



**q -BASKAKOV-KANTOROVICH OPERATÖRLERİNİN
İSTATİSTİKSEL YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ**

Bağdagül KARTAL

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

HAZİRAN 2014

Bağdagül KARTAL tarafından hazırlanan “ q -BASKAKOV-KANTOROVICH OPERATÖRLERİNİN İSTATİSTİKSEL YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Hatice Gül İnce İLARSLAN

Matematik, Gazi Üniversitesi

Bu tezin kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu Onaylıyorum

Başkan: Prof. Dr. Ahmet Ali ÖÇAL

Matematik, Gazi Üniversitesi

Bu tezin kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu Onaylıyorum

Üye: Prof. Dr. Gülen BAŞCANBAZ TUNCA

Matematik, Ankara Üniversitesi

Bu tezin kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu Onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi: 16/6/2014

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Şeref SAĞIROĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

.....
Bağdagül KARTAL

16/6/2014

q -BASKAKOV-KANTOROVICH OPERATÖRLERİNİN İSTATİSTİKSEL
YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Bağdagül KARTAL

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2014

ÖZET

Bohman-Korovkin teoremi yaklaşımlar teorisinde önemli bir yere sahiptir. Bu teorem kullanılarak birçok lineer pozitif operatörün yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Diğer yandan istatistiksel yakınsaklık kavramı kullanılarak Bohman-Korovkin tipli teoremler elde edilmiştir. Bu teoremler yardımıyla da lineer pozitif operatörlerin farklı yaklaşım özellikleri çalışılmıştır. Bu tezde, ilk olarak q -analiz konusunun temel özelliklerine yer verilmiştir. Daha sonra Gupta ve Radu tarafından tanımlanan q -Baskakov-Kantorovich operatörleri verilmiştir. q -Baskakov-Kantorovich operatörlerinin önce Bohman-Korovkin tipli teorem yardımıyla kompakt bir küme üzerinde yakınsaklığı daha sonra da ağırlıklı uzaylarda istatistiksel yakınsaklığı incelenmiştir. Operatörlerin Bohman-Korovkin teoremi yardımıyla düzgün yakınsaklığının gösterilebilmesi için gerekli şartlar belirtilmiştir. Ayrıca ağırlıklı süreklilik modülü yardımıyla bu operatörler için yakınsama hızı elde edilmiştir. Bunun yanında Mahmudov tarafından tanımlanan q -Baskakov-Kantorovich operatörlerinin yeni bir genellemesi için de benzer sonuçlar elde edilerek pozitif olan bu operatörlerin daha avantajlı olduğu görülmüştür. Son olarak operatörler için bazı özel durumlar verilmiştir.

Bilim Kodu : 204.1.095
Anahtar Kelimeler : q -tamsayıları, q -Baskakov operatörleri, q -Baskakov-Kantorovich operatörleri, ağırlıklı uzay, ağırlıklı uzayın süreklilik modülü
Sayfa Adedi : 73
Danışman : Doç. Dr. Hatice Gül İNCE İLARSLAN

STATISTICAL APPROXIMATION PROPERTIES OF q -BASKAKOV-KANTOROVICH OPERATORS

(M.Sc. Thesis)

Bağdagül KARTAL

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE

June 2014

ABSTRACT

Bohman-Korovkin theorem has an important role in the approximation theory. The approximation properties of many linear positive operators have been investigated by using this theorem. On the other hand, Bohman-Korovkin type theorems have been obtained by statistical convergence. With these theorems, different approximation properties of linear positive operators have been studied. In this thesis, firstly, basic properties of q -calculus have been given. Later, q -Baskakov-Kantorovich operators which introduced by Gupta and Radu have been given. At first the convergence of q -Baskakov-Kantorovich operators on a compact set has been examined by using Bohman-Korovkin type theorem. Secondly, statistical convergence of these operators has been studied on the weighted space. Necessary conditions have been mentioned for uniform convergence of operators by Bohman-Korovkin theorem. Also the rates of statistical approximation for these operators have been obtained via modulus of smoothness. Besides, the same results have been given for the different generalizations of q -Baskakov-Kantorovich operators which introduced by Mahmudov and it was seen that these operators have more advantage. Finally, some special cases have been given for operators.

Science Code : 204.1.095

Key Words : q -integers, q -Baskakov operators, q -Baskakov-Kantorovich operators, weighted space, weighted modulus of smoothness

Page Number : 73

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Hatice Gül İNCE İLARSLAN

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana vererek çalışmalarımın her aşamasında yakın ilgisini esirgemeyen, değerli yardımları ile beni yönlendiren hocam, Sayın Doç. Dr. Hatice Gül İNCE İLARSLAN'a en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım boyunca beni destekleyen aileme ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Bu tez çalışması TÜBİTAK tarafından desteklenmiştir. TÜBİTAK'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	ix
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1. q -Tamsayıları	3
2.2. q -Türev	4
2.3. q - İntegral	8
2.4. Lineer Pozitif Operatörler	9
2.5. İstatistiksel Yakınsaklık	12
2.6. A -İstatistiksel Yakınsaklık	14
2.7. Ağırlıklı Uzay	18
2.8. Ağırlıklı Süreklilik Modülü	19
3. q -BASKAKOV-KANTOROVICH OPERATÖRLERİNİN İSTATİSTİKSEL YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ	21
3.1. q -Baskakov Operatörleri	21
3.2. q -Baskakov-Kantorovich Operatörleri	25
3.3. q -Baskakov-Kantorovich Operatörlerinin Ağırlıklı İstatistiksel YaklaşımÖzellikleri.....	29
3.4. q -Baskakov-Kantorovich Operatörlerinin Yakınsama Hızı	37
4. q -BASKAKOV-KANTOROVICH OPERATÖRLERİNİN YENİ BİR GENELLEMESİNİN İSTATİSTİKSEL YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ	47
4.1. Operatörlerin İnşası	47
4.2. q -Baskakov Operatörlerinin Yeni Bir Genellemesi	47

4.3. q -Baskakov-Kantorovich Operatörlerinin Yeni Bir Genellemesi	51
4.4. q -Baskakov-Kantorovich Operatörlerinin Yeni Bir Genellemesinin Ağırlıklı İstatistiksel Yaklaşım Özellikleri	56
4.5. q -Baskakov-Kantorovich Operatörlerinin Yeni Bir Genellemesinin Yakınsama Hızı.....	57
5. BAZI ÖZEL DURUMLAR	63
5.1. q -Szász-Mirakjan ve q -Szász-Mirakjan-Kantorovich Operatörleri	63
5.2. q -Baskakov ve q -Baskakov-Kantorovich Operatörleri	64
5.3. q -Szász-Mirakjan-Schurer ve q -Szász-Mirakjan-Schurer-Kantorovich Operatörleri	64
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	67
KAYNAKLAR	69
ÖZGEÇMİŞ	73

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	$\{0\} \cup \mathbb{N}$
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_+$	Negatif olmayan reel sayılar kümesi
L_n	$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere operatör dizisi
$C[a, b]$	$[a, b]$ da tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonlar uzayı
C_1	Cesâro matrisi
$\delta(K)$	K kümesinin yoğunluğu
$\delta_A(K)$	K kümesinin A -yoğunluğu
$\rho(x)$	Ağırlık fonksiyonu
$\rho_\alpha(x)$	$\rho_\alpha(x) = 1 + x^{2+\alpha}$ şeklinde tanımlı ağırlık fonksiyonu
$\rho_m(x)$	$\rho_m(x) = 1 + x^m$ şeklinde tanımlı ağırlık fonksiyonu
$B_\rho(\mathbb{R})$	$\forall x \in \mathbb{R}$ için $ f(x) \leq M_f \rho(x)$ olan fonksiyonlar uzayı
$C_\rho(\mathbb{R})$	$B_\rho(\mathbb{R})$ uzayındaki sürekli fonksiyonların uzayı

Simgeler**Açıklama**

$$\|\cdot\|_{\rho}$$

$C_{\rho}(\mathbb{R})$ ve $B_{\rho}(\mathbb{R})$ uzaylarında $\|\cdot\|_{\rho} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|\cdot|}{\rho(x)}$ ile tanımlı norm

$$\Omega_{\rho_{\alpha}}(f, \delta)$$

f nin $B_{\rho_{\alpha}}(\mathbb{R}_{+})$ uzayında tanımlı süreklilik modülü

1. GİRİŞ

Weierstrass kapalı bir $[a,b]$ aralığında sürekli olan fonksiyonlara düzgün yakınsayan polinomların varlığını göstermiştir[1]. Bu varlık teoreminden sonra Bernstein bu polinomların gösterimini de vererek Weierstrass teoremini $[0,1]$ aralığında tekrar ispatlamıştır[2].

Bohman[3] ve Korovkin[4], Bernstein operatörlerinden yola çıkarak, lineer pozitif operatörlerin sürekli fonksiyonlara düzgün yakınsaması ile ilgili çok önemli bir teorem vermişlerdir. Bu teorem sayesinde birçok yeni lineer pozitif operatörün yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Bernstein operatörleri tanımlandıktan sonra bu operatörün çeşitli genellemeleri ele alınmıştır. Bu genellemelerden bir kısmı q -analiz teorisine dayanır. Bernstein operatörlerinin q -genellemesi ilk defa Lupaş tarafından ele alınmıştır[5].

Son 20 yıldır q -Bernstein operatörlerine olan ilgi devam etmektedir. Bunun yanısıra q -Bernstein operatörlerinin tanımlanması, diğer operatörlerin de q -genellemelerinin oluşturulmasında öncü olmuştur.

1997 yılında G.Phillips, q -Bernstein polinomlarının bir genellemesini tanımlamıştır[6]. Son on yılda, q -pozitif lineer operatörlerin bazı yeni genellemeleri birçok yazar tarafından tanımlanarak incelenmiştir. q -Meyer-König ve Zeller operatörleri Trif, Doğru ve Duman, Doğru Duman ve Orhan, Doğru ve Gupta tarafından çalışılmıştır[7-10]. Doğru ve Gupta ayrıca q -Bleimann Butzer ve Hahn operatörlerinin monotonluğunu ve asimptotik değerlerini incelemişlerdir[11]. Son zamanlarda q -Durrmeyer ve Kantorovich operatörlerinin genellemeleri Derriennic, Gupta, Radu tarafından incelenmiştir[12-14].

Diğer yandan pozitif lineer operatörlerin istatistiksel yakınsaklığı ilk defa Gadjiev ve Orhan tarafından verilmiştir[15]. Daha sonra bir çok yazar tarafından pozitif lineer operatörlerin istatistiksel yakınsaklığı çalışılmıştır[16-18].

Bu yüksek lisans tezinde Gupta ve Radu tarafından çalışılan q -Baskakov ve q -Baskakov-Kantorovich operatörleri ile bu operatörlerin Mahmudov tarafından verilen farklı bir genellemesinin ağırlıklı istatistiksel yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Daha sonra bu operatörlerin ağırlıklı süreklilik modülü yardımıyla istatistiksel yakınsama hızı verilmiştir.

Ayrıca bu operatörlerin istatistiksel yakınsaklığı incelenirken kullanılan Duman ve Orhan tarafından ispatlanan Bohman-Korovkin tipli A -istatistiksel yakınsaklık teoremi çalışılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde öncelikle q -analizde kullanılan bazı temel kavramlar ve notasyonlardan bahsedilecektir. Detaylar [19] ve [20] de bulunabilir.

Ayrıca daha sonraki bölümlerde kullanılacak bazı tanımlar verilerek, bazı teoremler ifade ve ispat edilecektir.

2.1. q -Tamsayıları

Herhangi bir $q > 0$ reel sayısı için n , negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere q -tamsayıları $[n]_q$ ile ifade edilecektir. Burada

$$[n]_q := \begin{cases} 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}, & \text{eğer } q \neq 1 \text{ ise} \\ n, & \text{eğer } q = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır.

Genel olarak, $t \in \mathbb{R}$ için $[t]_q = \frac{1-q^t}{1-q}$, $q \neq 1$ şeklinde ifade edilir.

q -faktöriyel

$$[n]_q! := \begin{cases} [1]_q [2]_q \dots [n]_q, & \text{eğer } n = 1, 2, \dots \text{ ise} \\ 1, & \text{eğer } n = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

q -binom katsayısı

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := \frac{[n]_q!}{[k]_q! [n-k]_q!}, \quad 0 \leq k \leq n$$

şeklinde tanımlıdır.

Notasyonlar;

$$(a+b)_q^n = \prod_{s=0}^{n-1} (a+q^s b), \quad n \in \mathbb{N}, \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

$$(1+a)_q^\infty = \prod_{s=0}^{\infty} (1+q^s a), \quad a \in \mathbb{R} \quad (2.2)$$

$$(1+a)_q^t = \frac{(1+a)_q^\infty}{(1+q^t a)_q^\infty}, \quad a, t \in \mathbb{R} \quad (2.3)$$

Eş. 2.2 ile ifade edilen sonsuz çarpım $q \in (0,1)$ için yakınsaktır.

Üstel fonksiyonun iki önemli q -analoğu ise

$$E_q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{x^k}{[k]_q!}, \quad e_q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{[k]_q!}$$

şeklinde tanımlıdır. q -üstel fonksiyonlar aşağıdaki özellikleri sağlarlar.

$$D_q E_q(ax) = a E_q(aqx), \quad D_q e_q(ax) = a e_q(ax), \quad E_q(x) e_q(-x) = E_q(-x) e_q(x) = 1$$

2.2. q - Türev

Bir $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun q -türevi

$$(D_q f)(x) := \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x}, \quad x \neq 0, \quad (D_q f)(0) := \lim_{x \rightarrow 0} (D_q f)(x) \quad (2.4)$$

ve yüksek q -türevleri

$$D_q^0 f := f, \quad D_q^n f := D_q(D_q^{n-1} f), \quad n = 1, 2, \dots$$

şeklinde tanımlıdır.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$\lim_{q \rightarrow 1} D_q f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{df(x)}{dx}.$$

dir.

Çarpım kuralının q -analoğu ise

$$D_q (f(x)g(x)) = D_q (f(x))g(x) + f(qx)D_q (g(x))$$

ile tanımlıdır[19].

2.2.1. Lemma

$t, s, a \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$D_q (1+ax)_q^t = [t]_q a(1+aqx)_q^{t-1} \quad (2.5)$$

$$(1+x)_q^{s+t} = (1+x)_q^s (1+q^s x)_q^t \quad (2.6)$$

$$(1+x)_q^{-t} = \frac{1}{(1+q^{-t}x)_q^t} \quad (2.7)$$

İspat

$f(x) = (1+ax)_q^t$ olmak üzere q -türev tanımında

$$D_q f(x) = \frac{d_q f(x)}{d_q x} = \frac{(1+aqx)_q^t - (1+ax)_q^t}{(q-1)x}$$

olur.

Eş. 2.1 den

$$(1+aqx)_q^t = (1+aqx)(1+qaqx)\dots(1+q^{t-1}aqx) = (1+aqx)(1+aq^2x)\dots(1+aq^t x)$$

ve

$$(1+ax)_q^t = (1+ax)(1+qax)\dots(1+q^{t-1}ax)$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
D_q f(x) &= \frac{\left((1+aqx)\dots(1+q^{t-1}ax)\right)\left((1+aq^t x)-(1+ax)\right)}{(q-1)x} \\
&= \frac{\left((1+aqx)\dots(1+q^{t-1}ax)\right)(1+aq^t x-1-ax)}{(q-1)x} \\
&= \frac{ax(q^t-1)}{(q-1)x} (1+aqx)_q^{t-1} \\
&= [t]_q a(1+aqx)_q^{t-1}
\end{aligned}$$

olur. Buradan Eş. 2.5 elde edilir. Benzer şekilde Eş. 2.1 kullanılarak aşağıda Eş. 2.6 bulunur.

$$\begin{aligned}
(1+x)_q^{s+t} &= (1+x)(1+qx)(1+q^2x)\dots(1+q^{s-1}x)(1+q^s x)(1+q^{s+1}x)\dots(1+q^{s+t-1}x) \\
&= (1+x)_q^s \left((1+q^s x)(1+q(q^s x))\dots(1+q^{t-1}(q^s x))\right) \\
&= (1+x)_q^s (1+q^s x)_q^t
\end{aligned}$$

Eş. 2.6 da s yerine $-t$ yazılırsa

$$(1+x)_q^0 = (1+x)_q^{-t} (1+q^{-t}x)_q^t$$

olur. Diğer yandan Eş. 2.3 den

$$(1+x)_q^0 = 1$$

olduğundan

$$1 = (1+x)_q^{-t} (1+q^{-t}x)_q^t$$

bulunur. Buradan

$$(1+x)_q^{-t} = \frac{1}{(1+q^{-t}x)_q^t}$$

elde edilir.

