

İNM-102

STATİK

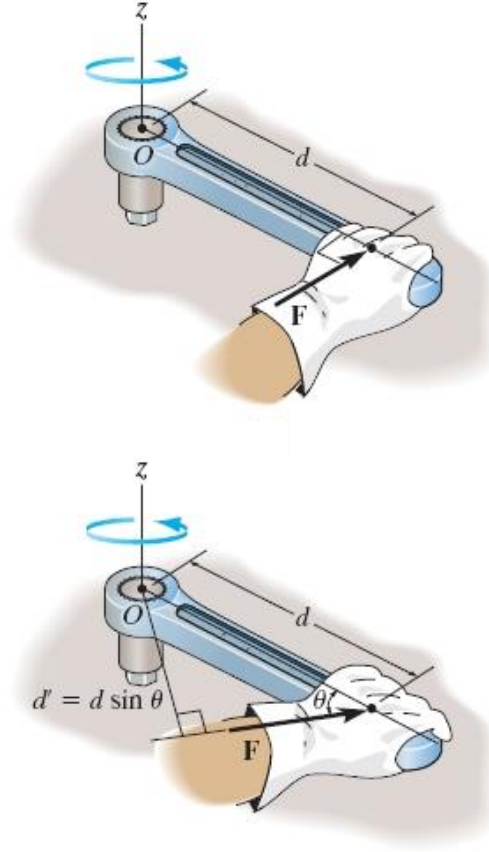
Ders – 4

KUVVET SİSTEMLERİNİN BİLEŞKESİ

Bir Kuvvetin Momenti

Bir cisme rastgele bir kuvvet tatbik edildiğinde, cisim kuvvet etki hattı üzerinde olmayan bir nokta etrafında; dönme eğilimi sergileyebilir. Bu dönme eğilimine bazen tork denir. Ancak çoğu durumda, bu etki kuvvetin momenti ya da sadece moment olarak adlandırılır.

