



**SINIR KOŞULLARI PARAMETREYE BAĞIMLI STURM-LIOUVILLE
OPERATÖRLER SİSTEMİNİN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ**

Seniha ARIKAN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

TEMMUZ 2020

Seniha ARIKAN tarafından hazırlanan “SINIR KOŞULLARI PARAMETREYE BAĞIMLI STURM-LIOUVILLE OPERATÖRLER SİSTEMİNİN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Esra KIR ARPAT

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Başkan: Prof. Dr. Şeyhmus YARDIMCI

Matematik Ana Bilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Doç. Dr. Esmâ YILDIZ ÖZKAN

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Tez Savunma Tarihi: 01/07/2020

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Seniha ARIKAN

01/07/2020

SINIR KOŞULLARI PARAMETREYE BAĞIMLI STURM-LIOUVILLE OPERATÖRLER SİSTEMİNİN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Seniha ARIKAN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2020

ÖZET

Bu tezde L ile $L_2(0, \infty)$ uzayında

$$iy_1' + q_1(x)y_2 = \lambda y_1$$

$$-iy_2' + q_2(x)y_1 = \lambda y_2 \quad 0 \leq x < \infty$$

diferansiyel denklemler sisteminin

$$(\alpha_1\lambda + \beta_1)y_2(0, \lambda) - (\alpha_2\lambda + \beta_2)y_1(0, \lambda) = 0$$

spektral parametreye bağlı sınır koşulu yardımıyla üretilen diferansiyel operatörü inceleyeceğiz. Burada q kompleks değerli bir fonksiyon, λ bir kompleks parametre ve $\beta_i, \alpha_i, i = 1, 2$ ($\beta_i \neq 0, \alpha_i \neq 0$) kompleks sayılardır. Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm kısa bir girişe ayrılmıştır. İkinci bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde sınır koşulları spektral parametreye bağımlı Sturm-Liouville diferansiyel denklem sisteminin çözümleri elde edilmiştir. Ayrıca bu çözümlerin asimptotik bağıntıları hesaplanmıştır. Dördüncü bölümde L 'nin resolvent operatörü hesaplanmıştır. Özdeğerlerin ve spektral tekilliklerin cümlesi elde edilmiştir. Sürekli spektrum incelenmiştir.

Bilim Kodu : 20404

Anahtar Kelimeler : Özdeğer, Özfonksiyon, Resolvent operatör, Spektral tekillik, Spektral parametre

Sayfa Adedi : 43

Danışman : Prof. Dr. Esra KIR ARPAT

SPECTRAL PROPERTIES OF STURM-LIOUVILLE OPERATORS SYSTEM WITH BOUNDARY CONDITIONS DEPENDING ON THE SPECTRAL PARAMETER

(M. Sc. Thesis)

Seniha ARIKAN

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

July 2020

ABSTRACT

In this thesis, we denote the operator generated in $L_2(0, \infty)$ by the boundary value problem

$$iy_1' + q_1(x)y_2 = \lambda y_1$$

$$-iy_2' + q_2(x)y_1 = \lambda y_2 \quad 0 \leq x < \infty$$

$$(\alpha_1\lambda + \beta_1)y_2(0, \lambda) - (\alpha_2\lambda + \beta_2)y_1(0, \lambda) = 0$$

by L , where $q_i, i = 1, 2$ are complex valued functions, λ is a spektral parameter and $\alpha_i, \beta_i, i = 1, 2$ are complex numbers. ($\alpha_i \neq 0, \beta_i \neq 0$) This thesis consist of four chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, some basic definitions and main theorems are given that are used in other chapters. In the third chapter, the solutions of Sturm-Liouville system of differential equation with boundary conditions depending on the spectral parameter are obtained. Furthermore asymptotic relations of this solutions are calculated. In the fourth chapter, the resolvent of the operator L is calculated. In addition, the set of the eigenvalues and spectral singularities are obtained. Furthermore, continuous spectrum of L is examined.

Science Code : 20404

Key Words : Eigenvalue, Eigenfunction, Resolvent operator, Spectral singularity, Spectral parameter

Page Number : 43

Supervisor : Prof. Esra KIR ARPAT

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmam süresince bana her zaman yardımcı olan, bilgilerini ve fikirlerini benimle paylaşan, gösterdiği sonsuz anlayış ve ilgiyle tezimin oluşmasına yardımcı olan kıymetli danışman hocam Prof. Dr. Esra KIR ARPAT'a ve kendilerinden eğitim alarak bu yolda ilerlememde emeği olan tüm hocalarıma en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışma dönemimde de hep yanımda olan kıymetli aileme ve benimle tez için sürekli yolculuk yapan canım kızıma teşekkür ederim. Ayrıca bana olan inançlarıyla motive olduğum sevgili liseli öğrencilerime de teşekkür ederim. Çalışmamı, daima kalbimde yaşayan canım anneme adıyorum.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	5
3. DENKLEMİN ÇÖZÜMLERİ VE ASİMPOTOTİK BAĞINTILAR.....	7
3.1. $l(y) - \lambda y = 0$ Denkleminin Çözümleri.....	8
3.2. Dirak Sisteminin Jost Çözümleri.....	14
3.3. Asimptotik Bağıntılar	21
4. L OPERATÖRÜNÜN ÖZDEĞERLERİNİN VE SPEKTRAL TEKİLLİKLERİNİN CÜMLESİ	31
4.1. L Operatörünün Resolventi.....	31
4.2. L Operatörünün Özdeğerlerinin Cümlesi.....	35
4.3. L Operatörünün Spektral Tekilliklerinin Cümlesi	39
4.4. L Operatörünün Sürekli Spektrumu.....	39
KAYNAKLAR	41
ÖZGEÇMİŞ	43

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar cümlesi
$\mathbb{C}_{\pm}$	$\{z \in \mathbb{C} : \pm \operatorname{Im} z > 0\}$
$\overline{\mathbb{C}_{\pm}}$	$\{z \in \mathbb{C} : \pm \operatorname{Im} z \geq 0\}$
$C[a,b]$	$[a,b]$ aralığında tanımlı ve sürekli olan fonksiyonların lineer uzayı
$D(A)$	A Operatörünün tanım kümesi
$\sigma(A)$	A kümesinin spektrum kümesi
$\sigma_c(A)$	A kümesinin sürekli spektrumu
$\sigma_d(A)$	A kümesinin diskret spektrumu
$\sigma_r(A)$	A kümesinin rezidü (kalan) spektrumu
$\sigma_{ss}(A)$	A kümesinin spektral tekillikler
$\rho(A)$	A kümesinin resolvent kümesi
$R_{\lambda}(A)$	A Operatörünün resolventi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
λ	Özdeğer
$W[y_1, y_2]$	y_1 ve y_2 çözümlerinin Wronskian'ı

1. GİRİŞ

Analiz, uygulamalı matematik ve matematiksel fizik gibi birçok alanda karşılaşılan problemlerin çözümünde diferensiyel operatörlerin özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının bulunması gerekir. Bir diferensiyel operatörün özfonksiyonları cinsinden ifade edilmesi bazen bu diferensiyel operatörün tanım kümesine ait olan bir fonksiyon için gerekli olabilmektedir. Bu operatörün özfonksiyonlarına göre seri ya da integral açılımı biçiminde ifade edilmesi önem arz etmektedir. Kuantum mekaniğindeki ve fonksiyonel analiz alanındaki gelişmelerle birlikte diferensiyel operatörlerin spektral analizinin yapılması oldukça önem kazanmıştır. Fourier yöntemi, kısmi türevli denklemlerin sınır koşullarını gerçekleyen çözümleri bulunurken kullanılır. Bunun üzerinde çalışan çoğu matematikçinin araştırma konusu olan bazı denklemler, elde edilen diferensiyel operatörlerin spektral analizi Sturm-Liouville, Klein-Gordon, Dirac ve Schrödinger diferensiyel denklemler yardımıyla elde edilir.

Fizik, matematiksel fizik, fonksiyonel analiz ve Kuantum Mekaniğindeki pek çok problemin çözümünde diferensiyel operatörlerin spektral analizi temel olduğundan bu alanlardaki gelişmelerle birlikte diferensiyel operatörlerin spektral analizine ilgi artmıştır. Matematik alanı dışında bazı fiziksel problemlerin incelenmesi sırasında karşılaşılan denklem çözümlerindeki operatörlerden biri diferensiyel operatörlerdir. Bu operatörler çoğunlukla, singüler selfadjoint ve non-selfadjoint olarak karşımıza çıkmaktadır. Ayrıca Sturm-Liouville operatörlerinin spektral analizi ile ilgili de literatürde pek çok çalışma mevcuttur.

$$\begin{aligned} -y'' + q(x)y &= \lambda y, & x \in \mathbb{R}_+ \\ l(y) &= -y'' + q(x)y, & 0 \leq x < \infty \end{aligned} \quad (1.1)$$

burada q kompleks değerli bir fonksiyon $\lambda \in \mathbb{C}$ bir spektral parametre olmak üzere, diferensiyel ifadesinin ve