2.2.1. Teorem

$g(x)$ fonksiyonunun $x_0 = a$ noktasındaki q -taylor açılımı

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-a)_q^k}{[k]_q!} D_q^k g(a)$$

dır. Burada

$$(x-a)_q^k = \prod_{s=0}^{k-1} (x - q^s a) = \sum_{r=0}^k \begin{bmatrix} k \\ r \end{bmatrix}_q q^{\frac{r(r-1)}{2}} x^{k-r} (-a)^r$$

dir[19].

İspat

$f(x) = (x-a)_q^k$ olsun. Eş 2.1 den

$$(x-a)_q^k = (x-a)(x-qa)\dots(x-q^{k-1}a)$$

olup, $x=0$ için

$$(-a)_q^k = (0-a)_q^k = (-a)(-qa)\dots(-q^{k-1}a) = (-a)^k q^{\frac{k(k-1)}{2}}$$

olur. Böylece

$$(D_q^r f)(x) = [k]_q [k-1]_q \dots [k-r+1]_q (x-a)_q^{k-r}$$

olup, $(-a)_q^k = (-a)^k q^{\frac{k(k-1)}{2}}$ olduğundan

$$(D_q^r f)(0) = [k]_q [k-1]_q \dots [k-r+1]_q q^{\frac{(k-r)(k-r-1)}{2}} (-a)^{k-r}$$

bulunur.

f fonksiyonunun $x_0 = 0$ noktasındaki q -taylor açılımı

$$f(x) = \sum_{r=0}^k \frac{x^r}{[r]_q!} D_q^r f(0)$$

olup burada $D_q^r f(0)$ yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-a)_q^k = \sum_{r=0}^k \frac{[k]_q [k-1]_q \dots [k-r+1]_q}{[r]_q!} q^{\frac{(k-r)(k-r-1)}{2}} x^r (-a)^{k-r} \\ &= \sum_{k=0}^r \left[\begin{matrix} k \\ r \end{matrix} \right]_q q^{\frac{(k-r)(k-r-1)}{2}} x^r (-a)^{k-r} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte r yerine $k-r$ alınır,

$$(x-a)_q^k = \sum_{r=0}^k \left[\begin{matrix} k \\ r \end{matrix} \right]_q q^{\frac{r(r-1)}{2}} x^{k-r} (-a)^r$$

bulunur.

2.3. q -İntegral

$a > 0$ olmak üzere integralin q -analoğu

$$\int_0^a f(t) d_q t = (1-q)a \sum_{j=0}^{\infty} f(q^j a) q^j \quad (2.8)$$

olarak tanımlanır[21].

$0 < a < b$ olmak üzere $[a, b]$ aralığında ise

$$\int_a^b f(t) d_q t = \int_0^b f(t) d_q t - \int_0^a f(t) d_q t \quad (2.9)$$

şeklinde tanımlanır.

2.3.1. Teorem

$a > 0$ olmak üzere q -integral için Cauchy-Schwarz eşitsizliği geçerlidir, yani

$$\int_0^a f(t)g(t)d_q t \leq \sqrt{\int_0^a f^2(t)d_q t} \sqrt{\int_0^a g^2(t)d_q t}$$

dir[19].

2.4. Lineer Pozitif Operatörler

2.4.1. Tanım

X ve Y normlu fonksiyon uzayları olsun. Eğer X uzayından alınan her f fonksiyonuna Y uzayında bir ve yalnız bir g fonksiyonu karşılık getiren bir L kuralı varsa, bu durumda L kuralına X den Y ye bir operatör denir.

$f \in X$, $g \in Y$ ve x , g nin tanım kümesine ait olmak üzere;

$$L(f)(x) = L(f; x) = g(x)$$

ya da t , f nin x , g nin tanım kümesine ait olmak üzere;

$$L(f(t); x) = g(x)$$

şeklinde gösterilir. Burada $L(f(t); x)$ gösterimi yerine $L(f; x)$ yazılacaktır.

X uzayına L operatörünün tanım kümesi denir ve $X = D(L)$ ile gösterilir. L operatörünün değer kümesi ise $R(L)$ ile gösterilir ve

$$R(L) = \{g : L(f; x) = g(x), f \in D(L)\} \subset Y$$

dir.

2.4.2. Tanım

X ve Y fonksiyon uzayları olmak üzere $L : X \rightarrow Y$ şeklindeki L operatörünü göz önüne alalım. Eğer her $f_1, f_2 \in X$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$L(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha L(f_1) + \beta L(f_2)$$

koşulu sağlanıyor ise L operatörüne *lineer operatör* denir. L lineer operatörü için $L(0; x) = 0$ dır.

2.4.3. Tanım

Eğer bir L operatörü pozitif değerli bir fonksiyonu yine pozitif değerli bir fonksiyona dönüştürüyor ise yani $f \geq 0$ iken $L(f) \geq 0$ oluyorsa L operatörüne *pozitif operatör* denir.

2.4.4. Tanım

Hem lineerlik hem de pozitiflik şartlarını sağlayan operatöre *lineer pozitif operatör* denir. Ayrıca L pozitif lineer operatörü için $f(x) \leq g(x)$ olduğunda $L(f; x) \leq L(g; x)$ sağlanır. Yani pozitif lineer operatörler monotondur.

2.4.1. Lemma

$L : X \rightarrow Y$ lineer pozitif operatör olsun. Bu durumda

$$|L(f; x)| \leq L(|f|; x)$$

eşitsizliği sağlanır.

2.4.5. Tanım

X ve Y normlu fonksiyon uzayları ve $L : X \rightarrow Y$ bir lineer operatör olsun. Her $f \in D(L)$ için;

$$\|L(f; x)\|_Y \leq M \|f\|_X$$

eşitsizliğini sağlayan bir $M > 0$ reel sayısı varsa L operatörüne $D(L)$ de sınırlı operatör denir.

2.4.6. Tanım

$\|L\|_{X \rightarrow Y} = \inf \left\{ M : \|L(f; x)\|_Y \leq M \|f\|_X \right\}$ sayısına L operatörünün normu denir.

2.4.1. Teorem

$L : X \rightarrow Y$ sınırlı lineer operatörü için

$$\|L\|_{X \rightarrow Y} = \sup_{\|f\|_X \neq 0} \frac{\|L(f; x)\|_Y}{\|f\|_X}$$

dir. Buradan

$$\|L\|_{X \rightarrow Y} = \sup_{\|f\|_X = 1} \|L(f; x)\|_Y$$

gerçeklenir.

2.4.7. Tanım

$[a, b]$ aralığında tanımlı, reel değerli ve aralığın tüm noktalarında sürekli olan fonksiyonların oluşturduğu uzay $C[a, b]$ ile gösterilir. Bu uzay

$$\|f\|_{C[a, b]} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

şeklinde tanımlanan $\|\cdot\|_{C[a, b]}$ normu ile normlu bir uzaydır.

2.4.2. Lemma

$L : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ lineer pozitif operatör olsun. L operatörü f nin $[a, b]$ aralığı dışındaki değerlerinden bağımsız ise, bu durumda

$$\|L\|_{C[a,b] \rightarrow C[a,b]} = \|L(1; x)\|_{C[a,b]}$$

olur.

2.4.2. Teorem (*Bohman-Korovkin*)

(L_n) lineer pozitif operatörler dizisi ve $f \in C[a, b]$ olmak üzere,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n e_k - e_k\| = 0, \quad k = 0, 1, 2$$

olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n f - f\| = 0$$

olmasıdır. Burada $e_k(t) = t^k$, $k = 0, 1, 2$ dir[22].

2.5. İstatistiksel Yakınsaklık

2.5.1. Tanım

Herhangi bir X kümesinin eleman sayısı, bu kümenin kardinalitesiyle belirlenir ve $|X|$ ile gösterilir.

2.5.2. Tanım

$K \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\delta(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in K\}|$$

limiti mevcut ise bu limite K kümesinin yoğunluğu denir[23].

2.5.3. Tanım

(a_k) pozitif tamsayıların bir dizisi ve $K = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $\delta(K)$ mevcut ise

$$\delta(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a_n}$$

olur[23].

Örnek

$$\delta(\mathbb{N}) = 1$$

$$\delta\{n^2 : n \in \mathbb{N}\} = 0$$

$$\delta\{2n : n \in \mathbb{N}\} = \delta\{2n+1 : n \in \mathbb{N}\} = \frac{1}{2}$$

olur.

$\delta(A)$ veya $\delta(\mathbb{N} \setminus A)$ yoğunluklarından biri mevcut ise, bu durumda

$$\delta(\mathbb{N} \setminus A) = 1 - \delta(A)$$

dir[23].

2.5.4. Tanım

$x = (x_k)$ reel ya da kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer her $\epsilon > 0$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \{k \leq n : |x_k - L| \geq \epsilon\} \right| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa bu durumda x dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $st - \lim x = L$ ile gösterilir[24-27].

2.5.1. Teorem

$x = (x_k)$ dizisinin bir L sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul

$\delta\{n_k : k \in \mathbb{N}\} = 1$ ve $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = L$ olacak şekilde en az bir (x_{n_k}) yakınsak alt dizisinin bulunmasıdır [28].

Örnek

$m \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x = (x_k)$ dizisinin genel terimi,

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2 \\ 0, & k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $\forall \varepsilon > 0$ için

$$0 \leq \left| \{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\} \right| \leq \left| \{k \leq n : x_k \neq 0\} \right| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\} \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

bulunur. Böylece $st - \lim x = 0$ olur.

Örnek

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = m^2 \\ 0, & k \neq m^2 \end{cases}$$

ise $st - \lim x = 0$ olur.

Yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır; fakat yukarıdaki örneklerden de görüleceği gibi tersi doğru değildir.

2.6. A-İstatistiksel Yakınsaklık

2.6.1. Tanım

$A = (a_{nk})$, $n, k = 1, 2, \dots$ sonsuz bir matris ve $x = (x_k)$ bir dizi olsun. Eğer her bir n için

$(Ax)_n := \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$ serisi yakınsak ise $Ax := \{(Ax)_n\}$ dönüşüm dizisi mevcuttur, denir.

2.6.2. Tanım

X ve Y iki dizi uzayı olsun. Eğer her $x \in X$ için Ax mevcut ve $Ax \in Y$ ise $A = (a_{nk})$ matrisi X uzayından Y uzayına bir matris dönüşümü tanımlar denir ve $A \in (X, Y)$ ile gösterilir.

Eğer bir x dizisi için Ax dönüşüm dizisi mevcut ve bir L sayısına yakınsak yani $\lim_{n \rightarrow \infty} (Ax)_n = L$ ise x dizisi L sayısına A -toplanabilirdir denir ve $A - \lim x = L$ şeklinde gösterilir. Toplamı ya da limiti koruyan matrislerin sınıfı $(X, Y; P)$ ile gösterilir. Eğer özel olarak $X = Y = C$, C yakınsak dizilerin uzayı olmak üzere, $A \in (C, C)$ ise A matrisine *konserve matris* denir.

2.6.3. Tanım

$A = (a_{nk})$, $n, k = 1, 2, \dots$ sonsuz bir matris olmak üzere bir (x_k) dizisi için $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = L$ iken $\lim_{n \rightarrow \infty} (Ax)_n = L$ ise A matrisine *regüler matris* denir.

Bir $A = (a_{nk})$ matrisinin regüler olması, Silverman-Toeplitz koşulları olarak bilinen aşağıdaki teorem ile karakterize edilir.

2.6.1. Teorem

Bir $A = (a_{nk})$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter koşul

$$(i) \|A\| = \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$$

$$(ii) \text{ Her sabit } k \text{ için } \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = 0$$

$$(iii) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$$

koşullarının gerçekleşmesidir[29-30].

Örnek

$n, k = 1, 2, \dots$ için

$$c_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n}, & 1 \leq k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

olmak üzere Cesàro matrisi olarak bilinen $C_1 = (c_{nk})$ matrisi regülerdir.

2.6.4. Tanım

$A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris olsun. Ayrıca $K \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere $\mathcal{X}_K$, K kümesinin karakteristik fonksiyonunu gösterebilir. Eğer

$$\delta_A(K) := \lim_{n \rightarrow \infty} (A\mathcal{X}_K)_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in K} a_{nk}$$

limiti mevcut ise $\delta_A(K)$ sayısına K kümesinin A yoğunluğu denir[31].

$\delta_A(K)$ veya $\delta_A(\mathbb{N} \setminus K)$ yoğunluklarından herhangi biri mevcut ise

$$\delta_A(\mathbb{N} \setminus K) = 1 - \delta_A(K)$$

olur. Ayrıca K sonlu elemanlı ise $\delta_A(K) = 0$ dır.

Örnek

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$a_{nk} = \begin{cases} 1, & k = n^2 \\ 0, & k \neq n^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $A = (a_{nk})$ matrisini göz önüne alalım. Bu durumda

$K_1 = \{k \neq n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ için $\delta_A(K_1) = 0$ dir. Dolayısıyla $K_2 = \{k = n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere

$\delta_A(K_2) = 1$ olur.

2.6.2. Teorem

K_1 ve K_2 iki küme olmak üzere $K_1 \subseteq K_2$ ise $\delta_A(K_1) \leq \delta_A(K_2)$ dir.

2.6.5. Tanım

$x = (x_k)$ reel terimli bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$K := K(\varepsilon) = \{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$$

olmak üzere

$$\delta_A(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \chi_K = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k: |x_k - L| \geq \varepsilon} a_{nk} = 0$$

olacak biçimde bir L sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi L sayısına A -istatistiksel yakınsaktır denir ve $st_A - \lim x = L$ ile gösterilir[28], [32], [33].

Açıkça görülüyor ki A -istatistiksel yakınsaklık tanımında A matrisi yerine C_1 Cesàro matrisi alınırsa istatistiksel yakınsaklık, A matrisi yerine I birim matrisi alınırsa klasik anlamda yakınsaklık elde edilir.

2.6.3. Teorem

$st_A - \lim x = L$ olması için gerek ve yeter koşul $\delta_A \{n_k : k \in \mathbb{N}\} = 1$ ve $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = L$ olacak şekilde en az bir (x_{n_k}) alt dizisinin bulunmasıdır[32].

Örnek

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$a_{nk} = \begin{cases} 1, & k = n^2 \\ 0, & k \neq n^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler matrisi verilsin.

$x = (x_k)$ dizisi

$$x_k = \begin{cases} \frac{1}{5}, & k = n^2 \\ 1, & k \neq n^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $\forall \varepsilon > 0$ için

$$K = \left\{ k \in \mathbb{N} : \left| x_k - \frac{1}{5} \right| \geq \varepsilon \right\}$$

için

$$\delta_A(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} (AX_K)_n = 0$$

olduğundan $st_A - \lim x = \frac{1}{5}$ olur.

2.7. Ağırlıklı Uzay

ρ , reel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer ρ , $\mathbb{R}$ de sürekli, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \rho(x) = \infty$ ve her $x \in \mathbb{R}$ için

$\rho(x) \geq 1$ özelliklerini sağlıyor ise *ağırlık fonksiyonu* adını alır. Sonraki bölümlerde aksi

söylenmediği sürece $\rho(x) = \rho_\alpha(x) = 1 + x^{2+\alpha}$, $\alpha > 0$, $x \in \mathbb{R}_+$ alınacaktır.

Tüm reel eksen de tanımlı ve $|f(x)| \leq M_f \rho(x)$ koşulunu sağlayan fonksiyonlar uzayı

$B_\rho(\mathbb{R})$ ile gösterilir. Burada M_f, f fonksiyonuna bağlı bir sabittir. $B_\rho(\mathbb{R})$ uzayındaki

sürekli fonksiyonların uzayı da $C_\rho(\mathbb{R})$ ile gösterilir. Yani,

$$B_\rho(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} \text{ için } |f(x)| \leq M_f \rho(x) \right\}$$

$$C_\rho(\mathbb{R}) = \left\{ f \in B_\rho(\mathbb{R}) : f, \mathbb{R} \text{ de sürekli} \right\}$$

olup bu uzaylar $\|f\|_\rho = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{\rho(x)}$ normu ile birer Banach uzayıdır. Burada $B_\rho(\mathbb{R}), C_\rho(\mathbb{R})$ uzaylarına *ağırlıklı uzaylar* denir.

Ayrıca

$$C_\rho^*(\mathbb{R}) = \left\{ f \in C_\rho(\mathbb{R}) : \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|f(x)|}{\rho(x)} < \infty \right\}$$

dir.

