).



Şekil 4.4.2.36 $G_1\ddot{O}$ 'nin tersi olmayan birebir fonksiyonun kavram resmi

$G_1\ddot{O}$: Bunu sadece birebirlik için yaptım. Rastgele iki tane küme aldım. f fonksiyonu da A 'dan B 'ye örten değil, ama birebir. Şimdi B kümesinden A kümesine fonksiyonun tersini aldığım zaman tanım kümesinde iki eleman boşta kalıyor. Eşleşmeyen elemanlar kalıyor. Tersini yine bir fonksiyon belirtmiyor.

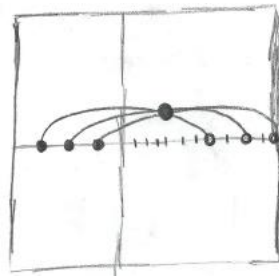
$G_3\ddot{O}$, fonksiyonu kare çizerek temsil etmeye çalışmıştır (Şekil 4.4.2.37).



Şekil 4.4.2.37 $G_3\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek

$G_3\ddot{O}$: Daha sonra acaba dedim kareden gidebilir miyim? Kareden işte böyle eşleştirebilir miyim?

$G_3\ddot{O}$ kare, karenin içine fonksiyonun elemanlarını temsil eden noktalar ve noktaların eşleşmesini çizerek fonksiyonu temsil etmeye çalışmıştır (Şekil 4.4.2.38).

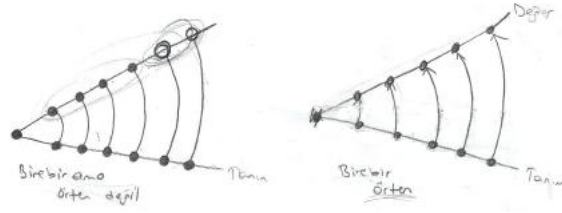


Şekil 4.4.2.38 $G_3\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek

$G_3\ddot{O}$: Sonra yine karenin üzerinde noktalar alıp bu sefer diğer tarafı değer kümesi gibi düşünüp eşleştirmeye başladım.

$G_3\ddot{O}$ açığı ve yay fikrinden esinlenerek fonksiyonu temsil etmeye çalışmıştır. Önce örten olmayan birebir fonksiyonu, sonra birebir ve örten fonksiyonu resmetmiştir. Resminde içi

boş noktaların fonksiyonda eşleşmeyen elemanları temsil ettiğini belirtmiştir (Şekil 4.4.2.39).



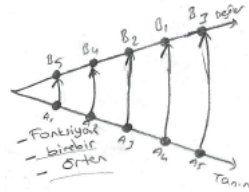
Şekil 4.4.2.39 $G_3\ddot{O}$ 'nin resimlerinden örnekler

$G_3\ddot{O}$: Daha sonra önce aslında şu yay gibi olan şeyleri çizdim. Sonra açtım aklıma geldi.

A: Önce yarım yay gibi olan eşleşmeleri mi çizdin?

$G_3\ddot{O}$: Aynen, yarım yay gibi düşündüm önce. Sonra açtım oradan direkt böyle aklıma geldi yani öyle açılı bir şey olsun dedim. Sonra birebir ve örtenliği göstermeye çalıştım. Örtenliği boş noktalarla birebirliği de işte dolu noktalara gidiyorsa sürekli oradan gösterdim.

$G_3\ddot{O}$ fonksiyon için elemanlar belirlemiş, birebir ve örten fonksiyonu resmetmiştir. Diğer MÖA'lar resimlerini önce kavramı örneklendirerek çizmişlerdir. Sadece $G_3\ddot{O}$ önce kavramı temsil edecek uygun resmi çizmeye çalışmış sonra kavramı örneklendirerek resimlerine devam etmiştir (Şekil 4.4.2.40).



Şekil 4.4.2.40 $G_3\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek

A: Sonra artık tanım ve değer kümesinin elemanlarını belirleyip mi çizdin?

$G_3\ddot{O}$: Evet. Bütün belirsizlikleri gidermeye çalıştım bu sefer.

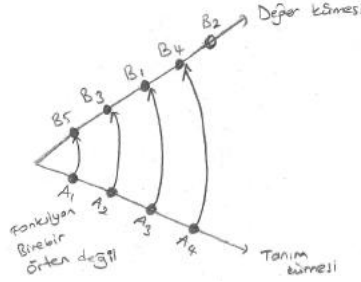
A: Nasıl?

$G_3\ddot{O}$: Mesela A_1 elemanını B_5 elemanı ile eşleştirdim. Ama B_5 sıralamada mesela daha ilerde olmalıydı.

A: Değer kümesinin elemanlarını alt indislerinin sıralamasına göre değil tanım kümesindeki elemanlarla eşleşme sırasına göre mi yerleştirmiş oldun resme?

$G_3\ddot{O}$: Evet. O zaman da mesela bütün çizgiler düz oldu. Bu çizgiler düz olursa birebirdir dedim. Değer kümesinde de mesela boş eleman yoksa örtendir dedim. Burada boşta eleman olmadığı için bu hem birebir hem örten oldu.

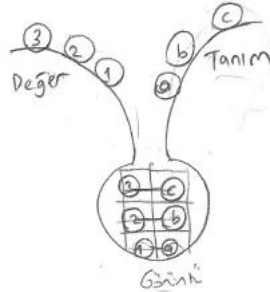
$G_3\ddot{O}$ örten olmayan birebir fonksiyonu resmetmiştir (Şekil 4.4.2.41).



Şekil 4.4.2.41 $G_3\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek

$G_3\ddot{O}$: Eşleşmeyen elemanı içi boş nokta ile gösterdim sadece. Birebir ama örten olmamasını da böyle gösterdim.

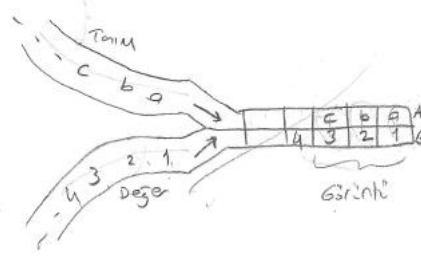
$G_4\ddot{O}$ fonksiyonun tanım ve değer kümesinin elemanlarını hareketli olarak düşünmüştür. Bu elemanların hareket etmesinin sonucunda elemanlar birbiri ile eşleşmiş ve fonksiyon ortaya çıkmıştır (Şekil 4.4.2.42).



Şekil 4.4.2.42 $G_4\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek

$G_4\ddot{O}$: Ben şurayı değer kümesi alsam şurayı tanım kümesi. İlk inenler eşleşiyor gibi...

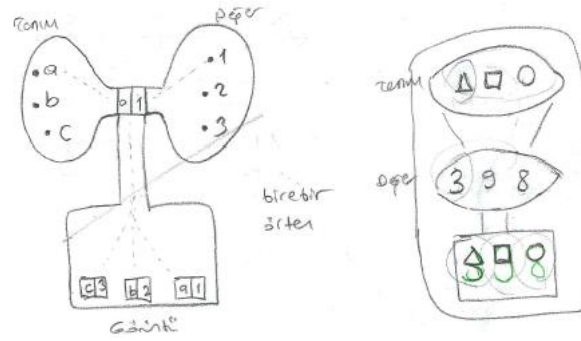
$G_4\ddot{O}$, Şekil 4.4.2.42'deki resmini biraz daha değiştirmiştir. Tanım ve değer kümesindeki elemanlar yine hareketlidir ve eşleşerek fonksiyonu oluşturmaktadır (Şekil 4.4.2.43).



Şekil 4.4.2.43 G₄Ö'nin resminden bir örnek

G₄Ö: Sonra bunu daha net şöyle mi göstersem dedim, baktım bununla aynı mantık oluyor yani. Şunu şöyle çevirirsek aynısı oluyor.

G₄Ö, Şekil 4.4.2.42 ve Şekil 4.4.2.43'teki resimlerine fikir olarak benzeyen iki resim daha çizmiştir (Şekil 4.4.2.44).



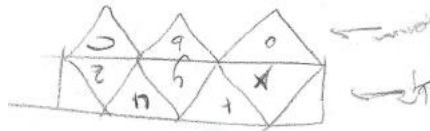
Şekil 4.4.2.44 G₄Ö'nin resminden örnekler

G₄Ö: Sonra yine şu mantığa benzer farklı bir şeyler de çizdim. Bunlar, öncekilerin benzeri.

A: Fikir olarak aynı. Ama biraz farklılaştırıp çizmeyi mi denedin?

G₄Ö: Evet. Aynı şekilde, onlar da olmadı.

G₄Ö, örüntü fikrinden yararlanarak fonksiyonu temsil etmeye çalışmıştır (Şekil 4.4.2.45).



Şekil 4.4.2.45 G₄Ö'nin resminden bir örnek

A: Sonra ne çizdin?

G₄Ö: Hocam, bu... Şurası tanım kümesi, şurası değer kümesi. Ben benzer şekillerden farklı böyle örüntü gibi bir şeyler oluşturmaya çalıştım ama.

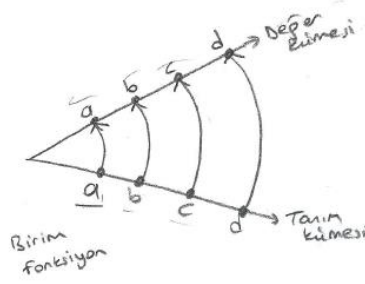
G3Ö: *Sonra da yine aynı şekilde, bunlara benzer şekilde örten ama birebir olmayan bir fonksiyon çizdim. Tanım kümesindeki iki elemanı değer kümesindeki bir eleman ile eşleştirdim ve onu buradan gösterdim. Birebir olmaması da şöyle düz çizgiler gitmiyorsa birebir değildir demiştim. Zaten mantığım oydu. Burada çizgiler düz gitmedi.*

G₃Ö: *Evet, aynen. Ya da normal dolu nokta da koyabilirdim ama direkt eşleşmediği bariz gözüksün diye içini boş bıraktım orada. Burada eşleşmeyen içi boş nokta ile gösterdiğim bir eleman yok, o yüzden örten.*

A: Şu diğer resimlerin ne ile ilgili?

137

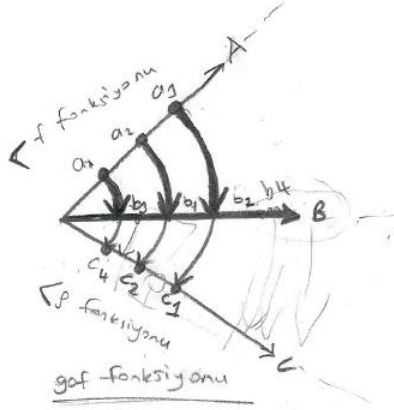
$G_3\ddot{O}$ birim fonksiyonun kavram resmini çizmiştir (Şekil 4.4.2.48).



Şekil 4.4.2.48 $G_3\ddot{O}$ 'nin birim fonksiyonun kavram resmi

$G_3\ddot{O}$: Ben birim fonksiyonu gösterdim. a 'dan a 'ya, b 'den b 'ye, c 'den c 'ye gidiyor, d 'den de d 'ye gidiyor diye, tanım kümesinden değer kümesine doğru. Böyle gösterdim.

$G_3\ddot{O}$ bileşke fonksiyonun kavram resmini çizmiştir (Şekil 4.4.2.49).



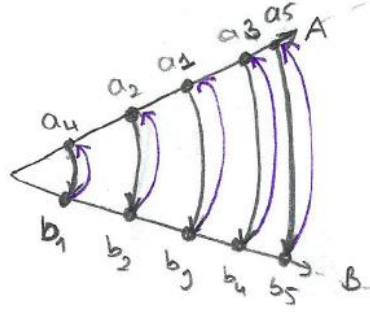
Şekil 4.4.2.49 $G_3\ddot{O}$ 'nin bileşke fonksiyonun kavram resmi

$G_3\ddot{O}$: Daha sonra bileşke fonksiyonu gösterdim. Şöyle bir f fonksiyonu aldım, A 'dan B 'ye. Bir de B 'den C 'ye bir g fonksiyonu aldım. Bunların ikisini bileşke olarak şu şekilde gösterdim.

A: Resminde bazı yerleri kalın bazı yerleri ince çizmişsin. Neden öyle yaptın?

$G_3\ddot{O}$: Kalın ve ince olması da f ve g fonksiyonu daha iyi gözüksün diye... Böyle ortak kümeleri, mesela birinin değer kümesi diğerkinin tanım kümesi. O yüzden daha net gözüksün diye bunu kalın çizgilerle belirledim. İkisinin farklı fonksiyon olduğu gözüksün diye. Daha sonra da en son burada a_1, b_1 'e gitmiş; b_1 daha sonra c_5 'e gitmiş. Bu resmin A kümesinden C kümesine olan kısmına baktığımızda biz gof fonksiyonunu yani bileşke fonksiyonu görebiliyoruz. Burada bunu anlattım.

$G_3\ddot{O}$ fonksiyonun tersinin kavram resmini çizmiştir (Şekil 4.4.2.50).



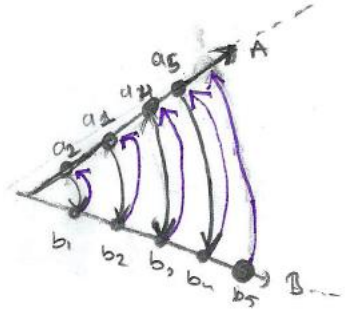
Şekil 4.4.2.50 $G_3\ddot{O}$ 'nin fonksiyonun tersinin kavram resmi

$G_3\ddot{O}$: Sonra fonksiyonun tersini gösterdim. Fonksiyonun tersinin olması için birebir eşleme olması gerekiyor. Yani birebir olması ve örten olması gerekiyor. Zaten ben birebirliği yaylarla göstermiştim. Yaylar düz şekilde devam ediyorsa birebirdir ve boş nokta yoksa değer kümesinde o zaman da örtendir. Burada zaten ikisini de gördüğümüz için fonksiyonun tersi vardır.

A: Bu resminde siyah renkle f fonksiyonunun elemanlarının eşleşmesini, mor renkle fonksiyonun tersinin elemanlarının eşleşmesini mi gösterdin?

$G_3\ddot{O}$: Evet.

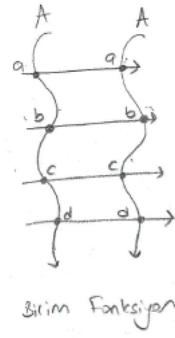
$G_3\ddot{O}$ tersi olmayan birebir fonksiyonun kavram resmini çizmiştir (Şekil 4.4.2.51).



Şekil 4.4.2.51 $G_3\ddot{O}$ 'nin tersi olmayan birebir fonksiyonun kavram resmi

$G_3\ddot{O}$: Burada da tersi olmayan fonksiyonu gösterdim. Birebir eşleme yok burada çünkü A'dan B'ye gidiyoruz. B'de boş bir tane eleman olduğu için örten olmaz. O zaman da fonksiyonun tersi fonksiyon olmuyor. Tersini alacak olursam da b_5 ile eşleşen eleman yok.

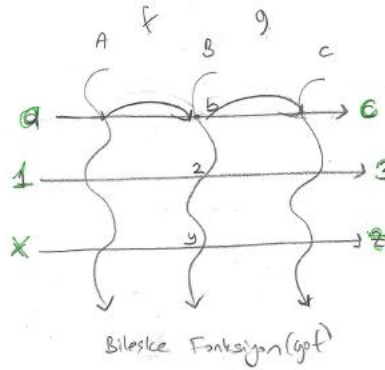
$G_4\ddot{O}$ birim fonksiyonun kavram resmini çizmiştir (Şekil 4.4.2.52).



Şekil 4.4.2.52 $G_4\ddot{O}$ 'nin birim fonksiyonun kavram resmi

$G_4\ddot{O}$: Şimdi birim fonksiyon zaten fonksiyonun tanım ve değer kümesinin aynı olması ve her elemanın yine kendisiyle eşleşmesi. A kümesinden A kümesine gidiyor, a 'dan a 'ya, b 'den b 'ye, c 'den c 'ye, d 'den d 'ye eşleşiyor. Her elemanın kendisiyle eşleşmesi gerektiği için birim fonksiyonu bu şekilde gösterdik.

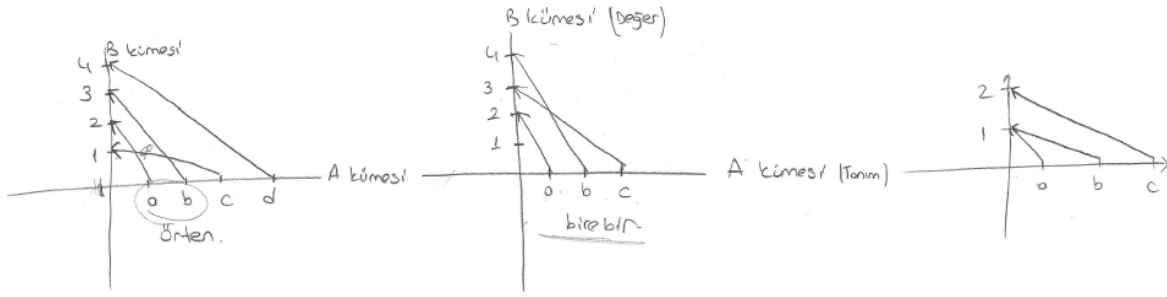
$G_4\ddot{O}$ bileşke fonksiyonun kavram resmini çizmiştir (Şekil 4.4.2.53).



Şekil 4.4.2.53 $G_4\ddot{O}$ 'nin bileşke fonksiyonun kavram resmi

$G_4\ddot{O}$: Bileşke fonksiyonu da buraya çizdim. Bileşkede de zaten üç küme olması gerekiyor. Üç kümeyi çizdim. Şurası f fonksiyonu, şurası g fonksiyonu, giriş ve çıkış da bize $g \circ f$ fonksiyonunu veriyor. f , a 'dan b 'ye gitmiş; sonra g fonksiyonunda b 'den c 'ye gitmiş; bileşke için de a 'dan c 'ye gidiyor. Bunları renklendirdim ki bileşke gözüksün diye.

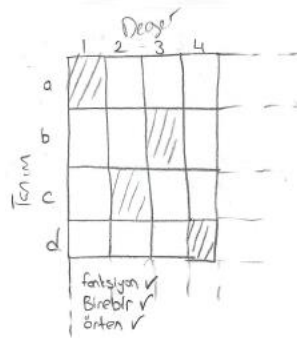
$G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ koordinat sistemi fikrinden yola çıkarak birebir ve örten fonksiyonu (soldan birinci resim), örten olmayan birebir fonksiyonu (soldan ikinci resim) ve birebir olmayan örten fonksiyonu (soldan üçüncü resim) resmetmiştir (Şekil 4.4.2.54).



Şekil 4.4.54 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin resimlerinden örnekler

$G_5\ddot{O}_1$: Sonra aşağı doğru çizdik, örtenlik, birebirlik hepsini denedik acaba oluyor mu diye. Sonra baktık mesela buradaki her elemanı bir eleman ile eşleştirdik. Bu hem fonksiyondur hem de birebir ve örtendir dedik. Sonra mesela burada birebir fonksiyonu gösterdik, birebir ama örten değil. Şurada da örten ama birebir olmayan fonksiyonu gösterdik.

$G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ birebir ve örten fonksiyonun kavram resmini çizmiştir (Şekil 4.4.2.55).



Şekil 4.4.2.55 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin birebir ve örten fonksiyonun kavram resmi

$G_5\ddot{O}_1$: İlk başta fonksiyon olsun, birebir ve örten olsun dedik. Yani bir deneyelim hepsini dedik. Sonra teker teker değerler verdik. İşte dörde dörtlük bir kare gibi oluşturduk. Sonra mesela a'yı 1 ile, b'yi 3 ile, c'yi 2 ile, d'yi 4 ile eşleştirdik, oldu yani. Sonra bir de bunun fonksiyon olmayan haline bakalım dedik. Yani teker teker hepsini gösterelim dedik, ayrı ayrı.

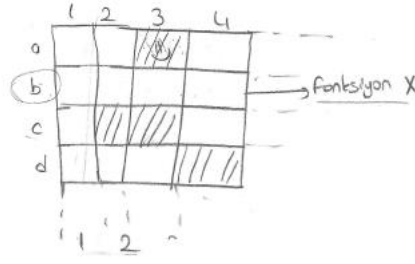
A: Bu fonksiyon olması mıydı?

$G_5\ddot{O}_1$: Aynen. Bu fonksiyonun birebir ve örten olması haliydi.

A: Bu tasarıma dair sanırım ilk çizdiğiniz şekil o oldu?

$G_5\ddot{O}_1$: Aynen.

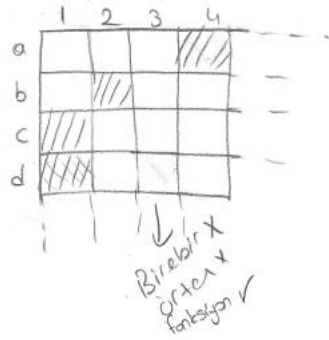
$G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ fonksiyon olmayan kavram resmini çizmiştir (Şekil 4.4.2.56).



Şekil 4.4.2.56 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin fonksiyon olmayan kavram resmi

$G_5\ddot{O}_1$: Ondan sonra fonksiyon olmama özelliğini inceledik. Mesela tanım kümesindeki bir eleman değer kümesinde herhangi bir eleman ile eşleşmezse fonksiyon olamıyor, örneğin tanım kümesindeki b elemanı. Bir de tanım kümesindeki c iki eleman ile eşleştiği için fonksiyon olamıyor. O yüzden bu resim fonksiyon değil.

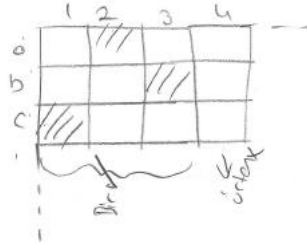
$G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ birebir ve örten olmayan fonksiyonun kavram resmini çizmiştir (Şekil 4.4.2.57).



Şekil 4.4.2.57 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin birebir ve örten olmayan fonksiyonun kavram resmi

$G_5\ddot{O}_2$: Bu resimde de birebir ve örten olmayan fonksiyonu gösterdik. Yani c ve d bir eleman 1 ile eşleşiyor. Birebir değil. Değer kümesindeki 3 elemanı hiçbir eleman ile eşleşmiyor. O yüzden örten olmadı ama fonksiyon.

$G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ örten olmayan birebir fonksiyonun kavram resmini çizmiştir (Şekil 4.4.2.58).



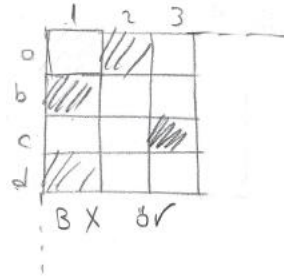
Şekil 4.4.2.58 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin örten olmayan birebir fonksiyonun kavram resmi

$G_5\ddot{O}_2$: Bu resimlerde de örten olmayan birebir fonksiyon ve birebir olmayan örten fonksiyonu gösterdik.

A: Tamam, onları nasıl çizdiniz?

G₅Ö₁: Burada a elemanı 2 ile; b , 3 ile; c , 1 ile eşleşiyor. Değer kümesindeki 4 boş kalıyor. O yüzden örten değil. Ama fonksiyon, birebir ayrıca. Diğerinde de b , 1 ile eşleşiyor; a , 2 ile; c , 3 ile; d , yine 1 ile eşleşiyor. O yüzden birebir değil ama örten. Değer kümesinde boşta kalan eleman olmadığı için örten oldu.

G₅Ö₁Ö₂ birebir olmayan örten fonksiyonun kavram resmini çizmiştir (Şekil 4.4.2.59).



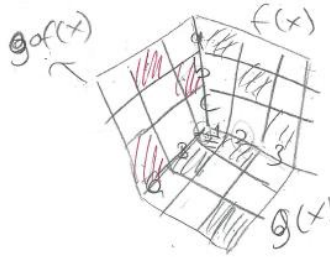
Şekil 4.4.2.59 G₅Ö₁Ö₂'nin birebir olmayan örten fonksiyonun kavram resmi

G₅Ö₂: Bu resimlerde de örten olmayan birebir fonksiyon ve birebir olmayan örten fonksiyonu gösterdik.

A: Tamam, onları nasıl çizdiniz?

G₅Ö₁: Burada a elemanı 2 ile; b , 3 ile; c , 1 ile eşleşiyor. Değer kümesindeki 4 boş kalıyor. O yüzden örten değil. Ama fonksiyon, birebir ayrıca. Diğerinde de b , 1 ile eşleşiyor; a , 2 ile; c , 3 ile; d , yine 1 ile eşleşiyor. O yüzden birebir değil ama örten. Değer kümesinde boşta kalan eleman olmadığı için örten oldu.

G₅Ö₁Ö₂ bileşke fonksiyonun kavram resmini çizmiştir (Şekil 4.4.2.60).



Şekil 4.4.2.60 G₅Ö₁Ö₂'nin bileşke fonksiyonun kavram resmi

G₅Ö₁: Daha sonra f , g ve gof bileşke fonksiyonun da olduğu bir resim çizdik.

A: gof fonksiyonu resminiz üzerinden nasıl belirleniyor?

G₅Ö₁: Burası f fonksiyonunun tanım kümesi olduğu için, tanım kümesindeki a elemanı 1 ile eşleşiyor, bu kareyi tarıyoruz; b , 2 ile eşleştiği için burasını; c , 3 ile eşleşiyor, burasını taradık. Sonra 1, 2, 3 aynı zamanda g fonksiyonunun tanım kümesiydi. 1, β ile eşleştiği için şurasını taradık; 2, α ile eşleştiği için şurasını; 3, θ ile eşleştiği için şurasını taradık.

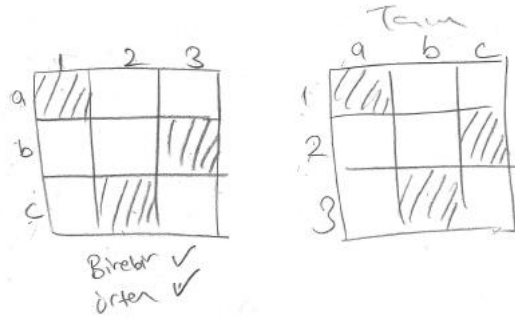
A: Bileşkeyi nasıl buldunuz bunun devamında?

G₅Ö₁: Daha sonra bileşkeyi de a , 1 ile eşleştiği; 1, β ile eşleştiği için; a , β ile eşleşecek dedik burayı taradık. İkincisinde b , 2 ile eşleştiği; 2, α ile eşleştiği için; o yüzden b , α ile eşleşecek. Diğerinde de c , 3 ile eşleştiği; 3, θ ile eşleştiği için; c , θ ile eşleşecek dedik burasını taradık.

A: Eşleşmelere bakıp orada tek tek karşılaştırarak mı taradınız?

G₅Ö₁: Evet.

G₅Ö₁Ö₂ fonksiyonun tersinin kavram resmini çizmiştir (Şekil 4.4.2.61).



Şekil 4.4.2.61 G₅Ö₁Ö₂'nin fonksiyonun tersinin kavram resmi

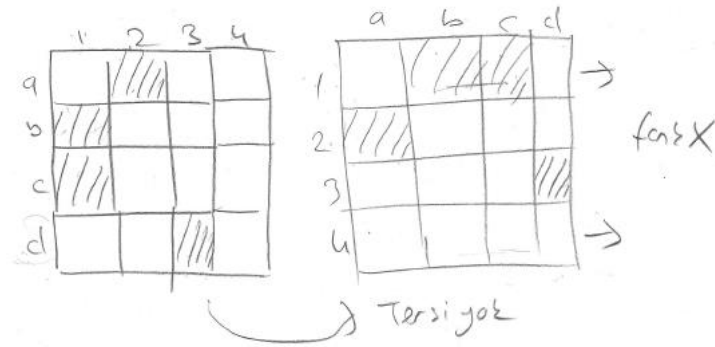
G₅Ö₁: Daha sonra burada birebir ve örten olmasını gösterdik. a , b , c tanım kümesinin 1, 2, 3 de değer kümesinin elemanları.

G₅Ö₂: Fonksiyonun tersini göstermeye çalışıyoruz şu an.

G₅Ö₁: Birebir ve örten olduğunda tersi olan ve aksi durumda tersi olmayan fonksiyonu göstermeye çalıştık. İlk olarak a , 1 ile; b , 3 ile; c , 2 ile eşleşiyor. Bu birebir ve örten fonksiyon. Sonra yerlerini değiştiriyoruz. 1, 2, 3 değer kümesi iken tanım kümesi oldu. Tersini almış olduk. a , 1 ile eşleşiyorken şimdi 1, a ile eşleşiyor. 2, c ile eşleşti; 3 de b ile eşleşti. Yani yerlerini değiştirmiş olduk.