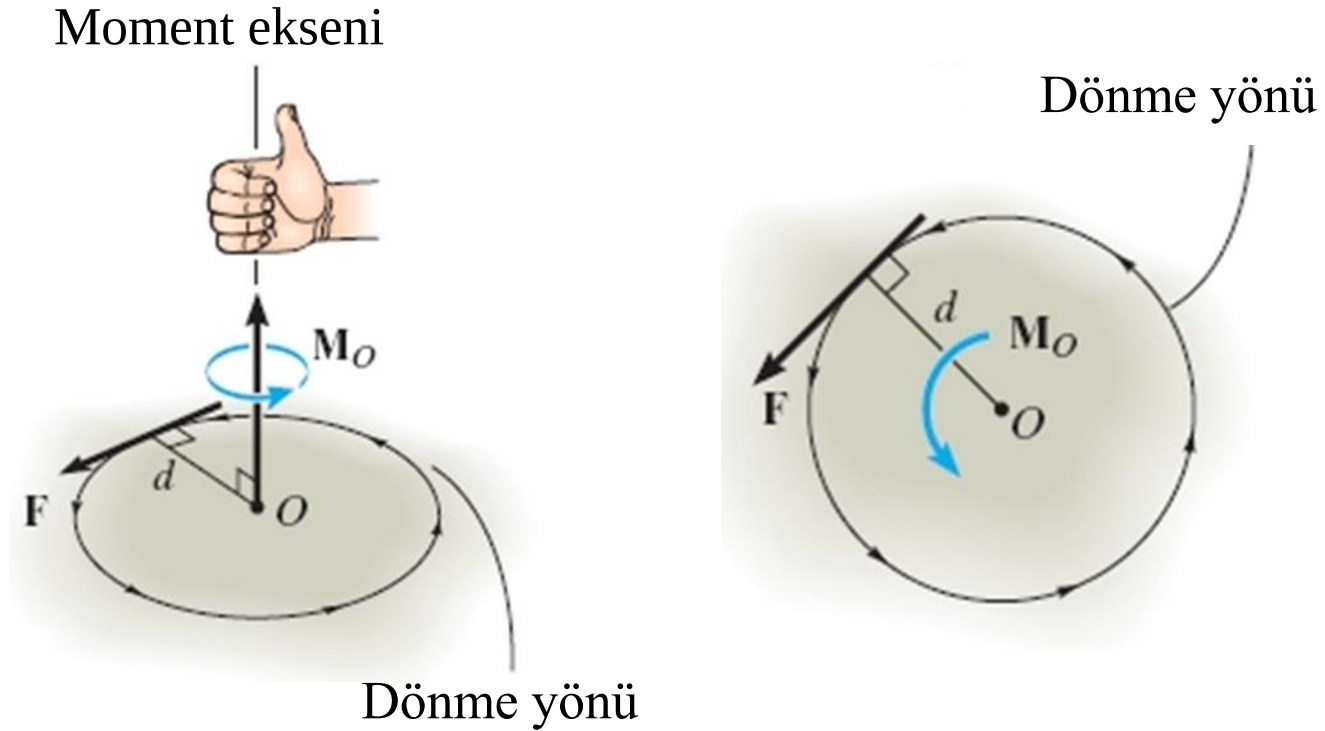
KUVVET SİSTEMLERİNİN BİLEŞKESİ



Örneğin, İngiliz anahtarının koluna dik etkiyen ve O noktasından d mesafesinde bulunan ' F ' yatay kuvvetini ele alalım. Bu kuvvetin boruyu z eksenine etrafında döndürme eğiliminde olduğu görülmektedir. Kuvvet ve d , moment eksenine (x) dik olan (y - z) taralı düzlemde yer alır.

Anahtara F , kuvveti uygulanırsa, O noktasına göre hiç moment üretilmez. Buna, kuvvetin etki çizgisinin O 'dan geçmesi ve dolayısıyla hiçbir döndürme eğiliminin olmaması neden olur.

KUVVET SİSTEMLERİNİN BİLEŞKESİ



Büyüklik ve Doğrultu: (skalär hesap)

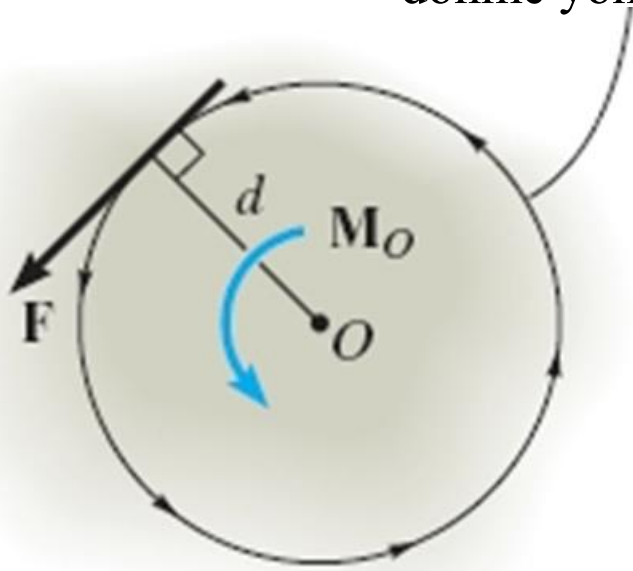
$$M = F \cdot d \text{ dir. [N.m]}$$

Burada;

d : moment kolu (dik uzaklık)