Eğer ρ ağırlık fonksiyonu, $\rho(x) = 1 + x^m$, ($m > 0$) şeklinde ise $B_\rho(\mathbb{R}_+), C_\rho(\mathbb{R}_+), C_\rho^*(\mathbb{R}_+)$ uzayları sırasıyla $B_m(\mathbb{R}_+), C_m(\mathbb{R}_+), C_m^*(\mathbb{R}_+)$ ile gösterilecektir. Bu uzaylar $\|\cdot\|_m := \|\cdot\|_\rho$ normu ile donatılmıştır[18].

2.7.1. Teorem

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $L_n : C_{\rho_1} \rightarrow B_{\rho_1}$ olmak üzere (L_n) operatör dizisi için $\|L_n\|_{C_{\rho_1} \rightarrow B_{\rho_1}} = \|L_n \rho_1\|_{\rho_1}$

dir[34].

2.8. Ağırlıklı Süreklilik Modülü

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $B_{\rho_\alpha}(\mathbb{R}_+)$ ağırlıklı uzayında süreklilik modülü

$$\Omega_{\rho_\alpha}(f; \delta) := \sup_{\substack{x \geq 0 \\ 0 < h \leq \delta}} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{1 + (x+h)^{2+\alpha}}, \quad \delta > 0, \alpha \geq 0 \quad (2.10)$$

şeklinde tanımlanır. Burada her bir $f \in B_{\rho_\alpha}(\mathbb{R}_+)$ için $\Omega_{\rho_\alpha}(f; \cdot)$ iyi tanımlı ve

$$\Omega_{\rho_\alpha}(f; \delta) \leq 2\|f\|_{\rho_\alpha}, \quad \delta > 0, f \in B_{\rho_\alpha}(\mathbb{R}_+), \alpha \geq 0$$

dır[35].

2.8.1. Lemma

$f \in B_{\rho_\alpha}(\mathbb{R}_+)$ olsun. $\Omega_{\rho_\alpha}(f; \cdot)$ aşağıdaki özellikleri sağlar [35].

$$1. \Omega_{\rho_\alpha}(f; \lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\Omega_{\rho_\alpha}(f; \delta), \quad \delta > 0, \lambda > 0 \quad (2.11)$$

$$2. \Omega_{\rho_\alpha}(f; n\delta) \leq n\Omega_{\rho_\alpha}(f; \delta), \quad \delta > 0, n \in \mathbb{N}$$

$$3. \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \Omega_{\rho_\alpha}(f; \delta) = 0$$

3. q -BASKAKOV-KANTOROVICH OPERATÖRLERİNİN İSTATİSTİKSEL YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde q -Baskakov ve q -Baskakov-Kantorovich operatörlerinin tanımları verilecektir. Bu operatörlerin istatistiksel yaklaşım özellikleri incelenecektir.

3.1. q -Baskakov Operatörleri

Baskakov operatörlerinin bir q -analoğu 2009 yılında Aral ve Gupta tarafından çalışılmıştır.

Bu çalışmada $q \in (0,1)$, $f \in C[0, \infty)$, $x \in \mathbb{R}_+ := [0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, q -Baskakov operatörleri

$$V_{n,q}(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}(q; x) f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q}\right) \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada

$$b_{n,k}(q; x) := \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{x^k}{(1+x)_q^{n+k}}$$

dır[36].

3.1.1. Uyarı

$n \in \mathbb{N}$ için $V_{n,q}$ operatörünün pozitif ve lineer olduğu açıktır. Ayrıca $q = 1$ olduğunda Eş 3.1 de verilen operatörler klasik Baskakov operatörlerine indirgenir[37].

3.1.1. Lemma

Her $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}_+$ ve $q \in (0,1)$ için

$$V_{n,q}(e_0; x) = 1 \quad (3.2)$$

$$V_{n,q}(e_1; x) = x \quad (3.3)$$

$$V_{n,q}(e_2; x) = \frac{[n+1]_q}{q[n]_q} x^2 + \frac{1}{[n]_q} x \quad (3.4)$$

olur. Burada $e_i(x) = x^i$, $i = 0, 1, 2$ dir[17].

İspat

$n \in \mathbb{N}$ için $g(x) := (1 + q^n x)_q^{-n}$, $x \in \mathbb{R}_+$ olsun. Eş. 2.4, Eş. 2.5, Eş. 2.6, Eş. 2.7 kullanılarak

$$D_q^k g(x) = (-1)^k [n]_q [n+1]_q \dots [n+k-1]_q (1 + q^{n+k} x)_q^{-n-k}, k \in \mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N} \text{ elde edilir.}$$

Teorem 2.2.1 den $g(t) := (1 + q^n t)_q^{-n}$ fonksiyonunun x noktası civarındaki q -taylor açılımı

$$(1 + q^n t)_q^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-x)_q^k}{[k]_q!} (-1)^k \frac{[n+k-1]_q!}{[n-1]_q!} (1 + q^{n+k} x)_q^{-n-k} \quad (3.5)$$

olur. Eş. 3.5 de $t = 0$ alalım.

$$(1 + 0)_q^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)_q^k}{[k]_q!} (-1)^k \frac{[n+k-1]_q!}{[n-1]_q!} (1 + q^{n+k} x)_q^{-n-k} \quad (3.6)$$

bulunur.

Eş. 2.7 den

$$(1 + 0)_q^{-n} = \frac{1}{[1]_q^n} = 1$$

ve Eş. 2.1 den de

$$(-x)_q^k = \prod_{s=0}^{k-1} (0 + (-x)q^s) = (-x)(-xq)(-xq^2) \dots (-xq^{k-1}) = (-x)^k q^{\frac{k(k-1)}{2}}$$

olup bu ifadeler Eş. 3.6 da yerlerine yazıldıklarında

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[n+k-1]_q!}{[k]_q! [n-1]_q!} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{x^k}{(1+x)_q^{n+k}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{x^k}{(1+x)_q^{n+k}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}(q; x)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$V_{n,q}(e_0; x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}(q; x) = 1$$

elde edilir. Benzer şekilde Eş. 3.1 ve Eş. 3.2 den

$$\begin{aligned}
V_{n,q}(e_1; x) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}(q; x) \frac{[k]_q}{[n]_q q^{k-1}} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{x^k}{(1+x)_q^{n+k}} \frac{[k]_q}{[n]_q q^{k-1}} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{(k-1)(k-2)}{2}} \frac{x^k}{(1+x)_q^{n+k}} \frac{[k]_q}{[n]_q} \\
&= x \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k \\ k+1 \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{x^k}{(1+x)_q^{n+1+k}} \frac{[k+1]_q}{[n]_q} \\
&= x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[n+k]_q!}{[k+1]_q! [n-1]_q!} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{x^k}{(1+x)_q^{n+1+k}} \frac{[k+1]_q}{[n]_q} \\
&= x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[n+k]_q!}{[k]_q! [n]_q!} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{x^k}{(1+x)_q^{n+1+k}} \\
&= x \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{x^k}{(1+x)_q^{n+1+k}}
\end{aligned}$$

$$= x \sum_{k=0}^{\infty} b_{n+1,k}(q; x)$$

$$= x V_{n+1,q}(e_0; x)$$

$$= x$$

bulunur.

Eş. 3.1 den

$$\begin{aligned} V_{n,q}(e_2; x) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}(q; x) \left(\frac{[k]_q}{q^{k-1} [n]_q} \right)^2 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{x^k}{(1+x)_q^{n+k}} \left(\frac{[k]_q}{q^{k-1} [n]_q} \right)^2 \end{aligned}$$

olur. Burada $[k]_q = [k-1]_q + q^{k-1}$ eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} V_{n,q}(e_2; x) &= \sum_{k=2}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{(k-2)(k-3)}{2}} \frac{x^k}{(1+x)_q^{n+k}} \frac{[k]_q [k-1]_q}{q [n]_q^2} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{x^k}{(1+x)_q^{n+k}} \frac{[k]_q}{q^{k-1} [n]_q^2} \\ &= x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+2+k-1 \\ k+2 \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{x^k}{(1+x)_q^{n+2+k}} \frac{[k+2]_q [k+1]_q}{q [n]_q^2} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,k}(q; x) \frac{[k]_q}{q^{k-1} [n]_q^2} \\ &= x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[n+2+k-1]_q!}{[k+2]_q! [n-1]_q!} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{x^k}{(1+x)_q^{n+2+k}} \frac{[k+2]_q [k+1]_q}{q [n]_q^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{[n]_q} \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,k}(q; x) \frac{[k]_q}{q^{k-1} [n]_q} \\
& = \frac{[n+1]_q}{q[n]_q} x^2 \sum_{k=0}^{\infty} b_{n+2,k}(q; x) + \frac{1}{[n]_q} V_{n,q}(e_1; x) \\
& = \frac{[n+1]_q}{q[n]_q} x^2 V_{n+2,q}(e_0; x) + \frac{1}{[n]_q} V_{n,q}(e_1; x)
\end{aligned}$$

bulunur. Eş 3.2 ve Eş. 3.3 den

$$V_{n,q}(e_2; x) = \frac{[n+1]_q}{q[n]_q} x^2 + \frac{1}{[n]_q} x$$

olur.

3.2. q -Baskakov-Kantorovich Operatörleri

$q \in (0, 1)$, $x \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere q -integrale bağlı olarak q -Baskakov operatörlerinin Kantorovich tipli genellemesi

$$K_{n,q}(f; x) = [n]_q \sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}(q; x) \int_{q[k]_q/[n]_q}^{[k+1]_q/[n]_q} f(q^{-k+1}t) d_q t \quad (3.7)$$

şeklinde tanımlanır.

$q = 1$ alındığında q -Baskakov-Kantorovich operatörleri, Abel ve Gupta tarafından çalışılan

$$V_n(f; x) = n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt$$

operatörüne dönüşür[38].

3.2.1. Uyarı

Aşağıdaki eşitlikler q -integral tanımından kolaylıkla bulunur.

$$\int_{q[k]_q/[n]_q}^{[k+1]_q/[n]_q} d_q t = \frac{1}{[n]_q} \quad (3.8)$$

$$\int_{q[k]_q/[n]_q}^{[k+1]_q/[n]_q} t d_q t = \frac{[2]_q [k]_q + q^k}{[2]_q [n]_q^2} \quad (3.9)$$

$$\int_{q[k]_q/[n]_q}^{[k+1]_q/[n]_q} t^2 d_q t = \frac{[3]_q [k]_q^2 + (1 + [2]_q) q^k [k]_q + q^{2k}}{[3]_q [n]_q^3} \quad (3.10)$$

3.2.1. Lemma

Her $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}_+$, $0 < q < 1$ olmak üzere

$$K_{n,q}(e_0; x) = 1 \quad (3.11)$$

$$K_{n,q}(e_1; x) = x + \frac{q}{[2]_q [n]_q} \quad (3.12)$$

$$K_{n,q}(e_2; x) = \frac{[n+1]_q}{q[n]_q} x^2 + \frac{q(1 + [2]_q) + [3]_q}{[3]_q [n]_q} x + \frac{q^2}{[3]_q [n]_q^2} \quad (3.13)$$

İspat

$$K_{n,q}(e_0; x) = [n]_q \sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}(q; x) \int_{q[k]_q/[n]_q}^{[k+1]_q/[n]_q} d_q t$$

olmak üzere Eş. 3.2 ve Eş. 3.8 den

$$K_{n,q}(e_0; x) = [n]_q \frac{1}{[n]_q} \sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}(q; x)$$

$$= V_{n,q}(e_0; x)$$

$$= 1$$

olur.

Eş. 3.2, Eş.3.3 ve Eş. 3.9 kullanılarak

$$\begin{aligned}
K_{n,q}(e_1; x) &= [n]_q \sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}(q; x) \int_{q[k]_q/[n]_q}^{[k+1]_q/[n]_q} q^{-k+1} t d_q t \\
&= [n]_q \sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}(q; x) q^{-k+1} \left(\frac{[2]_q [k]_q + q^k}{[2]_q [n]_q^2} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}(q; x) \frac{[k]_q}{q^{k-1} [n]_q} + \frac{q}{[2]_q [n]_q} \sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}(q; x) \\
&= V_{n,q}(e_1; x) + \frac{q}{[2]_q [n]_q} V_{n,q}(e_0; x) \\
&= x + \frac{q}{[2]_q [n]_q}
\end{aligned}$$

bulunur.

$$K_{n,q}(e_2; x) = [n]_q \sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}(q; x) q^{-2k+2} \int_{q[k]_q/[n]_q}^{[k+1]_q/[n]_q} t^2 d_q t$$

olup, Eş. 3.10 dan

$$\begin{aligned}
K_{n,q}(e_2; x) &= [n]_q \sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}(q; x) q^{-2k+2} \left(\frac{[3]_q [k]_q^2 + (1 + [2]_q) q^k [k]_q + q^{2k}}{[3]_q [n]_q^3} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}(q; x) \frac{[k]_q^2}{q^{2k-2} [n]_q^2} + \frac{(1 + [2]_q) q}{[3]_q [n]_q} \sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}(q; x) \frac{[k]_q}{q^{k-1} [n]_q} + \frac{q^2}{[3]_q [n]_q^2} \sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}(q; x)
\end{aligned}$$

$$= V_{n,q}(e_2; x) + \frac{(1+[2]_q)q}{[3]_q [n]_q} V_{n,q}(e_1; x) + \frac{q^2}{[3]_q [n]_q^2} V_{n,q}(e_0; x)$$

bulunur. Burada Eş. 3.2, Eş. 3.3 ve Eş. 3.4 kullanıldığında

$$\begin{aligned} K_{n,q}(e_2; x) &= \frac{[n+1]_q}{q[n]_q} x^2 + \frac{1}{[n]_q} x + \frac{(1+[2]_q)q}{[3]_q [n]_q} x + \frac{q^2}{[3]_q [n]_q^2} \\ &= \frac{[n+1]_q}{q[n]_q} x^2 + \frac{q(1+[2]_q) + [3]_q}{[3]_q [n]_q} x + \frac{q^2}{[3]_q [n]_q^2} \end{aligned}$$

elde edilir.

3.2.2. Uyarı

Lemma 3.2.1 de $q=1$ alınırsa Baskakov-Kantorovich operatörlerinin aşağıdaki momentleri elde edilir[38].

$$K_n(e_0; x) = 1,$$

$$K_n(e_1; x) = x + \frac{1}{2n},$$

$$K_n(e_2; x) = x^2 + \frac{x(2+x)}{n} + \frac{1}{3n^2}.$$

Eş. 3.12 ve Eş. 3.13 incelendiğinde $(K_{n,q})$ operatörler dizisinin Bohman-Korovkin teoreminin koşullarını sağlamadığı açıktır.

3.2.1. Teorem

$(q_n), \forall n \in \mathbb{N}$ için $q_n \in (0,1)$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1$ olacak şekilde bir dizi ve (K_{n,q_n}) , Eş. 3.7 ile

verilen operatörler dizisi olsun. Herhangi kompakt bir $J \subset \mathbb{R}_+$ kümesinde her azalmayan

$f \in C(\mathbb{R}_+)$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} K_{n,q_n}(f; x) = f(x)$, (düzgün) [17].

İspat

Lemma 3.2.1 de hipotezde verilen $q, (q_n)$ dizisi ile değiştirildiğinde Bohman-Korovkin teoreminden elde edilir.

3.3. q -Baskakov-Kantorovich Operatörlerinin Ağırlıklı İstatistiksel Yaklaşım

Özellikleri

A -istatistiksel yakınsaklığı kullanarak Duman ve Orhan aşağıdaki Bohman-Korovkin tipli teoremi ispatladılar[39]. Soyut uzaylar için genel yaklaşım [16] da verilmiştir. Bu teoremi vermeden önce teoremin ispatında kullanılacak olan Lemma aşağıda verilecektir.

3.3.1. Lemma

$A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris olsun. (L_n) , $C_{\rho_1}(\mathbb{R})$ den $B_{\rho_2}(\mathbb{R})$ ye giden pozitif lineer operatörlerin bir dizisi, ρ_1 ve ρ_2 , $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\rho_1(x)}{\rho_2(x)} = 0$ koşulunu sağlayan iki ağırlık fonksiyonu ve de $\delta_A \left\{ n \in \mathbb{N} : \|L_n\|_{C_{\rho_1} \rightarrow B_{\rho_2}} \leq M \right\} = 1$ olacak şekilde bir $M > 0$ olsun. Bu durumda herhangi $s \in \mathbb{R}$ ve her $f \in C_{\rho_1}$ için

$$st_A - \lim_n \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \sup_{|x| \leq s} |L_n(f; x) - f(x)| = 0 \text{ ise } st_A - \lim_n \|L_n f - f\|_{\rho_2} = 0 \text{ [39].}$$

3.3.1. Teorem

$A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris olsun. (L_n) , $C_{\rho_1}(\mathbb{R})$ den $B_{\rho_2}(\mathbb{R})$ ye giden pozitif lineer operatörlerin bir dizisi ve $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\rho_1(x)}{\rho_2(x)} = 0$ olsun. Her $f \in C_{\rho_1}(\mathbb{R})$ için

$$st_A - \lim_n \|L_n f - f\|_{\rho_2} = 0 \Leftrightarrow st_A - \lim_n \|L_n F_v - F_v\|_{\rho_1} = 0, v = 0, 1, 2.$$

Burada $F_v(x) = \frac{x^v \rho_1(x)}{1+x^2}$, $v = 0, 1, 2$ [39].