G₅Ö₁: Birebir ve örten olduğu için tersi de bir fonksiyon oldu.

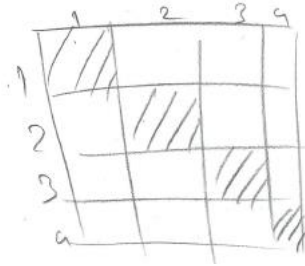
G₅Ö₁Ö₂ tersi olmayan fonksiyonun kavram resmini çizmiştir (Şekil 4.4.2.62).



Şekil 4.4.2.62 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin tersi olmayan fonksiyonun kavram resmi

$G_5\ddot{O}_1$: Sonra birebir ve örten olmayan bir fonksiyon aldık. Burada a, 2 ile eşleşti. b ve c, 1 ile eşleşti ve burada fonksiyon birebir değil. Aynı zamanda değer kümesindeki 4 tanım kümesindeki hiçbir eleman ile eşleşmediği için örten de değil. Sonra yine yerlerini değiştiriyoruz, tanım ve değer kümesinin. Bu sefer tanım kümesindeki 1, b ve c ile eşleşmek zorunda kaldı. O yüzden tersi olmadı fonksiyonun. Ayrıca tanım kümesindeki 4 boşta kaldı, hiçbir elemanla eşleşmedi yine buradan da fonksiyon değildir.

$G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ birim fonksiyonun kavram resmini çizmiştir (Şekil 4.4.2.63).



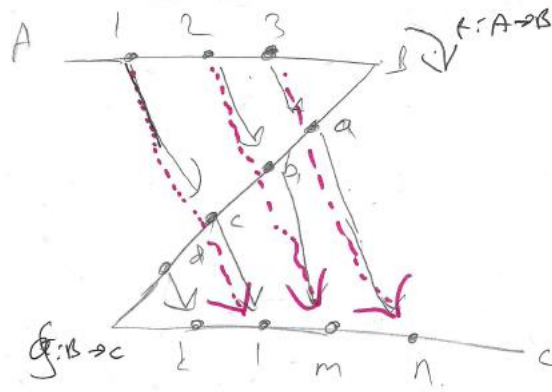
Şekil 4.4.2.63 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin birim fonksiyonun kavram resmi

$G_5\ddot{O}_2$: Burada birim fonksiyonu çizdik.

$G_5\ddot{O}_1$: 1'i, 1 ile; 2'yi, 2 ile; 3'ü, 3 ile; hepsini yine kendisi ile eşleştirdik.

$G_5\ddot{O}_2$: Yani köşegen üzerinde yer alan kareler tarandığı zaman birim fonksiyon oluyor.

$G_6\ddot{O}$ bileşke fonksiyonun kavram resmini çizmiştir (Şekil 4.4.2.64).



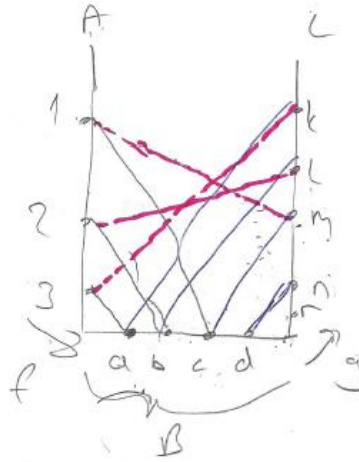
Şekil 4.4.2.64 $G_6\ddot{O}$ 'nin bileşke fonksiyonun kavram resmi

$G_6\ddot{O}$: Bu şekilde düşündüm ve tam karşılıklı olarak kümelerin elemanları gelebilecek şekilde eşleştirebileceğimi düşündüm. Burada da baktığımız zaman A, B ve C kümeleri var. A kümesi 1, 2, 3; B kümesi a, b, c, d; C de k, l, m, n elemanlarından oluşuyor. A kümesini temsil eden doğruya kümenin elemanlarını yerleştiriyoruz. B kümesi için de aynı şekilde, C kümesi için de aynı şekilde yerleştiriyoruz. Burası A'dan B'ye f fonksiyonu, burası B'den C'ye g fonksiyonu. Bunun tamamı gof fonksiyonunu oluşturuyor. A'dan B'ye olan fonksiyonu bu şekilde oklarla belirttim. 3'den a'ya; 2'den b'ye; 1'den c'ye gidiyor bu şekilde. Aynı şekilde B'den C'ye giden fonksiyon da a'dan k'ye; b'den l'ye, c'den m'ye gidiyor.

A: f ve g fonksiyonlarında elemanların eşleşmesini kurşun kalemle, bileşke fonksiyondaki eleman eşleşmelerini pembe renk ve kesikli çizgilerle gösterdin sanırım?

$G_6\ddot{O}$: Aynen, öyle. Bileşkeyi pembe noktalarla gösterdim. A ve B ile B ve C kümelerine dair fonksiyonları ise kurşun kalemle gösterdim. Bileşkeye dikkat çekmek istedim. Baktığımız zaman ise... gof fonksiyonuna baktığımız zaman ise A'dan C'ye oluyor. 3'ten n'ye; 2'den m'ye; 1'den l'ye gidecek şekilde bir bileşke fonksiyon oluşturmuş oluyoruz.

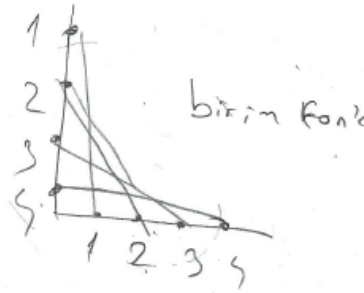
$G_6\ddot{O}$ bileşke fonksiyonun başka bir kavram resmini çizmiştir (Şekil 4.4.2.65).



Şekil 4.4.2.65 $G_6\ddot{O}$ 'nin bileşke fonksiyonun kavram resmi

$G_6\ddot{O}$: Farklı bir şey yapabilir miyim diye düşündüm. Sonradan aklıma... B kümesinin çizgisini u şekli olacak şekilde eklemek aklıma geldi. Bunda da aynı şekilde A 'dan B 'ye, B 'den C 'ye iki fonksiyon var. Bunun da tamamı $g \circ f$ fonksiyonunu oluşturuyor. Burada gördüğümüz gibi 1 'den c 'ye; 2 'den b 'ye; 3 'den a 'ya giden f fonksiyonu ile d 'den n 'ye, c 'den m 'ye; b 'den l 'ye; a 'dan k 'ya giden g fonksiyonu var. $g \circ f$ fonksiyonunu göreceklorsak diye düşündüm. Mesela A kümesinden C kümesine... Bileşke fonksiyonun ilk elemanı 1 'den c 'ye gidiyor, şu yolları takip ettiğimiz zaman.

$G_6\ddot{O}$ birim fonksiyonun kavram resmini çizmiştir (Şekil 4.4.2.66).



Şekil 4.4.2.66 $G_6\ddot{O}$ 'nin birim fonksiyonun kavram resmi

$G_6\ddot{O}$: Birim fonksiyonu da bu şekilde gösterebilirim diye düşündüm. L şeklinde doğruları çizip, sonsuza kadar uzatabildiğimiz doğrular şeklinde düşündüm. Bu şekilde uzatabiliyoruz. Bu koordinat sistemine de benziyor. Oradan biraz aklıma geldi.

$G_6\ddot{O}$ fonksiyonun tersinin iki farklı kavram resmini çizmiştir (Şekil 4.4.2.67).



Şekil 4.4.2.67 $G_6\ddot{O}$ 'nin fonksiyonun tersinin kavram resimleri

$G_6\ddot{O}$: Fonksiyonun tersinde ise yine aynı şekilde u ve z şeklini düşündüm. Ama z şeklinin bileşke fonksiyon ve fonksiyonun tersinde daha güzel gözüktüğünü düşünüyorum.

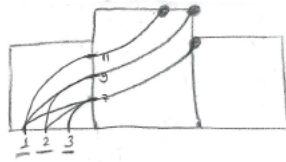
A: İki resim çizdin, ikisinde de bu defa fonksiyonun tersini mi denedin?

$G_6\ddot{O}$: Aynen, önceki yaptığım modeli yani bileşke fonksiyon için yaptığım iki modeli fonksiyonun tersi için denedim. Bu sefer iki farklı küme var, A ve B şeklinde. A kümesinde 1, 2, 3; B kümesinde a, b, c var. Bu sefer A kümesini hem yukarıya hem de altta yazıyoruz şekilde. Fonksiyonda 1, a ile; 2, b ile; 3, c ile eşleşiyor. Bu fonksiyonun tersine baktığımız zaman şeklin alt kısmında B'den A'ya olan bir fonksiyon oluyor. a'dan 1'e, b'den 2'ye; c'den 3'e şeklinde gidiyor.

4.4.2.8. Soyut Resim Alt Kategorisi Kavramları Temsil Etme Boyutu

MÖA'lar birden fazla kavramı bir arada temsil etmeye çalıştıkları resimler çizmişlerdir.

$G_3\ddot{O}$ üç kareyi yan yana çizmiş, birebir fonksiyonu ve örten fonksiyonu temsil etmek istemiştir (Şekil 4.4.2.68).



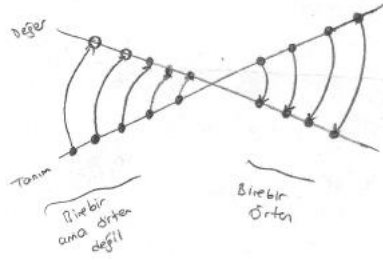
Şekil 4.4.2.68 $G_3\ddot{O}$ 'nin çiziminden bir örnek

$G_3\ddot{O}$: Sonra üç kareyi falan birleştireyim dedim.

A: Üç kareyi neden birleştirdin?

$G_3\ddot{O}$: Bu tarafta örtenliği bu tarafta birebirliği gösteririm diye düşündüm.

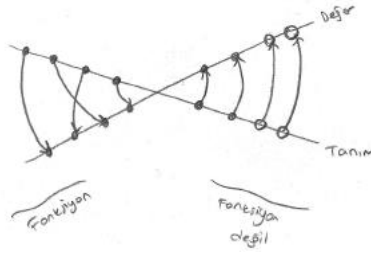
$G_3\ddot{O}$ resminin bir tarafında örten olmayan birebir fonksiyonu diğer tarafında birebir ve örten fonksiyonu temsil etmeye çalışmıştır (Şekil 4.4.2.69).



Şekil 4.4.2.69 $G_3\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek

$G_3\ddot{O}$: Birebir ama örten değil mesela birebir ama örten ikisini bir arada yapmaya çalıştım. Şu çizgiyi tanım kümesi şu çizgiyi değer kümesi olarak düşündüm.

$G_3\ddot{O}$ fonksiyon olma ve olmama durumunu resminde bir arada göstermiştir. İçi boş noktaların elemanların eşleşmemesini temsil ettiğini, bu nedenle fonksiyon olmadığını ifade etmiştir (Şekil 4.4.2.70).



Şekil 4.4.2.70 $G_3\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek

$G_3\ddot{O}$: Daha sonra fonksiyon olup olmamasını da tek resim üzerinde gösterdim.

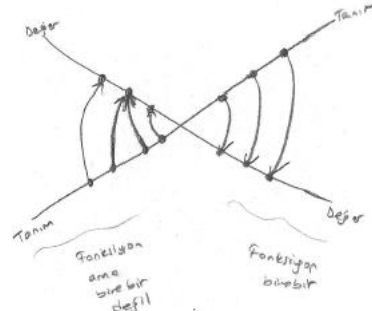
A: Bir taraf fonksiyon, diğer taraf fonksiyon değil. Bunları nasıl... Resminde nasıl gösterdin?

$G_3\ddot{O}$: Fonksiyon olduğunda mesela tanım kümesindeki bütün elemanları bir şekilde bir elemanla eşleştirdim. Ama mesela tanım kümesine iki tane boş nokta koydum. Boş noktalar herhangi bir elemanla eşleşmediğini temsil ediyordu. O zaman da tanım kümesinde boş noktalar olursa fonksiyon değildir şeklinde çizdim.

A: Eşleşme var ama noktanın içi boş olduğu için eşleşme olmuyor öyle mi?

$G_3\ddot{O}$: Aynen öyle düşündüm.

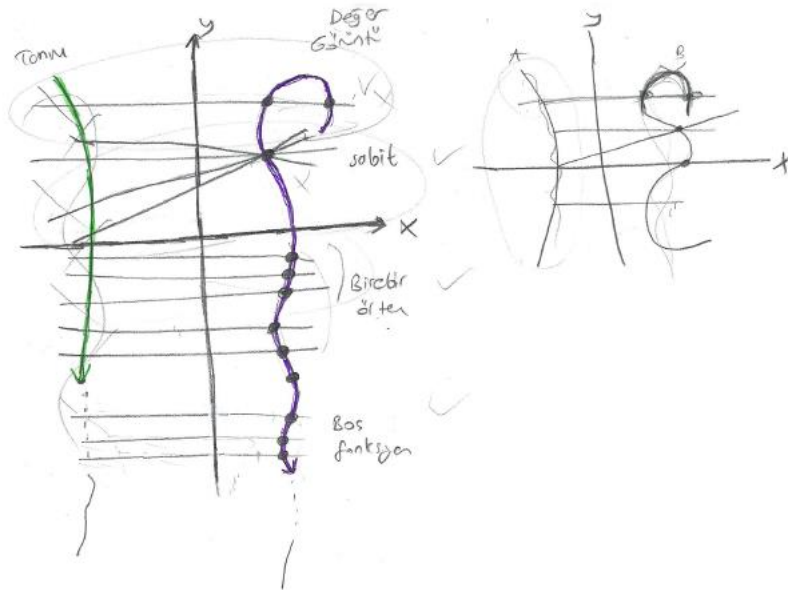
$G_3\ddot{O}$ birebir fonksiyonu ve birebir olmayan fonksiyonu bir arada temsil eden bir resim çizmiştir (Şekil 4.4.2.71).



Şekil 4.4.2.71 $G_3\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek

$G_3\ddot{O}$: Burada da sadece birebirlik durumunu inceledim ben. Fonksiyonu birebir olarak belirledim. Fonksiyonun birebir olmamasını bu tarafta gösterdim. Tanım kümesindeki bütün elemanları eşleştirdim değer kümesine ama tanım kümesindeki iki eleman değer kümesindeki bir elemanla eşleştiği için birebir değildir dedim.

$G_4\ddot{O}$ fonksiyonların grafiği fikrinden yararlanarak fonksiyonlarla ilgili kavram resmini oluşturmaya çalışmıştır (Şekil 4.4.2.72).



Şekil 4.4.2.72 $G_4\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek

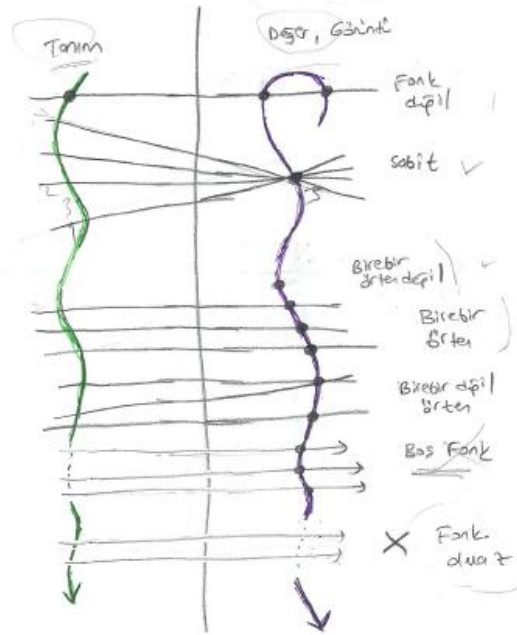
$G_4\ddot{O}$: Ben aslında ilk şöyle düşündüm. Şimdi tanım ve değer kümesini illa yuvarlak ile değil de dedim kümeler çizgi şeklinde olsun. Şu çizgi bir küme olsun, karşısındaki de bir küme olsun diye düşündüm. Sonra burayı eğri yapmamın sebebi de hani ilk başta fonksiyon nasıl olmaz onu göstereyim diye düşündüm. Yani şuradaki tek elemanın iki eleman ile eşleşmesi gerekiyordu o da bu şekilde eğri çizdiğimde olabilir. Ya da burayı çizgiyi kesmem lazım o da biraz estetik durmaz. O yüzden eğri aklıma geldi. Buradan başladım, böyle bir eğri

şeklinde yaptım. Aynı zamanda şöyle de düşündüm tanım ve değer kümesi birbirinden ayrı olsun diye biraz.

A: Değer kümesini, tanım kümesine göre neden daha eğri çizdin? Bir nedeni var mı?

G₄Ö: Bir nedeni yok, ikisi de eğri aslında. Tanım kümesini öyle çizmişim o an için.

G₄Ö Şekil 4.4.2.71'deki çizdiği resmin biraz daha büyüğünü çizmiştir. Fonksiyonlarla ilgili kavram resmini oluşturmuştur (Şekil 4.4.2.73).



Şekil 4.4.2.73 G₄Ö'nin fonksiyonlarla ilgili kavram resmi

A: Sonra küçük çizdiğin şekli daha büyük mü çizdin?

G₄Ö: Evet, sonra baktım şunu böyle uzatsam ben birçok özellik gösterebilirim. Diğer farklı özellikleri de gösterdim. Önceki resmimde mesela ilk üç özellik falan vardı burada hepsi var.

A: Hangi özellikler var? Yazmışsın sanırım. Fonksiyon olmama, sabit fonksiyon...

G₄Ö: Evet, tanımlar içinde vardı boş fonksiyon veya fonksiyon olmama durumu. Onları da gösterdim. Dediğim gibi yani böyle sonsuza kadar bütün özellikleri gösterebiliyoruz.

A: Fonksiyonun tanım ve değer kümesini eğri olarak göstermek nereden aklına geldi?

G₄Ö: Mesela düz çizgilerle eşleşiyor ya elemanlar birbirine. Şimdi düze düz gitmesi biraz karışıklık da olabilir. Şu eğriliği... Nasıl diyeyim ki... Fark edilmeleri açısından. Onlar kümeyi temsil ediyor, yani eğriler.

A: Eğri çizgiler kümeyi, düz çizgiler eşleşmeyi mi temsil ediyor?

G₄Ö: Evet. Karışmaz hem daha net görünür.

A: Böyle düşündün. Peki renkler kullanmışsın yeşil ve mor. Onların bir anlamı var mı?

G₄Ö: Sadece net görünmesi açısından.

A: Yeşil olan tanım kümesi, mor olan değer kümesi olarak belirlemişsin.

G₄Ö: Evet. Önce siyah kurşun kalemle çizdim. Baktım belli olmuyor kümeler, karışık duruyor. Renklendirdim. Bunun tanım kümesi olduğunu, bunun değer kümesi olduğunu, elemanların buradan buraya doğru eşleştiği belli olsun, görünsün diye.

A: Boş fonksiyonu nasıl gösterdin?

G₄Ö: Buranın boş olmasının amacı hiçbir eleman olmadan bir elemana götürmek. Zaten hiç olmayan bir şeyi götüremediğimiz için buna boş fonksiyon diyoruz. Yani aslında boş fonksiyonu göstermek için ben tanım kümesini kesikli çizgilerle gösterdim. Orada değer kümesinde eleman var ama tanım kümesinde eleman yok. O kısım olmadığı için buradan buraya gitmiş oluyor.

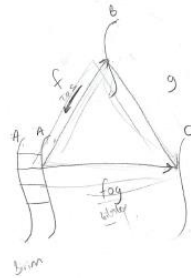
A: Fonksiyon olmamasını nasıl gösterdin?

G₄Ö: Değer kümesini birden fazla elemanla eşleşecek şekilde eğri çizdim ve diğer tarafta kesikli çizgilerle gösterdim. Yani hem şu şekilde hem de şu şekilde fonksiyon olmuyor zaten iki durum var.

A: Tanım ve değer kümelerini tek yönlü ok olarak göstermişsin.

G₄Ö: Hocam aslında şöyle aşağı ve yukarı doğru uzayabilir ama bir başlangıç alalım istedim. Bu taraf yine sonsuza doğru gidiyor zaten.

G₄Ö birim, bileşke fonksiyonu ve fonksiyonun tersini bir arada temsil eden bir resim çizmeye çalışmıştır (Şekil 4.4.2.74).



Şekil 4.4.2.74 G₄Ö'nin resminden bir örnek

G₄Ö: Ben önce bileşke, birim fonksiyon ve fonksiyonun tersini bir arada göstermeyi düşündüm. Onun için de bu şekli çizdim.

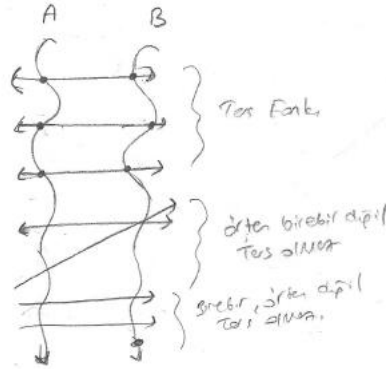
A: Bu üç kavramı neden tek bir resimde bir arada göstermeyi düşündün?

G₄Ö: Mesela ayrı ayrı gösterince şekil çoğalıyor. Görmek biraz daha zor olabilir.

A: Bu şekli çizerken nasıl düşündün?

G₄Ö: Burada şurayı A kümesinden A kümesine birim fonksiyonun gösterimi olarak düşündüm. Sonra B kümesini biraz yukarıya aldım. C'yi A'ya paralel olarak aldım ki şuradan bileşkeyi rahat görebilelim ve A'yı, B'yi, C'yi şuradan direkt A'dan C'ye gittiğini rahat görebilelim diye. Şuradaki çift okla da fonksiyonun tersini göstermeye çalıştım. Ama sonra dedim bunu ayırsam da olur. Zaten şekil belli, ayrı ayrı da olabilir. Bu şekilde A, B ve C kümelerinin elemanları da gözükmüyor. Elemanlarını da yazsak şekil karışacak.

G₄Ö fonksiyonun tersi ve tersi olmayan fonksiyonlarla ilgili kavram resmini çizmiştir. Kavram resmini oluştururken birebir ve örten fonksiyon, birebir olmayan örten fonksiyon ve örten olmayan birebir fonksiyonun tersinin fonksiyon olup olmadığını resminde incelemiştir. Bir fonksiyon birebir ve örtense tersinin fonksiyon olduğunu resimden anladığını belirtmiştir (Şekil 4.4.2.75).

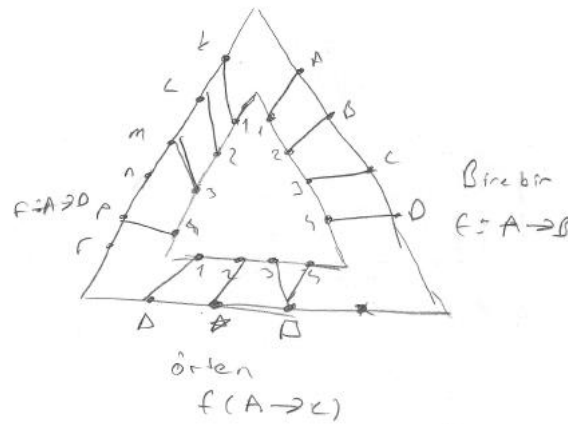


Şekil 4.4.2.75 G₄Ö'nin fonksiyonun tersi ve tersi olmayan fonksiyonlarla ilgili kavram resmi

G₄Ö: Sonra fonksiyonun tersini gösterdim. Bir fonksiyonun tersinin olması için birebir ve örten olması gerekiyor fonksiyonun bunu biliyoruz. Ben üç durumu da yani birebir ve örten fonksiyon, birebir olmayan örten fonksiyon ve örten olmayan birebir fonksiyonu burada gösterdim zaten. Mesela şu ilk bölmede fonksiyon birebir ve örten olduğu için burada tersi de fonksiyon oluyor. Yani çift ok olarak gösterdim onları da. Burası fonksiyonun tersine uyuyor. Ama mesela devamındaki şu üçlü kısma bakarsak, aradaki üçlüye, burası örten ama birebir gitmemiş yani tersten baktığımız zaman bir eleman iki farklı yere gittiği için tersi

fonksiyon olmaz. Tersinin fonksiyon olabilmesi için mutlaka birebir de olması gerekiyordu. Doğrunun diğer ucuna ok çizmedim, tersinin fonksiyon olmadığı gözüksün diye. Aynı şekilde altta kalan yere bakarsak burası da birebir ama değer kümesinde açıkta eleman var yani örten değil. Yine tersten baktığımız zaman tanım kümesinde boş eleman kaldığı için yine tersinin fonksiyon olmadığını görebiliyoruz. Yani buradan anlaşılıyor ki hem birebir hem örten olursa bir fonksiyonun tersi fonksiyon olur.

G₆Ö fonksiyon, örten fonksiyon ve birebir fonksiyon kavramlarını bir arada temsil eden bir resim çizmiştir (Şekil 4.4.2.76).

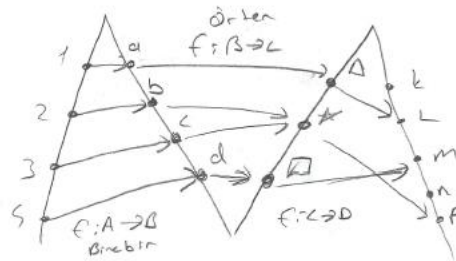


Şekil 4.4.2.76 G₆Ö'nin resminden bir örnek

A: Fonksiyonlarla ilgili ilk başta ne düşündün? Nasıl çizdin?

G₆Ö: İç tarafa bir üçgen çizdim üçgenin her kenarında aynı tanım kümesi var. Dış tarafına da kenarlarında farklı değer kümeleri olan başka bir üçgen çizdim. Burada her türlü fonksiyonun birebirliğini, örtenliğini vs. onları gösterebiliriz şeklinde düşündüm ilk başta.

G₆Ö doğru parçalarını bir araya getirerek birebir fonksiyon, örten fonksiyon ve fonksiyon kavramlarını temsil etmeye çalışmıştır (Şekil 4.4.2.77).



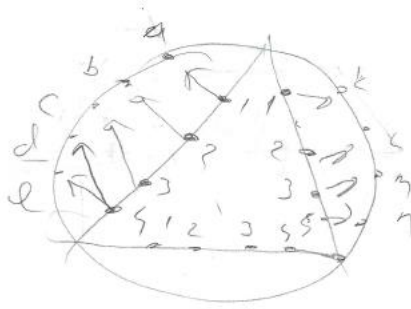
Şekil 4.4.2.77 G₆Ö'nin resminden bir örnek

G₆Ö: Sonradan fonksiyonun tanım ve değer kümelerini üçgenin kenarlarına yerleştirmek yerine doğru parçalarıyla göstermeyi düşündüm.

A: Neden doğru parçalarıyla göstermeyi düşündün?

G₆Ö: Daha açık gözüküyor. Bir de bir kısım birebir, bir kısım örten, bir kısım fonksiyon şeklinde. Ayır ayrı bölebiliyoruz yani tek bir resim üzerinde görebiliyoruz.

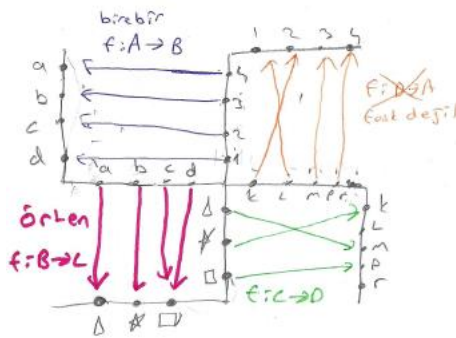
G₆Ö çemberin içine üçgen çizerek fonksiyon ile ilgili kavramları temsil etmeye çalışmıştır (Şekil 4.4.2.78).



Şekil 4.4.2.78 G₆Ö'nün resminden bir örnek

G₆Ö: Sonra bu şekli çizdim. Çemberin içine üçgen çizmeyi düşündüm. Sonra baktığımda mantık olarak ilk başta çizdiğim iç içe üçgenle aynı olduğunu düşündüm.

G₆Ö fonksiyonlarla ilgili kavram resmini oluşturmuştur. Kavram resminin Şekil 4.4.2.77'deki resminin farklı bir yorumu olduğunu ifade etmiştir. Kavram resminde fonksiyon olmama, fonksiyon, birebir fonksiyon ve örten fonksiyonu göstermiştir (Şekil 4.4.2.79).