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad h \in \mathbb{C} \quad (1.2)$$

sınır koşulunun yardımı ile $L_2(0, \infty)$ uzayında tanımlı non-selfadjoint Sturm-Liouville operatörü ilk kez Naimark tarafından, diferensiyel denklemler yardımıyla tanımlanan singüler operatörlerin spektral analizi incelenmeye başlanmıştır. Naimark (1960) bu çalışmasında operatörünün spektrumunun; sürekli spektrum, özdeğerler ile spektral tekilliklerden oluştuğunu göstermiştir [1]. Spektral tekillikler özdeğer olmayan, resolvent operatörün çekirdeğinin kutupları olup, sürekli spektrum üzerindedir. Ve en az bir $\varepsilon > 0$ için

$$\int_0^{\infty} e^{\varepsilon x} |q(x)| dx < \infty$$

şartı sağlandığında işlem yapılan operatörün sonlu sayıda özdeğerlerinin ve spektral tekilliklerinin olduğu elde edilmiştir. Naimark'ın bulmuş olduğu bu sonuç, önce Kemp (1958) tarafından tüm reel eksen üzerinde tanımlı operatörlere uygulanmış ve daha sonra üç boyutlu Schrödinger operatörlere ise Gasymov (1968) tarafından genişletilmiştir [2-3]. Pavlov (1967) tarafından (1.1) denklemi ve (1.2) sınır koşulu yardımıyla üretilen, spektral tekilliklerinin yapısı olan bu operatörün spektral analizinde önemli aşamalar elde edilmiştir [4]. Bu operatörün esas fonksiyonları kullanılarak spektral açılım elde edilmiş, özdeğerlerinin spektral tekilliklerinin yapısını, potansiyel fonksiyonunun sonsuzdaki davranışına bağlı olduğu gösterilmiş ve de

$$\sup_{x \in [0, \infty)} [e^{\varepsilon x} |q(x)| dx] < \infty, \quad \varepsilon > 0$$

koşulu sağlandığında özdeğerlerinin, spektral tekilliklerinin sonlu sayıda olduğunu ve bu özdeğerlerinin ve spektral tekilliklerinin katlarının da sonlu olduğunu göstererek bir spektral açılım verilmiştir. Spektral tekilliklerin dikkate alınarak spektral açılımın verildiği ilk çalışma Pavlov tarafından elde edilmiştir. Spektral tekilliklerin spektral analizinde önemli rol aldığı ve spektral açılımındaki etkisi Lyance (1967a, 1967b) tarafından incelenmiştir [5].

Naimark'ın incelediği problemten daha genel bir problem Krall (1965a, 1965b, 1965c) tarafından ele alınmıştır [6-8]. $K \in L_2(0, \infty)$ kompleks değerli bir fonksiyon ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ olmak üzere (1.1) diferensiyel ifadesi ve

$$\alpha y'(0) - \beta y(0) + \int_0^{\infty} K(x) y(x) dx = 0$$

sınır koşulu yardımıyla $L_2(0, \infty)$ uzayında üretilen non-selfadjoint L_1 operatörünün spektrumunu belirlemiş, L_1 adjoint operatörü ve bu operatörlerin özfonksiyon açılımı ayrıntılı olarak Krall (1965a, 1965b, 1965c) tarafından incelenmiştir [6-8]. L_1 operatörünün Weyl teorisini de incelemiştir. $L_2(0, \infty)$ uzayında p, q kompleks değerli fonksiyonlar ve p fonksiyonu $\mathbb{R}_+$ da sürekli diferensiyellenebilen bir fonksiyon olmak üzere,

$$-y'' + [q(x) + 2\lambda p(x) - \lambda^2]y, \quad x \in [0, \infty)$$

denklemini ve

$$\alpha y'(0) - \beta y(0) + \int_0^{\infty} K(x) y(x) dx = 0$$

sınır koşulu yardımıyla üretilen Kuadratik Schrödinger operatörler demeti $L(\lambda)$ ile gösterilir. Bairamov, Çakar ve Çelebi (1997) ve Bairamov, Çakar ve Krall (1999a, 1999b) çalışmalarında $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $|\alpha| + |\beta| \neq 0$ olmak üzere $K \in L_2(0, \infty)$ olan analitik fonksiyonların birebirlik teoremlerini kullanarak $L(\lambda)$ operatörünün spektral analizini incelemiştir [9-11]. Özdeğerlere ve spektral tekilliklere karşılık gelen esas fonksiyonlar cinsinden spektral açılım ise bu çalışmalarda yer verilmiştir.

Diferensiyel operatör ve denklemlerin sınır koşulları yapılan çalışmaların hepsinde göz önünde bulundurulmuş spektral parametreden bağımsızdır. Son yıllarda yapılan bazı çalışmalarda hem denklemde hem sınır koşullarında spektral parametre bulunan regüler Sturm- Liouville diferensiyel operatörlerinin spektral teorisi incelenmektedir.

2009 yılında ise Bairamov ve Yokuş tarafından sınır koşulları spektral parametreye bağlı Sturm-Liouville Operatörünün spektral özellikleri incelenmiştir [12].

Biz bu tezde Kır, Başcanbaz-Tunca ve Yanık (2005) $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ spektral parametre olmak üzere

$$i \frac{dy}{dx} y_1(x, \lambda) + q_1(x) y_2(x, \lambda) = \lambda y_1(x, \lambda)$$

$$-i \frac{dy}{dx} y_2(x, \lambda) + q_2(x) y_1(x, \lambda) = \lambda y_2(x, \lambda), \quad x \in \mathbb{R}^+$$

diferensiyel denklem sistemi ve

$$(\alpha_1 \lambda + \beta_1) y_2(0, \lambda) - (\alpha_2 \lambda + \beta_2) y_1(0, \lambda) = 0$$

sınır koşulu yardımıyla üretilen L operatörünün özdeğerlerinin ve spektral tekilliklerinin cümlesi elde edilir ve resolvent operatör hesaplanır [13].

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde daha sonra ihtiyaç duyacağımız bazı tanım ve teoremler ispatsız olarak verilecektir.

Tanım 2.1. X bir kompleks vektör uzay $A : X \rightarrow X$ lineer bir operatör olsun. λ kompleks sayısı için $Ax = \lambda x$ denkleminin aşıkâr olmayan bir $x \in X$ bir çözümü varsa λ sayısına A operatörünün özdeğeri (eigen değeri) adı verilir. Bu x çözümüne ise A operatörünün λ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon denir [14].

Tanım 2.2. $X \neq \{0\}$ kompleks normlu bir uzay $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ lineer bir operatör olsun. $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ operatörüne A nın resolvent operatörü ya da kısaca resolventi denir [14].

Tanım 2.3. $R_\lambda(A)$ operatörü mevcut, sınırlı ve tanım cümlesi X uzayında yoğun ise, $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısına A operatörünün regüler değeri denir. A operatörünün regüler değerlerinden oluşan cümleye ise A nın resolvent cümlesi adı verilir [14].

Tanım 2.4. $R_\lambda(A)$ operatörü mevcut olmayacak şekildeki λ kompleks sayılarının cümlesine A operatörünün diskret spektrumu ($\sigma_d(A)$) ya da nokta spektrumu denir [14].

Tanım 2.5. $R_\lambda(A)$ operatörü mevcut, sınırsız ve $R_\lambda(A)$ operatörünün tanım cümlesi X uzayında yoğun olacak şekilde $\lambda \in \mathbb{C}$ sayılarının oluşturduğu kümeye A operatörünün sürekli spektrumu ($\sigma_c(A)$) denir [14].

Tanım 2.6. Bir A operatörünün resolventinin çekirdeğinin kutup noktası olup, sürekli spektrumda bulunan ve A operatörünün özdeğeri olmayan noktalara A operatörünün spektral tekillikleri adı verilir [1].

Teorem 2.7. (Riemann-Lebesgue Teoremi): $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu ölçülebilir olsun. Eğer

$f, [a, b]$ üzerinde integrallenebilir ise,

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx = 0$$

olur. İntegrasyon aralığı sınırsız olabilir [15].

3. DENKLEMİN ÇÖZÜMLERİ VE ASİMPTOTİK BAĞINTILAR

Bu bölümde tanımlayacağımız diferensiyel denklem sisteminin çözümlerini ve üretilen L operatörünün asimptotik bağıntıları incelenecektir.

$$i \frac{dy}{dx} y_1(x, \lambda) + q_1(x) y_2(x, \lambda) = \lambda y_1(x, \lambda) \quad (3.1)$$

$$-i \frac{dy}{dx} y_2(x, \lambda) + q_2(x) y_1(x, \lambda) = \lambda y_2(x, \lambda), \quad x \in \mathbb{R}^+ \quad (3.2)$$

$$(\alpha_1 \lambda + \beta_1) y_2(0, \lambda) - (\alpha_2 \lambda + \beta_2) y_1(0, \lambda) = 0 \quad (3.3)$$

burada q_i , $i=1,2$ kompleks değerli fonksiyonlar, α, β kompleks sayılar, λ ise kompleks parametredir.

(3.1), (3.2) denklemler sistemi (3.3) sınır koşul problemi yardımıyla

$$L_2(0, \infty; \mathbb{C}_2) := \left\{ f: f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}, \int_0^\infty (|f_1(x)|^2 + |f_2(x)|^2) dx < \infty \right\}$$

uzayında bir L operatörünü aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$\forall y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in L_2(0, \infty; \mathbb{C}_2)$ diferensiyellenebilen $y(x, \lambda) = \begin{pmatrix} y_1(x, \lambda) \\ y_2(x, \lambda) \end{pmatrix}$ fonksiyonu için

$$l(y) := \begin{pmatrix} i y_1'(x, \lambda) + q_1(x) y_2(x, \lambda) \\ -i y_2'(x, \lambda) + q_2(x) y_1(x, \lambda) \end{pmatrix}$$

diferensiyel ifadesini göz önüne alalım. Burada $q_1(x), q_2(x) \in \mathbb{C}(0, \infty)$ ve

$$|q_i(x)| \leq c e^{-\varepsilon x}, \quad c > 0, \quad \varepsilon > 0, \quad i = 1, 2 \quad (3.4)$$

eşitsizliği sağlansın. Bu ifadeye göre L operatörünün tanım kümesi

$$D(L) := \left\{ y: y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in L_2(0, \infty; \mathbb{C}_2) \begin{array}{l} 1. y \text{ mutlak sürekli} \\ 2. l(y) \in L_2(0, \infty; \mathbb{C}_2) \\ 3. (\alpha_1 \lambda + \beta_1) y_2(0, \lambda) \\ \quad - (\alpha_2 \lambda + \beta_2) y_1(0, \lambda) = 0 \end{array} \right\}$$

olmak üzere

$\forall y \in D(L)$ için $Ly := l(y)$ şeklinde tanımlayalım.