F : Etki eden kuvvet

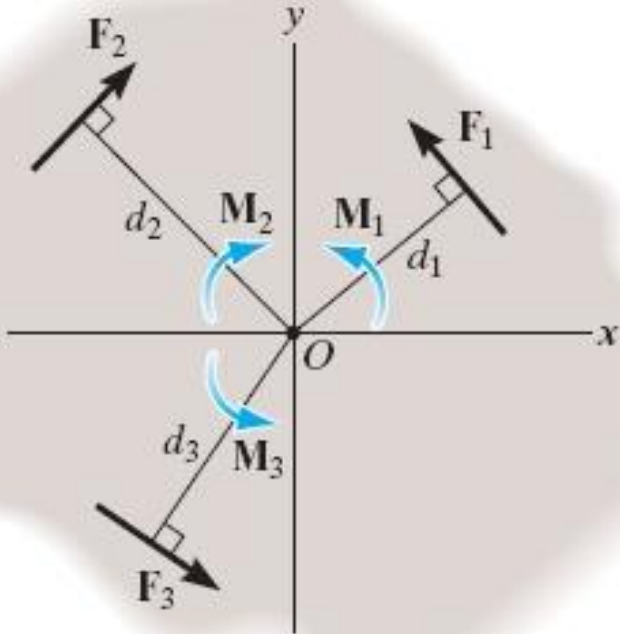
KUVVET SİSTEMLERİNİN BİLEŞKESİ



M'nin doğrultusu (ve yönü) "sağ el kuralı" kullanılarak belirlenir. Bunun için, sağ elin dönme yönü parmakları, kuvvet O noktası etrafında dönme sağlayabildiğinde ortaya çıkan dönme yönünü izleyecek şekilde kıvrılır. Bu takdirde, başparmak, F ve d 'yi içeren taralı düzleme dik ve yukarı doğru olan moment vektörünün doğrultu ve yönünü veren moment eksenini işaret eder. Bu tanıma göre, M momenti, kayan vektör olarak düşünülebilir ve dolayısıyla moment ekseninin herhangi bir noktasında etki eder.

KUVVET SİSTEMLERİNİN BİLEŞKESİ

Bileşke Moment



O noktasında oluşan bileşke moment;

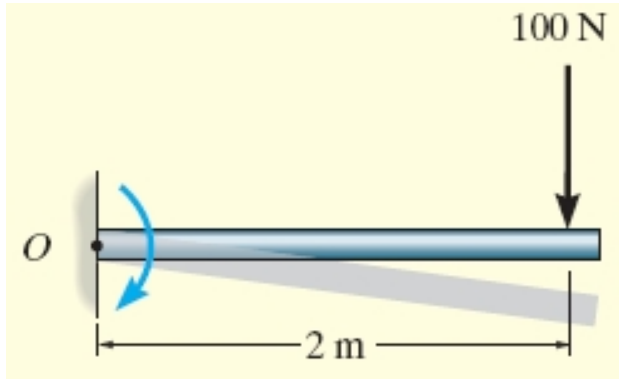
$\vec{M}_{Ro}$ olmak üzere

$$\vec{M}_{Ro} = \Sigma \vec{F} \cdot d$$

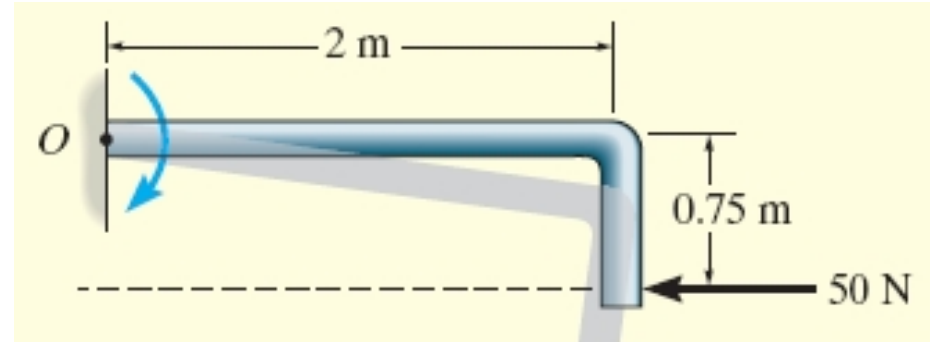
$$\vec{M}_{Ro} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3$$

KUVVET SİSTEMLERİNİN BİLEŞKESİ

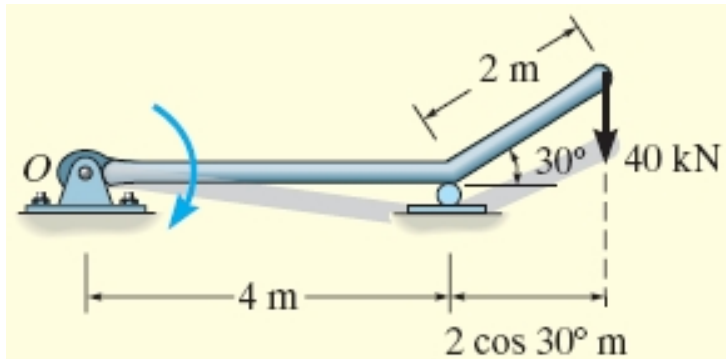
ÖRNEK:



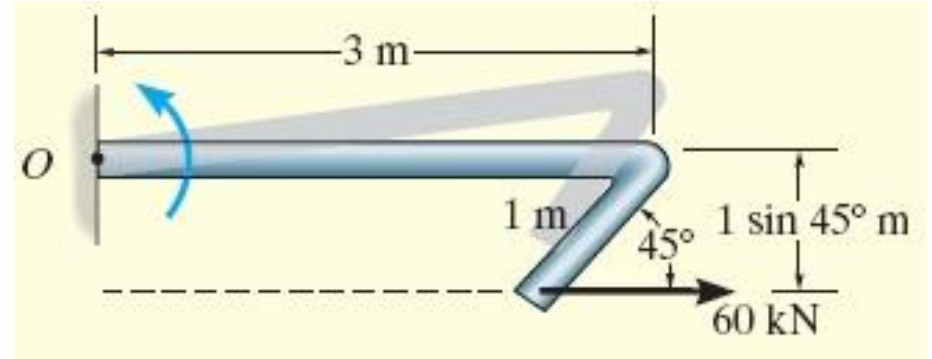
$$M_o = 100 * 2 = 200 \text{ Nm (CW) (SY)}$$



$$M_o = 50 * 0,75 = 37,5 \text{ Nm (CW) (SY)}$$



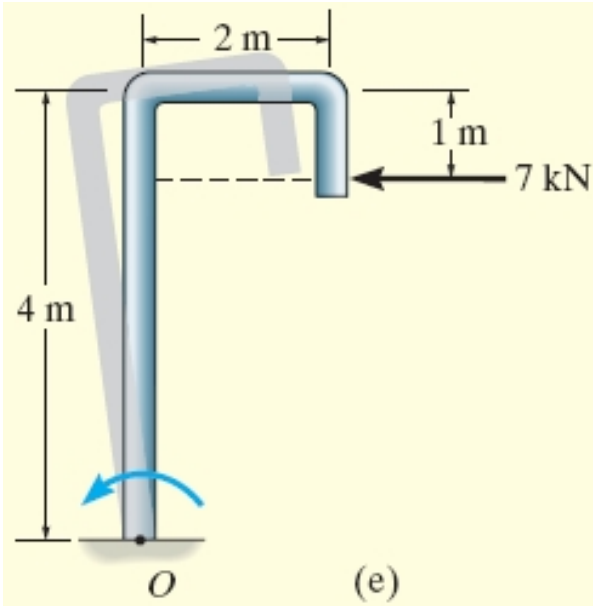
$$M_o = 40 * (4 + 2\cos 30^\circ) = 229 \text{ Nm (SY)}$$



$$M_o = 60 * (1\sin 45^\circ) = 42,4 \text{ Nm (CCW) (STY)}$$

KUVVET SİSTEMLERİNİN BİLEŞKESİ

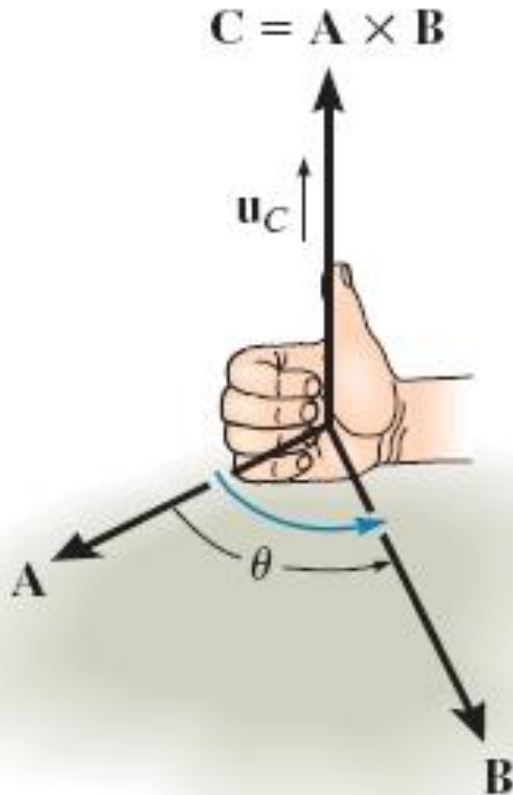
ÖRNEK:



$$M_o = 7 * (4-1) = 21 \text{ Nm (CCW) (STY)}$$

KUVVET SİSTEMLERİNİN BİLEŞKESİ

VEKTÖREL ÇARPIM



$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

$$C = AB \sin \theta$$

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = (AB \sin \theta) \vec{u}_C$$