İspat

$\forall f \in C_{\rho_1}$ için $st_A - \lim_n \|L_n f - f\|_{\rho_2} = 0$ olsun. $\nu=0,1,2$ için $F_\nu \in C_{\rho_1}$ olduğundan açıktır ki

$\nu=0,1,2$ için $st_A - \lim_n \|L_n F_\nu - F_\nu\|_{\rho_1} = 0$ olur.

Yeterliliği ispatlamak için öncelikle

$$\delta_A \left\{ n \in \mathbb{N} : \|L_n\|_{C_{\rho_1} \rightarrow B_{\rho_1}} \leq M \right\} = 1 \quad (3.14)$$

eşitliğinin bir $M > 0$ için sağlandığını göstermeliyiz.

Kabülünden $\nu = 0,1,2$ için bir $K_\nu \subseteq \mathbb{N}$ vardır $\ni \delta_A(K_\nu) = 1$ ve $\lim_{n \in K_\nu} \|L_n F_\nu - F_\nu\|_{\rho_1} = 0$, yani

$\forall \varepsilon > 0$ için $\exists N_\nu(\varepsilon)$ vardır $\ni$ her $n \geq N_\nu(\varepsilon)$ ve her $n \in K_\nu$ için $\|L_n F_\nu - F_\nu\|_{\rho_1} < \varepsilon$.

Böylece bir $M_\nu > 0$ vardır $\ni$ her $n \in K_\nu$ için $\|L_n F_\nu - F_\nu\|_{\rho_1} < M_\nu$.

Kabul edelim ki $K := K_0 \cap K_1 \cap K_2$ olsun. Bu durumda $\delta_A(K) = 1$ dir.

$\forall n \in K$ için Teorem 2.7.1. den

$$\begin{aligned} \|L_n\|_{C_{\rho_1} \rightarrow B_{\rho_1}} &= \|L_n \rho_1\|_{\rho_1} \\ &= \|L_n \rho_1 - \rho_1 + \rho_1\|_{\rho_1} \\ &\leq \|L_n \rho_1 - \rho_1\|_{\rho_1} + \|\rho_1\|_{\rho_1} \\ &= \|L_n \rho_1 - \rho_1\|_{\rho_1} + 1 \end{aligned} \quad (3.15)$$

elde edilir. Diğer yandan

$$|L_n(\rho_1(t); x) - \rho_1(x)| = \left| L_n \left(\frac{t^2 + 1}{t^2 + 1} \rho_1(t); x \right) - \frac{1 + x^2}{1 + x^2} \rho_1(x) \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \left(L_n \left(\frac{t^2}{1+t^2} \rho_1(t); x \right) - \frac{x^2}{1+x^2} \rho_1(x) \right) + \left(L_n \left(\frac{1}{1+t^2} \rho_1(t); x \right) - \frac{1}{1+x^2} \rho_1(x) \right) \right| \\
&= \left| \left(L_n(F_2; x) - F_2(x) \right) + \left(L_n(F_0; x) - F_0(x) \right) \right| \\
&\leq \left| L_n(F_2; x) - F_2(x) \right| + \left| L_n(F_0; x) - F_0(x) \right| \tag{3.16}
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Böylece Eş. 3.16, Eş. 3.15 de kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\|L_n\|_{C_{\rho_1} \rightarrow B_{\rho_1}} &\leq \|L_n \rho_1 - \rho_1\|_{\rho_1} + 1 \\
&\leq \|L_n F_2 - F_2\|_{\rho_1} + \|L_n F_0 - F_0\|_{\rho_1} + 1 \\
&\leq M_2 + M_0 + 1 = M
\end{aligned}$$

bulunur.

Buradan $K \subseteq \left\{ n : \|L_n\|_{C_{\rho_1} \rightarrow B_{\rho_1}} \leq M \right\}$ yazabiliriz. Böylece Eş. 3.14 sağlanır. Şimdi

$st_A - \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \sup_{|x| \leq s} |L_n(f; x) - f(x)| = 0$ olduğu gösterilecektir.

$$\begin{aligned}
L_n((t-x)^2 F_0(t); x) &= \left| L_n(t^2 F_0(t); x) - 2x L_n(t F_0(t); x) + x^2 L_n(F_0(t); x) \right| \\
&= \left| L_n(F_2(t); x) - 2x L_n(F_1(t); x) + x^2 L_n(F_0(t); x) \right| \\
&= \left| \left(L_n(F_2(t); x) - F_2(x) \right) + \frac{x^2}{1+x^2} \rho_1(x) - 2x \left(L_n(F_1(t); x) - F_1(x) \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{2x^2}{1+x^2} \rho_1(x) + x^2 \left(L_n(F_0(t); x) - F_0(x) \right) + \frac{x^2}{1+x^2} \rho_1(x) \right| \\
&\leq \left| L_n(F_2(t); x) - F_2(x) \right| + 2|x| \left| L_n(F_1(t); x) - F_1(x) \right| + x^2 \left| L_n(F_0(t); x) - F_0(x) \right|
\end{aligned}$$

olup, böylece herhangi $s \in \mathbb{R}$ ve $n \in K$ için

$$u_n := \sup_{|x| \leq s} L_n \left((t-x)^2 F_0(t); x \right) \quad (3.17)$$

$$\leq B \left\{ \|L_n F_2 - F_2\|_{\rho_1} + \|L_n F_1 - F_1\|_{\rho_1} + \|L_n F_0 - F_0\|_{\rho_1} \right\}$$

yazabiliriz. Burada

$$B := \max \left\{ \sup_{|x| \leq s} \rho_1(x), 2 \sup_{|x| \leq s} |x| \rho_1(x), \sup_{|x| \leq s} x^2 \rho_1(x) \right\}$$

dir.

Şimdi $f \in C_{\rho_1}$ ve $|x| \leq s$ olsun. Bu durumda f , $\mathbb{R}$ de sürekli olup $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$

vardır $\ni |t-x| < \delta$ olacak şekildeki her t, x için $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ olur.

$|t-x| \geq \delta$ iken

$$|f(t) - f(x)| \leq |f(t)| + |f(x)|$$

$$\leq M_f \rho_1(t) + M_f \rho_1(x)$$

$$\leq 2M_f \rho_1(x) \rho_1(t)$$

$$= 2M_f \rho_1(x) F_0(t) (1+t^2)$$

$$= 2M_f \rho_1(x) F_0(t) \left(1 + ((t-x) + x)^2 \right)$$

$$= 2M_f \rho_1(x) F_0(t) \left(1 + (t-x)^2 + 2(t-x)x + x^2 \right)$$

$$\leq 2M_f \rho_1(x) F_0(t) \left(1 + (t-x)^2 + 2|t-x||x| + x^2 \right)$$

$$\leq 2M_f \rho_1(x) F_0(t) \left(1 + (t-x)^2 + (t-x)^2 + x^2 + x^2 \right)$$

$$\leq 2M_f \rho_1(x) F_0(t) \left(2 + 2x^2 + 2(t-x)^2 \right)$$

$$= 4M_f \rho_1(x) F_0(t) \left(1 + x^2 + (t-x)^2 \right)$$

$$= 4M_f \rho_1(x) F_0(t) (t-x)^2 \left(\frac{1+x^2}{(t-x)^2} + 1 \right)$$

$$\leq K_{\rho_1(x)} (t-x)^2 F_0(t)$$

yazabiliriz. Burada $K_{\rho_1(x)} := 4M_f \rho_1(x) \left(\frac{1+x^2}{\delta^2} + 1 \right)$

dir.

Böylece $\forall t \in \mathbb{R}$ ve $|x| \leq s$ için

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon + K_{\rho_1(x)} (t-x)^2 F_0(t) \quad (3.18)$$

olup bu eşitsizlikten

$$\begin{aligned} |L_n(f(t); x) - f(x)| &= |L_n(f(t) - f(x); x) + f(x)L_n(1; x) - f(x)| \\ &\leq |L_n(f(t) - f(x); x)| + |f(x)| |L_n(1; x) - 1| \\ &\leq L_n(|f(t) - f(x)|; x) + |f(x)| |L_n(1; x) - 1| \\ &< \varepsilon L_n(1; x) + K_{\rho_1(x)} L_n((t-x)^2 F_0(t); x) + |f(x)| |L_n(1; x) - 1| \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan herhangi $s \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} v_n &:= \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \sup_{|x| \leq s} |L_n(f(t); x) - f(x)| \\ &< C_1 \varepsilon \|L_n(1; x)\|_{\rho_1} + C_2 \sup_{|x| \leq s} L_n((t-x)^2 F_0(t); x) + C_3 \sup_{|x| \leq s} |L_n(1; x) - 1| \end{aligned} \quad (3.19)$$

olur. Burada

$$C_1 := \sup_{|x| \leq s} \rho_1(x), \quad C_2 := \sup_{|x| \leq s} K_{\rho_1(x)}, \quad C_3 := \sup_{|x| \leq s} |f(x)|.$$

Pozitif lineer operatörlerin monotonluğundan ve Teorem 2.7.1 den

$$\|L_n 1\|_{\rho_1} \leq \|L_n \rho_1\|_{\rho_1} = \|L_n\|_{C_{\rho_1} \rightarrow B_{\rho_1}}$$

olup Eş. 3.19 dan

$\forall n \in K$ için

$$v_n \leq MC_1 \varepsilon + C_2 u_n + C_3 \sup_{|x| \leq s} |L_n(1; x) - 1| \quad (3.20)$$

elde edilir.

Ayrıca

$$\begin{aligned} |F_0(x)| |L_n(1; x) - 1| &\leq |L_n(F_0(t); x) - F_0(x)| + |L_n(F_0(t) - F_0(x); x)| \\ &\leq |L_n(F_0(t); x) - F_0(x)| + |L_n(|F_0(t) - F_0(x)|; x)| \end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda $F_0 \in C_{\rho_1}$ olduğundan Eş. 3.18 den

$$|L_n(1; x) - 1| < \frac{1}{|F_0(x)|} \left\{ |L_n(F_0(t); x) - F_0(x)| + \varepsilon L_n(1; x) + K_{\rho_1}(x) L_n((t-x)^2 F_0(t); x) \right\}$$

olup herhangi $s \in \mathbb{R}$ ve her $n \in K$ için

$$\sup_{|x| \leq s} |L_n(1; x) - 1| \leq C_4 \left\{ \|L_n F_0 - F_0\|_{\rho_1} + \varepsilon M + C_2 u_n \right\} \quad (3.21)$$

elde edilir. Burada $C_4 := \sup_{|x| \leq s} \frac{\rho_1(x)}{F_0(x)}$.

Eş. 3.17, Eş. 3.20 ve Eş. 3.21 den her $n \in K$ için

$$v_n \leq C\varepsilon + C \left\{ \|L_n F_0 - F_0\|_{\rho_1} + \|L_n F_1 - F_1\|_{\rho_1} + \|L_n F_2 - F_2\|_{\rho_1} \right\} \quad (3.22)$$

Burada $C := \max \{ M(C_1 + C_3 C_4), BC_2 + C_3 C_4 + BC_2 C_3 C_4 \}$.

Şimdi verilen bir $r > 0$ için $C\varepsilon < r$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ seçilsin.

$$D := \left\{ n \in K : \|L_n F_0 - F_0\|_{\rho_1} + \|L_n F_1 - F_1\|_{\rho_1} + \|L_n F_2 - F_2\|_{\rho_1} \geq \frac{r - C\varepsilon}{C} \right\}$$

$$D_0 := \left\{ n \in K : \|L_n F_0 - F_0\|_{\rho_1} \geq \frac{r - C\varepsilon}{C} \right\}$$

$$D_1 := \left\{ n \in K : \|L_n F_1 - F_1\|_{\rho_1} \geq \frac{r - C\varepsilon}{C} \right\}$$

$$D_2 := \left\{ n \in K : \|L_n F_2 - F_2\|_{\rho_1} \geq \frac{r - C\varepsilon}{C} \right\}$$

olmak üzere $D \subseteq D_0 \cup D_1 \cup D_2$ dir. Böylece Eş. 3.22 den

$$\sum_{n \in K: \gamma_n \geq r} a_{jn} \leq \sum_{n \in D} a_{jn} \leq \sum_{n \in D_0} a_{jn} + \sum_{n \in D_1} a_{jn} + \sum_{n \in D_2} a_{jn}$$

olup, $st_A - \lim_n \|L_n F_v - F_v\|_{\rho_1} = 0$, $v=0,1,2$ olduğundan

$st_A - \lim_n \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \sup_{|x| \leq s} |L_n(f; x) - f(x)| = 0$ bulunur. Böylece Lemma 3.3.1 den $\forall f \in C_{\rho_1}$ için

$$st_A - \lim_n \|L_n f - f\|_{\rho_2} = 0.$$

3.3.2. Teorem

$$(q_n), \forall n \in \mathbb{N} \text{ için } q_n \in (0,1), st - \lim_n q_n = 1 \quad (3.23)$$

olacak şekilde bir dizi olsun. Azalmayan her $f \in C_{\rho_0}(\mathbb{R}_+)$ için

$$st - \lim_n \|K_{n,q_n}(f; \cdot) - f\|_{\rho_\alpha} = 0, \quad \alpha > 0 [17].$$

İspat

Ağırlıklı uzaydaki norm tanımından

$$\|K_{n,q_n} e_0 - e_0\|_{\rho_0} = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} \frac{|K_{n,q_n}(e_0; x) - e_0(x)|}{\rho_0(x)}$$

olup, Eş. 3.11 den

$$st - \lim_n \|K_{n,q_n} e_0 - e_0\|_{\rho_0} = 0$$

bulunur.

$$\|K_{n,q_n} e_1 - e_1\|_{\rho_0} = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} \frac{|K_{n,q_n}(e_1; x) - e_1(x)|}{\rho_0(x)}$$

olup, Eş. 3.12 den

$$\frac{|K_{n,q_n}(e_1; x) - e_1(x)|}{1+x^2} \leq \|e_0\|_{\rho_0} \frac{q_n}{[2]_{q_n} [n]_{q_n}} \leq \frac{1}{[n]_{q_n}}$$

elde edilir. Ayrıca $st - \lim_n q_n = 1$ olduğundan $st - \lim_n \frac{1}{[n]_{q_n}} = 0$ dır. Bu durumda

$$st - \lim_n \|K_{n,q_n} e_1 - e_1\|_{\rho_0} = 0$$

olur.

$$\|K_{n,q_n} e_2 - e_2\|_{\rho_0} = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} \frac{|K_{n,q_n}(e_2; x) - e_2(x)|}{\rho_0(x)}$$

olup, Eş. 3.13 den

$$\begin{aligned} \frac{|K_{n,q_n}(e_2; x) - e_2(x)|}{1+x^2} &\leq \|e_2\|_{\rho_0} \left| \frac{[n+1]_{q_n}}{q_n [n]_{q_n}} - 1 \right| + \|e_1\|_{\rho_0} \left(\frac{q_n(1+[2]_{q_n}) + [3]_{q_n}}{[3]_{q_n} [n]_{q_n}} \right) + \|e_0\|_{\rho_0} \frac{q_n^2}{[3]_{q_n} [n]_{q_n}^2} \\ &\leq \frac{1}{q_n [n]_{q_n}} + \frac{2}{[n]_{q_n}} \frac{1}{2} + \frac{1}{[n]_{q_n}^2} \leq \frac{2}{q_n [n]_{q_n}} + \frac{1}{[n]_{q_n}^2} \end{aligned}$$

olup, eşitsizliğin sağ tarafı $n \rightarrow \infty$ için istatistiksel olarak sıfıra yakınsadığından

$$st - \lim_n \|K_{n,q_n} e_2 - e_2\|_{\rho_0} = 0$$

bulunur. Böylece Teorem 3.3.1 de $A = C_1$, $\rho_1(x) = 1 + x^2$, $\rho_2(x) = 1 + x^{2+\alpha}$ ve $x \in \mathbb{R}_+$ alınarak ispat tamamlanır.