3.1. $l(y) - \lambda y = 0$ Denkleminin Çözümleri

$$iy_1'(x, \lambda) + q_1(x)y_2(x, \lambda) = \lambda y_1(x, \lambda) \quad (3.1)$$

$$-iy_2'(x, \lambda) + q_2(x)y_1(x, \lambda) = \lambda y_2(x, \lambda) \quad 0 \leq x < \infty \quad (3.2)$$

(3.1), (3.2) denklemler sistemini

$$\begin{aligned} \left[P \frac{d}{dx} + Q(x) - \lambda \right] y(x, \lambda) &= 0 \\ Py' - \lambda y &= -Qy \end{aligned} \quad (3.5)$$

biçiminde yazalım. Burada

$$P = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad Q(x) = \begin{bmatrix} 0 & q_1(x) \\ q_2(x) & 0 \end{bmatrix}, \quad y(x, \lambda) = \begin{bmatrix} y_1(x, \lambda) \\ y_2(x, \lambda) \end{bmatrix}$$

gibi tanımlayalım.

(3.5) sisteminin çözümünü veren teoremi yazalım.

3.1.1. Teorem

(3.1), (3.2) diferensiyel denklemler sisteminin (3.3) sınır koşulu altındaki her bir çözümü

$$y_1(x, \lambda) = \frac{\alpha_1 \lambda + \beta_1}{\alpha_2 \lambda + \beta_2} y_2(0, \lambda) e^{-i\lambda x} + i \int_0^x e^{-i\lambda(x-t)} q_1(t) y_2(t, \lambda) dt \quad (3.6)$$

$$y_2(x, \lambda) = \frac{\alpha_2 \lambda + \beta_2}{\alpha_1 \lambda + \beta_1} y_1(0, \lambda) e^{i\lambda x} - i \int_0^x e^{i\lambda(x-t)} q_2(t) y_1(t, \lambda) dt \quad (3.7)$$

(3.6), (3.7) integral denklemler sisteminin de bir çözümüdür. Bunun karşıtı da doğrudur [13].

(3.1), (3.2) $\Leftrightarrow$ (3.6), (3.7).

İspat:

Önce (3.1) $\Rightarrow$ (3.6) olduğunu gösterelim.

$$Py' - \lambda y = -Qy \quad (3.5)$$

diferensiyel denklem sistemini parametrelerin değışim yöntemiyle çözelim.

$$Py' - \lambda y = 0 \quad (3.8)$$

dir. Bu çözümleri bulalım. Öncelikle (3.8) homogen denklemini yazalım.

$$iy_1'(x, \lambda) - \lambda y_1(x, \lambda) = 0 \quad 0 \leq x < \infty \quad (3.9)$$

(3.9) denkleminde

$$iy_1'(x, \lambda) = \lambda y_1(x, \lambda)$$

$$\frac{iy_1'(x, \lambda)}{y_1(x, \lambda)} = \lambda$$

$$\frac{y_1'(x, \lambda)}{y_1(x, \lambda)} = -i\lambda$$

$$\int \frac{y_1'(x, \lambda)}{y_1(x, \lambda)} dx = -i\lambda \int dx$$

$$\ln\left(\frac{y_1(x, \lambda)}{c_1}\right) = -i\lambda x$$

$$y_1(x, \lambda) = c_1 e^{-i\lambda x}$$

bulunur. Buradan (3.1) lineer denkleminin çözümünü

$$y_1(x, \lambda) = c_1(x) e^{-i\lambda x}$$

biçiminde arayalım.

$$y_1'(x, \lambda) = c_1'(x) e^{-i\lambda x} - i\lambda c_1(x) e^{-i\lambda x}$$

bulunur. Bu sonuçlar (3.5)'te yerine yazılır ve düzenlenirse

$$i(c_1'(x) e^{-i\lambda x} - i\lambda c_1(x) e^{-i\lambda x}) - \lambda c_1(x) e^{-i\lambda x} = -q_1(x) y_2(x, \lambda)$$

$$ic_1'(x) e^{-i\lambda x} + \lambda c_1(x) e^{-i\lambda x} - \lambda c_1(x) e^{-i\lambda x} = -q_1(x) y_2(x, \lambda)$$

$$ic_1'(x) e^{-i\lambda x} = -q_1(x) y_2(x, \lambda)$$

$$c_1'(x) = i e^{i\lambda x} q_1(x) y_2(x, \lambda)$$

$$\int_0^x c_1'(x) = i \int_0^x e^{i\lambda t} q_1(t) y_2(t, \lambda) dt$$

$$c_1(x) = v_1 + i \int_0^x e^{i\lambda t} q_1(t) y_2(t, \lambda) dt \quad (3.10)$$

bulunur. Buradan

$$y_1(x, \lambda) = c_1(x) e^{-i\lambda x}$$

fonksiyonuna (3.10) da bulunan sonuç yazılırsa

$$y_1(x, \lambda) = \left(v_1 + i \int_0^x e^{i\lambda t} q_1(t) y_2(t, \lambda) dt \right) e^{-i\lambda x}$$

$$y_1(x, \lambda) = v_1 e^{-i\lambda x} + i \int_0^x e^{-i\lambda(x-t)} q_1(t) y_2(t, \lambda) dt \quad (3.11)$$

integral denklemi elde edilir. Buradan v_1 'i bulmak için (3.11) denkleminde x yerine 0 yazılır ve (3.3) sınır koşulu kullanılırsa

$$y_1(0, \lambda) = v_1$$

$$v_1 = \frac{\alpha_1 \lambda + \beta_1}{\alpha_2 \lambda + \beta_2} y_2(0, \lambda)$$

bulunur ve bu sonuç (3.11) de yerine yazılır ve

$$y_1(x, \lambda) = \frac{\alpha_1 \lambda + \beta_1}{\alpha_2 \lambda + \beta_2} y_2(0, \lambda) e^{-i\lambda x} + i \int_0^x e^{-i\lambda(x-t)} q_1(t) y_2(t, \lambda) dt$$

integral denklemi elde edilir. Buradan (3.1) $\Rightarrow$ (3.6) olduğu ispatlanır.

Benzer biçimde (3.2) $\Rightarrow$ (3.7) olduğunu gösterelim.

$$-iy_2'(x, \lambda) - \lambda y_2(x, \lambda) = 0 \quad 0 \leq x < \infty \quad (3.12)$$

(3.12) denkleminde

$$-iy_2'(x, \lambda) = \lambda y_2(x, \lambda)$$

$$\frac{-iy_2'(x, \lambda)}{y_2(x, \lambda)} = \lambda$$

$$\frac{y_2'(x, \lambda)}{y_2(x, \lambda)} = i\lambda$$

$$\int \frac{y_2'(x, \lambda)}{y_2(x, \lambda)} dx = i\lambda \int dx$$

$$\ln\left(\frac{y_2(x, \lambda)}{c_2}\right) = i\lambda$$

$$y_2(x, \lambda) = c_2 e^{i\lambda x}$$

bulunur. Buradan (3.2) lineer denkleminin çözümünü

$$y_2(x, \lambda) = c_2(x) e^{i\lambda x}$$

biçiminde arayalım.

$$y_2'(x, \lambda) = c_2'(x) e^{i\lambda x} + i\lambda c_2(x) e^{i\lambda x}$$

bulunur. Bu sonuçlar (3.5)'te yerine yazılır ve düzenlenirse

$$-i(c_2'(x) e^{i\lambda x} + i\lambda c_2(x) e^{i\lambda x}) - \lambda c_2(x) e^{i\lambda x} = -q_2(x) y_1(x, \lambda)$$

$$-ic_2'(x) e^{i\lambda x} + \lambda c_2(x) e^{i\lambda x} - \lambda c_2(x) e^{i\lambda x} = -q_2(x) y_1(x, \lambda)$$

$$-ic_2'(x) e^{i\lambda x} = -q_2(x) y_1(x, \lambda)$$

$$c_2'(x) = -ie^{-i\lambda x} q_2(x) y_1(x, \lambda)$$

$$\int_0^x c_2'(x) = -i \int_0^x e^{-i\lambda t} q_2(t) y_1(t, \lambda) dt$$

$$c_2(x) = v_2 - i \int_0^x e^{-i\lambda t} q_2(t) y_1(t, \lambda) dt \quad (3.13)$$

bulunur. Buradan

$$y_2(x, \lambda) = c_2(x) e^{i\lambda x}$$

fonksiyonun da (3.13) de bulunan sonuç yazılırsa

$$\begin{aligned}
y_2(x, \lambda) &= \left(v_2 - i \int_0^x e^{-i\lambda t} q_2(t) y_1(t, \lambda) dt \right) e^{i\lambda x} \\
y_2(x, \lambda) &= v_2 e^{i\lambda x} - i \int_0^x e^{i\lambda(x-t)} q_2(t) y_1(t, \lambda) dt
\end{aligned} \tag{3.14}$$

integral denklemi elde edilir. Buradan v_2 'i bulmak için (3.14) denkleminde x yerine 0 yazılır ve (3.3) sınır koşulu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
y_2(0, \lambda) &= v_2 \\
v_2 &= \frac{\alpha_2 \lambda + \beta_2}{\alpha_1 \lambda + \beta_1} y_1(0, \lambda)
\end{aligned}$$

bulunur ve bu sonuç (3.14)'te yerine yazılır ve

$$y_2(x, \lambda) = \frac{\alpha_2 \lambda + \beta_2}{\alpha_1 \lambda + \beta_1} y_1(0, \lambda) e^{i\lambda x} - i \int_0^x e^{i\lambda(x-t)} q_2(t) y_1(t, \lambda) dt$$

integral denklemi elde edilir. Buradan (3.2) $\Rightarrow$ (3.7) ispatlanır.