Şekil 4.4.2.79 G₆Ö'nün fonksiyonlarla ilgili kavram resmi

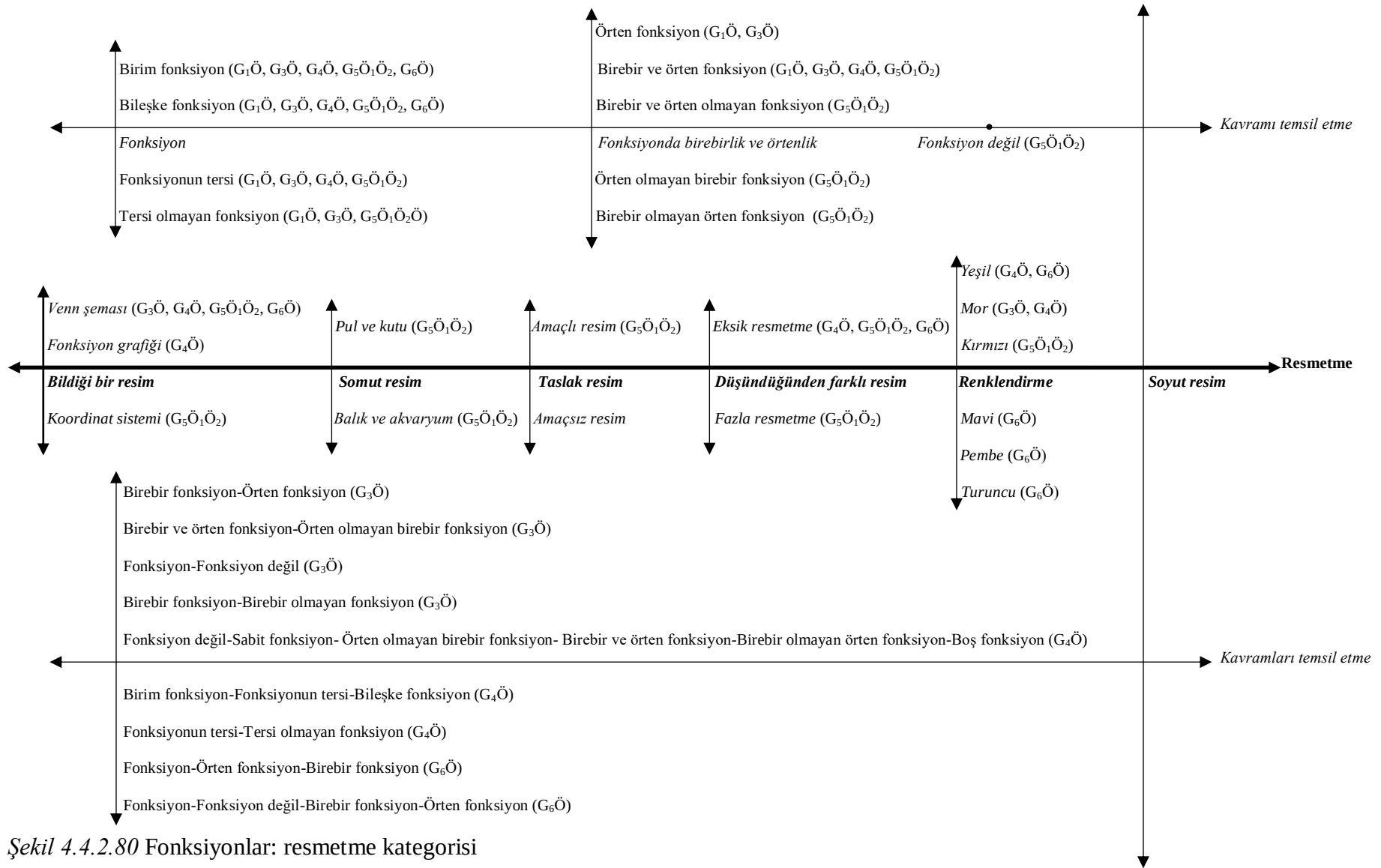
G₆Ö: Sonra dedim hepsini ayrı ayrı gösteren... Yani her köşede her özelliği ayrı ayrı gösteren bir şey tasarlayabilir miyim diye düşündüm. Bu şekli çizdim. Bu şekil de önceki doğru parçalarıyla olan şeklimin farklı bir versiyonu oldu. Bu şekil üzerinden de

yerleştirdiğimde her bölgede ayrı ayrı kavramları gösterebildiğimizin farkına vardım. Ayrıca bir bölgede de fonksiyon olmadığını gösterebiliyorum.

A: Peki bu son şeklinde renkleri neden kullandın?

G₆Ö: Bu kısmın birebir olduğunu görmek için mavi renk, bu kısmın örten olduğunu görmek için pembe renk, aynı şekilde bu klasik fonksiyon tanımını aslında onu göstermek için de yeşil renge, fonksiyon değil, yani fonksiyon olmadığını göstermek için de turuncu rengi kullandım. Renklerle ayırt edilebilmesini istedim.

MÖA'ların fonksiyonlar alt öğrenme alanında resmetme durumları Şekil 4.4.2.80'de gösterilmiştir.

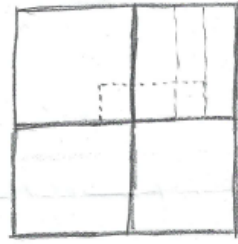


4.4.3. Fonksiyonlar: Resmi Değerlendirme Kategorisi

Fonksiyonlar alt öğrenme alanındaki kavramlarla ilgili resmi değerlendirme kategorisine ait alt kategori, boyut ve alt boyutlar aşağıdaki gibidir.

4.4.3.1. Kendi İçinde Değerlendirme Alt Kategorisi Temsil Açısından Boyutu Yetersiz Alt Boyutu

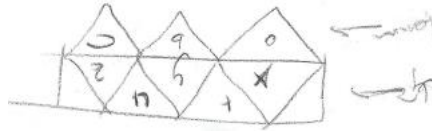
G₃Ö, resminde fonksiyonu temsil edemediğini ifade etmiştir (Şekil 4.4.3.1).



Şekil 4.4.3.1 G₃Ö'nin resminden bir örnek

G₃Ö: Daha sonra acaba dedim kareden gidebilir miyim? Kareden işte böyle eşleştirebilir miyim? Oradan çıkaramadım.

G₄Ö, örüntü fikrinden yararlanarak fonksiyonu temsil etmeye çalışmıştır. Bu fikrinin fonksiyonu temsil etmede yetersiz kalacağını düşündüğünü belirtmiştir (Şekil 4.4.3.2).



Şekil 4.4.3.2 G₄Ö'nin resminden bir örnek

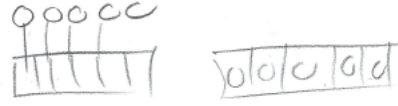
A: Sonra ne çizdin?

G₄Ö: Hocam, bu... Şurası tanım kümesi, şurası değer kümesi. Ben benzer şekillerden farklı böyle örüntü gibi bir şeyler oluşturmaya çalıştım ama. Bu da dediğim gibi sınırlı oluyor yine mesela. Birbirine benzeyen şekillerle gösterebiliriz sadece.

A: Genel bir fonksiyon için gösterimin olmayacağını mı düşündün?

G₄Ö: Evet, bu da olmadı.

G₅Ö₁Ö₂ ilk olarak kutuların içine pullar yerleştirerek fonksiyonu görselleştirmeyi düşünmüşlerdir. Sonrasında bu fikirlerinin gelişigüzel olduğunu düşünmüş, fonksiyonu temsil etme açısından yetersiz bulmuşlardır (Şekil 4.4.3.3).

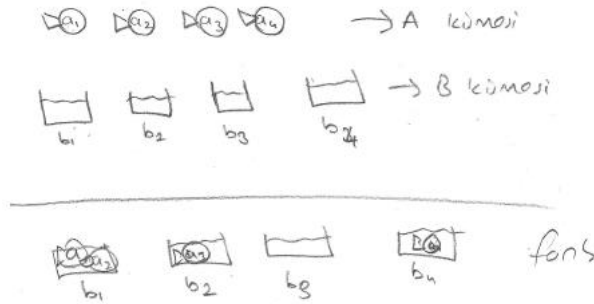


Şekil 4.4.3.3 G₅Ö₁Ö₂'in somut resminden bir örnek

A: *Fonksiyon, birim, örten ve birebir fonksiyonu nasıl çizdiniz? Resimleri oluşturma süreciniz nasıl gerçekleşti? Anlatınız.*

G₅Ö₁: Aklımıza aslında ilk şey gelmişti. Bir kutunun içine pullar yerleştirmek, her kutunun içine bir pul. Sonra dedik ki belki bu çok rastgele olacağı için sıkıntı olabilir.

G₅Ö₁Ö₂ fonksiyonu balık ve akvaryum fikrinden esinlenerek temsil etmeye çalışmışlardır. Bu fikrin somut olduğunu düşünüp resimlerini fonksiyonu temsil etme açısından yetersiz bulmuşlardır (Şekil 4.4.3.4).



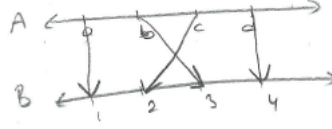
Şekil 4.4.3.4 G₅Ö₁Ö₂'in somut resminden bir örnek

G₅Ö₂: Biz bunu balık ve akvaryum olarak düşündük. Dedik ki daha anlaşılır olur. Her balığın bir akvaryuma girmesi lazım yaşayabilmesi için dedik. Balık hiçbir akvaryuma girmezse o zaman yaşayamaz, ölür, yani fonksiyon olmaz.

G₅Ö₁: Bir akvaryuma aynı anda iki tane, üç tane balık girebilir. O zaman fonksiyon birebir olmuyor. Boş akvaryum olabilir ama boş balık kalmaması gerekiyor. Böyle başladık ama bu da çok somut olduğu için soyut bir şeyler yapmak istediğimizden bundan vazgeçtik.

4.4.3.2. Kendi İçinde Değerlendirme Alt Kategorisi Temsil Açısından Boyutu Yeterli Alt Boyutu

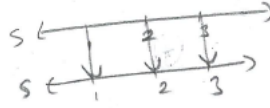
$G_1\ddot{O}$ resminin birebir ve örten fonksiyonu temsil ettiğini düşünmektedir (Şekil 4.4.3.5).



Şekil 4.4.3.5 $G_1\ddot{O}$ 'nin birebir ve örten fonksiyonun kavram resmi

$G_1\ddot{O}$: Birebir eşleme çizdim. Birebir eşleme olması için fonksiyonun birebirlik ve örtenlik şartlarını sağlaması gerekiyordu. O yüzden ben de tanımladığım fonksiyonda elemanlarımı ona göre seçtim. Burası hem birebir hem örten. Belli oluyor zaten. Açıkta eleman yok, her eleman diğer elemana gitmiş, tanım kümesindeki her eleman farklı bir elemana gitmiş.

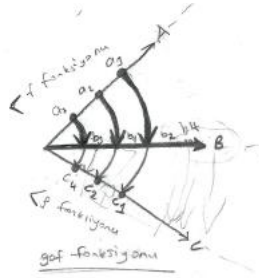
$G_1\ddot{O}$ resminde birim fonksiyonun görüldüğünü ifade etmektedir (Şekil 4.4.3.6).



Şekil 4.4.3.6 $G_1\ddot{O}$ 'nin birim fonksiyonun kavram resmi

$G_1\ddot{O}$: Birim fonksiyonda her eleman kendisiyle eşleşecek hem birebir hem de örten olacak. Onu da tek yönlü oklar, yani her eleman kendisiyle eşleşiyor görünüyor burada da. Bu da hem birebir hem de örten.

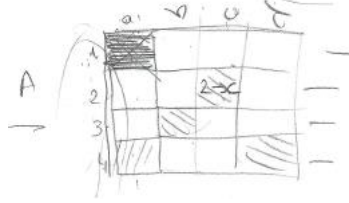
$G_3\ddot{O}$ resminin bileşke fonksiyonu temsil ettiğini düşünmektedir (Şekil 4.4.3.7).



Şekil 4.4.3.7 $G_3\ddot{O}$ 'nin bileşke fonksiyonun kavram resmi

$G_3\ddot{O}$: Daha sonra bileşke fonksiyonu gösterdim. Şöyle bir f fonksiyonu aldım, A 'dan B 'ye. Bir de B 'den C 'ye bir g fonksiyonu aldım. Bunların ikisini bileşke olarak şu şekilde gösterdim... Daha sonra da en son burada a_1, b_1 'e gitmiş; b_1 daha sonra c_5 'e gitmiş. Bu resmin A kümesinden C kümesine olan kısmına baktığımızda biz $g \circ f$ fonksiyonunu yani bileşke fonksiyonu görebiliyoruz. Burada bunu anlattım.

$G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ karenin içine kareler çizerek fonksiyonu temsil etmeye çalışmıştır. Bu şekilde çizmeyi mantıklı bulmuş, resmin fonksiyonu temsil edebileceğini düşünmüştür (Şekil 4.4.3.8).



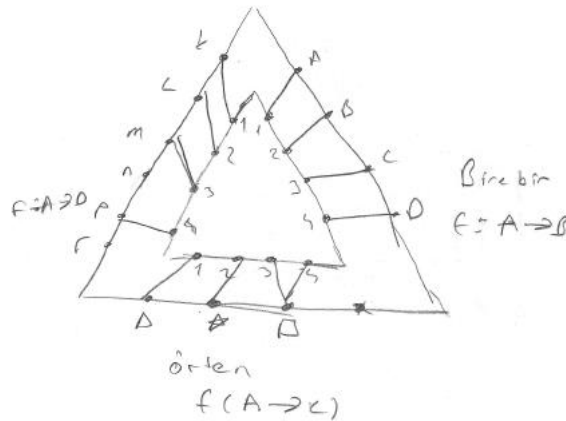
Şekil 4.4.3.8 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin resminden bir örnek

$G_5\ddot{O}_1$: Bir tane kare çizdim ben önce taslak olarak. Kareyi, tekrar karelere böldük. Sonra karenin şu kısmını tanım kümesi, A kümesi olarak alalım dedik yani öyle düşündük o an. Burası da B kümesi oldu işte, değer kümesi. Sonra bu küçük karelerin içini boyarsak 1'in, a'ya gittiğini gösterebiliriz dedik. Bu bize mantıklı geldi. Sonra grup arkadaşım $G_5\ddot{O}_2$ bunu büyütelim biraz dedi. Bunu biraz daha geliştirelim, hem birebir ve örten olmasını da gösterelim dedik.

A: Olabileceğini mi gördünüz o taslakta?

$G_5\ddot{O}_1$: Evet. Bir de şey hocam... Nasıl diyeyim? Baktığında anlaşılabilir yani. Çok karışık bir şey değil. Direkt görünüyor yani.

$G_6\ddot{O}$ fonksiyon, örten fonksiyon ve birebir fonksiyon kavramlarını bir arada temsil eden bir resim çizmiştir. Resminde kavramların temsili (fonksiyon, birebir fonksiyon, örten fonksiyon) açısından bir sorun görmemiştir (Şekil 4.4.3.9).

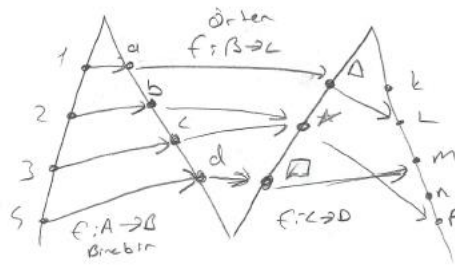


Şekil 4.4.3.9 $G_6\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek

A: Fonksiyonlarla ilgili ilk başta ne düşündün? Nasıl çizdin?

G₆Ö: İç tarafa bir üçgen çizdim üçgenin her kenarında aynı tanım kümesi var. Dış tarafına da kenarlarında farklı değer kümeleri olan başka bir üçgen çizdim. Burada her türlü fonksiyonun birebirliğini, örtenliğini vs. onları gösterebiliriz şeklinde düşündüm ilk başta. Bu şekil kafama yatmıştı en başta ama sonradan düşündüm ki çok kapalı bir şekil daha açık nasıl çizebilirim diye düşündüm.

G₆Ö fonksiyon, örten fonksiyon ve birebir fonksiyon kavramlarını bir arada göstermeye çalışmıştır. Resminde kavramların bir arada açık bir şekilde temsil edildiğini düşünmektedir (Şekil 4.4.3.10).



Şekil 4.4.3.10 G₆Ö'nin resminden bir örnek

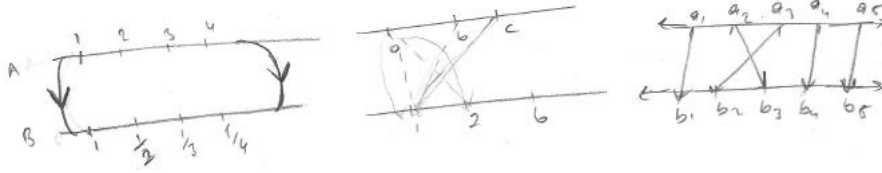
G₆Ö: Sonradan fonksiyonun tanım ve değer kümelerini üçgenin kenarlarına yerleştirmek yerine doğru parçalarıyla göstermeyi düşündüm.

A: Neden doğru parçalarıyla göstermeyi düşündün?

G₆Ö: Daha açık gözüküyor. Bir de bir kısım birebir, bir kısım örten, bir kısım fonksiyon şeklinde. Ayı ayrı bölebiliyoruz yani tek bir resim üzerinde görebiliyoruz.

4.4.3.3. Kendi İçinde Değerlendirme Alt Kategorisi Tasarım Açısından Boyutu Yetersiz Alt Boyutu

G₁Ö fonksiyonu temsil etmeye çalıştığı resimlerinde elemanların eşleşmesini farklı çizgilerle göstermeye çalışmıştır. Fonksiyonun elemanlarının eşleşmesini önce yönlü yay ile temsil etmiştir. Tasarım açısından yönlü yayı beğenmediğini belirtmiştir. Sonra kesikli çizgilerden oluşan doğru parçası ile eşleşmeyi temsil etmiştir. Kesikli çizgileri de görünüm olarak beğenmediğini ifade etmiştir (Şekil 4.4.3.11).

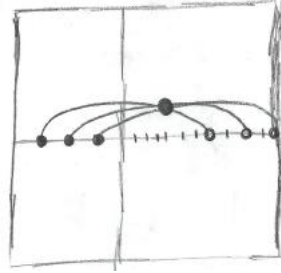


Şekil 4.4.3.11 $G_1\ddot{O}$ 'nin resimlerinden örnekler

A: Bir de ilk resminde elemanların eşleşmesini yönlü yay ile göstermişsin sonra kesikli çizgilerden oluşan doğru parçası ve en son da ıfın. Resmini neden değiştirdin?

$G_1\ddot{O}$: İlk resmimde şu şekilde fonksiyonda bir kümenin elemanları diğeriyle eşleşiyordu. Burada o mantığı görmek istedim. Yay olmasını tasarım açısından da değiştirdim. Hem düz çizgi olunca daha kolay çiziliyor. Sonra dedim ki madem kümeleri doğrularla temsil edeceğim, a, 1 ile eşleşiyor, bu eşleşmeyi de kesikli çizgilerle gösterdim. Diğerleriyle karışmasını istedim. Ama sonra birleştirdince ve yön belirleyince daha güzel bir görüntü ortaya çıktı.

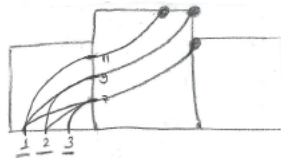
$G_3\ddot{O}$, resminin görünüm olarak anlaşılmasının zor olduğunu düşünmüştür (Şekil 4.4.3.12).



Şekil 4.4.3.12 $G_3\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek

$G_3\ddot{O}$: Sonra yine karenin üzerinde noktalar alıp bu sefer diğer tarafı değer kümesi gibi düşünüp eşleştirmeye başladım. Sonra çok karışır diye bunu da beğenmedim.

$G_3\ddot{O}$ üç kareyi yan yana çizip birebir ve örten fonksiyonu göstermeye çalışmıştır. Çizgilerin karışacağını düşünmüş ve tasarım olarak resmini yetersiz bulmuştur (Şekil 4.4.3.13).



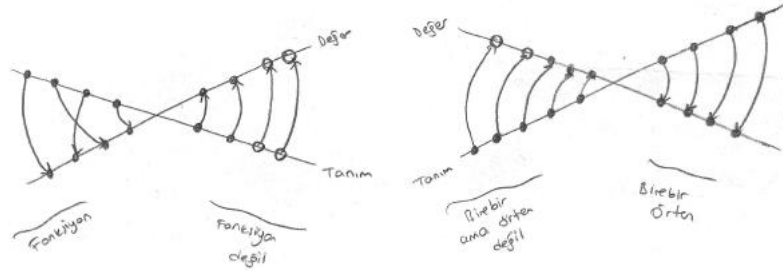
Şekil 4.4.3.13 $G_3\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek

$G_3\ddot{O}$: Sonra üç kareyi falan birleştireyim dedim.

A: Üç kareyi neden birleştirdin?

G₃Ö: Bu tarafta örtenliği bu tarafta birebirliği gösteririm diye düşündüm. Ama orada da çizgiler çok karışacaktı, o yüzden ondan da vazgeçtim.

G₃Ö resminde herhangi bir eleman ile eşleşmeyen elemanları içi boş nokta ve eşleşme çizgisi ile göstermiştir. Tanım veya değer kümesinde açıkta kalan elemanları bu şekilde temsil etmesinin elemanları eşleşiyor göstereceğini ve bu tasarımının karışıklık oluşturacağını düşünmüştür (Şekil 4.4.3.14).

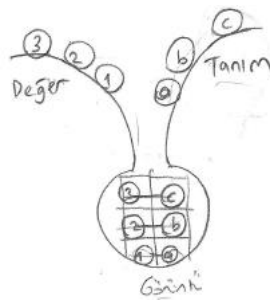


Şekil 4.4.3.14 G₃Ö'nin resimlerinden örnekler

A: Ama ilk resimlerinde sanırım boştaki elemanlar da bir elemanla eşleşiyordu? Sonradan neden vazgeçtin?

G₃Ö: Evet, öyle yapıyordum. Sonrasında yine karışacak diye... Çünkü şey karışıyordu o zaman eleman herhangi bir eleman ile eşleşmediği halde eşleşiyor gözüküyordu, eşleşme çizgisi olduğu için.

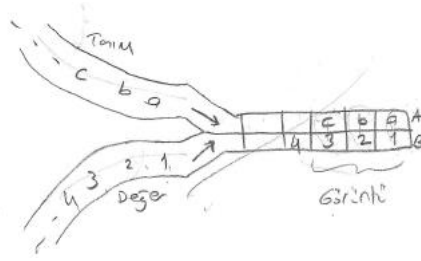
G₄Ö resminin tasarım olarak somut kaldığını ve Venn şemasına benzediğini düşünmüş ve yetersiz bulmuştur (Şekil 4.4.3.15).



Şekil 4.4.3.15 G₄Ö'nin resminden bir örnek

G₄Ö: Ben şurayı değer kümesi alsam şurayı tanım kümesi. İlk inenler eşleşiyor gibi... Ama biraz daha somut oldu zaten bir Venn şemasından pek farklı olmadı.

G₄Ö, Şekil 4.4.3.15'deki şeklini biraz değiştirerek çizmiş, benzer şekilde bu resmini de yetersiz bulmuştur (Şekil 4.4.3.16).



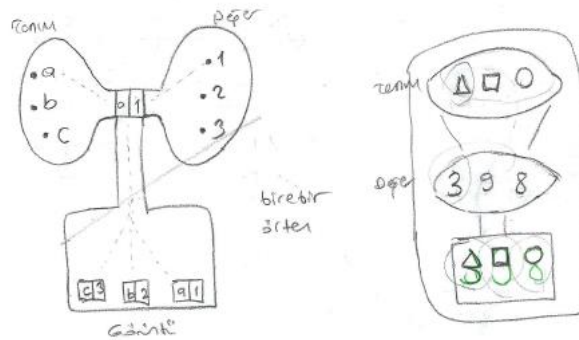
Şekil 4.4.3.16 G₄Ö'nin resminden bir örnek

G₄Ö: Sonra bunu daha net şöyle mi göstersem dedim baktım bununla aynı mantık oluyor yani. Şunu şöyle çevirirsek aynısı oluyor.

A: Yeni resminin eski resmin yönü değiştirilmiş hali olduğunu düşündün?

G₄Ö: Evet, bu da olmadı.

G₄Ö, Şekil 4.4.3.15 ve Şekil 4.4.3.16'daki resimlerine benzeyen iki resim daha çizmiş ve benzer şekilde bu resimlerini de tasarım olarak yetersiz bulmuştur (Şekil 4.4.3.17).



Şekil 4.4.3.17 G₄Ö'nin resimlerinden örnekler

G₄Ö: Sonra yine şu mantığa benzer farklı bir şeyler de çizdim. Bunlar, öncekilerin benzeri.

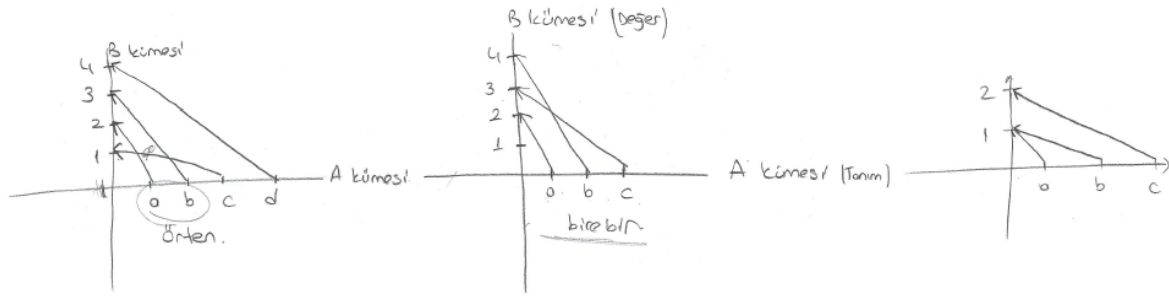
A: Fikir olarak aynı. Ama biraz farklılaştırıp çizmeyi mi denedin?

G₄Ö: Evet. Aynı şekilde, onlar da olmadı.

G₄Ö, tanım ve değer kümelerini önce siyah kurşun kalemle çizmiştir. Tasarım olarak yetersiz görüldüğünü düşünmüştür (Şekil 4.4.3.18).

G₄Ö: Burada şurayı A kümesinden A kümesine birim fonksiyonun gösterimi olarak düşündüm. Sonra B kümesini biraz yukarıya aldım. C'yi A'ya paralel olarak aldım ki şuradan bileşkeyi rahat görebilelim ve A'yı, B'yi, C'yi şuradan direkt A'dan C'ye gittiğini rahat görebilelim diye. Şuradaki çift okla da fonksiyonun tersini göstermeye çalıştım. Ama sonra dedim bunu ayırsam da olur. Zaten şekil belli, ayrı ayrı da olabilir. Bu şekilde A, B ve C kümelerinin elemanları da gözüküyor. Elemanlarını da yazsak şekil karışacak.

G₅Ö₁Ö₂ fonksiyonun temsili ile ilgili resimlerinin koordinat sistemine çok benzediğini düşünmüş ve tasarım olarak yetersiz bulmuşlardır (Şekil 4.4.3.20).



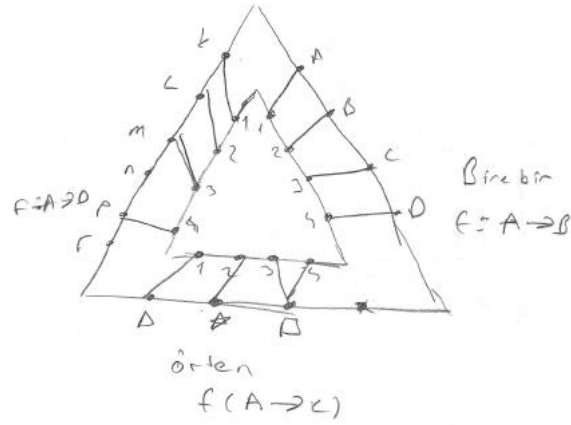
Şekil 4.4.3.20 G₅Ö₁Ö₂'nin resimlerinden örnekler

A: Sonra nasıl düşündünüz?

G₅Ö₁: Sonra koordinat sistemine benzer bir gösterim olduğu için vazgeçtik. O yüzden bundan vazgeçtik.

G₅Ö₂: Koordinat sistemine benzediği için, daha farklı bir şey düşünelim dedik.

G₆Ö fonksiyon, örten fonksiyon ve birebir fonksiyon kavramlarını bir arada temsil eden bir resim çizmiştir. Resminde kavramların temsil edilmesi (fonksiyon, birebir fonksiyon, örten fonksiyon) açısından bir sorun görmemiş ancak tasarım olarak kapalı bir şekil olduğunu düşünmüş ve tasarım açısından yetersiz bulmuştur (Şekil 4.4.3.21).