3.4. q -Baskakov-Kantorovich Operatörlerinin Yakınsama Hızı

Bu kısımda $B_{\rho_\alpha}(\mathbb{R}_+)$ ağırlıklı uzayında Eş. 2.10 ile tanımlı süreklilik modülü kullanılarak, sınırsız fonksiyonlar için, $K_{n,q}(f)$ operatörünün f ye yakınsama hızı hesaplanacaktır.

3.4.1. Teorem

$q \in (0,1)$ ve $\alpha \geq 0$ olsun. Azalmayan her $f \in B_{\rho_\alpha}(\mathbb{R}_+)$ için

$$|K_{n,q}(f; x) - f(x)| \leq \sqrt{K_{n,q}(\mu_{x,\alpha}^2; x)} \left(1 + \frac{1}{\delta} \sqrt{K_{n,q}(\psi_x^2; x)} \right) \Omega_{\rho_\alpha}(f; \delta), \quad x \geq 0, \quad \delta > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Burada $\mu_{x,\alpha}(t) := 1 + (x + |t - x|)^{2+\alpha}$, $\psi_x(t) := |t - x|$, $t \geq 0$ [17].

İspat

$n \in \mathbb{N}$ ve $f \in B_{\rho_\alpha}(\mathbb{R}_+)$ olsun. Eş. 2.10 ve Eş 2.11 den

$t \geq 0$, $x \geq 0$ olmak üzere

$$|f(t) - f(x)| \leq \left(1 + (x + |t - x|)^{2+\alpha} \right) \left(1 + \frac{1}{\delta} |t - x| \right) \Omega_{\rho_\alpha}(f; \delta) \quad (3.24)$$

$$= \mu_{x,\alpha}(t) \left(1 + \frac{1}{\delta} \psi_x(t) \right) \Omega_{\rho_\alpha}(f; \delta) \quad (3.25)$$

elde edilir. Ayrıca q -integral tanımından

$$\int_{q[k]_q/[n]_q}^{[k+1]_q/[n]_q} f(q^{-k+1}t) d_q t = \int_0^{[k+1]_q/[n]_q} f(q^{-k+1}t) d_q t - \int_0^{q[k]_q/[n]_q} f(q^{-k+1}t) d_q t$$

olup, değişken değiştirme ile

$$\int_{q[k]_q/[n]_q}^{[k+1]_q/[n]_q} f(q^{-k+1}t) d_q t = q^{k-1} \int_{[k]_q/q^{k-2}[n]_q}^{[k+1]_q/q^{k-1}[n]_q} f(t) d_q t \quad (3.26)$$

bulunur. Bu durumda Eş. 3.7 ve Eş. 3.26 dan

$$K_{n,q}(f; x) = [n]_q \sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}(q; x) q^{k-1} \int_{[k]_q/q^{k-2}[n]_q}^{[k+1]_q/q^{k-1}[n]_q} f(t) d_q t$$

olup

$$|K_{n,q}(f; x) - f(x)| \leq [n]_q \sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}(q; x) q^{k-1} \int_{[k]_q/q^{k-2}[n]_q}^{[k+1]_q/q^{k-1}[n]_q} |f(t) - f(x)| d_q t$$

yazılabilir. Eşitsizliğin sağ tarafına Eş. 3.25 uygulanırsa

$$\begin{aligned} |K_{n,q}(f; x) - f(x)| &\leq [n]_q \sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}(q; x) q^{k-1} \int_{[k]_q/q^{k-2}[n]_q}^{[k+1]_q/q^{k-1}[n]_q} \mu_{x,\alpha}(t) \left(1 + \frac{1}{\delta} \psi_x(t)\right) \Omega_{\rho_\alpha}(f; \delta) d_q t \\ &= \left(K_{n,q}(\mu_{x,\alpha}; x) + \frac{1}{\delta} K_{n,q}(\mu_{x,\alpha} \psi_x; x) \right) \Omega_{\rho_\alpha}(f; \delta) \end{aligned}$$

bulunur. Eşitsizliğin sağ tarafına q -integral için Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulandığında

$$|K_{n,q}(f; x) - f(x)| \leq \sqrt{K_{n,q}(\mu_{x,\alpha}^2; x)} \left(1 + \frac{1}{\delta} \sqrt{K_{n,q}(\psi_x^2; x)}\right) \Omega_{\rho_\alpha}(f; \delta)$$

elde edilir.

3.4.1. Lemma

$m \in \mathbb{N}$ ve $q \in (0,1)$ için $K_{n,q}(e_m; x) \leq A_{m,q}(1+x^m)$, $x \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$

eşitsizliği sağlanır. Burada $A_{m,q}$, m ve q ya bağlı bir pozitif sabittir [17].

İspat

$k \in \mathbb{N}$, $0 < q < 1$, $[k+1]_q = 1 + q + q^2 + \dots + q^k = 1 + q[k]_q$ olmak üzere

$$1 \leq [k+1]_q = 1 + q[k]_q$$

$$\leq 1 + [k]_q$$

$$\leq [k]_q + [k]_q$$

$$= 2[k]_q$$

olup

$$1 \leq [k+1]_q \leq 2[k]_q \tag{3.27}$$

bulunur. $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere Eş. 3.1 den

$$\begin{aligned} V_{n,q}(e_m; x) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}(q; x) \frac{[k]_q^m}{q^{mk-m} [n]_q^m} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{x^k}{(1+x)_q^{n+k}} \frac{[k]_q^m}{q^{m(k-1)} [n]_q^m} \\ &= x \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k \\ k+1 \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k+1)}{2}} \frac{x^k}{(1+x)_q^{n+1+k}} \frac{[k+1]_q^m}{q^{mk} [n]_q^m} \\ &= x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[n+k]_q!}{[k+1]_q! [n-1]_q!} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{x^k}{(1+x)_q^{n+1+k}} \frac{[k+1]_q^m}{q^{(m-1)k} [n]_q^m} \\ &= x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[n+k]_q!}{[k]_q! [n]_q!} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{x^k}{(1+x)_q^{n+1+k}} \frac{[k+1]_q^{m-1}}{q^{(m-1)k} [n]_q^{m-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x \sum_{k=0}^{\infty} \left[\begin{matrix} n+1+k-1 \\ k \end{matrix} \right]_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{x^k}{(1+x)_q^{n+1+k}} \frac{[k+1]_q^{m-1}}{q^{(m-1)k} [n]_q^{m-1}} \\
&= x \frac{[n+1]_q^{m-1}}{[n]_q^{m-1}} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\begin{matrix} n+1+k-1 \\ k \end{matrix} \right]_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{x^k}{(1+x)_q^{n+1+k}} \frac{[k+1]_q^{m-1}}{q^{(m-1)k} [n+1]_q^{m-1}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafına Eş. 3.27 uygulanırsa

$$\begin{aligned}
V_{n,q}(e_m; x) &\leq x \frac{[n+1]_q^{m-1}}{[n]_q^{m-1}} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\begin{matrix} n+1+k-1 \\ k \end{matrix} \right]_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{x^k}{(1+x)_q^{n+1+k}} \frac{2^{m-1} [k]_q^{m-1}}{q^{(m-1)k} [n+1]_q^{m-1}} \\
&= x \frac{[n+1]_q^{m-1}}{[n]_q^{m-1}} \left(\frac{2}{q} \right)^{m-1} \sum_{k=0}^{\infty} b_{n+1,k}(q; x) \frac{[k]_q^{m-1}}{q^{(m-1)(k-1)} [n+1]_q^{m-1}} \\
&= x \left(1 + \frac{q^n}{[n]_q} \right)^{m-1} \left(\frac{2}{q} \right)^{m-1} V_{n+1,q}(e_{m-1}; x)
\end{aligned}$$

olup

$$V_{n,q}(e_m; x) \leq x \left(1 + \frac{q^n}{[n]_q} \right)^{m-1} \left(\frac{2}{q} \right)^{m-1} V_{n+1,q}(e_{m-1}; x) \quad (3.28)$$

elde edilir.

$m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, Eş. 3.28 ve tümevarım yöntemi ile

$$V_{n,q}(e_m; x) \leq x^m \left(1 + \frac{q^n}{[n]_q} \right)^{\frac{m(m-1)}{2}} \left(\frac{2}{q} \right)^{\frac{m(m-1)}{2}} \quad (3.29)$$

bulunur. Eş. 3.29 dan

$$V_{n,q}(e_m; x) \leq B_{m,q}(1+x^m) \quad (3.30)$$

elde edilir. Burada $B_{m,q} := 2^{\frac{m(m-1)}{2}} \left(\frac{2}{q}\right)^{\frac{m(m-1)}{2}}$.

Ayrıca

$$\begin{aligned}
 K_{n,q}(e_m; x) &= [n]_q \sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}(q; x) \int_{q[k]_q/[n]_q}^{[k+1]_q/[n]_q} (q^{-k+1}t)^m d_q t \\
 &= [n]_q \sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}(q; x) q^{-mk+m} \int_{q[k]_q/[n]_q}^{[k+1]_q/[n]_q} t^m d_q t
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

olur. q -integral tanımından

$$\begin{aligned}
 \int_{q[k]_q/[n]_q}^{[k+1]_q/[n]_q} t^m d_q t &= \int_0^{[k+1]_q/[n]_q} t^m d_q t - \int_0^{q[k]_q/[n]_q} t^m d_q t \\
 &= (1-q) \frac{[k+1]_q}{[n]_q} \sum_{j=0}^{\infty} \left(q^j \frac{[k+1]_q}{[n]_q} \right)^m q^j - (1-q) \frac{q[k]_q}{[n]_q} \sum_{j=0}^{\infty} \left(q^j \frac{q[k]_q}{[n]_q} \right)^m q^j \\
 &= (1-q) \frac{[k+1]_q^{m+1}}{[n]_q^{m+1}} \sum_{j=0}^{\infty} q^{(m+1)j} - (1-q) \frac{q^{m+1} [k]_q^{m+1}}{[n]_q^{m+1}} \sum_{j=0}^{\infty} q^{(m+1)j} \\
 &= (1-q) \frac{[k+1]_q^{m+1}}{[n]_q^{m+1}} \frac{1}{1-q^{m+1}} - (1-q) \frac{q^{m+1} [k]_q^{m+1}}{[n]_q^{m+1}} \frac{1}{1-q^{m+1}} \\
 &= \frac{[k+1]_q^{m+1}}{[n]_q^{m+1} [m+1]_q} - \frac{q^{m+1} [k]_q^{m+1}}{[n]_q^{m+1} [m+1]_q}
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Eş. 3.32, Eş. 3.31 de yerine yazılırsa

$$K_{n,q}(e_m; x) = \frac{q^m}{[n]_q^m [m+1]_q} b_{n,0}(q; x)$$

$$+ [n]_q \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,k}(q; x) \frac{q^{-mk+m}}{[n]_q^{m+1} [m+1]_q} \left([k+1]_q^{m+1} - q^{m+1} [k]_q^{m+1} \right) \quad (3.33)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} [k+1]_q^{m+1} - q^{m+1} [k]_q^{m+1} &= \left([k+1]_q^m + q[k]_q [k+1]_q^{m-1} + \dots + q^m [k]_q^m \right) \\ &\leq (m+1) [k+1]_q^m \end{aligned}$$

olduğundan Eş. 3.27 den

$$[k+1]_q^{m+1} - q^{m+1} [k]_q^{m+1} \leq 2^m (m+1) [k]_q^m \quad (3.34)$$

bulunur. Eş. 3.34, Eş. 3.33 de kullanılırsa

$$\begin{aligned} K_{n,q}(e_m; x) &\leq \frac{q^m}{[n]_q^m [m+1]_q} b_{n,0}(q; x) + [n]_q \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,k}(q; x) \frac{q^{-mk+m}}{[n]_q^{m+1} [m+1]_q} 2^m (m+1) [k]_q^m \\ &= \frac{q^m}{[n]_q^m [m+1]_q} b_{n,0}(q; x) + \frac{2^m (m+1)}{[m+1]_q} \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,k}(q; x) \frac{[k]_q^m}{[n]_q^m q^{m(k-1)}} \\ &= \frac{q^m}{[n]_q^m [m+1]_q} b_{n,0}(q; x) + \frac{2^m (m+1)}{[m+1]_q} V_{n,q}(e_m; x) \end{aligned}$$

olur. Böylece Eş. 3.30 dan

$$\begin{aligned} K_{n,q}(e_m; x) &\leq \frac{q^m}{[n]_q^m [m+1]_q} b_{n,0}(q; x) + \frac{2^m (m+1)}{[m+1]_q} B_{m,q}(1+x^m) \\ &\leq \left(1 + \frac{2^m (m+1)}{[m+1]_q} B_{m,q} \right) (1+x^m) \\ &= A_{m,q}(1+x^m) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $A_{m,q} := 1 + \frac{2^m(m+1)}{[m+1]_q} B_{m,q}$.

3.4.1. Uyarı

Herhangi bir lineer pozitif operatör monoton olduğundan Lemma 3.4.1, her

$f \in B_{\rho_\alpha}(\mathbb{R}_+)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0$ için $K_{n,q}(f; \cdot) \in B_{\rho_\alpha}(\mathbb{R}_+)$ olduğunu gösterir.

3.4.2. Teorem

(q_n) , Eş. 3.23 ü sağlayan bir dizi ve $\alpha \in \mathbb{N}_0$ olsun. Azalmayan her $f \in B_{\rho_\alpha}(\mathbb{R}_+)$ için

$$\|K_{n,q_n}(f; \cdot) - f\|_{\rho_{\alpha+1}} \leq C_{\alpha,q_0} \Omega_{\rho_\alpha}(f; \delta_n)$$

dir. Burada $\delta_n := \sqrt{\frac{1}{q_n[n]_{q_n}}}$ ve C_{α,q_0} , f ve n den bağımsız bir pozitif sabittir[17].

İspat

Eş. 3.11, Eş. 3.12 ve Eş. 3.13 den

$$\begin{aligned} K_{n,q_n}(\psi_x^2; x) &= K_{n,q_n}(|t-x|^2; x) = K_{n,q_n}(t^2 - 2xt + x^2; x) \\ &= K_{n,q_n}(t^2; x) - 2xK_{n,q_n}(t; x) + x^2K_{n,q_n}(1; x) \\ &= \frac{[n+1]_{q_n}}{q_n[n]_{q_n}}x^2 + \frac{q_n(1+[2]_{q_n})+[3]_{q_n}}{[3]_{q_n}[n]_{q_n}}x + \frac{q_n^2}{[3]_{q_n}[n]_{q_n}^2} - 2x\left(x + \frac{q_n}{[2]_{q_n}[n]_{q_n}}\right) + x^2 \\ &= \left(\frac{[n+1]_{q_n}}{q_n[n]_{q_n}} - 1\right)x^2 + \frac{1}{[n]_{q_n}}\left(\frac{q_n(1+[2]_{q_n})+[3]_{q_n}}{[3]_{q_n}} - 2\frac{q_n}{[2]_{q_n}}\right)x + \frac{q_n^2}{[3]_{q_n}[n]_{q_n}^2} \\ &\leq \frac{1}{q_n[n]_{q_n}}x^2 + \frac{2}{[n]_{q_n}}x + \frac{1}{[n]_{q_n}^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{q_n [n]_{q_n}} x^2 + \frac{2}{[n]_{q_n}} x + \frac{1}{[n]_{q_n}} \\
&= \frac{x^2 + 2q_n x + q_n}{q_n [n]_{q_n}} \\
&\leq \frac{x^2 + 2x + 1}{q_n [n]_{q_n}} \\
&\leq \frac{4\rho_0(x)}{q_n [n]_{q_n}}
\end{aligned}$$

bulunur.