C vektörü A ve B vektörlerinin bulunduğu düzleme diktir.

KUVVET SİSTEMLERİNİN BİLEŞKESİ

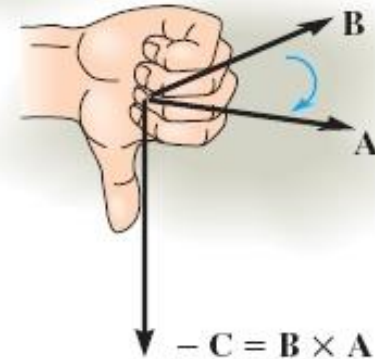
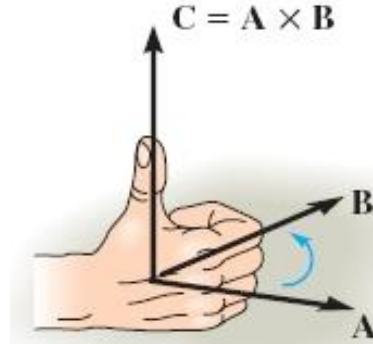
Kurallar

1) $\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$

2) $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} = \vec{C}$
 $\vec{B} \times \vec{A} = -\vec{C}$

3) $a(\vec{A} \times \vec{B}) = (a\vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (a\vec{B}) = (\vec{A} \times \vec{B})a$

4) $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{D}) = (\vec{A} \times \vec{B}) + (\vec{A} \times \vec{D})$



KUVVET SİSTEMLERİNİN BİLEŞKESİ

Kartezyen Vektör Formülasyonu

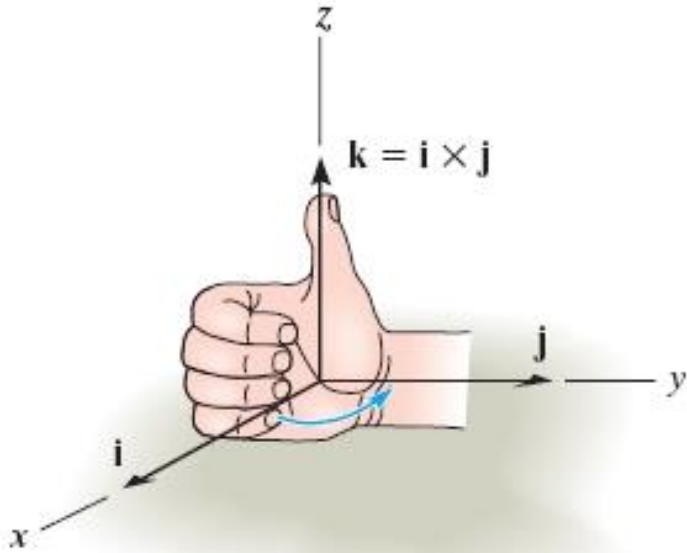
$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

$$\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$$

$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} &= (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k})(B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}) \\ &= A_x B_x (\vec{i} \times \vec{i}) + A_x B_y (\vec{i} \times \vec{j}) + A_x B_z (\vec{i} \times \vec{k}) \\ &\quad + A_y B_x (\vec{j} \times \vec{i}) + A_y B_y (\vec{j} \times \vec{j}) + A_y B_z (\vec{j} \times \vec{k}) \\ &\quad + A_z B_x (\vec{k} \times \vec{i}) + A_z B_y (\vec{k} \times \vec{j}) + A_z B_z (\vec{k} \times \vec{k})\end{aligned}$$