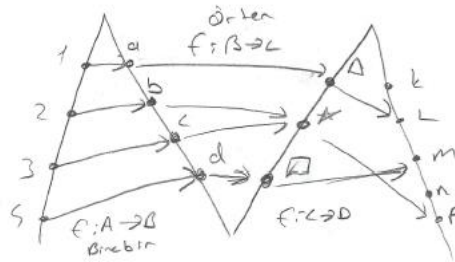


Şekil 4.4.3.21 $G_6\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek

A: Fonksiyonlarla ilgili ilk başta ne düşündün? Nasıl çizdin?

$G_6\ddot{O}$: İç tarafa bir üçgen çizdim üçgenin her kenarında aynı tanım kümesi var. Dış tarafına da kenarlarında farklı değer kümeleri olan başka bir üçgen çizdim. Burada her türlü fonksiyonun birebirliğini, örtenliğini vs. onları gösterebiliriz şeklinde düşündüm ilk başta. Bu şekil kafama yatmıştı en başta ama sonradan düşündüm ki... Çok kapalı bir şekil daha açık nasıl çizebilirim diye düşündüm.

$G_6\ddot{O}$ fonksiyon, örten fonksiyon ve birebir fonksiyon kavramlarını tek bir resim üzerinde göstermeye çalışmıştır. Resimde kavramların temsil edildiğini düşünmesine rağmen resmin göze hitap etmediğini düşünmüş, tasarım olarak yetersiz bulmuştur (Şekil 4.4.3.22).



Şekil 4.4.3.22 $G_6\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek

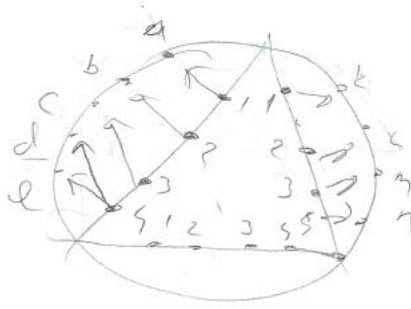
$G_6\ddot{O}$: Sonradan fonksiyonun tanım ve değer kümelerini üçgenin kenarlarına yerleştirmek yerine doğru parçalarıyla göstermeyi düşündüm.

A: Neden doğru parçalarıyla göstermeyi düşündün?

$G_6\ddot{O}$: Daha açık gözüküyor. Bir de bir kısım birebir, bir kısım örten, bir kısım fonksiyon şeklinde. Ayır ayrı bölebiliyoruz yani tek bir resim üzerinde görebiliyoruz. Sonradan bu

şeklin de fazla göze hitap etmediğini düşündüm. Göze hitap etmediğini düşündüğüm için de farklı olarak neye çevirebilirim bu şekli diye düşündüm.

G₆Ö çemberin içine üçgen çizerek fonksiyonu temsil etmeye çalışmıştır. Bu resminin tasarım olarak Şekil 4.4.3.21'deki resmine benzediğini düşünmüştür. Şekil 4.4.3.21'deki resim gibi bu resmi de tasarım olarak yetersiz bulduğunu belirtmiştir (Şekil 4.4.3.23).

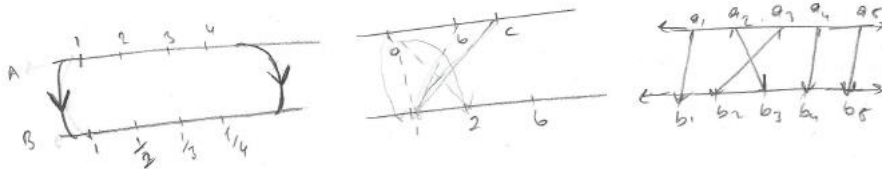


Şekil 4.4.3.23 G₆Ö'nin resminden bir örnek

G₆Ö: Sonra bu şekli çizdim. Çemberin içine üçgen çizmeyi düşündüm. Sonra baktığımda mantık olarak ilk başta çizdiğim iç içe üçgenle aynı olduğunu düşündüm. Onun gibi bu da kapalı bir şekil oldu. Bu şekilden de vazgeçtim.

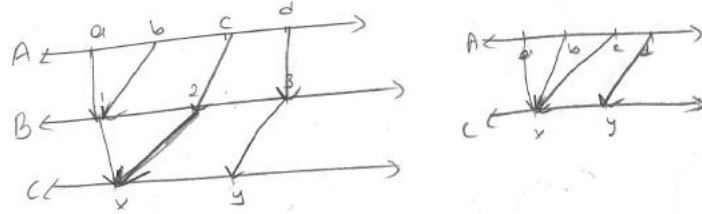
4.4.3.4. Kendi İçinde Değerlendirme Alt Kategorisi Tasarım Açısından Boyutu Yeterli Alt Boyutu

G₁Ö fonksiyonu temsil etmeye çalıştığı resimlerinde elemanların eşleşmesini farklı çizgilerle göstermeye çalışmıştır. Fonksiyonun elemanlarının eşleşmesini ışınlarla gösterirse güzel göründüğünü ifade etmiştir. Tasarım olarak eşleşmeyi ışınlarla göstermeyi yeterli bulmuştur (Şekil 4.4.3.24).



çizgi olunca daha kolay çiziliyor. Sonra dedim ki madem kümeleri doğrularla temsil edeceğim, a , 1 ile eşleşiyor, bu eşleşmeyi de kesikli çizgilerle gösterdim. Diğerleriyle karışmasını istedim. Ama sonra birleştiren ve yön belirleyince daha güzel bir görüntü ortaya çıktı.

$G_1\ddot{O}$ bileşke fonksiyonun resimden rahatlıkla görüldüğünü ifade etmiştir. Tasarım açısından resmini yeterli bulmaktadır (Şekil 4.4.3.25).



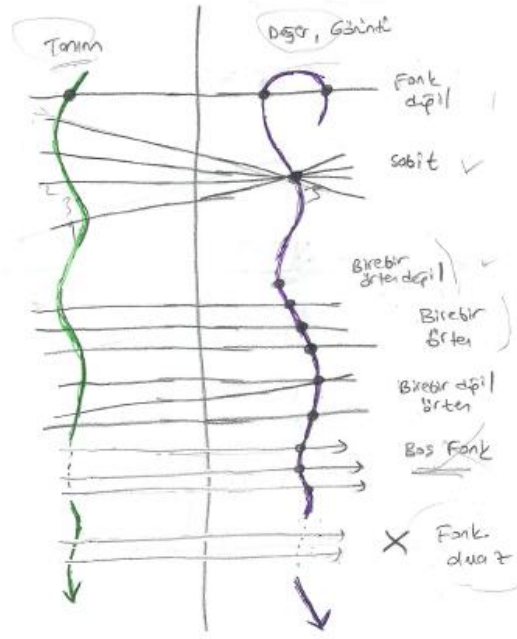
Şekil 4.4.3.25 $G_1\ddot{O}$ 'nin bileşke fonksiyonunun kavram resmi

$G_1\ddot{O}$: Bu bileşke fonksiyon. A kümesinden B kümesine bir fonksiyon tanımladım. O fonksiyonun elemanlarını resmime yerleştirdim şu şekilde eşleştirdim yani. a ve b , 1 ile; c , 2 ile; d , 3 ile eşleşiyor. B kümesinden C kümesine baktığımız zaman da 1 ve 2 elemanları x ile; 3 , y ile eşleşiyor. A 'dan C 'ye olan bileşke fonksiyonu ben nasıl bulurum diye düşündüm. Okları takip ettim. a , 1 'e gitmişse; 1 de x 'e gidiyorsa; a , x 'e gider. b , 1 'e gittiye; 1 de x 'e gidiyorsa; b de x 'e gider. c , 2 'ye gidiyorsa; 2 de x 'e gitmişse; c yine x 'e gidiyor. d , 3 'e gidiyorsa; 3 de y 'ye gidiyorsa; d , y 'ye gidecek. Yani görsel olarak bu şekilde takip ettikleri için birbirlerini görülmesi kolay diye düşünüyorum. Burada da A 'dan C 'ye giden gof fonksiyonu var.

A : Nasıl bir bileşke fonksiyon ortaya çıktı, onu mu çizdin tekrar?

$G_1\ddot{O}$: Evet. Ama zaten buradan da belli oluyor.

$G_4\ddot{O}$ tanım ve değer kümelerini eğri çizgilerle, elemanların eşleşmesini düz çizgilerle göstermiştir. Bu şekilde temsil etmesinin tasarım açısından daha iyi görüneceğini düşündüğünü belirtmiştir (Şekil 4.4.3.26).

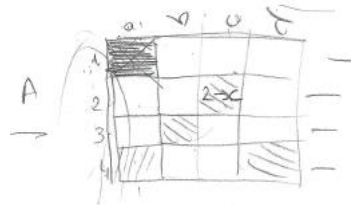


Şekil 4.4.3.26 $G_4\ddot{O}$ 'nin resminden bir örnek

A: Eğri çizgiler kümeyi, düz çizgiler eşleşmeyi mi temsil ediyor?

$G_4\ddot{O}$: Evet. Karışmaz hem daha net görünür.

$G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ fonksiyonu karelerle temsil ettiği resminin tasarım olarak anlaşılır olduğunu düşünmüştür (Şekil 4.4.3.27).



Şekil 4.4.3.27 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin resminden bir örnek

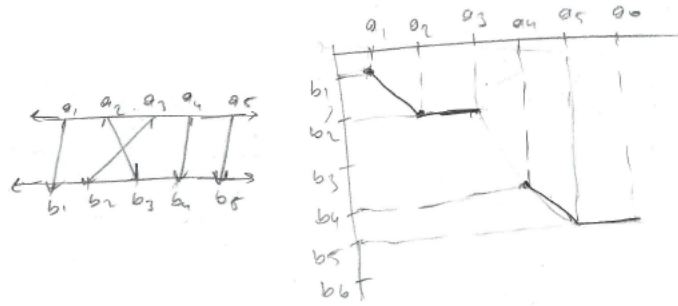
$G_5\ddot{O}_1$: Bir tane kare çizdim ben önce taslak olarak. Kareyi, tekrar karelere böldük. Sonra karenin şu kısmını tanım kümesi, A kümesi olarak alalım dedik yani öyle düşündük o an. Burası da B kümesi oldu işte, değer kümesi. Sonra bu küçük karelerin içini boyarsak 1'in, a'ya gittiğini gösterebiliriz dedik. Bu bize mantıklı geldi. Sonra grup arkadaşım $G_5\ddot{O}_2$ bunu büyütelim biraz dedi. Bunu biraz daha geliştirelim, hem birebir ve örten olmasını da gösterelim dedik.

A: Olabileceğini mi gördünüz o taslakta?

G₅Ö₁: Evet. Bir de şey hocam... Nasıl diyeyim? Baktığında anlaşılabilir yani. Çok karışık bir şey değil. Direkt görünüyor yani.

4.4.3.5. Başka Bir Resimle Karşılaştırarak Değerlendirme Alt Kategorisi Tasarım Açısından Boyutu Başarılı Alt Boyutu

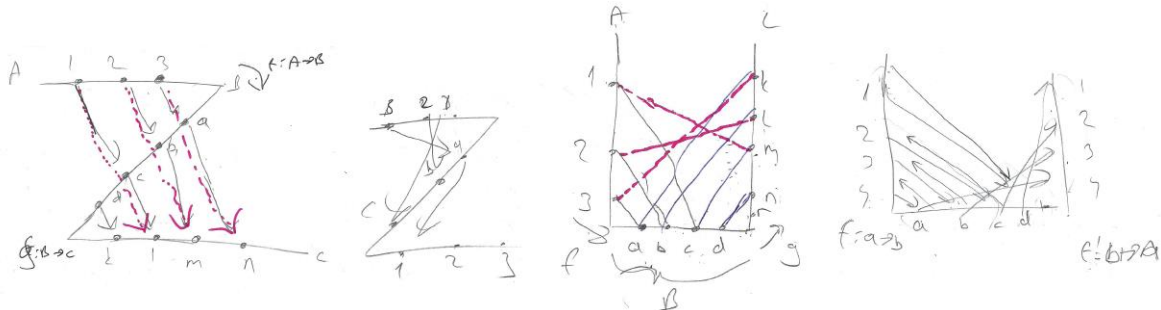
G₁Ö fonksiyonu doğrularla temsil etmeye çalışmış sonra bu şeklini biraz değiştirmiştir. İlk resmi ile ikinci resmini karşılaştırmış, ilk resmini tasarım açısından daha başarılı bulmuştur (Şekil 4.4.3.28).



Şekil 4.4.3.28 G₁Ö'nin resimlerinden örnekler

G₁Ö: Tasarım olarak daha güzel bir şey bulabilir miyim diye şunu denedim. Fonksiyonun tanım ve değer kümelerini çapraz olarak çizdim. Ama ilk çizdiğim şeklinin daha basit ve göz yormadığını düşündüm. Bu resim görsellik nedeniyle karışık olacağından dolayı ilk resmime karar verdim.

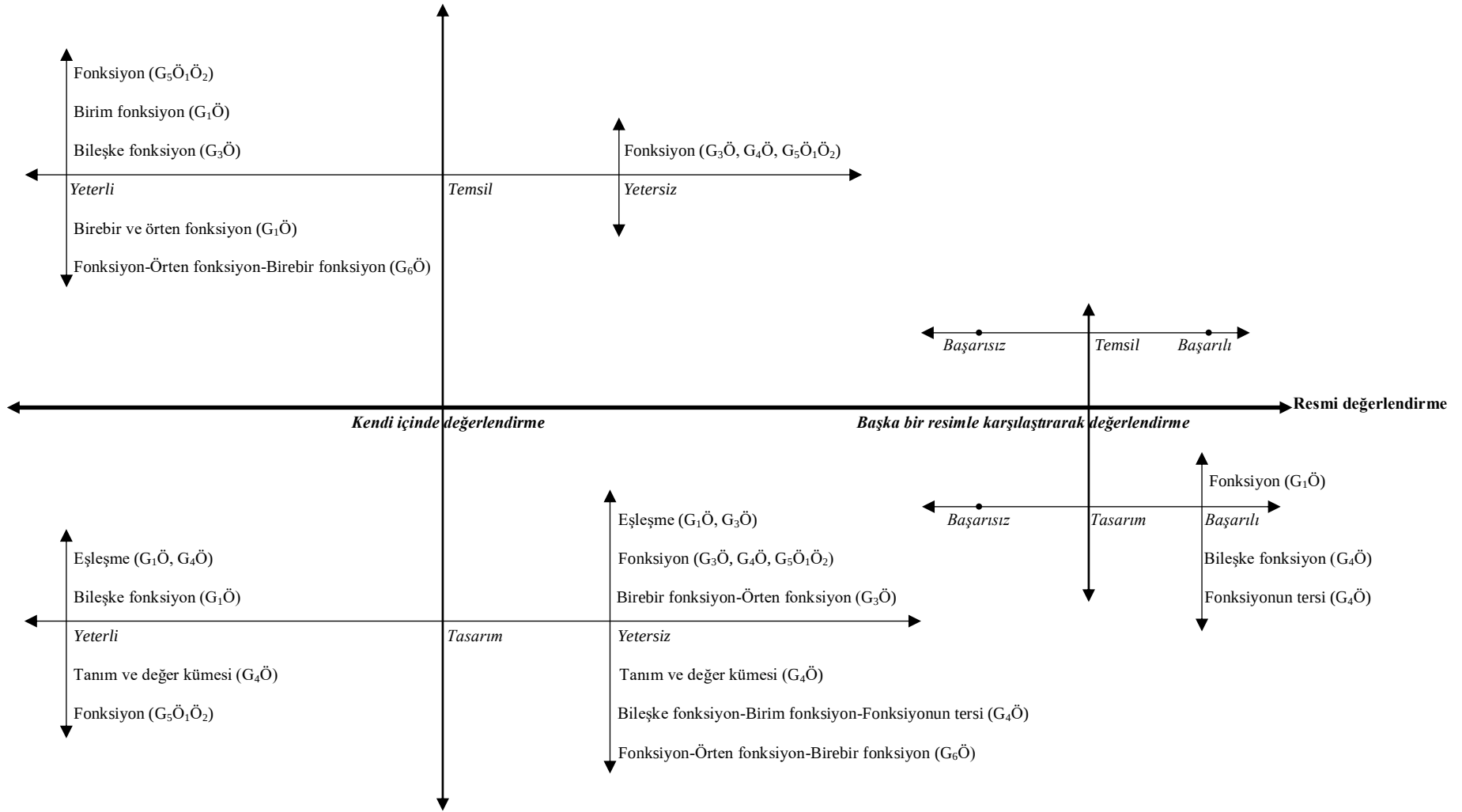
G₆Ö “z” ve “u” şeklinde bileşke fonksiyon (soldan birinci ve üçüncü resim) ve fonksiyonun tersini (soldan ikinci ve dördüncü resim) temsil etmiştir. İki şekli birbiriyle karşılaştırdığında tasarım olarak “z” şeklindeki resmini daha başarılı bulduğunu ifade etmiştir (Şekil 4.4.3.29).



Şekil 4.4.3.29 G₆Ö'nin resimlerinden örnekler

G₆Ö: Fonksiyonun tersinde ise yine aynı şekilde u ve z şeklini düşündüm. Ama z şeklinin bileşke fonksiyon ve fonksiyonun tersinde daha güzel gözüktüğünü düşünüyorum.

MÖA'ların fonksiyonlar alt öğrenme alanındaki resmi değerlendirme durumları Şekil 4.4.3.30'da gösterilmiştir.



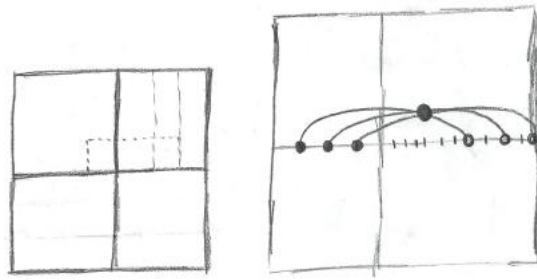
Şekil 4.4.3.30 Fonksiyonlar: resmi değerlendirme kategorisi

4.4.4. Fonksiyonlar: Resmi Değiştirme Kategorisi

Fonksiyonlar alt öğrenme alanındaki kavramlarla ilgili resmi değiştirme kategorisine ait alt kategori, boyut ve alt boyutlar aşağıdaki gibidir.

4.4.4.1. Temsil Açısından Alt Kategorisi Kısmen Değiştirme Boyutu

G₃Ö, fonksiyonu kare şekli çizerek temsil etmeye çalışmıştır. Çizdiği resimden fonksiyonu temsil edemeyeceğini düşünmüş ve resminin bir kısmını değiştirmiştir (Şekil 4.4.4.1).

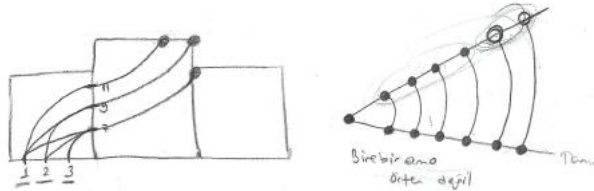


Şekil 4.4.4.1 G₃Ö'nin resmiyi temsil açısından kısmen değiştirmesi

G₃Ö: Daha sonra acaba dedim kareden gidebilir miyim? Kareden işte böyle eşleştirebilir miyim? Oradan çıkaramadım. Sonra yine karenin üzerinde noktalar alıp bu sefer diğer tarafı değer kümesi gibi düşünüp eşleştirmeye başladım.

4.4.4.2. Temsil Açısından Alt Kategorisi Tamamen Değiştirme Boyutu

G₃Ö karelerle ilgili resimlerinden tamamen vazgeçmiş, açı ve yay fikirlerinden esinlenerek yeni resimler çizmeye başlamıştır (Şekil 4.4.4.2).



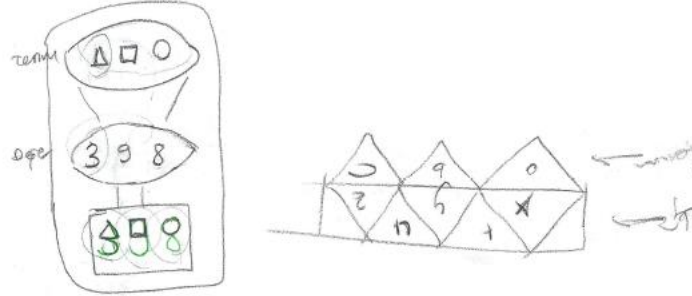
Şekil 4.4.4.2 G₃Ö'nin resmiyi temsil açısından tamamen değiştirmesi

G₃Ö: Sonra üç kareyi falan birleştireyim dedim.

A: Üç kareyi neden birleştirdin?

G₃Ö: *Bu tarafta örtenliği bu tarafta birebirliği gösteririm diye düşündüm. Ama orada da çizgiler çok karışacaktı, o yüzden ondan da vazgeçtim. Daha sonra yay gibi bir şey, açılı bir şey olsun dedim.*

G₄Ö tanım ve değer kümesinin elemanlarının hareket ederek eşleştiği böylece fonksiyonu oluşturduğu fikrinden vazgeçmiş ve örüntü fikrinden yararlanarak fonksiyonu temsil etmeye çalışmıştır (Şekil 4.4.4.3).



Şekil 4.4.4.3. G₄Ö'nin resmini temsil açısından tamamen değiştirmesi

G₄Ö: *Sonra yine şu mantığa benzer farklı bir şeyler de çizdim. Bunlar, öncekilerin benzeri.*

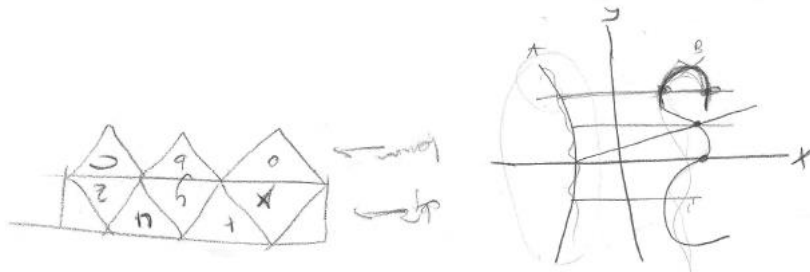
A: *Fikir olarak aynı. Ama biraz farklılaştırıp çizmeyi mi denedin?*

G₄Ö: *Evet. Aynı şekilde, onlar da olmadı.*

A: *Sonra ne çizdin?*

G₄Ö: *Hocam, bu... Şurası tanım kümesi, şurası değer kümesi. Ben benzer şekillerden farklı böyle örüntü gibi bir şeyler oluşturmaya çalıştım ama.*

G₄Ö örüntü fikrinden yola çıkarak fonksiyonu temsil etmenin sınırlı olacağını düşünmüş, resmini tamamen değiştirmiştir. Fonksiyonu, fonksiyonun grafiği fikrinden esinlenerek resmetmeye çalışmıştır (Şekil 4.4.4.4).



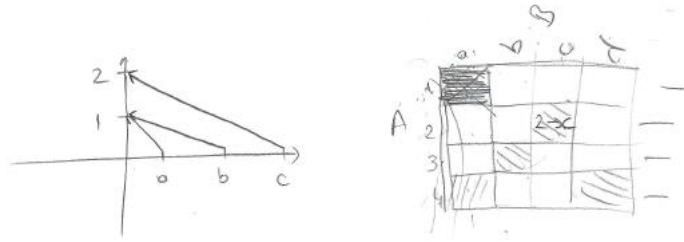
Şekil 4.4.4.4 G₄Ö'nin resmini temsil açısından tamamen değiştirmesi

G₄Ö: Hocam, bu... Şurası tanım kümesi, şurası değer kümesi. Ben benzer şekillerden farklı böyle örüntü gibi bir şeyler oluşturmaya çalıştım ama. Bu da dediğim gibi sınırlı oluyor yine mesela. Birbirine benzeyen şekillerle gösterebiliriz sadece.

A: Genel bir fonksiyon için gösterimin olmayacağını mı düşündün?

G₄Ö: Evet, bu da olmadı. Sonra işte grafiklere geçtim. Düşündüm grafik üzerinden nasıl gidebiliriz diye. Nasıl çiziyorduk, nasıl fonksiyon oluyordu... Ben aslında ilk şöyle düşündüm. Şimdi tanım ve değer kümesini illa yuvarlak ile değil de dedim kümeler çizgi şeklinde olsun. Şu çizgi bir küme olsun, karşısındaki de bir küme olsun diye düşündüm.

G₅Ö₁Ö₂ koordinat sisteminden yararlanarak fonksiyonu temsil etmeye çalışmışlardır. Resimlerinin koordinat sisteminden çok farklı olmadığını düşünmüş fonksiyonu kare çizerek temsil etmeye çalışmışlardır (Şekil 4.4.4.5).



Şekil 4.4.4.5 G₅Ö₁Ö₂'nin resmini temsil açısından tamamen değiştirmesi

A: Sonra nasıl düşündünüz?

G₅Ö₁: Sonra koordinat sistemine benzer bir gösterim olduğu için vazgeçtik. O yüzden bundan vazgeçtik.

G₅Ö₂: Koordinat sistemine benzediği için, daha farklı bir şey düşünelim dedik.

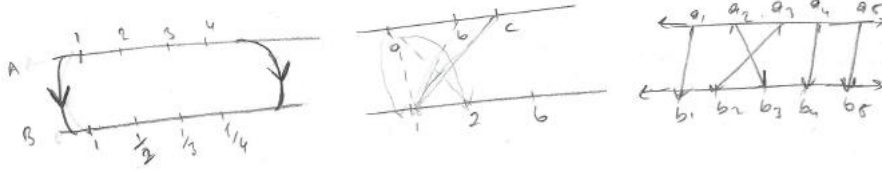
G₅Ö₁: Şuraya geçtik sonra. Bir tane kare çizdim ben önce taslak olarak. Kareyi, tekrar karelere böldük. Sonra karenin şu kısmını tanım kümesi, A kümesi olarak alalım dedik yani öyle düşündük o an. Burası da B kümesi oldu işte, değer kümesi. Sonra bu küçük karelerin içini boyarsak 1'in, a'ya gittiğini gösterebiliriz dedik. Bu bize mantıklı geldi. Sonra grup arkadaşım G₅Ö₂ bunu büyütelim biraz dedi. Bunu biraz daha geliştirelim, hem birebir ve örten olmasını da gösterelim dedik.

A: Olabileceğini mi gördünüz o taslakta?

G₅Ö₁: Evet. Bir de şey hocam... Nasıl diyeyim? Baktığında anlaşılabilir yani. Çok karışık bir şey değil. Direkt görünüyor yani.

4.4.4.3. Tasarım Açısından Alt Kategorisi Kısmen Değiştirme Boyutu

G₁Ö fonksiyonu temsil etmeye çalıştığı resimlerinde elemanların eşleşmesini farklı çizgilerle göstermeye çalışmıştır (Şekil 4.4.4.6).

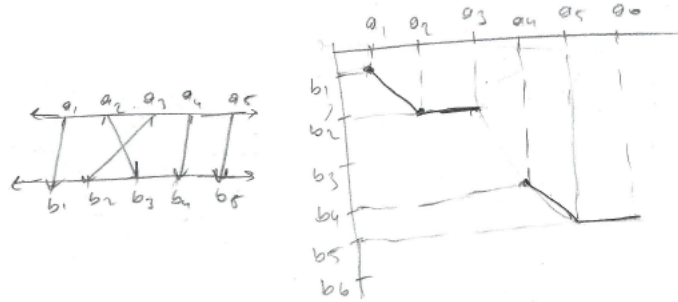


Şekil 4.4.4.6 G₁Ö'nin resimlerinden örnekler

A: Bir de ilk resminde elemanların eşleşmesini yönlü yay ile göstermişsin sonra kesikli çizgilerden oluşan doğru parçası ve en son da ışın. Resmini neden değiştirdin?

G₁Ö: İlk resmimde şu şekilde fonksiyonda bir kümenin elemanları diğeriyle eşleşiyordu. Burada o mantığı görmek istedim. Yay olmasını tasarım açısından da değiştirdim. Hem düz çizgi olunca daha kolay çiziliyor. Sonra dedim ki madem kümeleri doğrularla temsil edeceğim, a, 1 ile eşleşiyor, bu eşleşmeyi de kesikli çizgilerle gösterdim. Diğerleriyle karışmasını istedim. Ama sonra birleştirince ve yön belirleyince daha güzel bir görüntü ortaya çıktı.