$\alpha \in \mathbb{N}_0$ ve $f \in B_{\rho_\alpha}(\mathbb{R}_+)$ olmak üzere Teorem 3.4.1 ve yukarıdaki eşitsizlikten

$$\begin{aligned}
\frac{|K_{n,q_n}(f;x) - f(x)|}{\rho_{\alpha+1}(x)} &\leq 2 \sqrt{\frac{K_{n,q_n}(\mu_{x,\alpha}^2;x) \rho_0(x)}{\rho_{\alpha+1}^2(x)}} \left(1 + \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{1}{q_n [n]_{q_n}}} \right) \Omega_{\rho_\alpha}(f; \delta_n) \\
&\leq 4 \sqrt{\frac{K_{n,q_n}(\mu_{x,\alpha}^2;x)}{\rho_{2(\alpha+1)}(x)}} \left(1 + \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{1}{q_n [n]_{q_n}}} \right) \Omega_{\rho_\alpha}(f; \delta_n)
\end{aligned} \tag{3.35}$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\mu_{x,\alpha}^2(t) &= \left(1 + (x + |t - x|)^{2+\alpha} \right)^2 \leq 2 \left(1 + (2x + t)^{4+2\alpha} \right) \\
&\leq 2 \left(1 + 2^{4+2\alpha} ((2x)^{4+2\alpha} + t^{4+2\alpha}) \right)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$K_{n,q_n}(\mu_{x,\alpha}^2;x) \leq 2K_{n,q_n}(1;x) + 2^{5+2\alpha} 2^{4+2\alpha} x^{4+2\alpha} K_{n,q_n}(1;x) + 2^{5+2\alpha} K_{n,q_n}(t^{4+2\alpha};x)$$

yazılabilir. Eş. 3.11 ve Lemma 3.4.1 den

$$K_{n,q_n}(\mu_{x,\alpha}^2;x) \leq 2 + 2^{5+2\alpha} 2^{4+2\alpha} x^{4+2\alpha} + 2^{5+2\alpha} A_{4+2\alpha,q_n}(1+x^{4+2\alpha})$$

bulunur. Eşitsizliğin her iki tarafı $\rho_{2(\alpha+1)}(x)$ ağırlık fonksiyonuna bölünürse

$$\begin{aligned}
\frac{K_{n,q_n}(\mu_{x,\alpha}^2; x)}{\rho_{2(\alpha+1)}(x)} &\leq \frac{2 + 2^{5+2\alpha} 2^{4+2\alpha} x^{4+2\alpha} + 2^{5+2\alpha} A_{4+2\alpha,q_n} (1 + x^{4+2\alpha})}{1 + x^{4+2\alpha}} \\
&\leq \frac{2^{5+2\alpha} + 2^{5+2\alpha} 2^{4+2\alpha} x^{4+2\alpha}}{1 + x^{4+2\alpha}} + 2^{5+2\alpha} A_{4+2\alpha,q_n} \\
&= 2^{5+2\alpha} \left(\left(\frac{1 + (2x)^{4+2\alpha}}{1 + x^{4+2\alpha}} \right) + A_{4+2\alpha,q_n} \right) \\
&= 2^{5+2\alpha} \left(1 + \frac{x^{4+2\alpha} (2^{4+2\alpha} - 1)}{1 + x^{4+2\alpha}} + A_{4+2\alpha,q_n} \right) \\
&\leq 2^{5+2\alpha} (1 + 2^{4+2\alpha} - 1 + A_{4+2\alpha,q_n}) \\
&= 2^{5+2\alpha} (2^{4+2\alpha} + A_{4+2\alpha,q_n})
\end{aligned} \tag{3.36}$$

olup buradan

$$\frac{K_{n,q_n}(\mu_{x,\alpha}^2; x)}{\rho_{2(\alpha+1)}(x)} \leq \mu_{\alpha,q_n}^2 \tag{3.37}$$

elde edilir. Burada

$$2^{5+2\alpha} (2^{4+2\alpha} + A_{4+2\alpha,q_n}) = \mu_{\alpha,q_n}^2$$

dır. Eş. 3.37, Eş. 3.35 de yerine yazılıp, $q_0 := \min_{n \in \mathbb{N}} q_n$, $C_{\alpha,q_0} := 8\mu_{\alpha,q_0}$ alındığında

$$\begin{aligned}
\frac{|K_{n,q_n}(f; x) - f(x)|}{\rho_{\alpha+1}(x)} &\leq 4\mu_{\alpha,q_n} 2\Omega_{\rho_\alpha}(f; \delta_n) \\
&= C_{\alpha,q_0} \Omega_{\rho_\alpha}(f; \delta_n)
\end{aligned}$$

olur. Eşitliğin her iki tarafının supremumu alınırsa

$$\|K_{n,q_n}(f; \cdot) - f\|_{\rho_{\alpha+1}} \leq C_{\alpha,q_0} \Omega_{\rho_\alpha}(f; \delta_n)$$

elde edilir. Ayrıca $st - \lim_n q_n = 1$, $st - \lim_n \frac{1}{[n]_q} = 0$ olduğundan $st - \lim_n \delta_n = 0$

olup $st - \lim_n \Omega_{\rho_\alpha}(f; \delta_n) = 0$ dır.

Böylece Teorem 3.4.2 $K_{n,q_n}(f; \cdot)$ operatörünün f ye istatistiksel yakınsaklık hızını verir.

4. q -BASKAKOV-KANTOROVICH OPERATÖRLERİNİN YENİ BİR GENELLEMESİNİN İSTATİSTİKSEL YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Son zamanlarda Gupta ve Radu, q -Baskakov-Kantorovich operatörlerinin pozitif olmayan bir q -analoğunu tanımlamışlardır[17]. Bu bölümde Mahmudov tarafından [18] de tanımlanan q -Baskakov-Kantorovich operatörlerinin ağırlıklı istatistiksel yaklaşım özellikleri incelenecektir. Bu şekilde tanımlanan operatörün avantajı pozitif olmasıdır.

4.1. Operatörlerin İnşası

Reel değerli, $\mathbb{R}_+$ kümesi üzerinde sürekli, q -diferensiyellenebilir fonksiyonların bir $(\phi_{n,q})$ dizisi aşağıdaki özellikleri sağlasın.

$$(B1) \quad \phi_{n,q}(0) = 1, \quad n \in \mathbb{N}, \quad 0 < q < 1$$

$$(B2) \quad (-1)^k D_q^k \phi_{n,q}(x) \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\} := \mathbb{N}_0, \quad x \geq 0, \quad 0 < q < 1$$

$$(B3) \quad \text{Her } k \in \mathbb{N} \text{ ve } x \in \mathbb{R}_+ \text{ için } D_q^k \phi_{n,q}(x) = -[n+l_1]_q D_q^{k-1} \phi_{n+l_2,q}(x).$$

Burada $l_1, l_2 \in \mathbb{N}_0$ olup n, k ve x den bağımsızdır.

(B1) ve (B3) den

$$D_q^k \phi_{n,q}(0) = (-1)^k [n+l_1]_q [n+l_1+l_2]_q \dots [n+l_1+(k-1)l_2]_q \quad (4.1)$$

elde edilir.

4.2. q -Baskakov Operatörlerinin Yeni Bir Genellemesi

(B1)-(B3) ile tanımlanan $(\phi_{n,q})$ fonksiyon dizisi kullanılarak elde edilen Baskakov operatörlerinin yeni bir q -analoğu, her $f \in C_2(\mathbb{R}_+)$, $x \in \mathbb{R}_+$, $0 < q < 1$, $n \in \mathbb{N}$ için

$$V_{n,q}^*(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{[k]_q!} q^{\frac{k(k-1)}{2}} D_q^k \phi_{n,q}(x) f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q}\right) \quad (4.2)$$

dir[18].

$(V_{n,q}^*)$ operatörler dizisinin pozitif ve lineer olduğu açıktır.

4.2.1. Lemma

$e_j = t^j$, $t \in \mathbb{R}_+$, $j \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}_+$ ve $0 < q < 1$ için

$$V_{n,q}^*(e_0; x) = 1 \quad (4.3)$$

$$V_{n,q}^*(e_1; x) = -x \frac{D_q \phi_{n,q}(0)}{[n]_q} \quad (4.4)$$

$$V_{n,q}^*(e_2; x) = x^2 \frac{D_q^2 \phi_{n,q}(0)}{q[n]_q^2} - x \frac{D_q \phi_{n,q}(0)}{[n]_q^2} \quad (4.5)$$

dir[18].

İspat

q -taylor açılımından

$$\phi_{n,q}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-x)_q^k}{[k]_q!} D_q^k \phi_{n,q}(x)$$

yazabiliriz.

Burada $t = 0$ olsun. $(-x)_q^k = (-x)^k q^{\frac{k(k-1)}{2}}$ olması ve (B1) özelliğinden

$$\phi_{n,q}(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{[k]_q!} q^{\frac{k(k-1)}{2}} D_q^k \phi_{n,q}(x) = 1$$

olup

$$V_{n,q}^*(e_0; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{[k]_q!} q^{\frac{k(k-1)}{2}} D_q^k \phi_{n,q}(x) = 1$$

elde edilir.

$\phi_{n,q}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-x)_q^k}{[k]_q!} D_q^k \phi_{n,q}(x)$ eşitliğinde her iki tarafın t ye göre q -türevi alındığında

$$D_q \phi_{n,q}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[k]_q (t-x)_q^{k-1}}{[k]_q!} D_q^k \phi_{n,q}(x)$$

olur. $t = 0$ için

$$D_q \phi_{n,q}(0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[k]_q (-x)_q^{k-1}}{[k]_q!} D_q^k \phi_{n,q}(x)$$

olup $(0-x)_q^{k-1} = (0-x)(0-qx)\dots(0-q^{k-2}x) = (-x)^{k-1} q^{\frac{(k-1)(k-2)}{2}}$ olduğundan

$$\frac{-x D_q \phi_{n,q}(0)}{[n]_q} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{[k]_q!} q^{\frac{k(k-1)}{2}} D_q^k \phi_{n,q}(x) \frac{[k]_q}{q^{k-1} [n]_q} \quad (4.6)$$

bulunur. Diğer yandan

$$V_{n,q}^*(e_1; x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{[k]_q!} q^{\frac{k(k-1)}{2}} D_q^k \phi_{n,q}(x) \frac{[k]_q}{q^{k-1} [n]_q} \quad (4.7)$$

olduğundan Eş. 4.6 ve Eş. 4.7 den

$$V_{n,q}^*(e_1; x) = \frac{-x D_q \phi_{n,q}(0)}{[n]_q}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$D_q^2 \phi_{n,q}(t) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{[k]_q [k-1]_q (t-x)_q^{k-2}}{[k]_q!} D_q^k \phi_{n,q}(x)$$

olup $t = 0$ için

$$D_q^2 \phi_{n,q}(0) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{[k]_q [k-1]_q (-x)_q^{k-2}}{[k]_q!} q^{\frac{(k-2)(k-3)}{2}} D_q^k \phi_{n,q}(x)$$

dir. Böylece

$$x^2 D_q^2 \phi_{n,q}(0) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k [k]_q [k-1]_q x^k}{[k]_q!} q^{\frac{(k-2)(k-3)}{2}} D_q^k \phi_{n,q}(x) \quad (4.8)$$

ve

$$-xq D_q \phi_{n,q}(0) = q \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k [k]_q x^k}{[k]_q!} q^{\frac{(k-1)(k-2)}{2}} D_q^k \phi_{n,q}(x) \quad (4.9)$$

olduğundan Eş.4.8 ve Eş. 4.9 dan

$$\begin{aligned} x^2 D_q^2 \phi_{n,q}(0) - xq D_q \phi_{n,q}(0) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k [k]_q [k-1]_q x^k}{[k]_q!} q^{\frac{(k-2)(k-3)}{2}} D_q^k \phi_{n,q}(x) \\ &\quad + q \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k [k]_q x^k}{[k]_q!} q^{\frac{(k-1)(k-2)}{2}} D_q^k \phi_{n,q}(x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k [k]_q x^k}{[k]_q!} q^{\frac{(k-2)(k-3)}{2}} D_q^k \phi_{n,q}(x) ([k-1]_q + q^{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k [k]_q x^k}{[k]_q!} q^{\frac{(k-2)(k-3)}{2}} D_q^k \phi_{n,q}(x) [k]_q \end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki eşitlikte her iki taraf $\frac{1}{q[n]_q^2}$ ile çarpılırsa,

$$\frac{x^2 D_q^2 \phi_{n,q}(0) - xq D_q \phi_{n,q}(0)}{q[n]_q^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{[k]_q!} q^{\frac{k(k-1)}{2}} D_q^k \phi_{n,q}(x) \frac{[k]_q^2}{q^{2(k-1)} [n]_q^2} \quad (4.10)$$

elde edilir. Diğer yandan

$$V_{n,q}^*(e_2; x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{[k]_q!} q^{\frac{k(k-1)}{2}} D_q^k \phi_{n,q}(x) \frac{[k]_q^2}{q^{2(k-1)} [n]_q^2} \quad (4.11)$$

olduğundan Eş. 4.10 ve Eş. 4.11 den

$$V_{n,q}^*(e_2; x) = x^2 \frac{D_q^2 \phi_{n,q}(0)}{q[n]_q^2} - x \frac{D_q \phi_{n,q}(0)}{[n]_q^2}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

4.2.1. Uyarı

Eş. 4.3, Eş. 4.4 ve Eş. 4.5, her $f \in C_2(\mathbb{R}_+)$ için $V_{n,q}f \in C_2(\mathbb{R}_+)$ olmasını garanti eder.

4.2.2. Uyarı

Eğer $\phi_{n,q}(x) = e_q(-[n]_q x)$ alınırsa q -Szász-Mirakjan operatörü [40],

$\phi_{n,q}(x) = e_q(-[n+p]_q x)$ alınırsa q -Szász-Schurer operatörü [41], $\phi_{n,q}(x) = \frac{1}{(1+x)_q^n}$ alınırsa

q -Baskakov operatörü [42], $\phi_{n,q}(x) = \frac{1}{(1+x)_q^{n+p}}$ alınırsa q -Baskakov-Schurer operatörü elde edilir.

4.3. q -Baskakov-Kantorovich Operatörlerinin Yeni Bir Genellemesi

Her $f \in C_2(\mathbb{R}_+)$, $x \in \mathbb{R}_+$, $0 < q < 1$ için

$$K_{n,q}^*(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{[k]_q!} q^{\frac{k(k-1)}{2}} D_q^k \phi_{n,q}(x) \int_0^1 f\left(\frac{[k]_q + q^k t}{q^{k-1} [n]_q}\right) d_q t \quad (4.12)$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $(\phi_{n,q})$ fonksiyon dizisi (B1)-(B3) özelliklerini sağlar. $(K_{n,q}^*)$ operatörler dizisinin pozitif ve lineer olduğu açıktır.

4.3.1. Lemma

$$K_{n,q}^*(e_m; x) = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \left(\frac{q}{[n]_q}\right)^{m-j} \frac{1}{[m-j+1]_q} V_{n,q}^*(e_j; x) \quad (4.13)$$

dir[18].

İspat

Binom açılımından

$$\int_0^1 \left(\frac{[k]_q + q^k t}{q^{k-1} [n]_q} \right)^m d_q t = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \left(\frac{q}{[n]_q} \right)^{m-j} \left(\frac{[k]_q}{q^{k-1} [n]_q} \right)^j \int_0^1 t^{m-j} d_q t$$

ve q -integral tanımından,

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{m-j} d_q t &= (1-q) \sum_{a=0}^{\infty} q^{a(m-j)} q^a \\ &= (1-q) \sum_{a=0}^{\infty} q^{a(m-j+1)} \\ &= (1-q) \frac{1}{1-q^{m-j+1}} \\ &= \frac{1}{[m-j+1]_q} \end{aligned}$$

olup

$$\int_0^1 \left(\frac{[k]_q + q^k t}{q^{k-1} [n]_q} \right)^m d_q t = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \left(\frac{q}{[n]_q} \right)^{m-j} \left(\frac{[k]_q}{q^{k-1} [n]_q} \right)^j \frac{1}{[m-j+1]_q}$$

bulunur. O halde

$$\begin{aligned} K_{n,q}^*(e_m; x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{[k]_q!} q^{\frac{k(k-1)}{2}} D_q^k \phi_{n,q}(x) \int_0^1 \left(\frac{[k]_q + q^k t}{q^{k-1} [n]_q} \right)^m d_q t \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{[k]_q!} q^{\frac{k(k-1)}{2}} D_q^k \phi_{n,q}(x) \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \left(\frac{q}{[n]_q} \right)^{m-j} \frac{1}{[m-j+1]_q} \left(\frac{[k]_q}{q^{k-1} [n]_q} \right)^j \\ &= \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \left(\frac{q}{[n]_q} \right)^{m-j} \frac{1}{[m-j+1]_q} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{[k]_q!} q^{\frac{k(k-1)}{2}} D_q^k \phi_{n,q}(x) \left(\frac{[k]_q}{q^{k-1} [n]_q} \right)^j \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \left(\frac{q}{[n]_q} \right)^{m-j} \frac{1}{[m-j+1]_q} V_{n,q}^*(e_j; x)$$

elde edilir.

4.3.1. Sonuç

Her $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}_+$, $0 < q < 1$ için

$$K_{n,q}^*(e_0; x) = 1 \quad (4.14)$$

$$K_{n,q}^*(e_1; x) = \frac{[n+l_1]_q}{[n]_q} x + \frac{q}{(1+q)[n]_q} \quad (4.15)$$

$$K_{n,q}^*(e_2; x) = \frac{[n+l_1]_q [n+l_1+l_2]_q}{q[n]_q^2} x^2 + \frac{1+3q}{1+q} \frac{[n+l_1]_q}{[n]_q^2} x + \frac{q^2}{(1+q+q^2)[n]_q^2} \quad (4.16)$$

$$K_{n,q}^*((e_1 - xe_0)^2; x) \leq \frac{1}{q[n]_q} (a(l_1, l_2, q)x^2 + b(l_1, l_2, q)x + 1) \quad (4.17)$$

Burada $a(l_1, l_2, q)$ ve $b(l_1, l_2, q)$, l_1 , l_2 ve q ya bağlı sabitlerdir [18].