KUVVET SİSTEMLERİNİN BİLEŞKESİ

Kartezyen Vektör Formülasyonu



$$(\vec{i} \times \vec{i}) = (1)(1) \sin 0 = 0$$

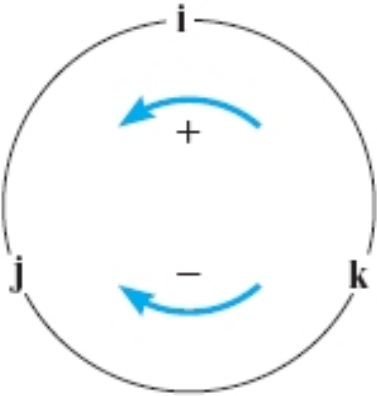
$$(\vec{j} \times \vec{j}) = (1)(1) \sin 0 = 0$$

$$(\vec{k} \times \vec{k}) = (1)(1) \sin 0 = 0$$

$$(\vec{i} \times \vec{j}) = (1)(1) \sin 90 = 1\vec{k} = \vec{k} \rightarrow \text{Sağ el kuralı}$$

KUVVET SİSTEMLERİNİN BİLEŞKESİ

Kartezyen Vektör Formülasyonu



$$(\vec{i} \times \vec{j}) = \vec{k}$$

$$(\vec{j} \times \vec{i}) = -\vec{k}$$

$$(\vec{j} \times \vec{k}) = \vec{i}$$

$$(\vec{k} \times \vec{j}) = -\vec{i}$$

$$(\vec{k} \times \vec{i}) = \vec{j}$$

$$(\vec{i} \times \vec{k}) = -\vec{j}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k})(B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k})$$

$$= A_x B_x \underbrace{(\vec{i} \times \vec{i})}_0 + A_x B_y \underbrace{(\vec{i} \times \vec{j})}_{\vec{k}} + A_x B_z \underbrace{(\vec{i} \times \vec{k})}_{-\vec{j}}$$

$$+ A_y B_x \underbrace{(\vec{j} \times \vec{i})}_{-\vec{k}} + A_y B_y \underbrace{(\vec{j} \times \vec{j})}_0 + A_y B_z \underbrace{(\vec{j} \times \vec{k})}_{\vec{i}}$$

$$+ A_z B_x \underbrace{(\vec{k} \times \vec{i})}_{\vec{j}} + A_z B_y \underbrace{(\vec{k} \times \vec{j})}_{-\vec{i}} + A_z B_z \underbrace{(\vec{k} \times \vec{k})}_0$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \vec{i} - (A_x B_z - A_z B_x) \vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \vec{k}$$

KUVVET SİSTEMLERİNİN BİLEŞKESİ

Kartezyen Vektör Formülasyonu

Bu denklemi daha basit bir biçimde; matris determinantı formunda yazabiliriz.

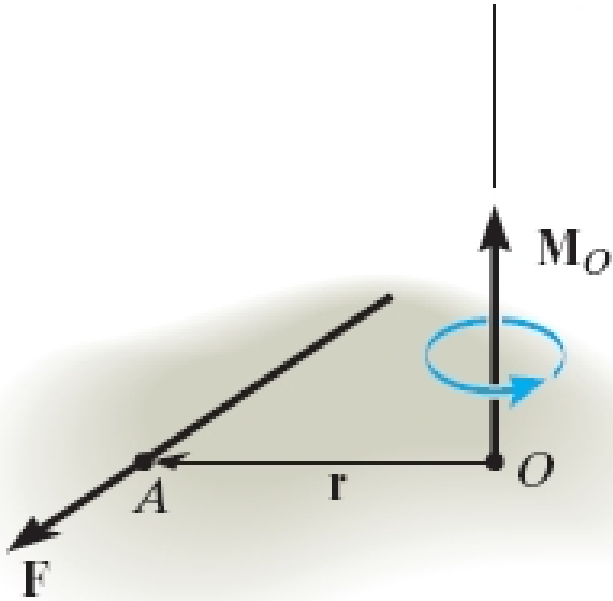
$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} =$$

KUVVET SİSTEMLERİNİN BİLEŞKESİ

Bir Kuvvetin Momenti (Vektörel Hesap)