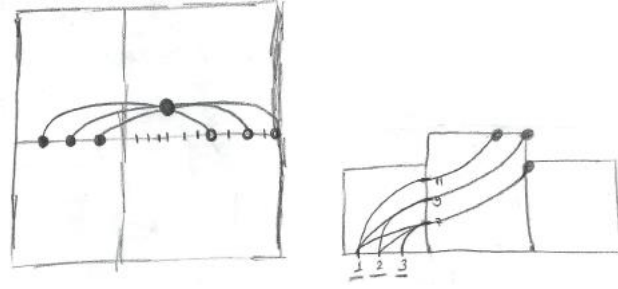
G₁Ö fonksiyonu doğrularla temsil etmeye çalışmış resmini tasarım olarak kısmen değiştirmiştir (Şekil 4.4.4.7).



Şekil 4.4.4.7 G₁Ö'nin resimlerinden örnekler

G₁Ö: Tasarım olarak daha güzel bir şey bulabilir miyim diye şunu denedim. Fonksiyonun tanım ve değer kümelerini çapraz olarak çizdim. Ama ilk çizdiğim şeklinin daha basit ve göz yormadığını düşündüm. Bu resim görsellik nedeniyle karışık olacağından dolayı ilk resmime karar verdim.

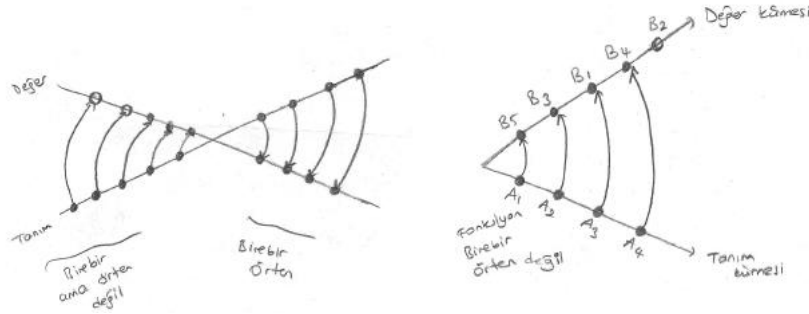
G₃Ö, kare ve içine noktalar çizmiş ama bu resminin tasarım olarak karışık olduğunu düşünmüştür. Resminin bir kısmını değiştirip yeniden çizmiştir (Şekil 4.4.4.8).



Şekil 4.4.4.8 $G_3\ddot{O}$ 'nin resmini tasarım açısından kısmen değiştirmesi

$G_3\ddot{O}$: Sonra yine karenin üzerinde noktalar alıp bu sefer diğer tarafı değer kümesi gibi düşünüp eşleştirmeye başladım. Sonra çok karışır diye bunu da beğenmedim. Sonra üç kareyi falan birleştireyim dedim.

$G_3\ddot{O}$ resminde eşleşmeyen elemanları içi boş nokta ve eşleşme çizgisi ile temsil etmenin tasarım olarak uygun gözükmeyeceğine karar vermiş ve sonraki resimlerinde eşleşmeyen elemanları sadece içi boş nokta ile temsil etmiştir. Eşleşme çizgisini kaldırmıştır (Şekil 4.4.4.9).

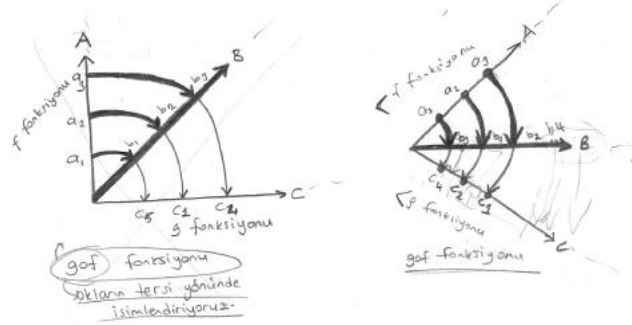


Şekil 4.4.4.9 $G_3\ddot{O}$ 'nin resmini tasarım açısından kısmen değiştirmesi

A: Ama ilk resimlerinde sanırım boştaki elemanlar da bir elemanla eşleşiyordu? Sonradan neden vazgeçtin?

$G_3\ddot{O}$: Evet, öyle yapıyordum. Sonrasında yine karışacak diye... Çünkü şey karışıyordu o zaman eleman herhangi bir eleman ile eşleşmediği halde eşleşiyor gözüküyordu, eşleşme çizgisi olduğu için. O yüzden de eşleşme çizgisini kaldırdım sonradan. Direkt çizgisiz bıraktım onu. Eşleşmeyen elemanı içi boş nokta ile gösterdim sadece.

$G_3\ddot{O}$ bileşke fonksiyonu temsil eden bir resim çizmiştir (Şekil 4.4.4.10 soldan birinci resim). Bu resminin tasarım olarak diğer resimleri ile uyumlu olmadığını düşünmüş ve diğer resimlerine benzetebilmek için resminin aynısını yönünü değiştirerek tekrar çizmiştir (Şekil 4.4.4.10 soldan ikinci resim).



Şekil 4.4.4.10 G₃Ö'nin resmini tasarım açısından kısmen değiştirmesi

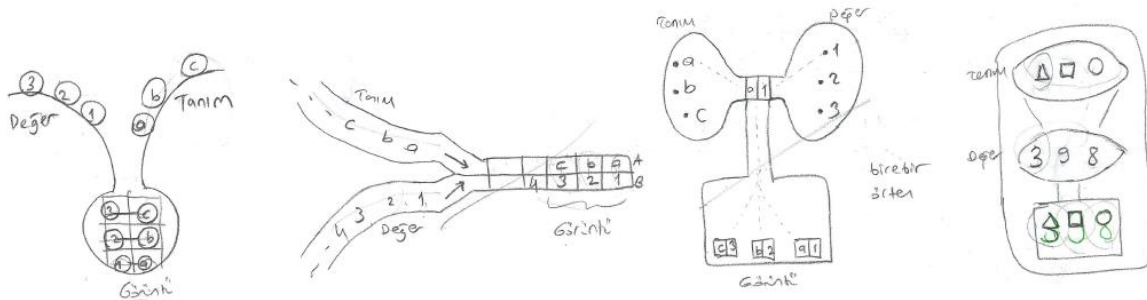
A: Sonra bu çizdiğin şeklin benzerini tekrar çizdin sanırım?

G₃Ö: Aynısı aslında. Sadece benim ana şeklim bu şekil olduğu için ben bunu sadece yan döndürdüm biraz.

A: Neden aynısını tekrar çizdin?

G₃Ö: Benim amacım sadece bileşke fonksiyonu göstermekti. Ama sonra buna benzesin istedim. Çünkü bundan buna geçmiş olmuyorum. Aynı şekil olsun diye onu sadece yan çevirdim. Başka ek olarak bir şey eklemedim.

G₄Ö tanım ve değer kümesindeki elemanların hareketli olduğu, resmin devamında eşleştiği fonksiyonu temsil eden bir resim çizmiştir (Şekil 4.4.4.11 soldan birinci resim). Sonrasında bu resmini biraz daha değiştirerek yeniden çizmiştir. Resmindeki fikrin daha iyi anlaşılmasını istediği için yeniden çizdiğini belirtmiştir (Şekil 4.4.4.11 soldan ikinci resim). G₄Ö, aynı fikir çerçevesinde resmini tasarım açısından kısmen değiştirerek benzer iki resim daha çizmiştir (Şekil 4.4.4.11 soldan üçüncü ve dördüncü resim).



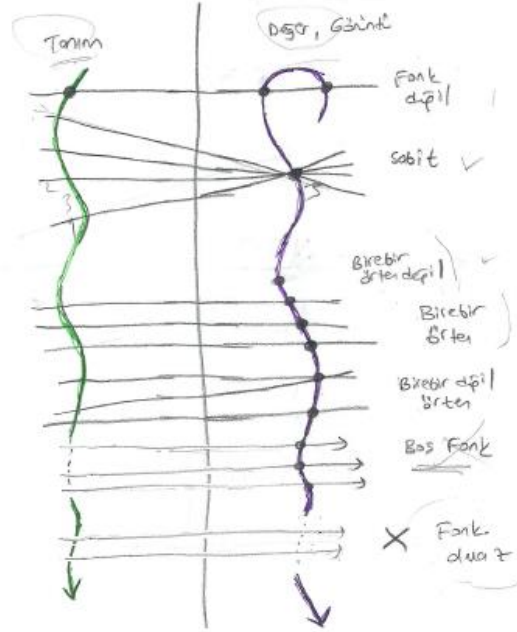
Şekil 4.4.4.11 G₄Ö'nin resmini tasarım açısından kısmen değiştirmesi

G₄Ö: Ben şurayı değer kümesi alsam şurayı tanım kümesi. İlk inenler eşleşiyor gibi... Sonra bunu daha net şöyle mi göstersem dedim, baktım bununla aynı mantık oluyor yani. Şunu şöyle çevirirsek aynısı oluyor. Sonra yine şu mantığa benzer farklı bir şeyler de çizdim. Bunlar, öncekilerin benzeri.

A: Fikir olarak aynı. Ama biraz farklılaştırıp çizmeyi mi denedin?

G₄Ö: Evet. Aynı şekilde, onlar da olmadı.

G₄Ö, tanım ve değer kümelerini önce siyah kurşun kalemle çizmiştir. Tasarım olarak yetersiz görüldüğünü düşünmüştür. Kümeleri renklendirmiştir (Şekil 4.4.4.12).

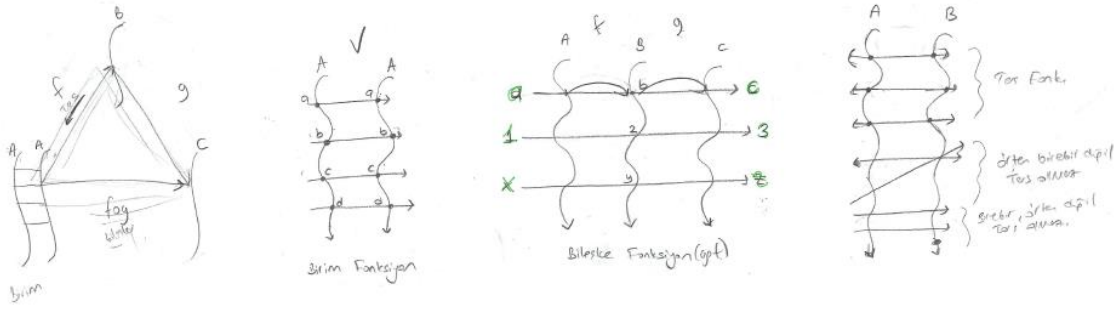


Şekil 4.4.4.12 G₄Ö'nin resmini tasarım açısından kısmen değiştirmesi

A: Yeşil olan tanım kümesi, mor olan değer kümesi olarak belirlemiştin.

G₄Ö: Evet. Önce siyah kurşun kalemle çizdim. Baktım belli olmuyor kümeler, karışık duruyor. Renklendirdim. Bunun tanım kümesi olduğunu, bunun değer kümesi olduğunu, elemanların buradan buraya doğru eşleştiği belli olsun, görünsün diye.

G₄Ö bileşke, birim fonksiyon ve fonksiyonun tersini bir arada temsil eden bir resim çizmeye çalışmıştır (soldan birinci resim). Bu kavramları ayrı ayrı temsil eden resimler çizmenin daha uygun olacağını düşünmüştür (soldan ikinci, üçüncü ve dördüncü resim) (Şekil 4.4.4.13).



Şekil 4.4.4.13 $G_4\ddot{O}$ 'nin resmini tasarım açısından kısmen değiştirmesi

$G_4\ddot{O}$: Ben önce bileşke, birim fonksiyon ve fonksiyonun tersini bir arada göstermeyi düşündüm. Onun için de bu şekli çizdim.

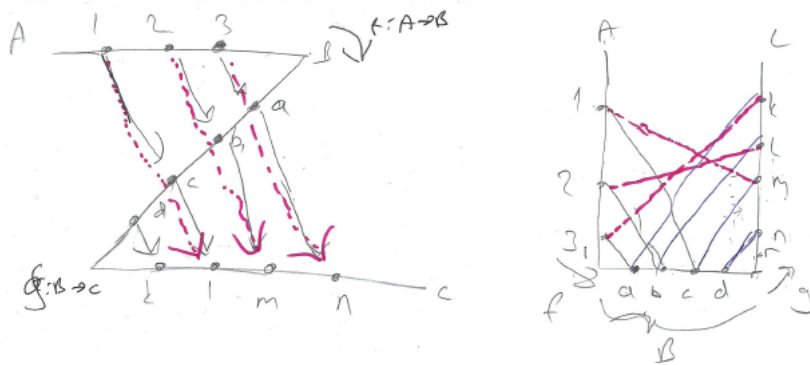
A: Bu üç kavramı neden tek bir resimde bir arada göstermeyi düşündün?

$G_4\ddot{O}$: Mesela ayrı ayrı gösterince şekil çoğalıyor. Görmek biraz daha zor olabilir.

A: Bu şekli çizerken nasıl düşündün?

$G_4\ddot{O}$: Burada şurayı A kümesinden A kümesine birim fonksiyonun gösterimi olarak düşündüm. Sonra B kümesini biraz yukarıya aldım. C 'yi A 'ya paralel olarak aldım ki şuradan bileşkeyi rahat görebilelim ve A 'yı, B 'yi, C 'yi şuradan direkt A 'dan C 'ye gittiğini rahat görebilelim diye. Şuradaki çift okla da fonksiyonun tersini göstermeye çalıştım. Ama sonra dedim bunu ayırsam da olur. Zaten şekil belli, ayrı ayrı da olabilir. Bu şekilde A , B ve C kümelerinin elemanları da gözüküyor. Elemanlarını da yazsak şekil karışacak.

$G_6\ddot{O}$ bileşke fonksiyonu temsil eden bir resim çizmiştir. Resmini kısmen değiştirmiş bileşke fonksiyonu temsil eden başka bir resim çizmiştir (Şekil 4.4.4.14).

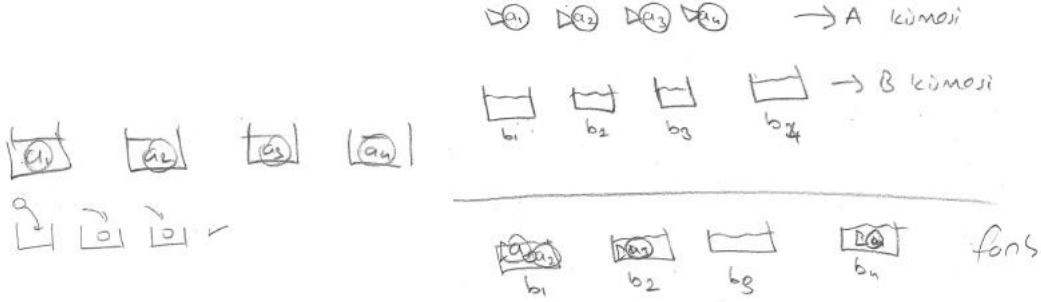


Şekil 4.4.4.14 $G_6\ddot{O}$ 'nin resmini tasarım açısından kısmen değiştirmesi

$G_6\ddot{O}$: Farklı bir şey yapabilir miyim diye düşündüm. Sonradan aklıma... B kümesinin çizgisini u şekli olacak şekilde eklemek aklıma geldi.

4.4.4.4. Tasarım Açısından Alt Kategorisi Tamamen Değiştirme Boyutu

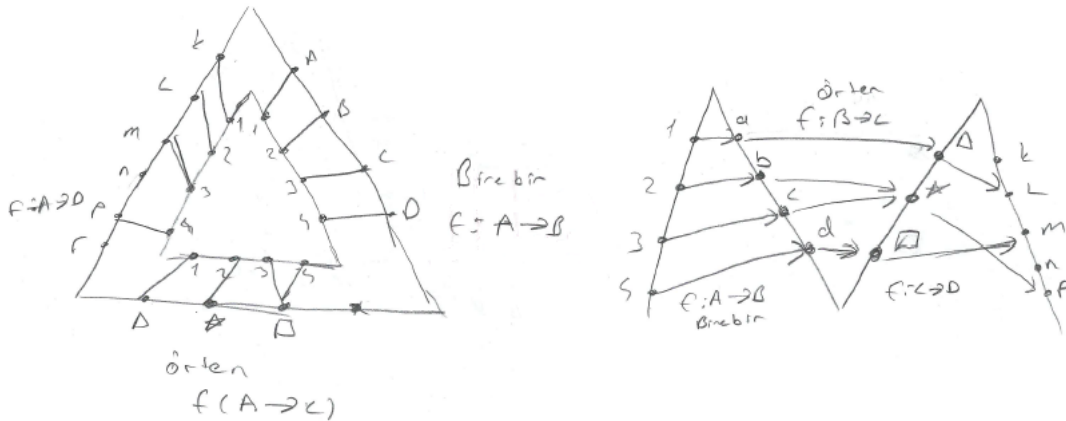
G₅Ö₁Ö₂ fonksiyonu pul ve kutu fikrinden yararlanarak resmetmeye çalışmıştır. Pul yerine balık, kutu yerine akvaryum almanın daha anlaşılır olacağını düşünmüştür. Resmini tasarım olarak tamamen değiştirmiştir (Şekil 4.4.4.15).



Şekil 4.4.4.15 G₅Ö₁Ö₂'nin resmini tasarım açısından tamamen değiştirmesi

G₅Ö₂: Mesela şey olarak düşündük. Bir pulu iki kutuya koyamayız ama iki pulu bir kutuya koyabiliriz. Sonra biz bunu balık ve akvaryum olarak düşündük. Dedik ki daha anlaşılır olur. Her balığın bir akvaryuma girmesi lazım yaşayabilmesi için dedik. Balık hiçbir akvaryuma girmezse o zaman yaşayamaz, ölür, yani fonksiyon olmaz.

G₆Ö fonksiyonların tanım ve değer kümelerini üçgenin kenarları üzerine yerleştirdiği bir resim çizmiştir. Bu resminde fonksiyonları temsil etme açısından bir sıkıntı yaşamamıştır. Resminin kapalı bir şekil olduğunu düşünmüş ve resmini tasarım olarak yetersiz bulmuştur. Resmini farklı bir şekilde tasarlamaya karar vermiş, tanım ve değer kümelerini doğru parçalarıyla gösterdiği başka bir resim çizmiştir (Şekil 4.4.4.16).

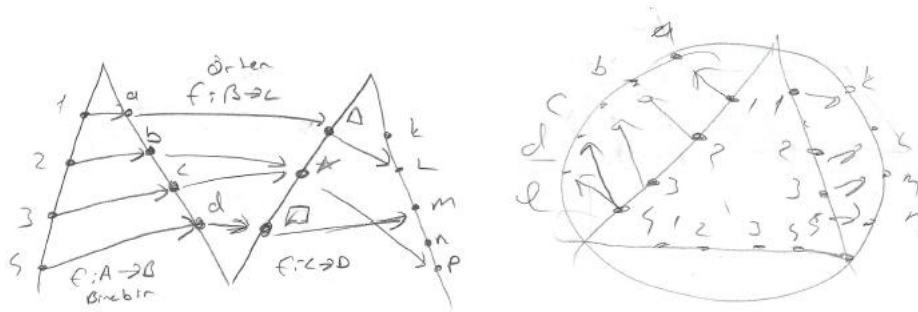


Şekil 4.4.4.16 G₆Ö'nin resmini tasarım açısından tamamen değiştirmesi

G₆Ö: İç tarafa bir üçgen çizdim üçgenin her kenarında aynı tanım kümesi var. Dış tarafına da kenarlarında farklı değer kümeleri olan başka bir üçgen çizdim. Burada her türlü

fonksiyonun birebirliğini, örtenliğini vs. onları gösterebiliriz şeklinde düşündüm ilk başta. Bu şekil kafama yatmıştı en başta ama sonradan düşündüm ki... Çok kapalı bir şekil daha açık nasıl çizebilirim diye düşündüm. Sonradan fonksiyonun tanım ve değer kümelerini üçgenin kenarlarına yerleştirmek yerine doğru parçalarıyla göstermeyi düşündüm.

G₆Ö fonksiyonun tanım ve değer kümelerini doğru parçalarıyla temsil ettiği resmini tasarım olarak beğenmemiştir. Tasarımını tamamen değiştirmiş ve çemberin içine üçgen çizerek fonksiyonları temsil etmeye çalışmıştır (Şekil 4.4.4.17).



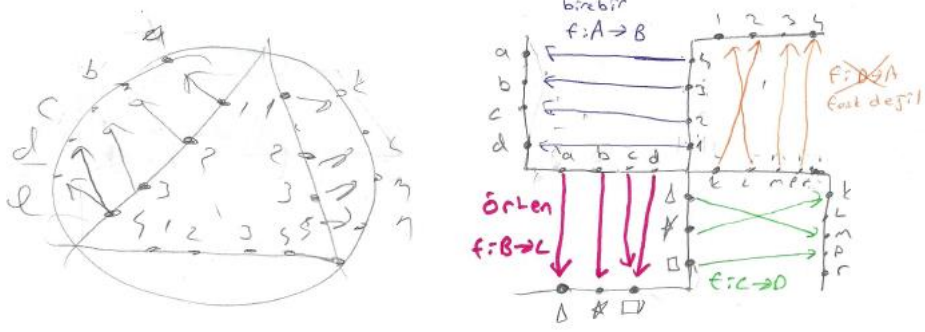
Şekil 4.4.4.17 G₆Ö'nin resmini tasarım açısından tamamen değiştirmesi

G₆Ö: Sonradan fonksiyonun tanım ve değer kümelerini üçgenin kenarlarına yerleştirmek yerine doğru parçalarıyla göstermeyi düşündüm.

A: Neden doğru parçalarıyla göstermeyi düşündün?

G₆Ö: Daha açık gözüküyor. Bir de bir kısım birebir, bir kısım örten, bir kısım fonksiyon şeklinde. Ayrı ayrı bölebiliyoruz yani tek bir resim üzerinde görebiliyoruz. Sonradan bu şeklin de fazla göze hitap etmediğini düşündüm. Göze hitap etmediğini düşündüğüm için de farklı olarak neye çevirebilirim bu şekli diye düşündüm. Sonra bu şekli çizdim. Çemberin içine üçgen çizmeyi düşündüm.

G₆Ö çemberin içine üçgen çizerek fonksiyon ile ilgili kavramları göstermeye çalışmıştır. Bu resminin tasarım olarak açık bir şekil olmadığını düşünmüş tasarımını tamamen değiştirmiştir. Doğru parçalarını bir araya getirerek fonksiyon olmama, fonksiyon, birebir fonksiyon ve örten fonksiyonu temsil eden bir resim çizmiştir (Şekil 4.4.4.18).

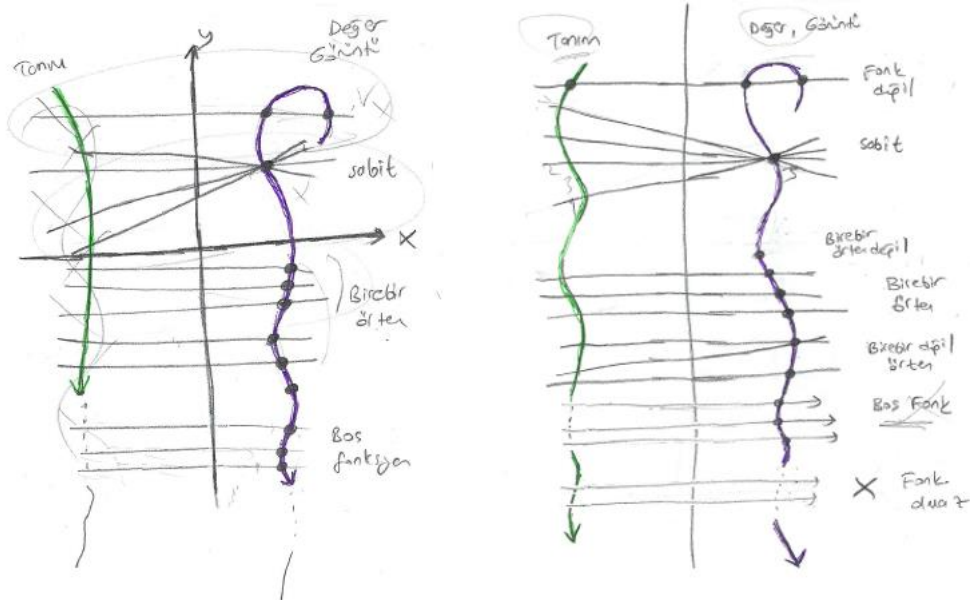


Şekil 4.4.4.18 G6Ö'nin resmini tasarım açısından tamamen değiştirmesi

G6Ö: Çemberin içine üçgen çizmeyi düşündüm. Sonra baktığımda mantık olarak ilk başta çizdiğim iç içe üçgenle aynı olduğunu düşündüm. Onun gibi bu da kapalı bir şekil oldu. Bu şekilden de vazgeçtim. Sonra dedim hepsini ayrı ayrı gösteren... Yani her köşede her özelliği ayrı ayrı gösteren bir şey tasarlayabilir miyim diye düşündüm. Bu şekli çizdim.

4.4.4.5. Ebat Alt Kategorisi Büyütme Boyutu

G4Ö, fonksiyonlarla ilgili daha fazla özelliği temsil eden bir resim elde edebilmek için resmini büyüterek tekrar çizmiştir (Şekil 4.4.4.19).

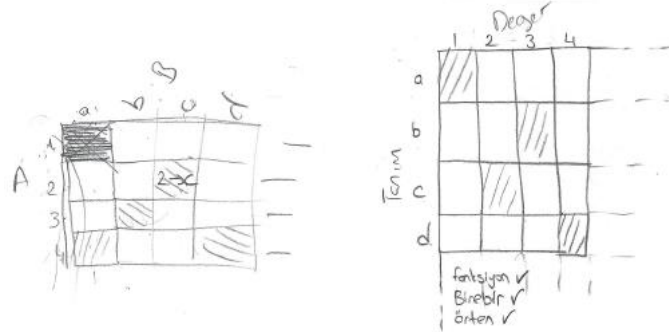


Şekil 4.4.4.19 G4Ö'nin resmini ebat olarak büyütmesi

A: Sonra küçük çizdiğin şekli daha büyük mü çizdin?

G4Ö: Evet, sonra baktım şunu böyle uzatsam ben birçok özellik gösterebilirim.

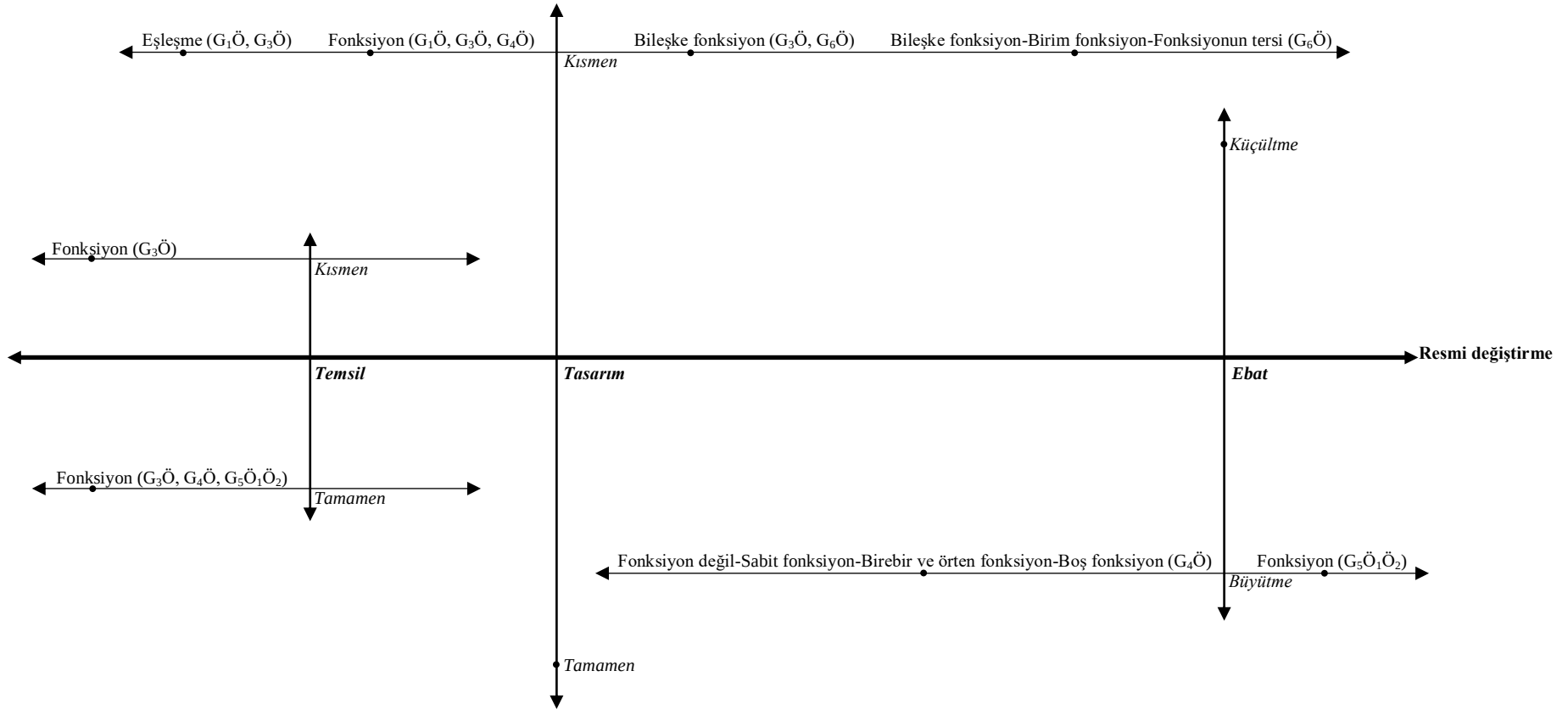
$G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ taslak resim olarak kare çizmiş ve fonksiyonu karenin içine kareler çizmeye çalışarak temsil etmeye çalışmıştır. Kareyi daha büyük çizerek fonksiyonlarla ilgili diğer kavramları temsil eden resim çizmişlerdir (Şekil 4.4.4.20).