Karşıt olarak (3.6) $\Rightarrow$ (3.1) olduğunu gösterelim.

(3.6) denkleminin x 'e göre türevini alalım.

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1(x, \lambda)}{dx} &= -i\lambda \frac{\alpha_1 \lambda + \beta_1}{\alpha_2 \lambda + \beta_2} y_2(0, \lambda) e^{-i\lambda x} + \lambda \int_0^x e^{-i\lambda(x-t)} q_1(t) y_2(t, \lambda) dt + i q_1(x) y_2(x, \lambda) \\
&= -i\lambda \left[\frac{\alpha_1 \lambda + \beta_1}{\alpha_2 \lambda + \beta_2} y_2(0, \lambda) e^{-i\lambda x} + i \int_0^x e^{-i\lambda(x-t)} q_1(t) y_2(t, \lambda) dt \right] + i q_1(x) y_2(x, \lambda) \\
&= -i\lambda y_1(x, \lambda) + i q_1(x) y_2(x, \lambda) \\
\frac{dy_1(x, \lambda)}{dx} &= -i\lambda y_1(x, \lambda) + i q_1(x) y_2(x, \lambda)
\end{aligned}$$

olup

$$i \frac{dy_1(x, \lambda)}{dx} + q_1(x)y_2(x, \lambda) = \lambda y_1(x, \lambda)$$

bulunur ve (3.6) $\Rightarrow$ (3.1) sağlanır.

Benzer olarak (3.7) $\Rightarrow$ (3.2) olduğunu gösterelim.

(3.7) denkleminin x'e göre türevini alalım.

$$\begin{aligned} \frac{dy_2(x, \lambda)}{dx} &= i \frac{\alpha_2 \lambda + \beta_2}{\alpha_1 \lambda + \beta_1} y_1(0, \lambda) e^{i\lambda x} + \lambda \int_0^x e^{i\lambda(x-t)} q_2(t) y_1(t, \lambda) dt - i q_2(x) y_1(x, \lambda) \\ &= i\lambda \left[\frac{\alpha_2 \lambda + \beta_2}{\alpha_1 \lambda + \beta_1} y_1(0, \lambda) e^{i\lambda x} - i \int_0^x e^{i\lambda(x-t)} q_2(t) y_1(t, \lambda) dt \right] - i q_2(x) y_1(x, \lambda) \\ &= i\lambda y_2(x, \lambda) - i q_2(x) y_1(x, \lambda) \\ \frac{dy_2(x, \lambda)}{dx} &= i\lambda y_2(x, \lambda) - i q_2(x) y_1(x, \lambda) \end{aligned}$$

olup

$$-i \frac{dy_2(x, \lambda)}{dx} + q_2(x) y_1(x, \lambda) = \lambda y_2(x, \lambda)$$

bulunur ve (3.7) $\Rightarrow$ (3.2) sağlanır.

Buradan ispat tamamlanır.

3.2. Dirak Sisteminin Jost Çözümleri

A ve B reel sabitler olmak üzere,

$$f(x, \lambda) = \begin{bmatrix} A e^{-i\lambda x} \\ B e^{i\lambda x} \end{bmatrix}$$

fonksiyonu (3.1)-(3.2) Dirak sisteminin $q_1(x) \equiv q_2(x) \equiv 0$ için çözümüdür.

$$|q_i(x)| \leq \frac{c}{(1+x)^{1+\varepsilon}}, \quad c > 0, \varepsilon > 0, i = 1, 2 \quad (3.15)$$

koşulunu gerçekleştirdiğini varsayalım. (3.1)-(3.2) sisteminin

$$y(x, \lambda) = f(x, \lambda) + o(1), \quad x \rightarrow \infty$$

veya

$$y(x, \lambda) = \begin{bmatrix} y_1(x, \lambda) \\ y_2(x, \lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ae^{-i\lambda x} \\ Be^{i\lambda x} \end{bmatrix} + o(1), \quad x \rightarrow \infty \quad (3.16)$$

koşulunu gerçekleyen çözümü $y(x, \lambda)$ ile gösterelim.

3.2.1. Teorem

(3.1)-(3.2) Dirak sisteminin (3.15) koşulunu gerçekleyen $y(x, \lambda)$ çözümü

$$y_1(x, \lambda) = Ae^{-i\lambda x} - i \int_x^\infty e^{-i\lambda(x-t)} q_1(t) y_2(t, \lambda) dt \quad (3.17)$$

$$y_2(x, \lambda) = Be^{i\lambda x} + i \int_x^\infty e^{i\lambda(x-t)} q_2(t) y_1(t, \lambda) dt \quad (3.18)$$

integral denklemler sisteminin de bir çözümüdür.

İspat:

(3.17) $\Rightarrow$ (3.1) olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1(x, \lambda)}{dx} &= -i\lambda A e^{-i\lambda x} - \lambda \int_x^\infty e^{-i\lambda(x-t)} q_1(t) y_2(t, \lambda) dt + i q_1(x) y_2(x, \lambda) \\
&= -i\lambda \left[A e^{-i\lambda x} - i \int_x^\infty e^{-i\lambda(x-t)} q_1(t) y_2(t, \lambda) dt \right] + i q_1(x) y_2(x, \lambda) \\
&= -i\lambda y_1(x, \lambda) + i q_1(x) y_2(x, \lambda) \\
\frac{dy_1(x, \lambda)}{dx} &= -i\lambda y_1(x, \lambda) + i q_1(x) y_2(x, \lambda)
\end{aligned}$$

olup

$$i \frac{dy_1(x, \lambda)}{dx} + q_1(x) y_2(x, \lambda) = \lambda y_1(x, \lambda)$$

bulunur ve (3.17) $\Rightarrow$ (3.1) sağlanır.

Benzer olarak (3.18) $\Rightarrow$ (3.2) olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\frac{dy_2(x, \lambda)}{dx} &= i\lambda B e^{i\lambda x} + \lambda \int_x^\infty e^{i\lambda(x-t)} q_2(t) y_1(t, \lambda) dt - i q_2(x) y_1(x, \lambda) \\
&= i\lambda \left[B e^{i\lambda x} + i \int_x^\infty e^{i\lambda(x-t)} q_2(t) y_1(t, \lambda) dt \right] - i q_2(x) y_1(x, \lambda) \\
&= i\lambda y_2(x, \lambda) - i q_2(x) y_1(x, \lambda) \\
\frac{dy_2(x, \lambda)}{dx} &= i\lambda y_2(x, \lambda) - i q_2(x) y_1(x, \lambda)
\end{aligned}$$

olup

$$-i \frac{dy_2(x, \lambda)}{dx} + q_2(x) y_1(x, \lambda) = \lambda y_2(x, \lambda)$$

bulunur ve (3.18) $\Rightarrow$ (3.2) sağlanır. Bu da teoremi ispatlar.

(3.17) - (3.18) sistemini

$$y(x, \lambda) = f(x, \lambda) + \int_x^\infty \theta(x, t; \lambda) y(t, \lambda) dt \quad (3.19)$$

biçiminde yazılır. Burada

$$\theta(x, t; \lambda) = \begin{bmatrix} 0 & -ie^{-i\lambda(x-t)}q_1(t) \\ ie^{i\lambda(x-t)}q_2(t) & 0 \end{bmatrix}$$

gibi tanımlayalım. $\lambda \in \mathbb{R}$ için (3.19) integral denkleminin çözümü

$$y(x, \lambda) = f(x, \lambda) + \int_x^\infty H(x, s) f(s, \lambda) ds \quad (3.20)$$

integral gösterimine sahiptir. Burada

$$H(x, s) = \begin{bmatrix} H_{11}(x, s) & H_{12}(x, s) \\ H_{21}(x, s) & H_{22}(x, s) \end{bmatrix}$$

gibi tanımlanır ve

$$H_{ij}(x, s) \leq \frac{c}{(1+x+s)^{1+\varepsilon}}, \quad c > 0, \quad \varepsilon > 0, \quad i, j = 1, 2 \quad (3.21)$$

eşitsizliğini gerçekler.

Şimdi (3.20) ile tanımlanan $y(x, \lambda)$ çözümü yardımıyla (3.1)-(3.2) sisteminin Jost çözümlerini oluşturalım.

$$\begin{bmatrix} y_1(x, \lambda) \\ y_2(x, \lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ae^{-i\lambda x} \\ Be^{i\lambda x} \end{bmatrix} + \int_x^\infty \begin{bmatrix} H_{11}(x, s) & H_{12}(x, s) \\ H_{21}(x, s) & H_{22}(x, s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ae^{-i\lambda s} \\ Be^{i\lambda s} \end{bmatrix} ds$$

yazılır. Buradan,

$$y_1(x, \lambda) = A e^{-i\lambda x} + A \int_x^\infty H_{11}(x, s) e^{-i\lambda s} ds + B \int_x^\infty H_{12}(x, s) e^{i\lambda s} ds \quad (3.22)$$

$$y_2(x, \lambda) = B e^{i\lambda x} + A \int_x^\infty H_{21}(x, s) e^{-i\lambda s} dt + B \int_x^\infty H_{22}(x, s) e^{i\lambda s} ds \quad (3.23)$$

eşitliği bulunur.

1. Durum:

A=0, B=1 olsun

$$y_1(x, \lambda) = \int_x^\infty H_{12}(x, s) e^{i\lambda s} ds = e_1^+(x, \lambda) \quad (3.24)$$

$$y_2(x, \lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty H_{22}(x, s) e^{i\lambda s} ds = e_2^+(x, \lambda) \quad (3.25)$$

ile tanımlayalım. (3.24) ve (3.25) denklemleri kullanılarak

$$e^+(x, \lambda) = \begin{bmatrix} e_1^+(x, \lambda) \\ e_2^+(x, \lambda) \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

elde edilir.