İspat

Eş. 4.1 den

$$D_q \phi_{n,q}(0) = -[n+l_1]_q, \quad D_q^2 \phi_{n,q}(0) = [n+l_1]_q [n+l_1+l_2]_q$$

dir. Ayrıca Eş. 4.13 ve Eş. 4.3 den

$$K_{n,q}^*(e_0; x) = V_{n,q}^*(e_0; x)$$

$$= 1$$

Eş. 4.13 den

$$\begin{aligned}
 K_{n,q}^*(e_1; x) &= \sum_{j=0}^1 \binom{1}{j} \left(\frac{q}{[n]_q} \right)^{1-j} \frac{1}{[1-j+1]_q} V_{n,q}^*(e_j; x) \\
 &= \binom{1}{0} \left(\frac{q}{[n]_q} \right) \frac{1}{[2]_q} V_{n,q}^*(e_0; x) + \binom{1}{1} V_{n,q}^*(e_1; x)
 \end{aligned}$$

bulunur. Burada Eş. 4.3 ve Eş. 4.4 den

$$\begin{aligned}
 K_{n,q}^*(e_1; x) &= -x \frac{D_q \phi_{n,q}(0)}{[n]_q} + \frac{q}{[n]_q (1+q)} \\
 &= \frac{[n+l_1]_q}{[n]_q} x + \frac{q}{[n]_q (1+q)}
 \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde Eş. 4.13 den

$$\begin{aligned}
 K_{n,q}^*(e_2; x) &= \sum_{j=0}^2 \binom{2}{j} \left(\frac{q}{[n]_q} \right)^{2-j} \frac{1}{[2-j+1]_q} V_{n,q}^*(e_j; x) \\
 &= \binom{2}{0} \left(\frac{q}{[n]_q} \right)^2 \frac{1}{[3]_q} V_{n,q}^*(e_0; x) + \binom{2}{1} \left(\frac{q}{[n]_q} \right) \frac{1}{[2]_q} V_{n,q}^*(e_1; x) + \binom{2}{2} V_{n,q}^*(e_2; x)
 \end{aligned}$$

bulunur. Burada Eş. 4.3, Eş. 4.4 ve Eş. 4.5 den

$$\begin{aligned}
 K_{n,q}^*(e_2; x) &= x^2 \frac{D_q^2 \phi_{n,q}(0)}{q [n]_q^2} - x \frac{1+3q}{1+q} \frac{D_q \phi_{n,q}(0)}{[n]_q^2} + \frac{[n+l_1]_q [n+l_1+l_2]_q}{q [n]_q^2} x^2 \\
 &= \frac{[n+l_1]_q [n+l_1+l_2]_q}{q [n]_q^2} x^2 + \frac{1+3q}{1+q} \frac{[n+l_1]_q}{[n]_q^2} x + \frac{q^2}{(1+q+q^2) [n]_q^2}
 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Eş. 4.14, Eş. 4.15 ve Eş. 4.16 dan

$$\begin{aligned}
K_{n,q}^* \left((e_1 - x e_0)^2; x \right) &= \left(\frac{[n+l_1]_q [n+l_1+l_2]_q}{q[n]_q^2} - 2 \frac{[n+l_1]_q}{[n]_q} + 1 \right) x^2 + \left(\frac{1+3q}{1+q} \frac{[n+l_1]_q}{[n]_q^2} - \frac{q}{(1+q)[n]_q} \right) x \\
&\quad + \frac{q^2}{(1+q+q^2)[n]_q^2} \\
&= \left(\frac{1-q^n}{q[n]_q} + \frac{q^n ([l_1]_q + [l_1+l_2]_q)}{q[n]_q^2} + \frac{q^{2n} [l_1]_q [l_1+l_2]_q}{q[n]_q^2} - 2 \frac{q^n [l_1]_q}{[n]_q} \right) x^2 \\
&\quad + \left(\frac{1+2q}{(1+q)[n]_q} + \frac{(1+3q)q^n [l_1]_q}{(1+q)[n]_q^2} \right) x + \frac{q^2}{(1+q+q^2)[n]_q^2} \\
&\leq \frac{1}{q[n]_q} (a(l_1, l_2, q)x^2 + b(l_1, l_2, q)x + 1)
\end{aligned}$$

elde edilir.

4.3.1. Teorem

(q_n) , $\forall n \in \mathbb{N}$ için $q_n \in (0,1)$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1$ olacak şekilde bir dizi ve $A > 0$ olsun. Bu durumda her $f \in C_2^*(\mathbb{R}_+)$ için $(K_{n,q}^*)$ operatörler dizisi $[0, A]$ aralığında f fonksiyonuna düzgün yakınsar[18].

İspat

Sonuç 4.3.1 göz önüne alındığında ispat Bohman-Korovkin teoreminden açıktır.

Aynı sonuç $V_{n,q}^*$ operatörü için de geçerlidir.

4.4. q -Baskakov-Kantorovich Operatörlerinin Yeni Bir Genellemesinin Ağırlıklı İstatistiksel Yaklaşım Özellikleri

Bu kısımda Teorem 3.3.1 kullanılarak sırasıyla Eş. 4.2 ve Eş. 4.12 ile verilen $V_{n,q}^*$ ve $K_{n,q}^*$ operatörlerinin istatistiksel yaklaşım özellikleri incelenecektir[18].

4.4.1. Teorem

$\rho_1(x) = 1 + x^2$, $\rho_2(x) = 1 + x^{2\alpha}$, $\alpha > 1$ olmak üzere eğer $st - \lim_n q_n = 1$ ise her $f \in C_{\rho_1}(\mathbb{R}_+)$ için $st - \lim_n \|V_{n,q_n}^* f - f\|_{\rho_2} = 0$, $st - \lim_n \|K_{n,q_n}^* f - f\|_{\rho_2} = 0$ dir[18].

İspat

$st - \lim_n \|K_{n,q_n}^* f - f\|_{\rho_2} = 0$ olduğunu gösterelim. Eş 4.14 den

$$\|K_{n,q_n}^* e_0 - e_0\|_{\rho_1} = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} \frac{|K_{n,q_n}^*(e_0; x) - e_0(x)|}{\rho_1(x)} = 0$$

olup

$$st - \lim_n \|K_{n,q_n}^* e_0 - e_0\|_{\rho_1} = 0$$

olur. Eş. 4.15 den

$$\begin{aligned} K_{n,q_n}^*(e_1; x) - e_1(x) &= x \frac{[n + l_1]_{q_n}}{[n]_{q_n}} - x + \frac{q_n}{(1 + q_n)[n]_{q_n}} \\ &= x \frac{q_n^n [l_1]_{q_n}}{[n]_{q_n}} + \frac{q_n}{(1 + q_n)[n]_{q_n}} \end{aligned}$$

$$\frac{|K_{n,q_n}^*(e_1; x) - e_1(x)|}{1 + x^2} \leq \frac{q_n^n [l_1]_{q_n}}{[n]_{q_n}} + \frac{q_n}{(1 + q_n)[n]_{q_n}}$$

elde edilir. Burada $st\text{-}\lim_n q_n = 1$, $st\text{-}\lim_n \frac{1}{[n]_{q_n}} = 0$ olduğundan

$$st\text{-}\lim_n \|K_{n,q_n}^* e_1 - e_1\|_{\rho_1} = 0$$

bulunur. Eş. 4.16 dan

$$K_{n,q_n}^*(e_2; x) = x^2 \frac{[n+l_1]_{q_n} [n+l_1+l_2]_{q_n}}{q_n [n]_{q_n}^2} + x \frac{1+3q_n}{1+q_n} \frac{[n+l_1]_{q_n}}{[n]_{q_n}^2} + \frac{q_n^2}{(1+q_n+q_n^2)[n]_{q_n}^2}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{K_{n,q_n}^*(e_2; x) - e_2(x)}{1+x^2} \right| &\leq \frac{x^2}{1+x^2} \left| \frac{[n+l_1]_{q_n} [n+l_1+l_2]_{q_n}}{q_n [n]_{q_n}^2} - 1 \right| + \frac{x}{1+x^2} \frac{1+3q_n}{1+q_n} \frac{[n+l_1]_{q_n}}{[n]_{q_n}^2} + \frac{1}{1+x^2} \frac{q_n^2}{(1+q_n+q_n^2)[n]_{q_n}^2} \\ &\leq \left| \frac{1-q_n^n}{q_n [n]_{q_n}} + \frac{q_n^n ([l_1]_{q_n} + [l_1+l_2]_{q_n})}{q_n [n]_{q_n}} + \frac{[l_1]_{q_n} [l_1+l_2]_{q_n}}{q_n [n]_{q_n}^2} \right| + 3 \frac{[n+l_1]_{q_n}}{[n]_{q_n}^2} + \frac{1}{[n]_{q_n}^2} \end{aligned}$$

olup

$$st\text{-}\lim_n \|K_{n,q_n}^* e_2 - e_2\|_{\rho_1} = 0$$

dır. Böylece Teorem 3.3.1 de $A = C_1$, $\rho_1(x) = 1+x^2$, $\rho_2(x) = 1+x^{2\alpha}$, $\alpha > 1$, $x \in \mathbb{R}_+$ alınarak ispat tamamlanır.

4.5. q -Baskakov-Kantorovich Operatörlerinin Yeni Bir Genellemesinin Yakınsama

Hızı

Bu kısımda, Eş.2.10 da $2+\alpha = m$ alınarak elde edilen

$$\Omega_m(f, \delta) = \sup_{\substack{x \geq 0 \\ 0 < h \leq \delta}} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{1+(x+h)^m}, \quad f \in C_m^*(\mathbb{R}_+) \quad (4.18)$$

ağırlıklı süreklilik modülü yardımıyla $V_{n,q}^*$ ve $K_{n,q}^*$ operatörlerinin yakınsama hızı verilecektir

4.5.1. Lemma

Her $m \in \mathbb{N}$ ve $0 < q < 1$ için

$$V_{n,q}^*(e_m; x) \leq B_{m,q}^{l_1, l_2} (1 + x^m)$$

$$K_{n,q}^*(e_m; x) \leq A_{m,q}^{l_1, l_2} (1 + x^m), \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Burada $A_{m,q}^{l_1, l_2}$ ve $B_{m,q}^{l_1, l_2}$, m , q , l_1 ve l_2 ye bağılı pozitif sabitlerdir[18].

İspat

$$\begin{aligned} V_{n,q}^*(e_m; x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{[k]_q!} q^{\frac{k(k-1)}{2}} D_q^k \phi_{n,q}(x) \left(\frac{[k]_q}{q^{k-1} [n]_q} \right)^m \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[k]_q}{[n]_q} \frac{(-1)^k x^k}{[k]_q!} q^{\frac{(k-1)(k-2)}{2}} D_q^k \phi_{n,q}(x) \left(\frac{[k]_q}{q^{k-1} [n]_q} \right)^{m-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[n]_q} \frac{(-1)^{k+1} x^{k+1}}{[k]_q!} q^{\frac{k(k-1)}{2}} D_q^{k+1} \phi_{n,q}(x) \frac{1}{q^{m-1}} \left(\frac{[k+1]_q}{q^{k-1} [n]_q} \right)^{m-1} \end{aligned}$$

(B3) den

$$D_q^{k+1} \phi_{n,q}(x) = -[n+l_1]_q D_q^k \phi_{n+l_2,q}(x)$$

dir. Bu ifade yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa ve son ifade $[n+l_2]_q^{m-1}$ ile çarpılıp bölünürse,

$$V_{n,q}^*(e_m; x) = x \frac{[n+l_1]_q [n+l_2]_q^{m-1}}{[n]_q^m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{[k]_q!} q^{\frac{k(k-1)}{2}} D_q^k \phi_{n+l_2,q}(x) \frac{1}{q^{m-1}} \left(\frac{[k+1]_q}{q^{k-1} [n+l_2]_q} \right)^{m-1}$$

elde edilir. Böylece Eş. 3.27 ve Eş. 4.2 den

$$\begin{aligned}
V_{n,q}^*(e_m; x) &\leq x \frac{[n+l_1]_q [n+l_2]_q^{m-1}}{[n]_q^m} \left(\frac{2}{q}\right)^{m-1} V_{n+l_2,q}^*(e_{m-1}; x) \\
&\leq x \left(1 + q^n \frac{[l_1]_q}{[n]_q}\right) \left(1 + q^n \frac{[l_2]_q}{[n]_q}\right)^{m-1} \left(\frac{2}{q}\right)^{m-1} V_{n+l_2,q}^*(e_{m-1}; x)
\end{aligned} \tag{4.19}$$

olur.

Eş. 4.19 ve tümevarım yönteminden

$$V_{n,q}^*(e_m; x) \leq x^m \left(1 + q^n \frac{[l_1]_q}{[n]_q}\right)^m \left(1 + q^n \frac{[l_2]_q}{[n]_q}\right)^{\frac{m(m-1)}{2}} \left(\frac{2}{q}\right)^{\frac{m(m-1)}{2}}$$

bulunur.

$$x^m \leq 1 + x^m, \quad 1 + q^n \frac{[l_1]_q}{[n]_q} \leq 1 + q^n [l_1]_q \leq 1 + l_1 \quad \text{ve} \quad 1 + q^n \frac{[l_2]_q}{[n]_q} \leq 1 + q^n [l_2]_q \leq 1 + l_2$$

eşitsizlikleri yardımıyla

$$V_{n,q}^*(e_m; x) \leq (1 + l_1)^m (1 + l_2)^{\frac{m(m-1)}{2}} \left(\frac{2}{q}\right)^{\frac{m(m-1)}{2}} (1 + x^m) = B_{m,q}^{l_1, l_2} (1 + x^m) \tag{4.20}$$

elde edilir.

Ayrıca Lemma 4.3.1 den

$$K_{n,q}^*(e_m; x) = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \left(\frac{q}{[n]_q}\right)^{m-j} \frac{1}{[m-j+1]_q} V_{n,q}^*(e_j; x)$$

olup Eş. 4.20 den

$$K_{n,q}^*(e_m; x) \leq \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \left(\frac{q}{[n]_q}\right)^{m-j} \frac{1}{[m-j+1]_q} B_{j,q}^{l_1, l_2} (1 + x^j)$$

$$\leq A_{m,q}^{l_1, l_2} (1 + x^m)$$

elde edilir.

4.5.1. Teorem

Eğer $f \in C_m^*(\mathbb{R}_+)$ ise bu durumda

$$\|V_{n,q}^* f - f\|_{m+1} \leq k \Omega_m \left(f; \frac{1}{\sqrt{q[n]_q}} \right)$$

ve

$$\|K_{n,q}^* f - f\|_{m+1} \leq k \Omega_m \left(f; \frac{1}{\sqrt{q[n]_q}} \right)$$

eşitsizlikleri gerçekleşir. Burada k , f ve n den bağımsız bir sabittir[18].