Şekil 4.4.4.20 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin resmini ebat olarak büyütmesi

$G_5\ddot{O}_1$: Bir tane kare çizdim ben önce taslak olarak. Kareyi, tekrar karelere böldük. Sonra karenin şu kısmını tanım kümesi, A kümesi olarak alalım dedik yani öyle düşündük o an. Burası da B kümesi oldu işte, değer kümesi. Sonra bu küçük karelerin içini boyarsak 1'in, a'ya gittiğini gösterebiliriz dedik. Bu bize mantıklı geldi. Sonra grup arkadaşım $G_5\ddot{O}_2$ bunu büyütelim biraz dedi. Bunu biraz daha geliştirelim, hem birebir ve örten olmasını da gösterelim dedik.

MÖA'ların fonksiyonlar alt öğrenme alanındaki resmi değiştirme durumları Şekil 4.4.4.21'de gösterilmiştir.



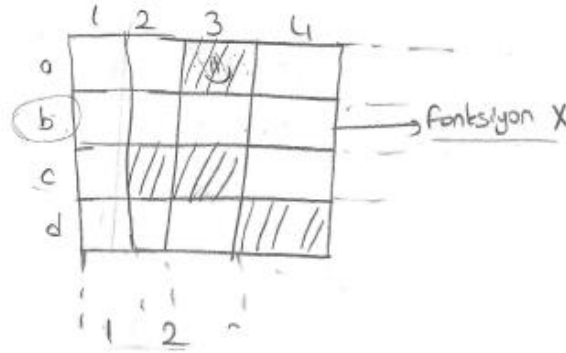
Şekil 4.4.4.21 Fonksiyonlar: resmi değiştirme kategorisi

4.4.5. Fonksiyonlar: Resmi Analiz Etme Kategorisi

MÖA'lar fonksiyonlar alt öğrenme alanı ile ilgili kavramların resimlerini nasıl oluşturduklarını açıklarken resimlerinin kavramlar açısından ifade ettiği anlamlardan da bahsetmişlerdir.

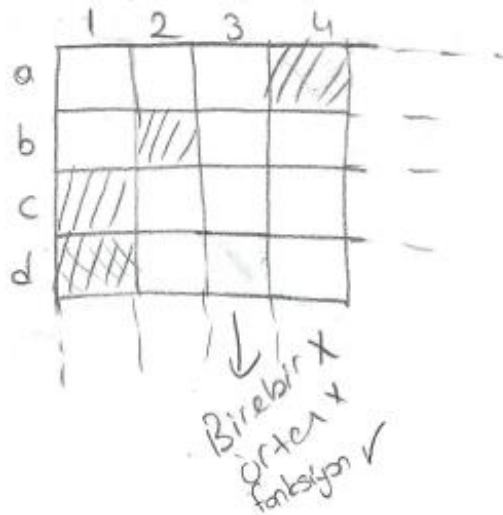
Bu bölümde, diğer bölümlerde olduğu gibi, kategori, alt kategori ve boyutlar ayrı ayrı ele alınarak ilgili başlıklar altında resimler açıklamalarıyla birlikte verilmemiştir. Anlaşılrlık açısından önce MÖA'lar tarafından çizilen kavram resimlerine sonra MÖA'ların resimle ilgili analizlerine yer verilmiştir.

G₅Ö₁Ö₂ tarafından çizilen fonksiyon olmayan kavram resmi Şekil 4.4.5.1'te verilmiştir.



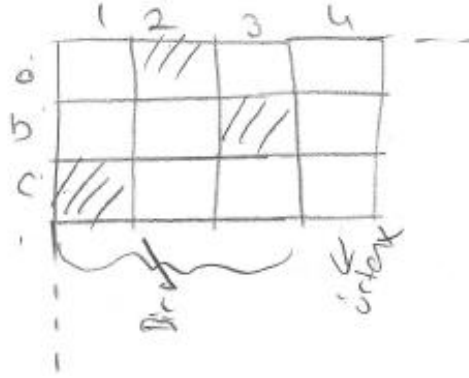
Şekil 4.4.5.1 G₅Ö₁Ö₂'nin fonksiyon olmayan kavram resmi

G₅Ö₁Ö₂ tarafından çizilen birebir ve örten olmayan fonksiyonun kavram resmi Şekil 4.4.5.2'de verilmiştir.



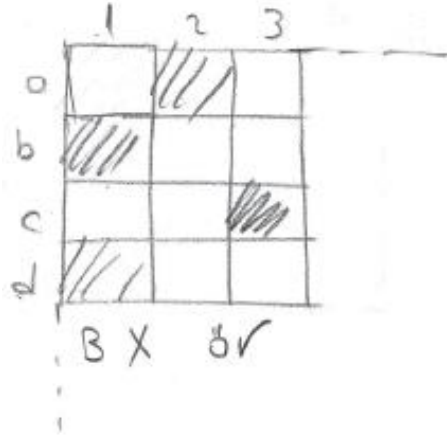
Şekil 4.4.5.2 G₅Ö₁Ö₂'nin birebir ve örten olmayan fonksiyonun kavram resmi

$G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ tarafından çizilen örten olmayan birebir fonksiyonun kavram resmi Şekil 4.4.5.3'te verilmiştir.



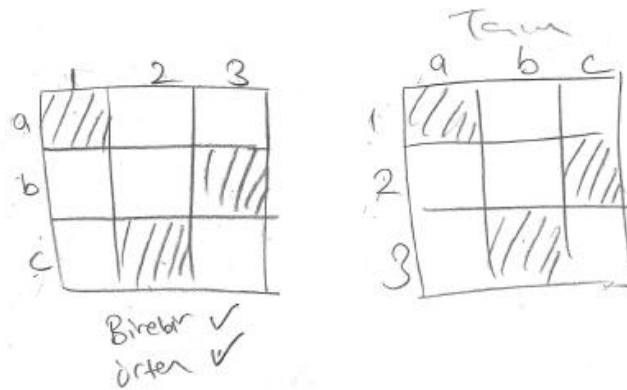
Şekil 4.4.5.3 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin örten olmayan birebir fonksiyonun kavram resmi

$G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ tarafından çizilen birebir olmayan örten fonksiyonun kavram resmi Şekil 4.4.5.4'te verilmiştir.



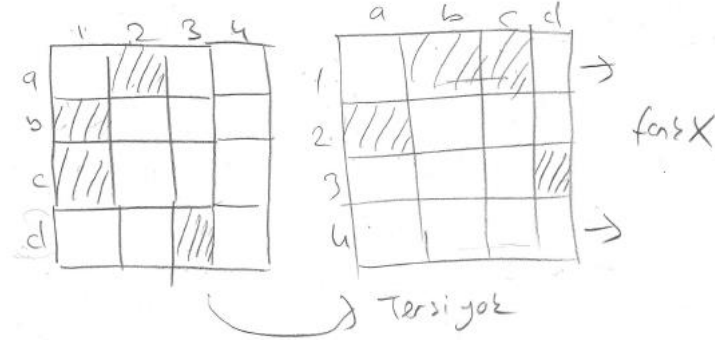
Şekil 4.4.5.4 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin birebir olmayan örten fonksiyonun kavram resmi

$G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ tarafından çizilen fonksiyonun tersinin kavram resmi Şekil 4.4.5.5'te verilmiştir.



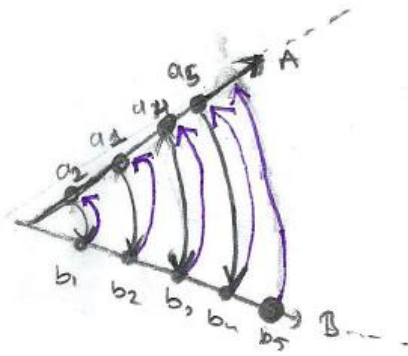
Şekil 4.4.5.5 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin fonksiyonun tersinin kavram resmi

$G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ tarafından çizilen tersi olmayan fonksiyonun kavram resmi Şekil 4.4.5.6'da verilmiştir.



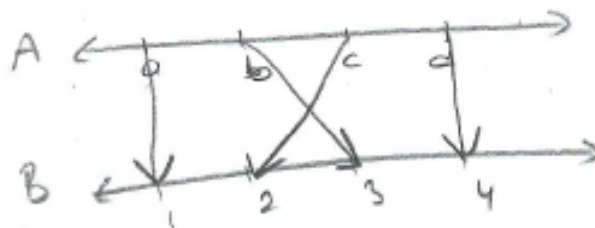
Şekil 4.4.5.6 $G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ 'nin tersi olmayan fonksiyonunun kavram resmi

$G_3\ddot{O}$ tarafından çizilen tersi olmayan fonksiyonun kavram resmi Şekil 4.4.5.7'de verilmiştir.



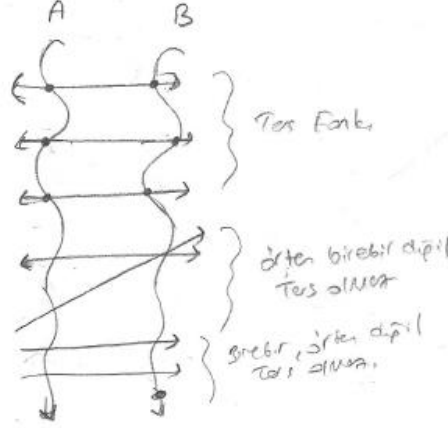
Şekil 4.4.5.7 $G_3\ddot{O}$ 'nin tersi olmayan fonksiyonunun kavram resmi

$G_1\ddot{O}$ tarafından çizilen birebir ve örten fonksiyonun kavram resmi Şekil 4.4.5.8'de verilmiştir.



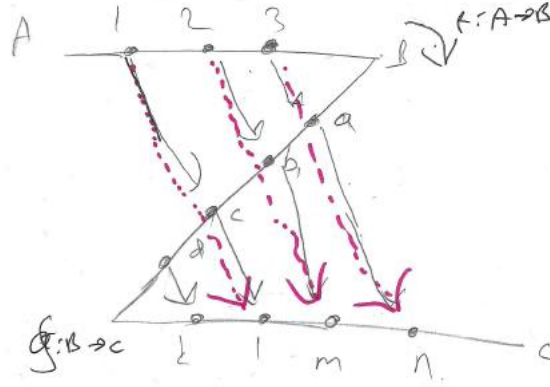
Şekil 4.4.5.8 $G_1\ddot{O}$ 'nin birebir ve örten fonksiyonunun kavram resmi

$G_4\ddot{O}$ tarafından çizilen fonksiyonun tersinin ve tersi olmayan fonksiyonun kavram resmi Şekil 4.4.5.9’da verilmiştir.



Şekil 4.4.5.9 $G_4\ddot{O}$ 'nin fonksiyonun tersi ve tersi olmayan fonksiyonlarla ilgili kavram resmi

$G_6\ddot{O}$ tarafından çizilen bileşke fonksiyonun kavram resmi Şekil 4.4.5.10’da verilmiştir.



Şekil 4.4.5.10 $G_6\ddot{O}$ 'nin bileşke fonksiyonun kavram resmi

4.4.5.1. Doğrudan Alt Kategorisi Resmi İnceleme Boyutu

$G_4\ddot{O}$ oluşturduğu kavram resmini fonksiyonun tersi kavramı ile ilgili olarak aşağıdaki gibi incelemiştir (Şekil 4.4.5.9).

$G_4\ddot{O}$: Ama mesela devamındaki şu üçlü kısma bakarsak, aradaki üçlüye, burası örten ama birebir gitmemiş yani tersten baktığımız zaman bir eleman iki farklı yere gittiği için tersi fonksiyon olmaz. Tersinin fonksiyon olabilmesi için mutlaka birebir de olması gerekiyordu. Doğrunun diğer ucuna ok çizmedim, tersinin fonksiyon olmadığı gözüksün diye. Aynı şekilde altta kalan yere bakarsak burası da birebir ama değer kümesinde açıkta eleman var yani

örten değil. Yine tersten baktığımız zaman tanım kümesinde boş eleman kaldığı için yine tersinin fonksiyon olmadığını görebiliyoruz. Yani buradan anlaşılıyor ki hem birebir hem örten olursa bir fonksiyonun tersi fonksiyon olur.

4.4.5.2. Doğrudan Alt Kategorisi Resmi Anlamlandırma Boyutu

$G_4\ddot{O}$ oluşturduğu kavram resmini tersi olmayan fonksiyon kavramı ile ilgili olarak aşağıdaki gibi anlamlandırmıştır (Şekil 4.4.5.9).

$G_4\ddot{O}$: Ama mesela devamındaki şu üçlü kısma bakarsak, aradaki üçlüye, burası örten ama birebir gitmemiş yani tersten baktığımız zaman bir eleman iki farklı yere gittiği için tersi fonksiyon olmaz. Tersinin fonksiyon olabilmesi için mutlaka birebir de olması gerekiyordu. Doğrunun diğer ucuna ok çizmedim, tersinin fonksiyon olmadığı gözüksün diye. Aynı şekilde altta kalan yere bakarsak burası da birebir ama değer kümesinde açıkta eleman var yani örten değil. Yine tersten baktığımız zaman tanım kümesinde boş eleman kaldığı için yine tersinin fonksiyon olmadığını görebiliyoruz. Yani buradan anlaşılıyor ki hem birebir hem örten olursa bir fonksiyonun tersi fonksiyon olur.

4.4.5.3. Kavrama Göre Alt Kategorisi Kavramı Belirleme Boyutu

$G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ fonksiyon olmama durumuna göre oluşturdukları kavram resimlerini incelemeyi amaçlamıştır (Şekil 4.4.5.1).

$G_5\ddot{O}_1$: Ondan sonra fonksiyon olmama özelliğini inceledik. Mesela tanım kümesindeki bir eleman değer kümesinde herhangi bir eleman ile eşleşmezse fonksiyon olamıyor, örneğin tanım kümesindeki b elemanı. Bir de tanım kümesindeki c iki eleman ile eşleştiği için fonksiyon olamıyor. O yüzden bu resim fonksiyon değil.

$G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ birebir ve örten olmayan fonksiyon kavramına göre oluşturdukları kavram resimlerini incelemeyi amaçlamıştır (Şekil 4.4.5.2).

$G_5\ddot{O}_2$: Bu resimde de birebir ve örten olmayan fonksiyonu gösterdik. Yani c ve d bir eleman 1 ile eşleşiyor. Birebir değil. Değer kümesindeki 3 elemanı hiçbir eleman ile eşleşmiyor. O yüzden örten olmadı ama fonksiyon.

$G_5\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ örten olmayan birebir fonksiyon kavramına göre oluşturdukları kavram resimlerini incelemeyi amaçlamıştır (Şekil 4.4.5.3).

G₅Ö₂: Bu resimlerde de örten olmayan birebir fonksiyon ve birebir olmayan örten fonksiyonu gösterdik.

A: Tamam, onları nasıl çizdiniz?

G₅Ö₁: Burada a elemanı 2 ile; b, 3 ile; c, 1 ile eşleşiyor. Değer kümesindeki 4 boş kalıyor. O yüzden örten değil. Ama fonksiyon, birebir ayrıca. Diğerinde de b, 1 ile eşleşiyor; a, 2 ile; c, 3 ile; d, yine 1 ile eşleşiyor. O yüzden birebir değil ama örten. Değer kümesinde boşta kalan eleman olmadığı için örten oldu.

G₅Ö₁Ö₂ birebir olmayan örten fonksiyon kavramına göre oluşturdukları kavram resimlerini incelemeyi amaçlamıştır (Şekil 4.4.5.4).

G₅Ö₂: Bu resimlerde de örten olmayan birebir fonksiyon ve birebir olmayan örten fonksiyonu gösterdik.

A: Tamam, onları nasıl çizdiniz?

G₅Ö₁: Burada a elemanı 2 ile; b, 3 ile; c, 1 ile eşleşiyor. Değer kümesindeki 4 boş kalıyor. O yüzden örten değil. Ama fonksiyon, birebir ayrıca. Diğerinde de b, 1 ile eşleşiyor; a, 2 ile; c, 3 ile; d, yine 1 ile eşleşiyor. O yüzden birebir değil ama örten. Değer kümesinde boşta kalan eleman olmadığı için örten oldu.

G₅Ö₁Ö₂ fonksiyonun tersi kavramına göre oluşturdukları kavram resimlerini incelemeyi amaçlamıştır (Şekil 4.4.5.5).

G₅Ö₁: Daha sonra burada birebir ve örten olmasını gösterdik. a, b, c tanım kümesinin 1, 2, 3 de değer kümesinin elemanları.

G₅Ö₂: Fonksiyonun tersini göstermeye çalışıyoruz şu an.

G₅Ö₁: Birebir ve örten olduğunda tersi olan ve aksi durumda tersi olmayan fonksiyonu göstermeye çalıştık. İlk olarak a, 1 ile; b, 3 ile; c, 2 ile eşleşiyor. Bu birebir ve örten fonksiyon. Sonra yerlerini değiştiriyoruz. 1, 2, 3 değer kümesi iken tanım kümesi oldu. Tersini almış olduk. a, 1 ile eşleşiyorken şimdi 1, a ile eşleşiyor. 2, c ile eşleşti; 3 de b ile eşleşti. Yani yerlerini değiştirmiş olduk.

G₅Ö₁: Birebir ve örten olduğu için tersi de bir fonksiyon oldu.

G₅Ö₁Ö₂ tersi olmayan fonksiyon kavramına göre oluşturdukları kavram resimlerini incelemeyi amaçlamıştır (Şekil 4.4.5.6).

G₅Ö₁: Sonra birebir ve örten olmayan bir fonksiyon aldık. Burada a, 2 ile eşleşti. b ve c, 1 ile eşleşti ve burada fonksiyon birebir değil. Aynı zamanda değer kümesindeki 4 tanım kümesindeki hiçbir eleman ile eşleşmediği için örten de değil. Sonra yine yerlerini değiştiriyoruz, tanım ve değer kümesinin. Bu sefer tanım kümesindeki 1, b ve c ile eşleşmek zorunda kaldı. O yüzden tersi olmadı fonksiyonun. Ayrıca tanım kümesindeki 4 boşta kaldı, hiçbir elemanla eşleşmedi yine buradan da fonksiyon değildir.

G₃Ö tersi olmayan fonksiyon kavramına göre oluşturduğu kavram resmini incelemeyi amaçlamıştır (Şekil 4.4.5.7).

G₃Ö: Burada da tersi olmayan fonksiyonu gösterdim. Birebir eşleme yok burada çünkü A'dan B'ye gidiyoruz. B'de boş bir tane eleman olduğu için örten olmaz. O zaman da fonksiyonun tersi fonksiyon olmuyor. Tersini alacak olursam da b₅ ile eşleşen eleman yok.

G₁Ö birebir ve örten fonksiyon kavramına göre oluşturduğu kavram resmini incelemeyi amaçlamıştır (Şekil 4.4.5.8).

G₁Ö: Birebir eşleme çizdim. Birebir eşleme olması için fonksiyonun birebirlik ve örtenlik şartlarını sağlaması gerekiyordu. O yüzden ben de tanımladığım fonksiyonda elemanlarımı ona göre seçtim. Burası hem birebir hem örten. Belli oluyor zaten. Açıkta eleman yok, her eleman diğer elemana gitmiş, tanım kümesindeki her eleman farklı bir elemana gitmiş.

G₆Ö bileşke fonksiyon kavramına göre oluşturduğu kavram resmini incelemeyi amaçlamıştır (Şekil 4.4.5.10).

A: f ve g fonksiyonlarında elemanların eşleşmesini kurşun kalemle, bileşke fonksiyondaki eleman eşleşmelerini pembe renk ve kesikli çizgilerle gösterdin sanırım?

G₆Ö: Aynen, öyle. Bileşkeyi pembe noktalarla gösterdim. A ve B ile B ve C kümelerine dair fonksiyonları ise kurşun kalemle gösterdim. Bileşkeye dikkat çekmek istedim. Baktığımız zaman ise... gof fonksiyonuna baktığımız zaman ise A'dan C'ye oluyor. 3'ten n'ye; 2'den m'ye; 1'den l'ye gidecek şekilde bir bileşke fonksiyon oluşturmuş oluyoruz.

4.4.5.4. Kavrama Göre Alt Kategorisi Resmi Kavrama Göre İnceleme Boyutu

G₅Ö₁Ö₂ oluşturdukları kavram resimlerini fonksiyon olmama durumu ile ilgili olarak aşağıdaki gibi incelemiştir (Şekil 4.4.5.1).

G₅Ö₁: Ondan sonra fonksiyon olmama özelliğini inceledik. Mesela tanım kümesindeki bir eleman değer kümesinde herhangi bir eleman ile eşleşmezse fonksiyon olamıyor, örneğin tanım kümesindeki b elemanı. Bir de tanım kümesindeki c iki eleman ile eşleştiği için fonksiyon olamıyor. O yüzden bu resim fonksiyon değil.

G₅Ö₁Ö₂ oluşturdukları kavram resimlerini birebir ve örten olmayan fonksiyon kavramı ile ilgili olarak aşağıdaki gibi incelemiştir (Şekil 4.4.5.2).

G₅Ö₂: Bu resimde de birebir ve örten olmayan fonksiyonu gösterdik. Yani c ve d bir eleman 1 ile eşleşiyor. Birebir değil. Değer kümesindeki 3 elemanı hiçbir eleman ile eşleşmiyor. O yüzden örten olmadı ama fonksiyon.

G₅Ö₁Ö₂ oluşturdukları kavram resimlerini örten olmayan birebir fonksiyon kavramı ile ilgili olarak aşağıdaki gibi incelemiştir (Şekil 4.4.5.3).

G₅Ö₂: Bu resimlerde de örten olmayan birebir fonksiyon ve birebir olmayan örten fonksiyonu gösterdik.

A: Tamam, onları nasıl çizdiniz?

G₅Ö₁: Burada a elemanı 2 ile; b, 3 ile; c, 1 ile eşleşiyor. Değer kümesindeki 4 boş kalıyor. O yüzden örten değil. Ama fonksiyon, birebir ayrıca. Diğerinde de b, 1 ile eşleşiyor; a, 2 ile; c, 3 ile; d, yine 1 ile eşleşiyor. O yüzden birebir değil ama örten. Değer kümesinde boşta kalan eleman olmadığı için örten oldu.

G₅Ö₁Ö₂ oluşturdukları kavram resimlerini birebir olmayan örten fonksiyon kavramı ile ilgili olarak aşağıdaki gibi incelemiştir (Şekil 4.4.5.4).

G₅Ö₂: Bu resimlerde de örten olmayan birebir fonksiyon ve birebir olmayan örten fonksiyonu gösterdik.

A: Tamam, onları nasıl çizdiniz?

G₅Ö₁: Burada a elemanı 2 ile; b, 3 ile; c, 1 ile eşleşiyor. Değer kümesindeki 4 boş kalıyor. O yüzden örten değil. Ama fonksiyon, birebir ayrıca. Diğerinde de b, 1 ile eşleşiyor; a, 2 ile; c, 3 ile; d, yine 1 ile eşleşiyor. O yüzden birebir değil ama örten. Değer kümesinde boşta kalan eleman olmadığı için örten oldu.

G₅Ö₁Ö₂ oluşturdukları kavram resimlerini fonksiyonun tersi kavramı ile ilgili olarak aşağıdaki gibi incelemiştir (Şekil 4.4.5.5).

G₅Ö₁: Daha sonra burada birebir ve örten olmasını gösterdik. *a, b, c* tanım kümesinin 1, 2, 3 de değer kümesinin elemanları.

G₅Ö₂: Fonksiyonun tersini göstermeye çalışıyoruz şu an.

G₅Ö₁: Birebir ve örten olduğunda tersi olan ve aksi durumda tersi olmayan fonksiyonu göstermeye çalıştık. İlk olarak *a, 1* ile; *b, 3* ile; *c, 2* ile eşleşiyor. Bu birebir ve örten fonksiyon. Sonra yerlerini değiştiriyoruz. 1, 2, 3 değer kümesi iken tanım kümesi oldu. Tersini almış olduk. *a, 1* ile eşleşiyorken şimdi 1, *a* ile eşleşiyor. 2, *c* ile eşleşti; 3 de *b* ile eşleşti. Yani yerlerini değiştirmiş olduk.

G₅Ö₁: Birebir ve örten olduğu için tersi de bir fonksiyon oldu.

G₅Ö₁Ö₂ oluşturdukları kavram resimlerini tersi olmayan fonksiyon kavramı ile ilgili olarak aşağıdaki gibi incelemiştir (Şekil 4.4.5.6).

G₅Ö₁: Sonra birebir ve örten olmayan bir fonksiyon aldık. Burada *a, 2* ile eşleşti. *b* ve *c, 1* ile eşleşti ve burada fonksiyon birebir değil. Aynı zamanda değer kümesindeki 4 tanım kümesindeki hiçbir eleman ile eşleşmediği için örten de değil. Sonra yine yerlerini değiştiriyoruz, tanım ve değer kümesinin. Bu sefer tanım kümesindeki 1, *b* ve *c* ile eşleşmek zorunda kaldı. O yüzden tersi olmadı fonksiyonun. Ayrıca tanım kümesindeki 4 boşta kaldı, hiçbir elemanla eşleşmedi yine buradan da fonksiyon değildir.

G₃Ö oluşturduğu kavram resmini tersi olmayan fonksiyon kavramı ile ilgili olarak aşağıdaki gibi incelemiştir (Şekil 4.4.5.7).

G₃Ö: Burada da tersi olmayan fonksiyonu gösterdim. Birebir eşleme yok burada çünkü *A*'dan *B*'ye gidiyoruz. *B*'de boş bir tane eleman olduğu için örten olmaz. O zaman da fonksiyonun tersi fonksiyon olmuyor. Tersini alacak olursam da *b₅* ile eşleşen eleman yok.

G₁Ö oluşturduğu kavram resmini birebir ve örten fonksiyon kavramı ile ilgili olarak aşağıdaki gibi incelemiştir (Şekil 4.4.5.8).

G₁Ö: Birebir eşleme çizdim. Birebir eşleme olması için fonksiyonun birebirlik ve örtenlik şartlarını sağlaması gerekiyordu. O yüzden ben de tanımladığım fonksiyonda elemanlarımı ona göre seçtim. Burası hem birebir hem örten. Belli oluyor zaten. Açıkta eleman yok, her eleman diğer elemana gitmiş, tanım kümesindeki her eleman farklı bir elemana gitmiş.

G₆Ö oluşturduğu kavram resmini bileşke fonksiyon kavramı ile ilgili olarak aşağıdaki gibi incelemiştir (Şekil 4.4.5.10).

A: *f ve g fonksiyonlarında elemanların eşleşmesini kurşun kalemle, bileşke fonksiyondaki eleman eşleşmelerini pembe renk ve kesikli çizgilerle gösterdin sanırım?*

G₆Ö: *Aynen, öyle. Bileşkeyi pembe noktalarla gösterdim. A ve B ile B ve C kümelerine dair fonksiyonları ise kurşun kalemle gösterdim. Bileşkeye dikkat çekmek istedim. Baktığımız zaman ise... gof fonksiyonuna baktığımız zaman ise A'dan C'ye oluyor. 3'ten n'ye; 2'den m'ye; 1'den l'ye gidecek şekilde bir bileşke fonksiyon oluşturmuş oluyoruz.*

4.4.5.5. Kavrama Göre Alt Kategorisi Resmi Göre Anlamlandırma Boyutu

G₅Ö₁Ö₂ oluşturdukları kavram resimlerini fonksiyon olmama durumu ile ilgili olarak aşağıdaki gibi anlamlandırmıştır (Şekil 4.4.5.1).