2. Durum:

A=1, B=0 olsun

$$y_1(x, \lambda) = e^{-i\lambda x} + \int_x^\infty H_{11}(x, s) e^{-i\lambda s} ds = e_1^-(x, \lambda) \quad (3.27)$$

$$y_2(x, \lambda) = \int_x^\infty H_{21}(x, s) e^{-i\lambda s} ds = e_2^-(x, \lambda) \quad (3.28)$$

ile tanımlayalım. (3.27) ve (3.28) eşitlikleri kullanılarak

$$e^-(x, \lambda) = \begin{bmatrix} e_1^-(x, \lambda) \\ e_2^-(x, \lambda) \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

elde edilir. Böylece (3.5) denkleminin $\text{Im}\lambda < 0$ alt yarı düzleminde aşağıdaki vektör çözümü bulunur.

$$e^-(x, \lambda) = \begin{bmatrix} e^{-i\lambda x} + \int_x^\infty H_{11}(x, s) e^{-i\lambda s} ds \\ \int_x^\infty H_{21}(x, s) e^{-i\lambda s} ds \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Benzer olarak $\text{Im}\lambda > 0$ üst yarı düzleminde aşağıdaki vektör çözümü elde edilir.

$$e^+(x, \lambda) = \begin{bmatrix} \int_x^\infty H_{12}(x, s) e^{i\lambda s} ds \\ e^{i\lambda x} + \int_x^\infty H_{22}(x, s) e^{i\lambda s} ds \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Burada $\text{Im}\lambda < 0$ alt yarı düzleminde $e^-(x, \lambda)$ çözümü λ' 'ya göre analitik ve reel eksene dek sürekli fonksiyon ve $\text{Im}\lambda > 0$ üst yarı düzleminde $e^+(x, \lambda)$ çözümü λ' 'ya göre analitik ve reel eksene dek sürekli fonksiyondur [13].

(3.30)-(3.31) ile verilen $e^+(x, \lambda)$, $\lambda \in \bar{\mathbb{C}}_+$ ve $e^-(x, \lambda)$, $\lambda \in \bar{\mathbb{C}}_-$ fonksiyonlarına (3.1)-(3.2) Dirak sisteminin Jost çözümleri denir.

(3.5) denkleminin $\varphi_1(0, \lambda) = \alpha_1 \lambda + \beta_1$, $\varphi_2(0, \lambda) = \alpha_2 \lambda + \beta_2$ sınır koşullarını sağlayan çözümünü $\varphi(x, \lambda) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x, \lambda) \\ \varphi_2(x, \lambda) \end{bmatrix}$ ile gösterelim. Bu çözüm vardır, tektir ve λ 'nın tam fonksiyonudur.

(3.5) denkleminin

$$y^+(x, \lambda) = \begin{bmatrix} y_1^+(x, \lambda) \\ y_2^+(x, \lambda) \end{bmatrix}, y^-(x, \lambda) = \begin{bmatrix} y_1^-(x, \lambda) \\ y_2^-(x, \lambda) \end{bmatrix}$$

ile gösterilen çözümlerinin Wronskian'ı

$$W[y^+(x, \lambda), y^-(x, \lambda)] = y_1^+(x, \lambda)y_2^-(x, \lambda) - y_2^+(x, \lambda)y_1^-(x, \lambda) \quad (3.32)$$

biçiminde tanımlansın. Açıktır ki (3.5) denkleminin iki çözümünün temel çözümler sistemini oluşturması için gerek ve yeter koşul Wronskian'ının sıfırdan farklı olmasıdır.

$$\begin{aligned} W[\varphi(x, \lambda), e^+(x, \lambda)] &= \varphi_1(x, \lambda)e_2^+(x, \lambda) - \varphi_2(x, \lambda)e_1^+(x, \lambda) \\ W[\varphi(0, \lambda), e^+(0, \lambda)] &= \varphi_1(0, \lambda)e_2^+(0, \lambda) - \varphi_2(0, \lambda)e_1^+(0, \lambda) \end{aligned} \quad (3.33)$$

$\varphi_1(0, \lambda) = \alpha_1 \lambda + \beta_1$, $\varphi_2(0, \lambda) = \alpha_2 \lambda + \beta_2$ sınır koşulunu sağlayan $\varphi(x, \lambda)$ çözümünü (3.33)'de yerine yazalım

$$W[\varphi(0, \lambda), e^+(0, \lambda)] = (\alpha_1 \lambda + \beta_1)e_2^+(0, \lambda) - (\alpha_2 \lambda + \beta_2)e_1^+(0, \lambda) = M_+(\lambda)$$

dir ve benzer biçimde

$$W[\varphi(0, \lambda), e^-(0, \lambda)] = (\alpha_1 \lambda + \beta_1)e_2^-(0, \lambda) - (\alpha_2 \lambda + \beta_2)e_1^-(0, \lambda) = M_-(\lambda)$$

bulunur. Burada

$$\varphi_1(0) = \alpha_1\lambda + \beta_1, \quad \varphi_2(0) = \alpha_2\lambda + \beta_2$$

yazılır ve

$$M_+(\lambda) := \varphi_1(0)e_2^+(0, \lambda) - \varphi_2(0)e_1^+(0, \lambda) \quad (3.34)$$

$$M_-(\lambda) := \varphi_1(0)e_2^-(0, \lambda) - \varphi_2(0)e_1^-(0, \lambda) \quad (3.35)$$

bulunur.

3.3. Asimptotik Bağıntılar

3.3.1. Teorem

(3.5) denkleminin $e^+(x, \lambda)$ ve $e^-(x, \lambda)$ çözümleri aşağıdaki asimptotik bağıntılarını sağlar.

$$e^-(x, \lambda) = e^{-i\lambda x} \begin{pmatrix} 1 + o(1) \\ o(1) \end{pmatrix}, \quad x \rightarrow \infty, \quad Im\lambda \leq 0 \quad (3.36)$$

$$e^+(x, \lambda) = e^{i\lambda x} \begin{pmatrix} o(1) \\ 1 + o(1) \end{pmatrix}, \quad x \rightarrow \infty, \quad Im\lambda \geq 0 \quad (3.37)$$

$$e^-(x, \lambda) = e^{-i\lambda x} \begin{pmatrix} 1 + o(1) \\ o(1) \end{pmatrix}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad Im\lambda \leq 0 \quad (3.38)$$

$$e^+(x, \lambda) = e^{i\lambda x} \begin{pmatrix} o(1) \\ 1 + o(1) \end{pmatrix}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad Im\lambda \geq 0 \quad (3.39)$$

dir [13].

İspat:

(3.36) asimptotik eşitliğini ispatlayalım.

(i) $\text{Im}\lambda=0$ olsun

$$e^-(x, \lambda) = \begin{pmatrix} e^{-i\lambda x} + e^{-i\lambda x} \int_0^\infty H_{11}(x, x+t) e^{-i\lambda t} dt \\ e^{-i\lambda x} \int_0^\infty H_{21}(x, x+t) e^{-i\lambda t} dt \end{pmatrix}$$

idi

$$e^-(x, \lambda) = e^{-i\lambda x} \begin{pmatrix} 1 + \int_0^\infty H_{11}(x, x+t) e^{-i\lambda t} dt \\ \int_0^\infty H_{21}(x, x+t) e^{-i\lambda t} dt \end{pmatrix}$$

$$e^-(x, \lambda) e^{i\lambda x} = \begin{pmatrix} 1 + \int_0^\infty H_{11}(x, x+t) e^{-i\lambda t} dt \\ \int_0^\infty H_{21}(x, x+t) e^{-i\lambda t} dt \end{pmatrix}$$

biçiminde yazalım. Buradan

$$|e^{-i\lambda t}| = 1$$

dır.

$$|H_{ij}(x, s)| \leq c e^{-\varepsilon \sqrt{\frac{x+s}{2}}}, \quad c > 0, \varepsilon > 0, \quad i = 1, 2$$

eşitsizliğinde $(0, \infty)$ aralığında her iki tarafın integrali alınırsa

$$\left| \int_0^{\infty} H_{ij}(x, x+t) dt \right| \leq \int_0^{\infty} |H_{ij}(x, x+t)| dt \leq c \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon \sqrt{\frac{x+t}{2}}} dt < \infty$$

elde edilir. O halde

$$e^-(x, \lambda) = e^{-i\lambda x} \begin{pmatrix} 1 + o(1) \\ o(1) \end{pmatrix}, \quad x \rightarrow \infty, \quad \text{Im}\lambda = 0$$

ispatlanır.

(ii) $\text{Im}\lambda < 0$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\infty} H_{ij}(x, x+t) dt \right| &\leq \int_0^{\infty} |H_{ij}(x, x+t)| |e^{-Im\lambda t}| dt \\ &\leq \int_0^{\infty} |H_{ij}(x, x+t)| dt \leq c \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon \sqrt{\frac{x+t}{2}}} dt = o(1), \quad x \rightarrow \infty, \quad \text{Im}\lambda < 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$e^-(x, \lambda) = e^{-i\lambda x} \begin{pmatrix} 1 + o(1) \\ o(1) \end{pmatrix}, \quad x \rightarrow \infty, \quad \text{Im}\lambda < 0$$

olur. (i) ve (ii) den

$$e^-(x, \lambda) = e^{-i\lambda x} \begin{pmatrix} 1 + o(1) \\ o(1) \end{pmatrix}, \quad x \rightarrow \infty, \quad \text{Im}\lambda \leq 0$$

ispatlanır. Benzer biçimde (3.37) için

$$e^+(x, \lambda) = e^{i\lambda x} \begin{pmatrix} o(1) \\ 1 + o(1) \end{pmatrix}, \quad x \rightarrow \infty, \quad \text{Im}\lambda \geq 0$$

dir. Şimdi (3.38) asimptotik eşitliğini ispatlayalım.