İspat

İspat $K_{n,q}^*$ operatörü için yapılacaktır. $V_{n,q}^*$ operatörü için de benzer ispat yapılabilir.

$$K_{n,q}^*(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{[k]_q!} q^{\frac{k(k-1)}{2}} D_q^k \phi_{n,q}(x) \int_0^1 f \left(\frac{[k]_q + q^k t}{q^{k-1} [n]_q} \right) d_q t$$

olmak üzere bu ifadedeki integralde $\frac{[k]_q + q^k t}{q^{k-1} [n]_q} = u$ şeklinde bir değişken değişirmesi

yapılırsa,

$$|K_{n,q}^*(f; x) - f(x)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{[k]_q!} q^{\frac{k(k-1)}{2}} D_q^k \phi_{n,q}(x) \frac{[n]_q}{q} \int_{[k]_q/q^{k-1}[n]_q}^{[k]_q + q^k/q^{k-1}[n]_q} |f(t) - f(x)| d_q t \quad (4.21)$$

olur. Eş. 4.21 de Eş. 3.24 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
|K_{n,q}^*(f; x) - f(x)| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{[k]_q!} q^{\frac{k(k-1)}{2}} D_q^k \phi_{n,q}(x) \frac{[n]_q}{q} \int_{[k]_q/q^{k-1}[n]_q}^{[k]_q+q^k/q^{k-1}[n]_q} \left(1 + (2x+t)^m\right) \left(\frac{|t-x|}{\delta} + 1\right) \Omega_m(f, \delta) d_q t \\
&= \Omega_m(f, \delta) \left(\left(K_{n,q}^*(1 + (2x+t)^m; x)\right) + K_{n,q}^* \left((1 + (2x+t)^m) \frac{|t-x|}{\delta}; x \right) \right) \quad (4.22)
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca q -integral için Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$K_{n,q}^* \left((1 + (2x+t)^m) \frac{|t-x|}{\delta}; x \right) \leq \sqrt{K_{n,q}^* \left((1 + (2x+t)^m)^2; x \right)} \sqrt{K_{n,q}^* \left(\frac{|t-x|^2}{\delta^2}; x \right)}$$

olup bu eşitsizlik Eş. 4.22 de kullanılırsa

$$\begin{aligned}
|K_{n,q}^*(f; x) - f(x)| &\leq \Omega_m(f, \delta) \left(\left(K_{n,q}^*(1 + (2x+t)^m; x)\right) + \sqrt{K_{n,q}^* \left((1 + (2x+t)^m)^2; x \right)} \sqrt{K_{n,q}^* \left(\frac{|t-x|^2}{\delta^2}; x \right)} \right) \\
(4.23)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Ayrıca Lemma 4.5.1 den

$$\left(K_{n,q}^*(1 + (2x+t)^m; x) \right) \leq k_{m,q}^{l_1, l_2} (1 + x^m) \quad (4.24)$$

$$\sqrt{K_{n,q}^* \left((1 + (2x+t)^m)^2; x \right)} \leq \tilde{k}_{m,q}^{l_1, l_2} (1 + x^m) \quad (4.25)$$

olacak şekilde k ve $\tilde{k}$ pozitif sabitleri bulunabilir. Eş. 4.17 den

$$\begin{aligned}
\sqrt{K_{n,q}^* \left(\frac{|t-x|^2}{\delta^2}; x \right)} &\leq \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{1}{q[n]_q} (a(l_1, l_2, q)x^2 + b(l_1, l_2, q)x + 1)} \\
&\leq \frac{c(l_1, l_2, q)}{\delta \sqrt{q[n]_q}} \sqrt{1 + x^2} \\
&\leq c(l_1, l_2, q) \frac{1 + x}{\delta \sqrt{q[n]_q}} \quad (4.26)
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir.

Eş. 4.23, Eş. 4.24, Eş. 4.25 ve Eş. 4.26 dan

$$\left| K_{n,q}^*(f; x) - f(x) \right| \leq \Omega_m(f, \delta) \left(k_{m,q}^{l_1, l_2} (1+x^m) + \tilde{k}_{m,q}^{l_1, l_2} c(l_1, l_2, q) \frac{(1+x^m)(1+x)}{\delta \sqrt{q[n]_q}} \right)$$

$$\frac{\left| K_{n,q}^*(f; x) - f(x) \right|}{1+x^{m+1}} \leq \Omega_m(f, \delta) \left(k_{m,q}^{l_1, l_2} \frac{1+x^m}{1+x^{m+1}} + \tilde{k}_{m,q}^{l_1, l_2} c(l_1, l_2, q) \frac{1}{1+x^{m+1}} \frac{(1+x^m)(1+x)}{\delta \sqrt{q[n]_q}} \right)$$

olup bu eşitsizliğin her iki tarafının supremumu alınırsa

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_+} \frac{\left| K_{n,q}^*(f; x) - f(x) \right|}{1+x^{m+1}} \leq \Omega_m(f, \delta) \left(k_{m,q}^{l_1, l_2} + \tilde{k}_{m,q}^{l_1, l_2} c(l_1, l_2, q) k_1 \frac{1}{\delta \sqrt{q[n]_q}} \right)$$

$$\left\| K_{n,q}^* f - f \right\|_{m+1} \leq \Omega_m(f, \delta) \left(k_{m,q}^{l_1, l_2} + \tilde{k}_{m,q}^{l_1, l_2} c(l_1, l_2, q) k_1 \frac{1}{\delta \sqrt{q[n]_q}} \right)$$

elde edilir. Burada $k_1 = \sup_{x \geq 0} \frac{1+x^m + x + x^{m+1}}{1+x^{m+1}}$ dir.

Yukarıdaki eşitsizlikte $\delta = (q[n])^{-\frac{1}{2}}$ alınırsa istenilen sonuç bulunur.

4.5.1. Uyarı

$st - \lim_n q_n = 1$ ise $st - \lim_n \delta_n = 0$ olacağından, $st - \lim_n \Omega_m(f, \delta_n) = 0$ bulunur. Böylece

Teorem 4.5.1 $V_{n,q}^*$ ve $K_{n,q}^*$ operatörlerinin f ye istatistiksel yakınsaklık hızını verir.

5. BAZI ÖZEL DURUMLAR

Bu bölümde $V_{n,q}^*$ ve $K_{n,q}^*$ operatörlerinin üç özel durumu verilecektir.

5.1. q -Szász-Mirakjan ve q -Szász-Mirakjan-Kantorovich Operatörleri

$\phi_{n,q}(x) := e_q(-[n]_q x)$, $x \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda her $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ için $\phi_{n,q}(0) = 1$

ve $D_q^k \phi_{n,q}(x) = -[n]_q D_q^{k-1} \phi_{n,q}(x) = (-1)^k [n]_q^k \phi_{n,q}(x)$, $x \geq 0$ olur. Böylece $K_{n,q}^*$ operatörü

$$S_{n,q}^*(f; x) = e_q(-[n]_q x) \sum_{k=0}^{\infty} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{[n]_q^k x^k}{[k]_q!} \int_0^1 f\left(\frac{[k]_q + q^k t}{q^{k-1} [n]_q}\right) d_q t$$

şeklinde tanımlanan Kantorovich tipli q -Szász-Mirakjan operatörüne dönüşür.

$V_{n,q}^*$ operatörü ise

$$S_{n,q}(f; x) = e_q(-[n]_q x) \sum_{k=0}^{\infty} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{[n]_q^k x^k}{[k]_q!} f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1} [n]_q}\right)$$

şeklinde tanımlı q -Szász-Mirakjan operatörüne dönüşür[40].

Lemma 4.2.1 ve Eş. 4.13 kullanıldığında,

Her $x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < q < 1$ için

$$S_{n,q}(e_0; x) = 1$$

$$S_{n,q}(e_1; x) = x$$

$$S_{n,q}(e_2; x) = \frac{x^2}{q} + \frac{x}{[n]_q}$$

$$S_{n,q}^*(e_0; x) = 1$$

$$S_{n,q}^*(e_1; x) = x + \frac{q}{(1+q)[n]_q}$$

$$S_{n,q}^*(e_2; x) = \frac{x^2}{q} + \frac{1+3q}{(1+q)[n]_q} x + \frac{q^2}{(1+q+q^2)[n]_q^2}$$

elde edilir.

5.2. q -Baskakov ve q -Baskakov-Kantorovich Operatörleri

$\phi_{n,q}(x) = \frac{1}{(1+x)_q^n}$, $x \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda q -türev tanımından her $x \in \mathbb{R}_+$,

$(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ve $0 < q < 1$ için

$$D_q^k \phi_{n,q}(x) = -[n]_q D_q^{k-1} \phi_{n+1,q}(x) = (-1)^k [n]_q [n+1]_q \dots [n+k-1]_q \phi_{n+k,q}(x)$$

dir. Böylece $K_{n,q}^*$ operatörü her $f \in C_2(\mathbb{R}_+)$, $x \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < q < 1$ için

$$K_{n,q}^*(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{x^k}{(1+x)_q^{n+k}} \int_0^1 f\left(\frac{[k]_q + q^k t}{q^{k-1} [n]_q}\right) d_q t$$

operatörüne dönüşür. Eş. 4.13 den $x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < q < 1$ olmak üzere

$$K_{n,q}^*(e_0; x) = 1$$

$$K_{n,q}^*(e_1; x) = x + \frac{q}{(1+q)[n]_q}$$

$$K_{n,q}^*(e_2; x) = \frac{[n+1]_q}{q[n]_q} x^2 + \frac{1+3q}{(1+q)[n]_q} x + \frac{q^2}{(1+q+q^2)[n]_q^2}$$

dir.

5.3. q -Szász-Mirakjan-Schurer ve q -Szász-Mirakjan-Schurer-Kantorovich

Operatörleri

$\phi_{n,q}(x) := e_q\left(-[n+l]_q x\right)$, $x \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}_0$ olsun. Bu durumda her $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ için

$\phi_{n,q}(0) = 1$ ve $D_q^k \phi_{n,q}(x) = -[n+l]_q D_q^{k-1} \phi_{n,q}(x) = (-1)^k [n+l]_q^k \phi_{n,q}(x)$, $x \geq 0$ dir.

Böylece q -Szász-Mirakjan-Schurer ve Kantorovich tipli q -Szász-Mirakjan-Schurer operatörleri, sırasıyla,

$$S_{n,q}(f;x) = e_q\left(-[n+l]_q x\right) \sum_{k=0}^{\infty} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{[n+l]_q^k x^k}{[k]_q!} f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q}\right)$$

ve

$$S_{n,q}^*(f;x) = e_q\left(-[n+l]_q x\right) \sum_{k=0}^{\infty} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{[n+l]_q^k x^k}{[k]_q!} \int_0^1 f\left(\frac{[k]_q + q^k t}{q^{k-1}[n]_q}\right) d_q t$$

şeklinde tanımlıdır.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Yaklaşım teorisi, polinomların yaklaşımında, Fonksiyonel Analizin çeşitli alanlarında, diferensiyel ve integral denklemlerin nümerik çözümlerinde önemli uygulamalara sahiptir. Korovkin tipi teoremler de yaklaşım teorisinin temelini oluşturmaktadır[4].

Diğer yandan Steinhaus ve Fast tarafından tanımlanan istatistiksel yakınsaklık kavramının bir çok genellemesi ve uygulaması araştırmacılar tarafından çalışılmıştır. Bunlardan bazıları istatistiksel yakınsaklık kullanılarak, lineer pozitif operatör dizileri için elde edilen Korovkin tipi sonuçlardır[43-44].

Son yıllarda ise bir çok araştırmacı tarafından verilen yeni operatör dizilerinin çeşitli yakınsaklık özellikleri incelenmektedir. Dolayısıyla bu konu araştırmacıların ilgisini çekmektedir.

KAYNAKLAR

1. Weierstrass, K. (1885). Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen. *Sitzungsberichte der KöniglichPreussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*.
2. Bernstein, S.N. (1912). Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités. *Communications de la Société Mathématique de Kharkov 2. Series XIII (1)*.
3. Bohman, H. (1952). On approximation of continuous and of analytic functions. *Arkiv. Mat. (2)*.
4. Korovkin, P.P. (1953). On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR (N.S.)*.
5. Lupaş, A. (1987). q -Analogue of the Bernstein operator. *Babeş-Bolyai University, Seminar on Numerical and Statistical Calculus*.
6. Phillips, G.M. (1997). Bernstein polynomials based on the q -integers. *Ann. Numer. Math.*
7. Trif, T. (2000). Meyer-König and Zeller operators based on the q -integers. *Rev. Anal. Numér. Théor. Approx.*
8. Doğru, O. ve Duman, O. (2006). Statistical approximation of Meyer-König and Zeller operators based on q -integers. *Publ.Math. Debrecen*, 199-214.
9. Doğru, O., Duman, O. ve Orhan, C. (2003). Statistical approximation by generalized Meyer-König and Zeller type operators. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 359-371.
10. Doğru, O. ve Gupta, V. (2006). Korovkin-type approximation properties of bivariate q -Meyer-König and Zeller operators. *Calcolo*, 51-63.
11. Doğru, O. ve Gupta, V. (2005). Monotonicity and the asymptotic estimate of Bleimann Butzer and Hahn operators based on q -integers. *Georgian Math. J.*
12. Derriennic, M.M. (2005). Modified Bernstein polynomials and Jacobi polynomials in q -calculus. *Rend. Circ. Mat. PalermoSerie II*, 269-290.
13. Gupta, V. (2008). Some approximation properties of q -Durrmeyer operators. *Appl. Math. Comput.*, 172-178.
14. Radu, C. (2008). Statistical approximation properties of Kantorovich operators based on q -integers. *Creat. Math. Inform.*, 75-84.
15. Gadjiev, A.D. ve Orhan, C. (2002). Some approximation theorems via statistical convergence. *Rocky Mountain J. Math.*, 129-138.

16. Agratini, O. (2009). On statistical approximation in spaces of continuous functions. *Positivity*, 735-743.
17. Gupta, V. ve Radu, C. (2009). Statistical approximation properties of q -Baskakov-Kantorovich operators. *Central European Journal of Math.*, 809-818.
18. Mahmudov, N.I. (2010). Statistical approximation of Baskakov and Baskakov-Kantorovich operators based on q -integers. *Central European Journal of Math.*
19. Kac, V. ve Cheung, P. (2002). Quantum calculus. *New York: Springer-Verlag.*
20. Ernst, T. (2000). The history of q -calculus and a new method. *Uppsala: U.U.D.M. Report*, 231.
21. Andrews, G.E., Askey, R. ve Roy, R. (1999). Special functions. *İngiltere: Cambridge Univ. Press.*
22. Lorentz, G.G. (1953). Bernstein polynomials. *Math. Expo.*
23. Niven, I. ve Zuckerman, H. S. (1980). An introduction to the theory of numbers. *New York: John Walley and Sons.*
24. Steinhaus, H. (1951). Sur la convergence ordinaire etta convergence asymptotique. *Colloq. Math.*, 73-74.
25. Fast, H. (1951). Sur la convergence statistique. *Colloq. Math.*, 241-244.
26. Salát, T. (1980). On statistically convergent sequences of real numbers. *Math. Slovaca* 30, 139-150.
27. Fridy, J. A. (1985). On statistical convergence. *Analysis* 5, 301-313.
28. Connor, J. S. (1989). On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence. *Canad Math. Bull.*, 194-198.
29. Maddox, I.J. (1970). Elements of functional analysis. *İngiltere: Cambridge University Press.*
30. Hardy, G.H. (1949). G.H. Divergent series. *İngiltere: Oxford University Press.*
31. Freedman, A. R. ve Sember, J. J. (1981). Densities and summability. *Paci.c J. Math.*, 293-305.
32. Kolk, E. (1993). Matrix summability of statistically convergent sequences. *Analysis* 13, 77-83.
33. Miller, H. I. (1995). A measure theoretic subsequences characterization of statistical convergence. *Trans. Amer. Soc.*, 1811-1819.

34. Hacısalıhoğlu, H. ve Hacıyev, A. (1995). Lineer pozitif operatör dizilerinin yakınsaklığı. *Ankara: A.Ü.F.F. Yayınları*.
35. López-Moreno, A.J. (2004). Weighted simultaneous approximation with Baskakov type operators. *Acta Math. Hungar*, 143-151.
36. Aral, A. ve Gupta, V. (Baskıda). On the Durrmeyer type modification of the q -Baskakov type operators. *Nonlinear Anal.*
37. Baskakov, V.A. (1957). An example of a sequence of linear positive operators in the space of continuous functions. *Dokl.Akad. Nauk. SSSR*, 249-251.
38. Abel, U. ve Gupta, V. (2003). An estimate of the rate of convergence of a Bezier variant of the Baskakov-Kantorovich operators for bounded variation functions. *Demonstratio Math.*, 123-136.
39. Duman, O. ve Orhan, C. (2004). Statistical approximation by positive linear operators. *Studia Math.*, 187-197
40. Mahmudov, N.I. (Baskıda). On q -parametric Szasz-Mirakjan operators. *Mediterranean J.Math.*
41. Özarslan, M.A. (Baskıda). q -Szasz Schurer operators.
42. Aral, A., Gupta, V. (2010). On the Durrmeyer type modification of the q - Baskakov type operators. *Nonlinear Anal.*, 1171-1180.
43. Gadjiev, A.D. ve Orhan, C. (2002). Some approximation theorems via statistical convergence. *Rocky Mountain J.Math.*, 129-138.
44. Erkuş, E. ve Duman, O. (2006). A Korovkin type approximation theorem in statistical sense. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 285-294.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : KARTAL, Bağdagül
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 30/05/1991, Ankara
Medeni hali : Bekâr
Telefon : 0 (535) 4219773
e-mail : bagdagulkartal@erciyes.edu.tr



Eğitim

Derece	Okul / Program	Mezuniyet Yılı
Lisans	Ankara Üniversitesi/Matematik	2012
Lise	Kocatepe Mimar Kemal YDA Lisesi	2008

İş Deneyimi

Yıl	Çalıştığı Yer	Görev
2013- Devam ediyor	Erciyes Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

YabancıDil

İngilizce

Hobiler

Voleybol, Yüzme.



GAZİ GELECEKTİR...