G₅Ö₁: *Ondan sonra fonksiyon olmama özelliğini inceledik. Mesela tanım kümesindeki bir eleman değer kümesinde herhangi bir eleman ile eşleşmezse fonksiyon olamıyor, örneğin tanım kümesindeki b elemanı. Bir de tanım kümesindeki c iki eleman ile eşleştiği için fonksiyon olamıyor. O yüzden bu resim fonksiyon değil.*

G₅Ö₁Ö₂ oluşturdukları kavram resimlerini birebir ve örten olmayan fonksiyon kavramı ile ilgili olarak aşağıdaki gibi anlamlandırmıştır (Şekil 4.4.5.2).

G₅Ö₂: *Bu resimde de birebir ve örten olmayan fonksiyonu gösterdik. Yani c ve d bir eleman 1 ile eşleşiyor. Birebir değil. Değer kümesindeki 3 elemanı hiçbir eleman ile eşleşmiyor. O yüzden örten olmadı ama fonksiyon.*

G₅Ö₁Ö₂ oluşturdukları kavram resimlerini örten olmayan birebir fonksiyon kavramı ile ilgili olarak aşağıdaki gibi anlamlandırmıştır (Şekil 4.4.5.3).

G₅Ö₂: *Bu resimlerde de örten olmayan birebir fonksiyon ve birebir olmayan örten fonksiyonu gösterdik.*

A: *Tamam, onları nasıl çizdiniz?*

G₅Ö₁: *Burada a elemanı 2 ile; b, 3 ile; c, 1 ile eşleşiyor. Değer kümesindeki 4 boş kalıyor. O yüzden örten değil. Ama fonksiyon, birebir ayrıca. Diğerinde de b, 1 ile eşleşiyor; a, 2 ile; c, 3 ile; d, yine 1 ile eşleşiyor. O yüzden birebir değil ama örten. Değer kümesinde boşta kalan eleman olmadığı için örten oldu.*

G₅Ö₁Ö₂ oluşturdukları kavram resimlerini birebir olmayan örten fonksiyon kavramı ile ilgili olarak aşağıdaki gibi anlamlandırmıştır (Şekil 4.4.5.4).

G₅Ö₂: Bu resimlerde de örten olmayan birebir fonksiyon ve birebir olmayan örten fonksiyonu gösterdik.

A: Tamam, onları nasıl çizdiniz?

G₅Ö₁: Burada *a* elemanı 2 ile; *b*, 3 ile; *c*, 1 ile eşleşiyor. Değer kümesindeki 4 boş kalıyor. O yüzden örten değil. Ama fonksiyon, birebir ayrıca. Diğerinde de *b*, 1 ile eşleşiyor; *a*, 2 ile; *c*, 3 ile; *d*, yine 1 ile eşleşiyor. O yüzden birebir değil ama örten. Değer kümesinde boşta kalan eleman olmadığı için örten oldu.

G₅Ö₁Ö₂ oluşturdukları kavram resimlerini fonksiyonun tersi kavramı ile ilgili olarak aşağıdaki gibi anlamlandırmıştır (Şekil 4.4.5.5).

G₅Ö₁: Daha sonra burada birebir ve örten olmasını gösterdik. *a*, *b*, *c* tanım kümesinin 1, 2, 3 de değer kümesinin elemanları.

G₅Ö₂: Fonksiyonun tersini göstermeye çalışıyoruz şu an.

G₅Ö₁: Birebir ve örten olduğunda tersi olan ve aksi durumda tersi olmayan fonksiyonu göstermeye çalıştık. İlk olarak *a*, 1 ile; *b*, 3 ile; *c*, 2 ile eşleşiyor. Bu birebir ve örten fonksiyon. Sonra yerlerini değiştiriyoruz. 1, 2, 3 değer kümesi iken tanım kümesi oldu. Tersini almış olduk. *a*, 1 ile eşleşiyorken şimdi 1, *a* ile eşleşiyor. 2, *c* ile eşleşti; 3 de *b* ile eşleşti. Yani yerlerini değiştirmiş olduk.

G₅Ö₁: Birebir ve örten olduğu için tersi de bir fonksiyon oldu.

G₅Ö₁Ö₂ oluşturdukları kavram resimlerini tersi olmayan fonksiyon kavramı ile ilgili olarak aşağıdaki gibi anlamlandırmıştır (Şekil 4.4.5.6).

G₅Ö₁: Sonra birebir ve örten olmayan bir fonksiyon aldık. Burada *a*, 2 ile eşleşti. *b* ve *c*, 1 ile eşleşti ve burada fonksiyon birebir değil. Aynı zamanda değer kümesindeki 4 tanım kümesindeki hiçbir eleman ile eşleşmediği için örten de değil. Sonra yine yerlerini değiştiriyoruz, tanım ve değer kümesinin. Bu sefer tanım kümesindeki 1, *b* ve *c* ile eşleşmek zorunda kaldı. O yüzden tersi olmadı fonksiyonun. Ayrıca tanım kümesindeki 4 boşta kaldı, hiçbir elemanla eşleşmedi yine buradan da fonksiyon değildir.

G₃Ö oluşturdukları kavram resimlerini tersi olmayan fonksiyon kavramı ile ilgili olarak aşağıdaki gibi anlamlandırmıştır (Şekil 4.4.5.7).

G₃Ö: Burada da tersi olmayan fonksiyonu gösterdim. Birebir eşleme yok burada çünkü A'dan B'ye gidiyoruz. B'de boş bir tane eleman olduğu için örten olmaz. O zaman da fonksiyonun tersi fonksiyon olmuyor. Tersini alacak olursam da b_5 ile eşleşen eleman yok.

G₁Ö oluşturduğu kavram resmini birebir ve örten fonksiyon kavramı ile ilgili olarak aşağıdaki gibi anlamlandırmıştır (Şekil 4.4.5.8).

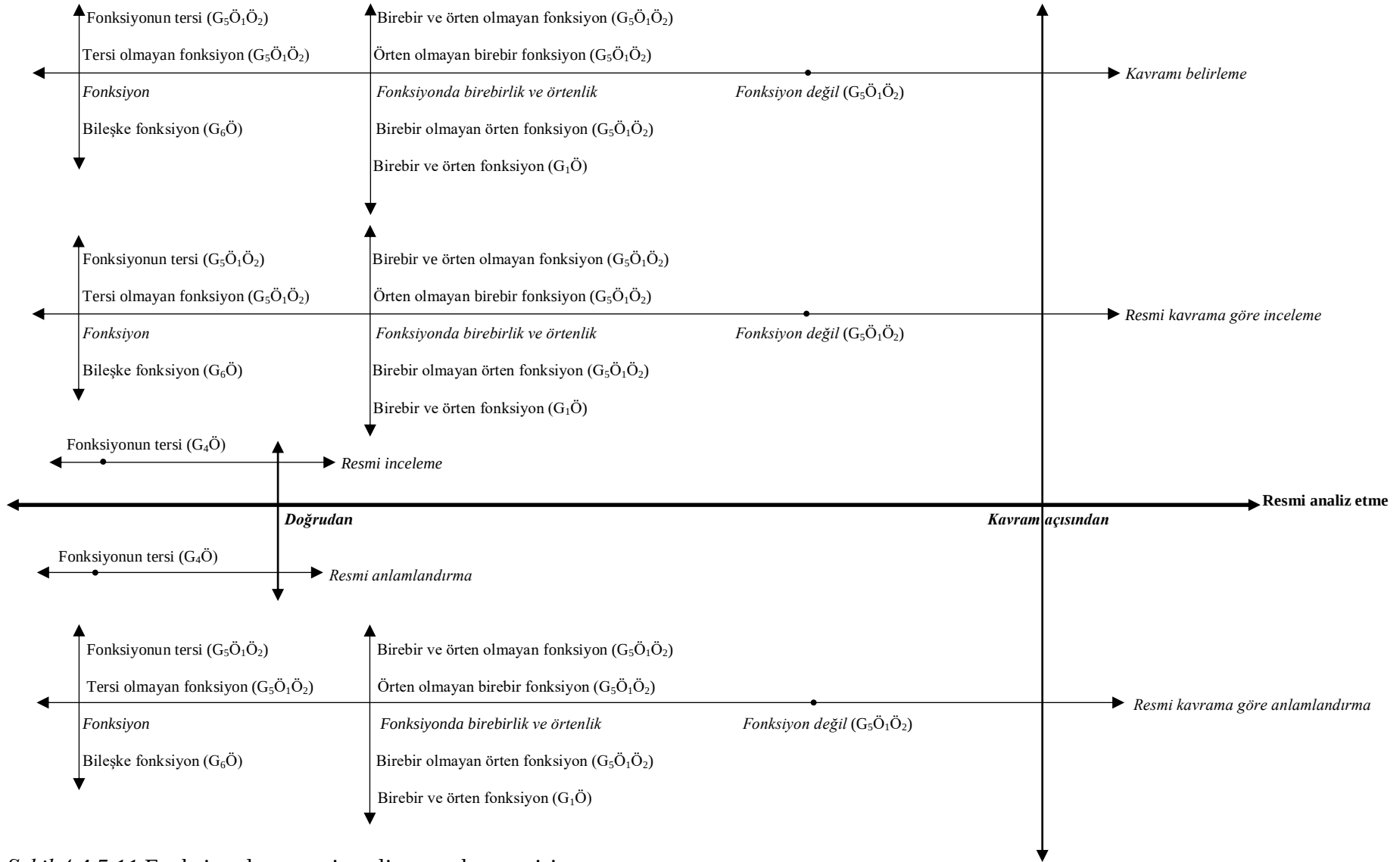
G₁Ö: Birebir eşleme çizdim. Birebir eşleme olması için fonksiyonun birebirlik ve örtenlik şartlarını sağlaması gerekiyordu. O yüzden ben de tanımladığım fonksiyonda elemanlarımı ona göre seçtim. Burası hem birebir hem örten. Belli oluyor zaten. Açıkta eleman yok, her eleman diğer elemana gitmiş, tanım kümesindeki her eleman farklı bir elemana gitmiş.

G₆Ö oluşturduğu kavram resmini bileşke fonksiyon kavramı ile ilgili olarak aşağıdaki gibi anlamlandırmıştır (Şekil 4.4.5.10).

A: f ve g fonksiyonlarında elemanların eşleşmesini kurşun kalemle, bileşke fonksiyondaki eleman eşleşmelerini pembe renk ve kesikli çizgilerle gösterdin sanırım?

G₆Ö: Aynen, öyle. Bileşkeyi pembe noktalarla gösterdim. A ve B ile B ve C kümelerine dair fonksiyonları ise kurşun kalemle gösterdim. Bileşkeye dikkat çekmek istedim. Baktığımız zaman ise... $g \circ f$ fonksiyonuna baktığımız zaman ise A'dan C'ye oluyor. 3'ten n'ye; 2'den m'ye; 1'den l'ye gidecek şekilde bir bileşke fonksiyon oluşturmuş oluyoruz.

MÖA'ların fonksiyonlar alt öğrenme alanındaki resmi analiz etme durumları Şekil 4.4.5.11'de gösterilmiştir.



Şekil 4.4.5.11 Fonksiyonlar: resmi analiz etme kategorisi

4.5. MÖA'ların Kavram Resimleri ile İlgili Görüşleri

Araştırmada MÖA'ların kavram resimleri ile ilgili görüşleri alınmamıştır. Fakat MÖA'lar ile kavramları resmetme süreçlerine dair görüşmeler yapılırken bazı MÖA'lar kavram resimleri ile ilgili görüşlerini de belirtmişlerdir.

G₁Ö fonksiyonun tersinin de fonksiyon olması için birebirlik ve örtenlik şartlarının neden gerekli olduğunu kavram resminde araştırmıştır. Bu araştırmasının sonucunda fonksiyonun tersi kavramını daha iyi anladığını, başka birine de kolaylıkla öğretebileceğini belirtmiştir.

G₁Ö: Fonksiyonun tersinin fonksiyon olmadığı durumları araştırdım.

A: Bunu peki neden yaptın sağlayıp sağlamadığını?

G₁Ö: Aslında biraz merak ettim. Hep böyle bir ezberde kalıyordum, birebir ve örten olma şartı. Fonksiyonun tersinin olması için birebir ve örten olacak. Olmazsa ne oluyor? Cevabı yoktu daha önce. Ama şu an oldu yani. Mantıklıymış, fonksiyonun tersinin olmaması zaten.

A: O zaman birebir ve örtenlik bir fonksiyonun tersi için olmazsa olmaz bir şart mı oluyor?

G₁Ö: Olmazsa, olmazmış. Evet, bir fonksiyonun tersinin olabilmesi için bu iki şartı sağlasın ki hem bir fonksiyon belirtsin hem de gerçekten bir fonksiyon belirtsin yani. Fonksiyon olmama şartlarını sağlıyor çünkü.

A: Onu görmüş mü oldun o zaman?

G₁Ö: Evet, gördüm hocam. Yoksa gerçekten şey kalıyormuş, yüzeyde kalıyormuş. Şimdi daha iyi anladım yani. Başka birine de kolaylıkla anlatabilirim. Gel bak burada fonksiyonun tersinin de fonksiyon olması için birebir ve örten olması gerekiyor diye.

G₅Ö₁Ö₂ kavramları kendi çizdikleri kavram resimlerinden, başkaları anlamasa bile, görebildiklerini ve anlayabildiklerini ifade etmişlerdir.

G₅Ö₁: İnsan bir kere kendi çizince aslında kavramı anlıyor gibi hocam. Ona (kavram resmine) böyle başkası ilk bakınca göremeyebiliyor. Ama bir kere resmin mantığını kavrayınca direkt kavramlar çıkıyor resimden bence.

G₅Ö₂: Evet, aynen. Biz gördük en azından.

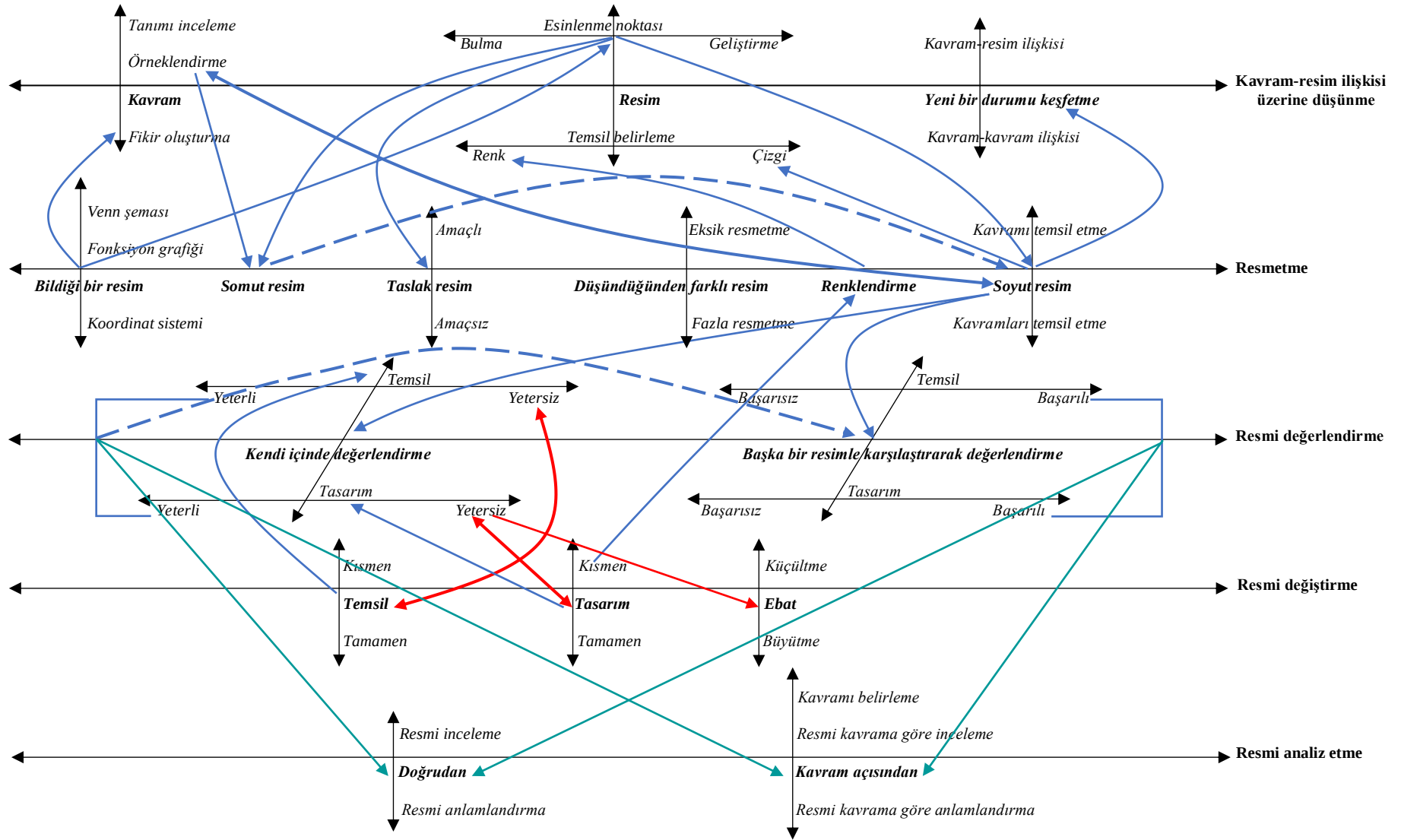
BÖLÜM V

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu bölümde araştırmanın bulgularından elde edilen sonuçlara ve araştırmanın sonuçları kapsamında önerilere yer verilmiştir.

5.1. Sonuçlar

Bu araştırmada MÖA'ların kümeler ve fonksiyonlar alt öğrenme alanları ile ilgili bazı matematiksel kavramları görselleştirme süreçleri incelenmiştir. MÖA'lara matematiksel kavramların formal tanımları verilmiş, bu tanımları göz önünde bulundurarak kavramları resmetmeleri istenmiştir. MÖA'ların çizdikleri resimler sınıf tarafından değerlendirilmiş ve resimleri kavramın resmini yansıttığına karar verilen MÖA'lar ile kavramın görselleştirilme sürecine dair görüşülmüştür. Bu görüşmeler kamera ile kayıt altına alınmıştır. MÖA'ların resimleri ve kavramları görselleştirme süreçlerine dair açıklamaları gömülü teoremin tekniklerine göre analiz edilerek bazı sonuçlar elde edilmiştir (Şekil 5.1).



Şekil 5.1 MÖA'ların matematiksel kavramları görselleştirme süreci

5.1.1. MÖA'ların Matematiksel Kavramları Görselleştirme Süreci ile İlgili Bulguların Sonuçları

MÖA'ların kümeler ve fonksiyonlar alt öğrenme alanlarındaki bazı matematiksel kavramları görselleştirme süreçleri Şekil 5.1'de yer almaktadır. MÖA'ların matematiksel kavramları görselleştirme süreci *kavram-resim ilişkisi üzerine düşünme, resmetme, resmi değerlendirme, resmi değiştirme* ve *resmi analiz etme* olarak beş aşamada gerçekleşmiştir:

- 1) Kavram-resim ilişkisi üzerine düşünme: *kavram, resim ve yeni bir durumu keşfetme*;
- 2) Resmetme: *bildiği bir resim, somut resim, taslak resim, düşündüğünden farklı resim, renklendirme, soyut resim*;
- 3) Resmi değerlendirme: *kendi içinde değerlendirme, başka bir resimle karşılaştırarak değerlendirme*;
- 4) Resmi değiştirme: *temsil, tasarım, ebat*;
- 5) Resmi analiz etme: *doğrudan, kavram açısından* olarak ortaya çıkmıştır.

Şekil 5.1'de aşamalar arasındaki ilişkiler oklarla gösterilmiştir. Tek yönlü oklar ilişkinin tek yönlü olduğuna, ilişkinin başlayıp bittiği aşamalara işaret etmektedir. Örneğin MÖA'ların matematiksel kavramların temsili ile ilgili çizdiği önceden bildiği bir resim (Venn şeması, fonksiyon grafiği, koordinat sistemi), kavramı görselleştirebilmesi için bir esinlenme noktası olmuş, MÖA'lar bu esinlenme noktasını geliştirerek başka resimler (somut resim, taslak resim, soyut resim) çizmiştir. Burada tek yönlü bir ilişki ortaya çıkmıştır. MÖA'lar kavramlarla ilgili örnekler oluşturmuşlar ve kavram resimlerini bu örnekler üzerine kurgulamışlardır. Bazı MÖA'lar önce kavramı örneklendirmiş, sonra bu örnekleri kullanarak kavramla ilgili resimler çizmeye çalışmıştır. Bazı MÖA'lar ise önce kavramı temsil edecek bir resim oluşturmaya çalışmış, ardından kavramı temsil ettiğini düşündüğü resme kavramla ilgili örnekleri yerleştirmiştir. Dolayısıyla burada çift yönlü bir ilişki ortaya çıkmış, bu durum çift yönlü ok ve daha kalın bir çizgi ile temsil edilmiştir. Mavi renkli oklar MÖA'ların matematiksel kavramların resimlerini çizme süreçlerine işaret etmektedir. Yeşil renkli oklar MÖA'ların resimlerini tamamlayıp resmi kavram açısından yorumladıkları durumları göstermektedir. Bir aşamanın alt aşamaları arasındaki ilişkiler kesikli çizgilerden oluşan oklarla temsil edilmiştir. Kırmızı renkli oklar MÖA'ların kavramı temsil etmede başarısız olduğu aşamalar arasındaki ilişkileri temsil etmektedir.

Kavram-resim ilişkisi üzerine düşünme, MÖA'ların çizdikleri resimlerin arka planında yer alan düşünceleri temsil etmektedir. Dolayısıyla kavram-resim ilişkisi üzerine düşünme,

resmetmeyle beraber ilerlediğinden birbiri arasında daha fazla ilişki ortaya çıkmıştır (Şekil 5.1).

MÖA'lar kavramların formal tanımlarını inceleyerek kavramı resmetmeye çalışmışlardır. Kavramlarla ilgili örnekler belirlemiş, resimlerini bu örneklere dayanarak çizmişlerdir. MÖA'ların çizdikleri resimlerin tamamı kavramın temsiline yönelik değildir. Kavramla ilgili fikir oluşturabilmek adına da çizilen resimler bulunmaktadır. Çünkü kavramın görselleştirilmesi; kavram ile ilgili bilgi sahibi olmayı, bu bilgi doğrultusunda kavrama dair fikir oluşturmayı ve bunları resme nasıl yansıtacağını tasarlamayı gerektirmektedir. Dolayısıyla MÖA'ların öncelikle kavramları anlamaya yönelik resimler oluşturdukları görülmüştür. Bu resimleri, kavramın üzerinde daha önce bu şekilde düşünmeye alışık olmadıkları için çizmiş olabilirler. Kavram resimlerini oluşturma süreci MÖA'lara kavramları görselleştirerek farklı bir yönden irdeleme fırsatı vermiş olabilir.

MÖA'lar kavramların resimlerini kavramın bilinen bir görsel temsilinden, doğada rastlanan gerçek varlıklardan ya da farklı alanlardaki bilgilerinden yola çıkarak oluşturmaya çalışmışlardır. Bu fikirler esinlenme noktasını oluşturmaktadır. Fikirlerin bazıları sadece esinlenme noktası bulma aşamasında kalmış ve geliştirilememiştir. Bazıları ise MÖA'lara yol göstermiş, kavramın resminin oluşturulmasında etken olmuştur. MÖA'ların resimlerindeki temsilleri rastgele oluşturmadıkları gözlemlenmiştir. Kavram resimlerinde çizgilere ve renklere kavramın öğelerini ya da özelliklerini temsil etme açısından anlamlar yüklemişlerdir.

MÖA'lar kavram resimlerini oluşturduklarında kavram-resim ilişkisi ve kavram-kavram ilişkisi ile ilgili genellemelere varmış, yeni durumlar keşfetmişlerdir. Kavramla ilgili ilişki ve özellikleri kendi oluşturdukları resimlerde keşfetmişlerdir. Kavramın bazı özelliklerinin resme olan yansımalarını rahatlıkla görebildiklerini ifade etmişlerdir. MÖA'lar kavram resimlerini oluşturduklarında kavramlarla ilgili özellikleri de sorgulama fırsatı bulmuşlar, kavramlar arasındaki ilişkileri görmüşlerdir. Araştırmacılar çizimleri yapan öğrencilerin matematiksel işlemleri yalnızca sembolleri kullananlardan ya da başkasının yaptığı çizimleri gözlemleyenlerden daha iyi anladıklarını belirtmektedir (Crespo & Kyriakides, 2007). Örneğin, MÖA'lar kendi resimleriyle fonksiyonun tersinin özelliklerini (birebir ve örten olması gerektiği) sorgulamış ve daha iyi anladıklarını ifade etmişlerdir. Dolayısıyla kavram resimlerinin MÖA'ların kavramları daha iyi öğrenmesi ve öğretmesi açısından yardımcı olabileceği sonucuna varılabilir.

Resmetme, MÖA'ların çizdikleri tüm resimleri içermektedir. MÖA'lar kavramların temsili ile ilgili önceden bildikleri resimleri (Venn şeması, fonksiyon grafiği, koordinat sistemi) çizmişler ve bu resimler üzerinde düşünerek kavramları görselleştirmenin yollarını aramışlardır. MÖA'ların bildikleri resimler kavramla ilgili fikir oluşturmalarına ya da kavramla ilgili bir resim çizebilmek (somut resim, taslak resim ve soyut resim) için esinlenme noktası elde etmelerine yardımcı olmuştur (Şekil 5.1).

MÖA'ların çizdikleri resimlerin içinde doğada rastlanan gerçek varlıkları betimleyen resimler yani somut resimler de vardır. MÖA'lar doğada rastlanan gerçek varlıklara dair örneklerle kavramlar arasında kendi bakış açılarına göre bağlantılar kurmuş ve bu bağlantıları kullanarak kavramları resmetmeye çalışmışlardır. MÖA'ların matematikle veya doğada rastlanan gerçek varlıklarla ilgili örneklerle kavramları ilişkilendirerek resim çizmeye çalışmaları onların önceki bilgilerini de sorgulamalarını, daha önceki bilgileri ile kavram bilgileri arasında bağlantılar oluşturmalarını desteklemiş olabilir. Böylece MÖA'lar kavramlarla ilgili farklı bakış açıları elde etmiş olabilirler.

MÖA'ların düşündükleri fikirleri test etmek için ya da bir amaçları olmadan taslak resimler çizdikleri gözlemlenmiştir.

MÖA'ların resimlerinin her zaman birbiri arasında uyum göstermediği görülmüştür. MÖA'lar bazen benzer resimlerine ya da resimlerle ilgili açıklamalarına göre düşündüklerinden farklı resimler çizmişlerdir. Resimlerinde eksiklikler ya da fazlalıklar bulunabilmektedir. MÖA'ların bu durumun farkında olmadıkları ya da bu durumu önemsemedikleri görülmüştür.

MÖA'lar kavramları resmederken renkleri de kullanmışlardır. Resmi renklendirirken kavram ve resim ilişkisi üzerine düşünmüşlerdir. Resimde renkler MÖA'ların bakış açılarına göre kavramın öğelerini ya da özelliklerini temsil etmiştir (Şekil 5.1).

MÖA'lar doğada rastlanan gerçek varlıkları betimlemeyen resimler yani soyut resimler çizmişlerdir. Soyut resimlerinde bazen çizdikleri çizgiler MÖA'ların bakış açılarına göre kavramdaki ilişkileri ya da özellikleri temsil etmiştir. MÖA'lardan bazıları kavramları önce somut sonra soyut resimlerle görselleştirmişlerdir (Şekil 5.1). MÖA'lar bir veya birden fazla kavramı temsil eden kavram resimleri oluşturmuşlardır. Birden fazla kavramı temsil eden kavram resimlerinde kavramlarla ilgili birden fazla özellik ve ilişkileri bir arada görme imkânı bulmuşlardır. Nitekim Furinghetti, Morselli ve Antonini (2011) sembolik yaklaşımda tek seferde bir koşul kontrol edilebiliyorken görselleştirmenin aynı anda çok sayıda hipotezi

kontrol etme imkânı sağladığını ve koşullarla ilgili bir çeşit genel fikir verdiğini ifade etmiştir. MÖA'lar birden fazla kavramı temsil eden kavram resimlerini bilinçli olarak oluşturduklarını, kavram resminin bu şekilde daha kullanışlı olacağını düşündüklerini belirtmişlerdir.