(i) $\text{Im}\lambda=0$ olsun

$$e^-(x, \lambda) = \begin{pmatrix} e^{-i\lambda x} + e^{-i\lambda x} \int_0^\infty H_{11}(x, x+t) e^{-i\lambda t} dt \\ e^{-i\lambda x} \int_0^\infty H_{21}(x, x+t) e^{-i\lambda t} dt \end{pmatrix}$$

idi

$$e^-(x, \lambda) = e^{-i\lambda x} \begin{pmatrix} 1 + \int_0^\infty H_{11}(x, x+t) e^{-i\lambda t} dt \\ \int_0^\infty H_{21}(x, x+t) e^{-i\lambda t} dt \end{pmatrix}$$

$$e^-(x, \lambda) e^{i\lambda x} = \begin{pmatrix} 1 + \int_0^\infty H_{11}(x, x+t) e^{-i\lambda t} dt \\ \int_0^\infty H_{21}(x, x+t) e^{-i\lambda t} dt \end{pmatrix}$$

yazalım.

$$\tilde{H}_{ij}(x, t) = \begin{cases} \tilde{H}_{ij}(x, t), & t \in (x, \infty) \\ 0, & t \in (-\infty, x) \end{cases}$$

olsun. $e^-(x, \lambda)$ çözümü

$$e^-(x, \lambda) e^{i\lambda x} = \begin{pmatrix} 1 + \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{H}_{11}(x, t) e^{-i\lambda t} dt \\ \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{H}_{21}(x, t) e^{-i\lambda t} dt \end{pmatrix}$$

yazılabilir.

$H_{ij}(x, \cdot) \in L_1(0, \infty)$ olduğundan $\tilde{H}_{ij}(x, t)$ da $L_1(-\infty, \infty)$ uzayına aittir. O halde Fourier dönüşümleri için Rieman-Lebesque Teorem'inden

$$e^-(x, \lambda) = e^{-i\lambda x} \begin{pmatrix} 1 + o(1) \\ o(1) \end{pmatrix}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \text{Im}\lambda = 0$$

elde edilir.

(ii) $\text{Im}\lambda=0$ olsun. Buradan $|H_{ij}(x, t) e^{-i\lambda t}| \leq |H_{ij}(x, t)|$ ve $H_{ij}(x, t) \in L_1(0, \infty)$ şartı sağlandığından Rieman-Lebesque Teorem'i kullanılır.

$$\begin{aligned} \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} H_{ij}(x, t) e^{-i\lambda t} dt \\ = \int_0^{\infty} \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} H_{ij}(x, t) e^{-i\lambda t} dt \\ = \int_0^{\infty} H_{ij}(x, t) \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} e^{-i\lambda t} dt = o(1), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \text{Im}\lambda < 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$e^-(x, \lambda) = e^{-i\lambda x} \begin{pmatrix} 1 + o(1) \\ o(1) \end{pmatrix}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \text{Im}\lambda < 0$$

olur. (i) ve (ii) den

$$e^-(x, \lambda) = e^{-i\lambda x} \begin{pmatrix} 1 + o(1) \\ o(1) \end{pmatrix}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \text{Im} \lambda \leq 0$$

ispatlanır. Şimdi de (3.39) eşitliğini gösterelim.

(i) $\text{Im} \lambda = 0$ olsun

$$e^+(x, \lambda) = \begin{pmatrix} e^{i\lambda x} \int_0^\infty H_{12}(x, x+t) e^{i\lambda t} dt \\ e^{i\lambda x} + e^{i\lambda x} \int_0^\infty H_{22}(x, x+t) e^{i\lambda t} dt \end{pmatrix}$$

dır.

$$e^+(x, \lambda) = e^{i\lambda x} \begin{pmatrix} \int_0^\infty H_{12}(x, x+t) e^{i\lambda t} dt \\ 1 + \int_0^\infty H_{22}(x, x+t) e^{i\lambda t} dt \end{pmatrix}$$

$$e^+(x, \lambda) e^{-i\lambda x} = \begin{pmatrix} \int_0^\infty H_{12}(x, x+t) e^{i\lambda t} dt \\ 1 + \int_0^\infty H_{22}(x, x+t) e^{i\lambda t} dt \end{pmatrix}$$

yazılır.

$$\tilde{H}_{ij}(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} H_{ij}(x, t), & t \in (x, \infty) \\ 0, & t \in (-\infty, x] \end{cases}$$

olsun.

$$\tilde{H}_{ij}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{ij}(x, t) e^{i\lambda t} dt$$

integraline $H_{ij}(x, t)$ fonksiyonunun ters Fourier dönüşümü denir. $H_{ij}(x, \cdot) \in L_1(0, \infty)$ olduğundan ters Fourier dönüşümü olan $\tilde{H}_{ij}(x, \cdot)$ de $L_1(-\infty, \infty)$ uzayına aittir. O halde

$$e^+(x, \lambda) = e^{i\lambda x} \begin{pmatrix} o(1) \\ 1 + o(1) \end{pmatrix}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \text{Im}\lambda = 0$$

bulunur.

(ii) $\text{Im}\lambda > 0$ olsun.

$|H_{ij}(x, t)e^{i\lambda t}| \leq |H_{ij}(x, t)|$ ve $H_{ij}(x, t) \in L_1(0, \infty)$ şartı sağlandığından Riemann-Lebesgue Teorem'i kullanılır.

$$\begin{aligned} \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} H_{ij}(x, t) e^{i\lambda t} dt \\ &= \int_0^{\infty} \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} H_{ij}(x, t) e^{i\lambda t} dt \\ &= \int_0^{\infty} H_{ij}(x, t) \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} e^{i\lambda t} dt = o(1), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \text{Im}\lambda < 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$e^+(x, \lambda) = e^{i\lambda x} \begin{pmatrix} o(1) \\ 1 + o(1) \end{pmatrix}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \text{Im}\lambda > 0$$

olur. (i) ve (ii) den

$$e^+(x, \lambda) = e^{i\lambda x} \begin{pmatrix} o(1) \\ 1 + o(1) \end{pmatrix}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \text{Im}\lambda \geq 0$$

ispatlanır.

3.3.2. Teorem

$M_+(\lambda)$ ve $M_-(\lambda)$ fonksiyonları

$$M_+(\lambda) := c_1(0)e_2^+(0, \lambda) - c_2(0)e_1^+(0, \lambda), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \text{Im}\lambda \geq 0 \quad (3.40)$$

$$M_-(\lambda) := c_1(0)e_2^-(0, \lambda) - c_2(0)e_1^-(0, \lambda), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \text{Im}\lambda \leq 0 \quad (3.41)$$

asimptotik eşitliklerini sağlar [13].

İspat :

(3.40) asimptotik eşitliğini gösterelim. (3.38) asimptotik eşitliğine göre

$$e^+(0, \lambda) = \begin{pmatrix} o(1) \\ 1 + o(1) \end{pmatrix}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \text{Im}\lambda \geq 0$$

idi. Buradan

$$e_1^+(0, \lambda) = o(1), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \text{Im}\lambda \geq 0$$

$$e_2^+(0, \lambda) = 1 + o(1), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \text{Im}\lambda \geq 0$$

dir. Bu iki eşitlikten

$$M_+(\lambda) := c_1(0)e_2^+(0, \lambda) - c_2(0)e_1^+(0, \lambda), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \text{Im}\lambda \geq 0 \quad (3.40)$$

asimptotik eşitliği elde edilir.

Şimdi (3.41) asimptotik eşitliğini gösterelim. (3.39) asimptotik eşitliğine göre

$$e^-(0, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 + o(1) \\ o(1) \end{pmatrix}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \text{Im} \lambda \leq 0$$

Buradan

$$e_1^-(0, \lambda) = 1 + o(1), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \text{Im} \lambda \leq 0$$

$$e_2^-(0, \lambda) = o(1), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \text{Im} \lambda \leq 0$$

dir. Bu iki eşitlikten

$$M_-(\lambda) := c_1(0) e_2^-(0, \lambda) - c_2(0) e_1^-(0, \lambda), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \text{Im} \lambda \leq 0 \quad (3.41)$$

ispatlanır.

4. L OPERATÖRÜNÜN ÖZDEĞERLERİNİN VE SPEKTRAL TEKİLLİKLERİNİN CÜMLESİ

4.1. L Operatörünün Resolventi

Bu bölümde L operatörünün resolventi incelenecektir.

4.1.1. Teorem

L'nin resolventi aşağıdaki gibi olup

$$(R_{\lambda}f) = \int_0^{\infty} R(x, t; \lambda) f(t) dt$$

integral operatörü biçimindedir. Burada

$$R(x, t; \lambda) = \begin{cases} R^+(x, t; \lambda), & \text{Im}\lambda \geq 0 \\ R^-(x, t; \lambda), & \text{Im}\lambda \leq 0 \end{cases}$$

dir. $R^+(x, t; \lambda)$, $\text{Im}\lambda > 0$ düzleminde

$$R^+(x, t; \lambda) = \frac{i}{M_+(\lambda)} \begin{cases} e^+(x, \lambda) \varphi^*(t, \lambda), & 0 \leq t < \infty \\ \varphi(x, \lambda) e^{+*}(t, \lambda), & x \leq t < \infty \end{cases}$$

biçiminde

ve $R^-(x, t; \lambda)$, $\text{Im}\lambda < 0$ düzleminde

$$R^-(x, t; \lambda) = \frac{i}{M_-(\lambda)} \begin{cases} e^-(x, \lambda) \varphi^*(t, \lambda), & 0 \leq t < \infty \\ \varphi(x, \lambda) e^{-*}(t, \lambda), & x \leq t < \infty \end{cases}$$

biçimindedir. Buradan

$$\varphi^*(t, \lambda) := (\varphi_2(t, \lambda), \varphi_1(t, \lambda))$$

$$e^{+*}(t, \lambda) := (e_2^+(t, \lambda), e_1^+(t, \lambda))$$

$$e^{-*}(t, \lambda) := (e_2^-(t, \lambda), e_1^-(t, \lambda))$$

olarak tanımlansın [13].

İspat :

(3.5) denkleminin iki çözümünün Wronskian'ı x değişkeninden bağımsızdır ve sıfırdan farklıdır.

$$W[y(0, \lambda), e^+(0, \lambda)] = M_+(\lambda)$$

$$W[y(0, \lambda), e^-(0, \lambda)] = M_-(\lambda)$$

biçimindedir.

$$Py' + Qy - \lambda y = f(x)$$

diferensiyel denklemini parametrelerin değişim yöntemiyle $W[\varphi, e^+] \neq 0$ olduğundan homogen denklem çözümleri

$$\tilde{y} = c_1\varphi(x, \lambda) + c_2e^+(x, \lambda)$$

biçiminde yazılabilir.

$$Py' + Qy - \lambda y = f \tag{4.1}$$

lineer diferensiyel denklemin bir çözümü ise

$$y(x, \lambda) = c_1(x)\varphi(x, \lambda) + c_2(x)e^+(x, \lambda) \tag{4.2}$$

biçiminde aransın. O halde

$$\begin{aligned}
y'(x, \lambda) = c_1(x) \frac{d}{dx} \varphi(x, \lambda) + c_2(x) \frac{d}{dx} e^+(x, \lambda) + c_1'(x) \varphi(x, \lambda) \\
+ c_2'(x) e^+(x, \lambda)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

elde edilir.

(4.1) denklemine (4.2) ve (4.3) eşitlikleri yazılırsa

$$\begin{aligned}
P[c_1(x) \frac{d}{dx} \varphi(x, \lambda) + c_2(x) \frac{d}{dx} e^+(x, \lambda) + c_1'(x) \varphi(x, \lambda) + c_2'(x) e^+(x, \lambda)] \\
+ Q[c_1(x) \varphi(x, \lambda) + c_2(x) e^+(x, \lambda)] - \lambda[c_1(x) \varphi(x, \lambda) + c_2(x) e^+(x, \lambda)] \\
= f
\end{aligned}$$

olur.

$$P = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad Q(x) = \begin{bmatrix} 0 & q_1(x) \\ q_2(x) & 0 \end{bmatrix}, \quad \varphi(x, \lambda) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x, \lambda) \\ \varphi_2(x, \lambda) \end{bmatrix}, \quad f(x, \lambda) = \begin{bmatrix} f_1(x, \lambda) \\ f_2(x, \lambda) \end{bmatrix}$$

tanımları son eşitlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
c_1(x) \left\{ i \frac{d}{dx} \varphi(x, \lambda) + Q \varphi(x, \lambda) - \lambda \varphi(x, \lambda) \right\} \\
+ c_2(x) \left\{ i \frac{d}{dx} e^+(x, \lambda) + Q e^+(x, \lambda) - \lambda e^+(x, \lambda) \right\} + i c_1'(x) \varphi(x, \lambda) \\
+ i c_2'(x) e^+(x, \lambda) = f(x, \lambda)
\end{aligned}$$

olur. (3.5) koşulundan dolayı gerekli işlemler yapılırsa

$$i c_1'(x) \varphi(x, \lambda) + i c_2'(x) e^+(x, \lambda) = f(x, \lambda)$$

$$i c_1'(x) \begin{bmatrix} \varphi_1(x, \lambda) \\ \varphi_2(x, \lambda) \end{bmatrix} + i c_2'(x) \begin{bmatrix} e_1^+(x, \lambda) \\ e_2^+(x, \lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x, \lambda) \\ f_2(x, \lambda) \end{bmatrix}$$

$$i c_1'(x) \varphi_1(x, \lambda) + i c_2'(x) e_1^+(x, \lambda) = f_1(x, \lambda) \tag{*}$$

$$i c_1'(x) \varphi_2(x, \lambda) + i c_2'(x) e_2^+(x, \lambda) = f_2(x, \lambda) \tag{**}$$

(*) denklemi $e_2^+(x, \lambda)$ ile ve (**) denklemi $-e_1^+(x, \lambda)$ ile genişletip, gerekli işlemler yapılırsa

$$c_1(x) = \frac{i}{M_+(\lambda)} \int_x^\infty [e_2^+(t, \lambda)f_1(t) - e_1^+(t, \lambda)f_2(t)]dt + \alpha_1$$

bulunur ve benzer biçimde

$$c_2(x) = \frac{i}{M_-(\lambda)} \int_x^\infty [\varphi_2(t, \lambda)f_1(t) - \varphi_1(t, \lambda)f_2(t)]dt + \alpha_2$$

olarak hesaplanır. Bu değerleri

$$y(x, \lambda) = c_1(x)\varphi(x, \lambda) + c_2(x)e^+(x, \lambda) \quad (4.4)$$

eşitliğinde yerine yazalım.

$$y(x, \lambda) = \alpha_1\varphi(x, \lambda) + \alpha_2e^+(x, \lambda) + \frac{i}{M_+(\lambda)} \left[\int_x^\infty [\varphi(x, \lambda)e^+(t, \lambda)f(t)]dt + \int_0^x e^+(x, \lambda)\varphi(t, \lambda)f(t) dt \right]$$

elde edilir. $y \in L_2(0, \infty; \mathbb{C})$ olması için $\alpha_1 = 0$ olmalıdır. (3.2) sınır koşulunu sağlaması için $\alpha_2 = 0$ olmalıdır. Bu durumda $\text{Im}\lambda \geq 0$ düzleminde

$$R^+(x, t; \lambda) = \frac{i}{M_+(\lambda)} \begin{cases} e^+(x, \lambda)\varphi^*(t, \lambda), & 0 \leq t < \infty \\ \varphi(x, \lambda)e^{+*}(t, \lambda), & x \leq t < \infty \end{cases}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde $\text{Im}\lambda \leq 0$ düzleminde

$$R^-(x, t; \lambda) = \frac{i}{M_-(\lambda)} \begin{cases} e^-(x, \lambda)\varphi^*(t, \lambda), & 0 \leq t < \infty \\ \varphi(x, \lambda)e^{-*}(t, \lambda), & x \leq t < \infty \end{cases}$$

bulunur. O halde

$$R(x, t; \lambda) = \begin{cases} R^+(x, t; \lambda), & \text{Im}\lambda \geq 0 \\ R^-(x, t; \lambda), & \text{Im}\lambda \leq 0 \end{cases}$$

olup

$$(R_\lambda f) = \int_0^\infty R(x, t; \lambda) f(t) dt$$

biçimindedir.

4.1.2. Teorem

λ , L operatörünün resolvent cümlesine ait $\lambda \rightarrow \lambda_0 \in (-\infty, \infty)$ ise $\|R_\lambda\| \rightarrow \infty$ olur [13].

İspat :

R_λ varlığını Teorem 4.1.1'den ispatlandı. Şimdi varsayalım ki λ , L operatörünün resolvent cümlesine ait olmasın. Eğer λ , resolvent cümlesine ait değilse o zaman L operatörünün spektrumuna aittir. R_λ operatörü λ 'nın analitik fonksiyonudur. Buradan da R_λ 'nın lokal sınırlılığı elde edilir.

4.2. L Operatörünün Özdeğerlerinin Cümlesi

L operatörünün özdeğerleri ve spektral tekillikleri cümlesini sırasıyla $\sigma_d(L)$ ve $\sigma_{ss}(L)$ ile gösterelim.

4.2.1. Teorem

$$\sigma_d(L) = \{\lambda : \text{Im}\lambda > 0, M_+(\lambda) = 0\} \cup \{\lambda : \text{Im}\lambda < 0, M_-(\lambda) = 0\} \quad (4.5)$$

buradan $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ [13].

İspat :

Öncelikle D_1^+ ve D_1^- cümlelerini tanımlayalım.

$$D_1^+ = \{\lambda : \operatorname{Im}\lambda > 0, M_+(\lambda) = 0\}$$

$$D_1^- = \{\lambda : \operatorname{Im}\lambda < 0, M_-(\lambda) = 0\}$$

$$D = D_1^+ \cup D_1^-$$

cümlesini gösterelim. L operatörünün özdeğerlerinin tanımı kullanılırsa

$$D \subset \sigma_d(L) \tag{4.6}$$

olduğu açıktır. (4.5) eşitliğini ispat etmek için

$$\sigma_d(L) \subset D$$

olduğunu göstermeliyiz.

(i) $\operatorname{Im}\lambda_0 > 0$ ve $\lambda_0 \in \sigma_d(L)$ olacak şekilde $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda (3.5) denkleminin $\lambda = \lambda_0$ için aşikar olmayan $y(x, \lambda_0) \in L_2(0, \infty; \mathbb{C}_2)$ ve

$$(\alpha_1\lambda + \beta_1)y_2(0, \lambda) - (\alpha_2\lambda + \beta_2)y_1(0, \lambda) = 0$$

sınır koşulunu sağlayan

$$y(x, \lambda_0) = \begin{pmatrix} y_1(x, \lambda_0) \\ y_2(x, \lambda_0) \end{pmatrix}$$

ile gösterilen $y(x, \lambda_0)$ çözümü vardır. Açıkça $y(x, \lambda_0)$ çözümü L operatörünün λ_0 özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonudur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
W[\varphi(x, \lambda_0), y(x, \lambda_0)] &= \varphi_1(x, \lambda_0)y_2(x, \lambda_0) - \varphi_2(x, \lambda_0)y_1(x, \lambda_0) \\
&= \varphi_1(x, \lambda_0)y_2(x, \lambda_0) - \varphi_2(x, \lambda_0)y_1(x, \lambda_0) \\
&= (\alpha_1\lambda + \beta_1)y_2(0, \lambda) - (\alpha_2\lambda + \beta_2)y_1(0, \lambda) = 0
\end{aligned}$$

olduğundan öyle bir $c \neq 0$ sabiti var öyleki

$$y(x, \lambda_0) = c\varphi(x, \lambda_0)$$

olur. Bu durumda

$$W[y(x, \lambda_0), e^+(x, \lambda_0)] = cW[\varphi(x, \lambda_0), e^+(x, \lambda_0)] = cM_+(\lambda_0) \quad (4.7)$$

elde edilir.