MÖA'lar kavramları resmetmek amacıyla pek çok resim çizmiştir. Bu resimler arasından seçimler yaparak resmin, kavramın resmi olup olmadığına dair bir karar vermeye çalışmışlardır. Resmin, kavramın resmini yansıtır yansıtmadığı ile ilgili temsil ve tasarım açısından değerlendirmeler yapmışlardır. Temsil ve tasarım açısından oluşturdukları bir resmi yeterli bulurlarsa diğer resimleri ile tasarım ve temsil açısından karşılaştırmışlar ve hangisinin daha başarılı olduğuna dair değerlendirmelerde bulunmuşlardır (Şekil 5.1).

MÖA'ların bireysel veya grupça çizdikleri resimler sınıfta paylaşılmış, kavramı temsil etmesi yönünden tartışılmıştır. Böylece MÖA'lar kavramı temsil eden farklı resimler görmüş ve onları değerlendirmişlerdir. Bu uygulama MÖA'ların kavramın görsel temsilini oluşturma ve değerlendirme yönünden bakış açılarını geliştirmiş olabilir. Nitekim MÖA'ların uygulama dersinin son haftalarına doğru kavram resimleri ile ilgili daha fazla fikir üretmeye başladıkları, kendi fikirleri üzerinde daha fazla düşünebilmek için grupça çalışmak yerine bireysel çalışmayı tercih ettikleri görülmüştür.

MÖA'lar, temsil ya da tasarım açısından yetersiz buldukları resimleri kısmen ya da tamamen değiştirmeye çalışmışlardır. Resimlerini tasarım açısından kısmen yetersiz buldukları bazı durumlarda resimlerini renklendirmişlerdir (Şekil 5.1). Matematiksel kavramı en iyi temsil eden resme ulaşmak için çaba göstermişlerdir. Bunun için de resimlerinde kavramın bir özelliğini ya da kavramdaki bir ilişkiyi yansıtmadığını düşündükleri gereksiz çizimlerden kaçınmaya çalışmışlar ve resimlerini değiştirmişlerdir. Eğitimcilerin sadelik ve verimin öneminin farkında olması gerekir. Çoğu öğrenci görsel temsilleri yorumlama yeteneğinden uzak gözükmektedir. Görsel temsillerde çok fazla ayrıntı olduğunda öğrenciler konuyla ilgisiz olanları ayırt etmede zorlanabilirler (Macnab vd., 2012).

MÖA'ların resimleri ile ilgili her detayı göz önünde bulundurmaya çalıştıkları görülmüştür. Resimlerini ebat açısından da değerlendirmişlerdir. Tasarım yönünden resmin ebadını yeterli görmezlerse değiştirmişlerdir. Resimlerini değiştirdikten sonra temsil ve tasarım açısından tekrar değerlendirmişlerdir. Resmi tasarım ya da temsil açısından tekrar yetersiz bulurlarsa resmi kısmen ya da tamamen tekrar değiştirmişlerdir (Şekil 5.1).

MÖA'lar kavram resimlerini oluşturduktan sonra resimleri kavramlara göre analiz etmişlerdir. Yani bir ressamın bitirdiği tablosunu yorumlaması ve anlatması gibi MÖA'lar da resimlerini yorumlamış ve resmin kavramlar açısından ifade ettiği anlamı belirtmişlerdir. MÖA'lar resim üzerinde belirli yerlere dikkat çeken doğrudan açıklamalar yapmış, yani resmi incelemiş, bu açıklamaların kavram açısından anlamını ifade etmişlerdir. Ya da önce kavramı belirlemiş, sonra bu kavrama göre resmi incelemişlerdir. Bu incelemenin sonucunda resmi kavrama göre anlamlandıran yorumlarda bulunmuşlardır (Şekil 5.1).

5.2. Öneriler

1) MÖA'ların hem kümeler hem de fonksiyonlarla ilgili kavramları resmetmeye çalışırken Venn şemasını çizdikleri görülmüştür. Venn şeması; resme daha başlamadan kavramı nasıl görselleştireceğini düşünürken, bilinen resimlerden başka farklı bir resim çizmeye çalışırken, uygun bulduğu resmi diğer kavramlar için denerken kısacası kavramları resmetmenin her aşamasında çizilmiştir. Venn şemasını; kavramın temsiline nasıl olduğunu bildiği bir resim üzerinde görmek, kavram ve resimle ilgili fikir oluşturmak, yeni bir resim oluşturmak amacıyla çizdikleri görülmüştür. MÖA'ların yeni resimler oluşturma süreçlerinin her aşamasında Venn şemasının onlar için bir dayanak oluşturduğu söylenebilir. MÖA'lara kavramlarla ilgili daha fazla matematiksel görsel temsil öğretilir. Bu durum onları yeni resimler üretmede daha da cesaretlendirebilir.

2) MÖA'ların kavramları resmetmeye çalışırken esinlenme noktası buldukları ve esinlenme noktası yardımıyla resimlerini geliştirerek farklı resimler oluşturdukları görülmüştür. Esinlenme noktaları matematik veya doğada rastlanan gerçek varlıklar ile ilgilidir. Daha önceki bildikleri resimlerin ya da doğada rastlanan gerçek varlıklarla ilgili örneklerin yeni resimler üretmelerinde MÖA'lara yol gösterdiği ya da ipucu verdiği gözlemlenmiştir. MÖA'ların kavramlarla ilgili çoklu temsiller yönünden geliştirilmesi onların daha iyi resimler çizmesine yardımcı olabilir. MÖA'lara bu fırsatları sunan eğitimler verilebilir.

3) MÖA'lar renk ve çizgilere kavramlar ve kavramların öğeleri açısından anlamlar yüklemişlerdir. Buradaki amaçlarının da kavram resmindeki temsillerin daha iyi görünmesini sağlamak olduğunu belirtmişlerdir. Bununla birlikte MÖA'lar bazen resimlerini birbiri ile tam uyumlu olarak çizememiş ve bazı resimler arasında farklılıklar ortaya çıkmıştır. MÖA'ların açıklamalarına veya diğer benzer resimlerine göre resimlerini düşündüklerinden eksik veya fazla resmettikleri görülmüştür. Bu durumun nedeni

araştırmacı tarafından sorulmuş, MÖA'lar farkında olmadıklarını belirtmişlerdir. MÖA'ların resimleri ve açıklamaları arasında farklılıkların olması kavramları resmetmeye alışık olmamalarından kaynaklanmış olabilir. MÖA'lar kavramların görselleştirilmesi ile ilgili eğitim alırlarsa birbiri ile uyumlu kavram resimleri oluşturabilirler. Aksi halde MÖA'lar öğrencilerine de kavram resimlerinin oluşturulması aşamasında yeterli rehberlik yapamayabilirler.

4) MÖA'lar kavram resimleri aracılığıyla kavramlar arasındaki ilişkileri keşfetmişlerdir. Kavramdaki özelliklerin neden gerekli olduğunun farkına vardıkları (fonksiyonun tersi için fonksiyon neden birebir ve örten olmalı) ve kavramlar arasındaki ilişkileri tespit ettikleri durumlar (birebirlik ve örtenliğin fonksiyonun tersinin de fonksiyon olması açısından etkeninin ne olduğunu keşfetmeleri) ortaya çıkmıştır. MÖA'ların kavram resimleri çizmelerinin kavramları sorgulamalarına, kavramlardaki ayırt edici özellikleri anlamalarına, kavramı daha iyi öğrenmelerine yardımcı olduğu sonucuna varılabilir. Benzer etkinlikler öğrencilere de yaptırılarak matematiğin temel yapı taşı olan kavramların daha iyi öğrenilmesine katkıda bulunabilir. Kavram resimleri, kavramların öğretiminde kavramın özelliklerini keşfetme amaçlı kullanılabilir.

5) MÖA'lar çizdikleri kavram resimleri aracılığıyla kavramın yeni bir görsel temsilini elde etmişler ve kavramdaki özelliklerin resme nasıl yansıdığını görerek kavramı başka bir görsel temsilde görme imkânı bulmuşlardır. Dolayısıyla kavram resimlerinin MÖA'ların kavram ile ilgili yeni bakış açıları kazanmalarına yardımcı olduğu düşünülebilir. MÖA'lara daha fazla resim çizme fırsatları verilerek kavramlarla ilgili bakış açılarının zenginleşmesi hedeflenebilir.

6) MÖA'lardan biri fonksiyonun tersini resmetmeden önce, fonksiyonun tersinde birebirlik ve örtenlik şartlarının neden gerekli olduğunu bilmediğini, bu konudaki bilgisinin yüzeysel kaldığını fark ettiğini belirtmiştir. Çizdiği kavram resmi sayesinde bir fonksiyonun tersinin de fonksiyon olması için birebirlik ve örtenlik şartının neden gerekli olduğunu anladığını, bir başkasına da rahatlıkla öğretebileceğini ifade etmiştir. Kavram resimleri, MÖA'ların kavram ile ilgili bilgilerini daha anlamlı hale getirmelerine böylece matematik öğretiminde kendilerine olan güvenlerinin daha da artmasına fırsat sunabilir. Kavram resimlerinin bu avantajları öğrenciler için de kullanılabilir.

7) MÖA'lar başkaları onların çizdiği kavram resimlerinden kavramları anlamasalar bile kendi çizdikleri kavram resimlerinden kavramları anlayabildiklerini, kendilerinin kavramları

resimden doğrudan görebildiklerini ifade etmişlerdir. Öğrencilerin kendi görsel temsillerini oluşturmalarının kavramları anlama düzeylerine etkisi araştırabilir.

8) Araştırmada kavram resmi görsel temsil olarak uygun bulunan MÖA'lar ile görüşülmüştür. Kavram resimlerini oluşturamayan MÖA'ların resimlerinin nasıl olduğu, nasıl düşündükleri araştırmanın kapsamı dışında kalmıştır. Bu durumdaki MÖA'lar ile ilgili araştırmalar yapıp kavramları görselleştirme süreçlerinde yaşadıkları zorluklar daha detaylı bir şekilde ortaya çıkarabilir. Böylece daha kapsamlı çözüm önerileri üretilebilir.

9) Kavramları resmetmeye çalışmanın MÖA'ları kavramlar üzerinde daha dikkatli düşünmeye, kavramlardaki ilişki ve özellikleri sorgulamaya, kavramları kendi bakış açılarına göre anlamlandırmaya yönelttiği söylenebilir. Bunun yanında kavram resimleri öğrencilere kavramdaki ilişki ve özelliklerin keşfedilmesinde bir öğretim yöntemi, öğrencilerin kavramları anlayıp anlamadıklarını belirlemek için bir ölçme aracı olarak kullanılabilir.

KAYNAKLAR

- Alcock, L., & Simpson, A. (2004). Convergence of sequences and series: Interactions between visual reasoning and the learner's beliefs about their own role. *Educational Studies in Mathematics*, 57(1), 1-32. <https://doi.org/10.1023/B:EDUC.00000047051.07646.92>
- Alcock, L., & Weber, K. (2008). Referential and syntactic approaches to proving: Case studies from a transition-to-proof course. In F. Hitt, D. A. Holton, & P. Thompson (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education VII* (pp. 101-123). Providence, RI: American Mathematical Society.
- Alcock, L., & Weber, K. (2010). Undergraduates' example use in proof production: Purposes and effectiveness. *Investigations in Mathematical Learning*, 3(1), 1-22.
- Alshwaikh, J. (2007). Mathematical visual forms and learning geometry: Towards a systemic functional analysis. *Proceedings of the British Society for Research into Learning*, 27(2), 1-6.
- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, 52(3), 215-241. <https://doi.org/10.1023/A:1024312321077>
- Arıkan, A., & Halıcıoğlu, S. (2018). *Soyut matematik*. Ankara: Palme.
- Ayas, A. (2016). Kavram öğrenimi. S. Çepni (Ed.), *Kuramdan uygulamaya fen ve teknoloji öğretimi içinde* (13. baskı). (s. 191-220). Ankara: Pegem A.
- Baergen, R. (2006). *Historical dictionary of epistemology*. USA: The Scarecrow Press.
- Barmby, P., Bilsborough, L., Harries, T., & Higgins, S. (2009). *Primary mathematics: teaching for understanding*. Buckingham: Oxford University Press.

- Barwise, J., & Etchemendy, J. (1998). Computers, visualization, and the nature of reasoning. In T.W. Bynum & J. H. Moor (Eds), *The digital phoenix: How computers are changing philosophy* (pp. 93-116). London: Blackwell.
- Borba, M. C., & Villarreal, M. E. (2005). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: Information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization*. New York: Springer.
- Borwein, P., & Jorgenson, L. (2001). Visible structures in number theory. *The American Mathematical Monthly*, 108(10), 897-1006.
- Bowen, G. A. (2009). Document analysis as a qualitative research method. *Qualitative Research Journal*, 9(2), 27-40.
- Bråting, K., & Pejlar, J. (2008). Visualizations in mathematics. *Erkenntnis*, 68(3), 345-358. <https://doi.org/10.1007/s10670-008-9104-3>
- Cohen, L., Lawrence, M., & Morrison, K. (2011). *Research methods in education* (7th ed.). London: Routledge.
- Corter, J. E., & Zahner, D. C. (2007). Use of external visual representations in probability problem solving. *Statistics Education Research Journal*, 6(1), 22-50.
- Crespo, S. M., & Kyriakides, A. O. (2007). To draw or not to draw: Exploring children's drawings for solving mathematics problems. *Teaching Children Mathematics*, 14(2), 118-125.
- Creswell, J. W. (2012). *Educational research: Planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research* (4th ed.). Boston: Pearson.
- David, M. M., & Tomaz, V. S. (2012). The role of visual representations for structuring classroom mathematical activity. *Educational Studies in Mathematics*, 80(3), 413-431. <https://doi.org/10.1007/s10649-011-9358-6>
- De Jong, T., Ainsworth, S., Dobson, M., van der Hulst, A., Levonen, J., Reimann, P., et al. (1998). Acquiring knowledge in science and math: The use of multiple representations in technology based learning environments. In M. W. van Someren, P. Reimann, H. P. A. Boshuizen, & T. de Jong (Eds.), *Learning with multiple representations* (pp. 9-40). Amsterdam: Pergamon.
- Demirel, Ö. (2012). *Eğitim sözlüğü* (5. baskı). Ankara: Pegem A.

- Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (2005). *The Sage handbook of qualitative research* (3rd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.
- Doğan, D. M. (2001). *Büyük Türkçe sözlük*. Ankara: Vadi.
- Dreher, A., Kuntze, S., & Lerman, S. (2016). Why use multiple representations in the mathematics classroom? Views of English and German preservice teachers. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 14(2), 363-382. <https://doi.org/10.1007/s10763-015-9633-6>
- Dreyfus, T. (1991). On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th PME International Conference*, Vol. 1 (pp. 33-48). Assisi: PME.
- Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1996). On different facets of mathematical thinking. In R. J. Sternberg & T. Ben-Zeev (Eds.), *The nature of mathematical thinking*, (pp. 253-284). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Duncan, A. G. (2010). Teachers' views on dynamically linked multiple representations, pedagogical practices and students' understanding of mathematics using TI-Nspire in Scottish secondary schools. *ZDM*, 42(7), 763-774. <https://doi.org/10.1007/s11858-010-0273-6>
- Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for Learning (Plenary address). In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proc. 21st PME-NA Conference*, 1 (pp. 3-26). Cuernavaca, Morelos, Mexico.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103-131. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>
- Duval, R. (2014). Commentary: Linking epistemology and semio-cognitive modeling in visualization. *ZDM*, 46(1), 159-170. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0565-8>
- Eisner, E. W. (2004). Preparing for today and tomorrow. *Educational Leadership*, 61(4), 6-10.

- Elliott, S., Hudson, B., & O'Reilly, D. (2000). Visualisation and the influence of technology in 'A' level mathematics: A classroom investigation. *Research in Mathematics Education*, 2(1), 151-168.
- English, L. D. (Ed.). (2004). *Mathematical and analogical reasoning of young learners*. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.
- Eroğlu, Ö. (2006). *Resim sanatı sözlüğü*. İstanbul: Nellisanatevi.
- Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17(1), 105-121. [http://dx.doi.org/10.1016/S0732-3123\(99\)80063-7](http://dx.doi.org/10.1016/S0732-3123(99)80063-7)
- Farmaki, V., & Paschos, T. (2007). The interaction between intuitive and formal mathematical thinking: A case study. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38(3), 353-365. <https://doi.org/10.1080/00207390601035302>
- Fraenkel, J. R., Wallen, N. E., & Hyun, H. H. (2012). *How to design and evaluate research in education* (8th ed.). New York: McGraw-Hill Companies.
- Furinghetti, F., Morselli, F., & Antonini, S. (2011). To exist or not to exist: example generation in real analysis. *ZDM*, 43, 219. <https://doi.org/10.1007/s11858-011-0321-x>
- George, E. A. (1997). *Reasoning with visual representations: Students' use of diagrams, figures, and graphs in solving problems on the advanced placement calculus examination*. Doctoral Dissertation, University of Pittsburg, Pennsylvania.
- Goldin, G. A. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 197-218). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Goldin, G. A., & Kaput, J. J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. In L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin, & B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 397-430). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

- Goldin, G. A., & Shteingold, N. (2001). Systems of representation and the development of mathematical concepts. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The role of representation in school mathematics* (pp. 1-23). Reston, VA: NCTM.
- Gutiérrez, A. (1996). *Visualization in 3-dimensional geometry: in search of a framework*. Paper presented at the 20th International Group for the Psychology of Mathematics Education, Valencia, Spain.
- Guzman, M. (2002). The role of visualization in the teaching and learning of mathematical analysis. In *Proceedings of the international conference on the teaching of mathematics (at the undergraduate level)*. Greece: Hersonissos (ERIC Document Reproduction Service No. ED 472 047).
- Güler, G., & Temizyürek, A. (2015). Matematik öğretmeni adaylarının ardışık tek sayıların toplamının ispatına yönelik model oluşturma becerilerinin incelenmesi. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 6(3), 446-462. <https://doi.org/10.16949/turcomat.63535>
- Halmos, P. R. (1985). *I want to be a mathematician*. New York: Springer.
- Hançerlioğlu, O. (1997). *Ruhbilim sözlüğü* (3. baskı). İstanbul: Remzi Kitabevi.
- Hanna, G., & Sidoli, N. (2007). Visualisation and proof: a brief survey of philosophical perspectives. *ZDM*, 39(1-2), 73-78. <https://doi.org/10.1007/s11858-006-0005-0>
- Healy, L., & Hoyles, C. (1999). Visual and symbolic reasoning in mathematics: Making connections with computers. *Mathematical Thinking and Learning*, 1(1), 59-84. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0101_3
- Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry: Two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 61-76.
- Hershkowitz, R., Arcavi, A., & Bruckheimer, M. (2001). Reflections on the status and nature of visual reasoning-the case of the matches. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32(2), 255-265. <https://doi.org/10.1080/00207390010010917>
- Jarvis, P., & Wilson, A. L. (1999). *International dictionary of adult and continuing education*. London: Kogan Page.

- Kadunz, G., & Yerushalmy, M. (2015). Visualization in the teaching and learning of mathematics. In S. Cho (Ed.), *The proceedings of the 12th international congress on mathematical education* (pp 463-467). Cham: Springer.
- Kasmer, L. A., & Kim, O. K. (2012). The nature of student predictions and learning opportunities in middle school algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 79(2), 175-191. <https://doi.org/10.1007/s10649-011-9336-z>
- Kavram (t.y.). *Türk Dil Kurumu* içinde. http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_gts&arama=gts&guid=TDK.GTS.5acbd1eea08509.71125680 sayfasından erişilmiştir.
- Kirwan, J. V., & Tobias, J. M. (2014). Multiple representations and connections with the Sierpinski triangle. *Mathematics Teacher*, 107(9), 666-671. <https://doi.org/10.5951/mathteacher.107.9.0666>
- Konyalioglu, S., Konyalioglu, A. C., Ipek, A. S., & Isik, A. (2005). The role of visualization approach on student's conceptual learning. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 47, 1-9.
- Kotsopoulos, D., & Cordy, M. (2009). Investigating imagination as a cognitive space for learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 70(3), 259-274. <https://doi.org/10.1007/s10649-008-9154-0>
- Larkin, J. H., & Simon, H. A. (1987). Why a diagram is (sometimes) worth ten thousand words. *Cognitive Science*, 11, 65-100.
- Lean, G., & Clements, M. A. (1981). Spatial ability, visual imagery, and mathematical performance. *Educational Studies in Mathematics*, 12(3), 267-299. <https://doi.org/10.1007/BF00311060>
- Lesh, R., Behr, M., & Post, T. R. (1987). Rational number relations and proportions. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 41-58). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Liang, H. N., & Sedig, K. (2010a). Can interactive visualization tools engage and support pre-university students in exploring non-trivial mathematical concepts? *Computers & Education*, 54(4), 972-991. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2009.10.001>

- Liang, H. N., & Sedig, K. (2010b). Role of interaction in enhancing the epistemic utility of 3D mathematical visualizations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 15(3), 191-224. <https://doi.org/10.1007/s10758-010-9165-7>
- Lohithakshan, P. M. (2002). *Dictionary of education: A practical approach*. New Delhi: Kanishka Publishing House.
- Longman, P. (2008). *Longman dictionary of American English* (4th ed.). USA: Pearson ESL.
- Lopes, D. (1996). *Understanding pictures*. New York: Oxford University Press.
- Macnab, J. S., Phillips, L. M., & Norris, S. P. (2012). Visualizations and visualization in mathematics education. In S. P. Norris (Ed.) *Reading for evidence and interpreting visualizations in mathematics and science education* (pp. 103-122). Rotterdam: Sense Publishers.
- Matematiksel. (t.y.). *Türk Dil Kurumu* içinde. http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_gts&arama=gts&guid=TDK.GTS.5ad0ed6c27bc49.77446905 sayfasından erişilmiştir.
- Matsumoto, D. (Ed.). (2009). *The Cambridge dictionary of psychology*. New York: Cambridge University Press.
- Merriam, S. B., & Tisdell, E. J. (2015). *Qualitative research: A guide to design and implementation*. CA: John Wiley & Sons.
- Mertens, D. M. (2010). *Research and evaluation in education and psychology: Integrating diversity with quantitative, qualitative, and mixed methods* (3rd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.
- Milli Eğitim Bakanlığı (2018). *Matematik dersi (ilkokul ve ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. sınıflar) öğretim programı*. Ankara: MEB.
- Milli Eğitim Bakanlığı (2018). *Ortaöğretim matematik dersi (9, 10, 11 ve 12. sınıflar) öğretim programı*. Ankara: MEB.
- Morgan, C. (2001). Mathematics and human activity: Representation in mathematical writing. *Research in Mathematics Education*, 3(1), 169-182. <https://doi.org/10.1080/14794800008520091>

- Morgan, C. (2006). What does social semiotics have to offer mathematics education research? *Educational Studies in Mathematics*, 61, 219-245. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-5477-x>
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Natsheh, I., & Karsenty, R. (2014). Exploring the potential role of visual reasoning tasks among inexperienced solvers. *ZDM*, 46(1), 109-122. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0551-1>
- Noss, R., Healy, L., & Hoyles, C. (1997). The construction of mathematical meanings: Connecting the visual with the symbolic. *Educational Studies in Mathematics*, 33(2), 203-233. <https://doi.org/10.1023/A:1002943821419>
- Presmeg, N. C. (1986). Visualisation and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics*, 17(3), 297-311. <https://doi.org/10.1007/BF00305075>
- Punch, K. F. (2000). *Developing effective research proposals*. London: Sage Publication.
- Pylyshyn, Z. W. (2003). *Seeing and visualizing: It's not what you think*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Rahim, M. H., & Siddo, R. (2009). The use of visualization for learning and teaching mathematics. In A. Rogerson (Ed.), *Proceedings of the 10th international conference: Models in developing mathematics education* (pp. 496-500). Germany: The Mathematics Education into the 21st Century Project.
- Rau, M. A., & Matthews, P. G. (2017). How to make 'more' better? Principles for effective use of multiple representations to enhance students' learning about fractions. *ZDM*, 49(4), 531-544. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0846-8>
- Resim. (t.y.). *Türk Dil Kurumu* içinde. http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_gts&arama=gts&guid=TDK.GTS.5aae82f1b2edd1.19687150 sayfasından erişilmiştir.
- Rival, I. (1987). Picture puzzling: Mathematicians are rediscovering the power of pictorial reasoning. *The Sciences*, 27, 41-46.
- Rogness, J. (2011). Mathematical visualization. *Journal of Mathematics Education at Teachers College*, 2(2), 1-7.

- Rösken, B., & Rolka, K. (2006). A picture is worth a 1000 words – The role of visualization in mathematics learning. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3 (pp. 233-240). Prague, Czech Republic: PME.
- Ryken, A. E. (2009). Multiple representations as sites for teacher reflection about mathematics learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 12, 347. <https://doi.org/10.1007/s10857-009-9107-2>
- Sedig, K., & Sumner, M. (2006). Characterizing interaction with visual mathematical representations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 11(1), 1-55. <https://doi.org/10.1007/s10758-006-0001-z>
- Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. London: The Falmer Press.
- Simon, M. A. (2017). Explicating mathematical concept and mathematical conception as theoretical constructs for mathematics education research. *Educational Studies in Mathematics*, 94(2), 117-137. <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9728-1>
- Singer, F. M. (2009). The dynamic infrastructure of mind – A hypothesis and some of its applications. *New Ideas in Psychology*, 27(1), 48-74. <https://doi.org/10.1016/j.newideapsych.2008.04.007>
- Sinnett, S., Spence, C., & Soto-Faraco, S. (2007). Visual dominance and attention: The Colavita effect revisited. *Perception & Psychophysics*, 69(5), 673-686. <https://doi.org/10.3758/BF03193770>
- Sözen, M., & Tanyeli, U. (2017). *Sanat kavram ve terimleri sözlüğü*. İstanbul: Remzi Kitabevi.
- Steen, L. A. (1999). Twenty questions about mathematical reasoning. In L. V. Stiff & F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K–12* (pp. 270-285). Reston, VA: NCTM.
- Stylianou, D. A. (2002). On the interaction of visualization and analysis: the negotiation of a visual representation in expert problem solving. *The Journal of Mathematical Behavior*, 21(3), 303-317. [https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(02\)00131-1](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00131-1)

- Stylianou, D. A. (2010). Teachers' conceptions of representation in middle school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13(4), 325-343. <https://doi.org/10.1007/s10857-010-9143-y>
- Stylianou, D. A., & Silver, E. A. (2004). The role of visual representations in advanced mathematical problem solving: An examination of expert-novice similarities and differences. *Mathematical thinking and learning*, 6(4), 353-387. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0604_1
- Tall, D. (1991). Intuition and rigor: The role of visualization in the calculus. In S. Cunningham & W. S. Zimmermann (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 105-119). Washington, DC: MAA.
- Tappenden, J. (2005). Proof style and understanding in mathematics I: Visualization, unification and axiom choice. In P. Mancosu, K. F. Jørgensen & S. A. Pedersen (Eds.), *Visualization, explanation and reasoning styles in mathematics*, Vol. 327 (pp. 147-214). Dordrecht: Springer.
- Tasarım. (t.y.). *Türk Dil Kurumu* içinde. http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_gts&arama=gts&guid=TDK.GTS.5acbd1f4856ef2.65893418 sayfasından erişilmiştir.
- Temsil. (t.y.). *Türk Dil Kurumu* içinde. http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_gts&arama=gts&guid=TDK.GTS.5ab7b4faa8fad2.65794032 sayfasından erişilmiştir.
- Trigueros, M., & Martínez-Planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studies in Mathematics*, 73(1), 3-19. <https://doi.org/10.1007/s10649-009-9201-5>
- Tversky, B. (2001). Spatial schemas in depictions. In M. Gattis (Ed.), *Spatial schemas and abstract thought* (pp. 79-112). Cambridge, MA: The MIT Press.
- Uğurel, I., Morali, H. S., Karahan, O., & Boz B. (2016). Mathematically gifted high school students' approaches to developing visual proofs (VP) and preliminary ideas about VP. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, 4(3), 174-197.
- Van de Walle, J. (2004). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (5th ed.). Boston, MA.: Pearson Education, Inc.
- Vardar, B. (Ed.). (2002). *Açıklamalı dilbilim terimleri sözlüğü*. İstanbul: Multilingual.

Webster, M. (2009). *Merriam-Webster's elementary dictionary*. USA: Merriam-Webster.

Zarzycki, P. (2004). From visualizing to proving. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA*, 23(3), 108-118.
<https://doi.org/10.1093/teamat/23.3.108>

Zimmerman, W., & Cunningham, S. (1991). Editor's introduction: What is mathematical visualization? In W. Zimerman & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 1-7). Washington, DC: MAA.



GAZİLİ OLMAK AYRICALIKTIR..