$y(x, \lambda_0)$ ve $e^+(x, \lambda_0)$ fonksiyonları $L_2(0, \infty; \mathbb{C}_2)$ uzayına ait ve sürekli diferensiyellenebilen fonksiyonlar olduklarından

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y_i(x, \lambda_0) = \lim_{x \rightarrow \infty} e_i^+(x, \lambda_0)$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
W[y(x, \lambda_0), e^+(x, \lambda_0)] &= \lim_{x \rightarrow \infty} W[y(x, \lambda_0), e^+(x, \lambda_0)] \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} W[y_1(x, \lambda_0), e_2^+(x, \lambda_0) - y_2(x, \lambda_0), e_1^+(x, \lambda_0)] \\
&= 0
\end{aligned} \quad (4.8)$$

elde edilir. (4.7) ve (4.8) eşitliklerinden

$$cM_+(\lambda_0) = 0$$

$c \neq 0$ aldığımız için $M_+(\lambda_0) = 0$ bulunur. Buradan $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, $\text{Im}\lambda_0 > 0$ ve $\lambda_0 \in \sigma_d(L)$ için

$$\lambda_0 \in D_1^+ \quad (4.9)$$

olur.

(ii) $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, $\text{Im}\lambda_0 < 0$ ve $\lambda_0 \in \sigma_d(L)$ kabul edelim. Bu durumda (i)' ye benzer olarak

$$\lambda_0 \in D_1^- \quad (4.10)$$

bulunur.

(iii) Kabul edelimki $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda c_1 ve c_2 sabitleri için

$$y(x, \lambda_0) = c_1 e^-(x, \lambda_0) + c_2 e^+(x, \lambda_0)$$

olur. Buradan (3.36) ve (3.37) asimptotik eşitliklerine göre

$$y(x, \lambda_0) = \begin{pmatrix} c_1 e^{-i\lambda_0 x} \\ c_2 e^{i\lambda_0 x} \end{pmatrix} + o(1), \quad x \rightarrow \infty, \quad \lambda_0 \in \mathbb{R}$$

asimptotik eşitliği sağlanır. Bundan dolayı

$$\sigma_d(L) \cap (-\infty, \infty) = \emptyset \quad (4.11)$$

elde edilir. (4.9) ve (4.11) den

$$\sigma_d(L) \subset D \quad (4.12)$$

(4.6) ve (4.12) den

$$\sigma_d(L) = D$$

elde edilir.

4.3. L Operatörünün Spektral Tekilliklerinin Cümlesi

4.3.1. Teorem

$$\sigma_{ss}(L) = \{\lambda : \lambda \in \mathbb{R}^*, M_+(\lambda) = 0\} \cup \{\lambda : \lambda \in \mathbb{R}^*, M_-(\lambda) = 0\} \quad (4.13)$$

buradan $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ [13].

İspat:

(4.13) eşitliğini ispatlayalım.

M_+ ve M_- fonksiyonlarının reel eksendeki sıfırları resolventinin kutuplarıdır. Reel eksendeki bu sıfırlar aynı zamanda L operatörünün sürekli spektrumu üzerindedir. Sürekli spektrumun reel eksen olduğu Teorem 4.4.1. de gösterildi. Fakat (4.11)' ye göre özdeğerler ve reel eksenin kesişimi boş kümedir yani bu sıfırlar L operatörünün özdeğeri değildir. Buradan spektral tekilliklerin tanımına göre

$$\sigma_{ss}(L) = \{\lambda : \lambda \in \mathbb{R}^*, M_+(\lambda) = 0\} \cup \{\lambda : \lambda \in \mathbb{R}^*, M_-(\lambda) = 0\}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

4.4. L Operatörünün Sürekli Spektrumu

4.4.1. Teorem

L operatörünün sürekli spektrumu tüm reel eksenidir. Yani

$$\sigma_c(L) = (-\infty, \infty)$$

dir [13].

İspat :

$\overline{D(R_\lambda(L))} = L_2(0, \infty; \mathbb{C}_2)$ olduğunu yani $R_\lambda(L)$ 'nin tanım cümlesinin $L_2(0, \infty; \mathbb{C}_2)$ 'de yoğun olduğunu gösterelim.

$\lambda \in (-\infty, \infty)$ için $R_\lambda(L)$ operatörünün varlığı ve $R_\lambda(L)$ 'nin sınırsız olduğu Teorem 4.1.1 ve Teorem 4.1.2.'den gösterildi.

$$L_2(0, \infty; \mathbb{C}_2) = \overline{R(L - \lambda I)} \oplus N(L^* - \lambda I)$$

eşitliğinde L^* ise L operatörünün adjointidir ve $N(L^* - \lambda I)$ cümlesi $L^* - \lambda I$ operatörünün çekirdeğidir. L^* operatörünün

$$Py' + \overline{Q(x)}y = \lambda y$$

$$(\alpha_1 \lambda + \beta_1)y_2(0, \lambda) - (\alpha_1 \lambda + \beta_1)y_1(0, \lambda) = 0$$

$y = 0$ için sınır değer probleminin çözümü vardır. O halde

$$N(L^* - \lambda I) = \{0\}$$

elde edilir. Buradan

$$L_2(0, \infty; \mathbb{C}_2) = \overline{R(L - \lambda I)}$$

olur. Buradan Teorem 4.1.1. ve Teorem 4.1.2.'den

$$\sigma_c(L) = (-\infty, \infty)$$

ispatlanır.

KAYNAKLAR

1. Naimark, M. A. (1960). Investigation of the spectrum and expansion in eigenfunctions of a non-selfadjoint operator of second order on a semi-axis. *American Mathematical Society Translations*, 2(16), 103-193.
2. Kemp, R. R. D. (1958). A singular boundary value problem for a non-selfadjoint differential operator. *Canadian Journal Mathematical*, 10, 447-462.
3. Gasymov, M. G. (1968). Expansion in terms of the solutions of a scattering theory problem for the non-selfadjoint Schrödinger equation. *Soviet Mathematics Doklady*, 9, 390-393.
4. Pavlov, B. S. (1967). The non- selfadjoint Schrödinger operatör. *Spectral Theory and Wawe Processes*, 1, 87-114.
5. Lyance, V. E. (1967). A differential operator with spectral singularities I,II. *American Mathematical Society Translations*, 2 (60), 185-225, 227-283.
6. Krall, A. M. (1965a). The adjoint of differential operator with integral boundary conditions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 16, 738-742.
7. Krall, A. M. (1965b). A nonhomogenous eigenfunction expansion. *American Mathematical Society Translations*, 117, 352-361.
8. Krall, A. M. (1965c). Second order ordinary differential operators with general boundary conditions. *Duke Mathematical Journal*, 32, 617-625.
9. Bairamov, E., Çakar, Ö. ve Çelebi, A. O. (1997). Quadratic pencil of Schrödinger operators with spectral singularities: discrete spectrum and principal functions. *Journal of Mathematical Analysis Applications*, 216(1), 303-320.
10. Bairamov, E., Çakar, Ö. ve Krall, A. M. (1999a). Spectrum and spectral singularities of a quadratic pencil of a Schrödinger operator with a general boundary condition. *Jornal of Differential Equation*, 151(2), 252-267.
11. Bairamov, E., Çakar, Ö. ve Krall, A. M. (1999b). An eigenfunction expansion for a quadratic pencil of a Schrödinger operator with spectral singularities. *Journal of Differential Equation*, 151(2), 268-289.
12. Yokuş, N. (2010). *Sınır koşulları spektral parametreye kuadratik bağımlı Sturm-Liouville operatörlerinin spektral teorisi*, Yayımlanmamış Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

13. Kır, E., Başcanbaz-Tunca, G., & Yanık, C. (2005). Spectral properties of a non-selfadjoint system differential equations with a spectral parameter in the boundary condition. *Proyecciones*, 24(1), 49-63.
14. Lusternik, L. A ve Sobolev, V. J. (1974). *Elements of functional analysis* (Second edition). New York: Hindustan Publishing Corporation, 360.
15. Titchmarsh, E. C. (1962). Eigenfunction expansions associated with second order differential equations. *Oxford University Press*, London.
16. Akin, Ö. ve Bairamov, E., (1995). On the structure of discrete spectrum of the non-selfadjoint system of differential equations in the first order. *Journal of the Korean Mathematical Society*, 32(3), 401-413.
17. Kerimov, N. B. (2002). A Boundary value problem for the Dirac system with a spectral parameter in the boundary conditions. *Differential Equations*, 38(2), 164-174.
18. Musayev, B.ve Alp, M. (2000). *Fonksiyonel Analiz* (Birinci baskı). Kütahya: Balcı Yayınları, 470.
19. Veliev, O. A. (1987). Spectral expansion of non-selfadjoint differential operators with periodic coefficients. *Differential Equations*, 22, 1403-1408.
20. Naimark, M. A. (1968). *Linear differential operators I,II*. (Third edition).New-York: Harrap, 368.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : ARIKAN, Seniha
 Uyruğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 21.10.1987, Diyarbakır
 Medeni hali : Evli
 Telefon : 0 546 479 26 52
 e-mail : seniha.arikan@gazi.edu.tr



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik A.B.D	Devam ediyor
Lisans	Ankara Üniversitesi / Matematik Bölümü	2010

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2013-Halen	MEB Kurumuna Bağlı Okullar	Öğretmen

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Arıkan, S. (2020). *Sınır Koşulları Parametreye Bağlı Sturm-Liouville Operatörler Sisteminin Spektral Özellikleri*. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Hobiler

Yüzme, Satranç



GAZİ GELECEKTİR..