Moment eksenini



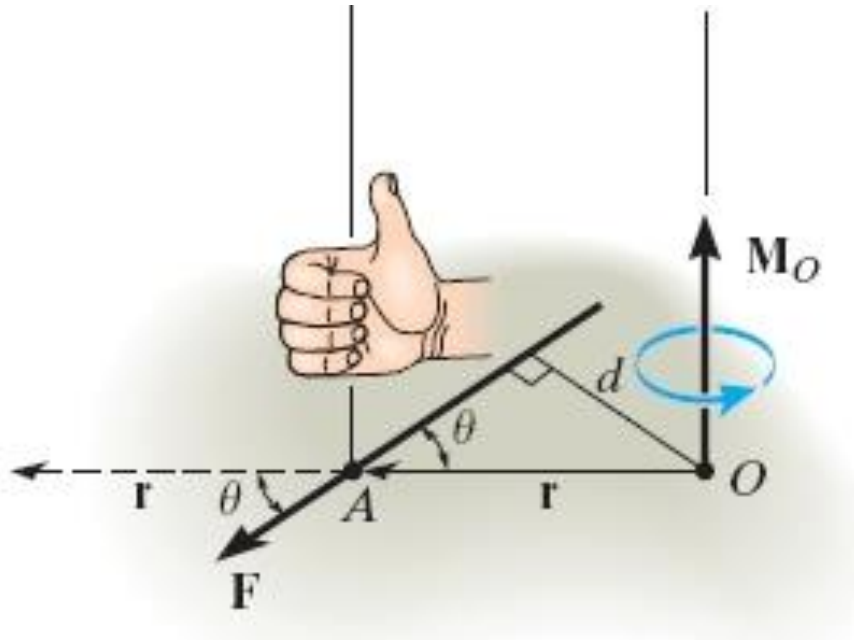
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$\vec{r}$: O noktasından $\vec{F}$ 'in etki doğrultusunda herhangi bir noktaya çizilen konum vektörü

KUVVET SİSTEMLERİNİN BİLEŞKESİ

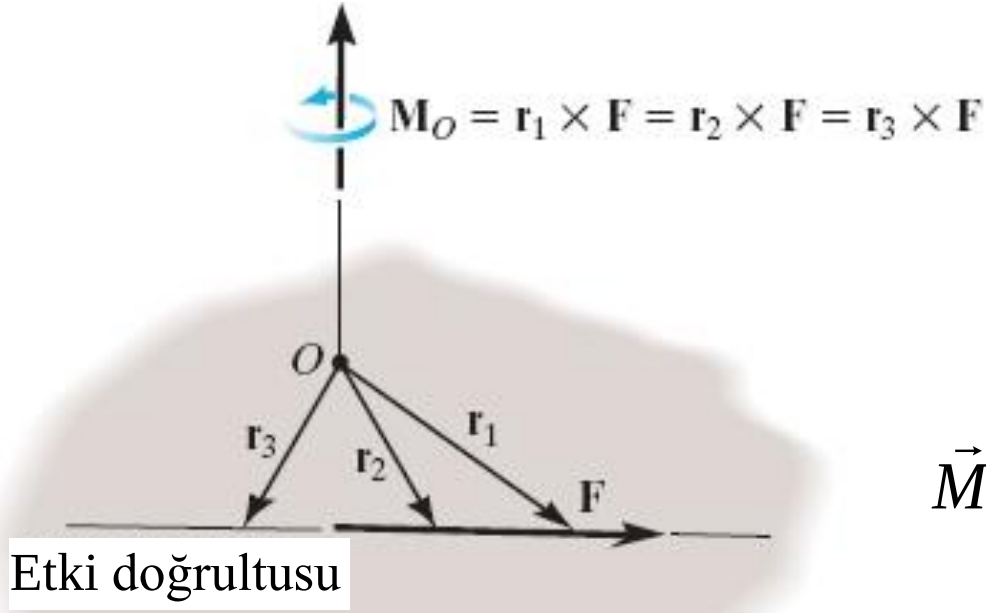
Bir Kuvvetin Momenti (Skaler Hesap)

Moment eksenini



$$\begin{aligned} M &= r.F.\sin \theta \\ &= F(r \sin \theta) \\ &= F.d \end{aligned}$$

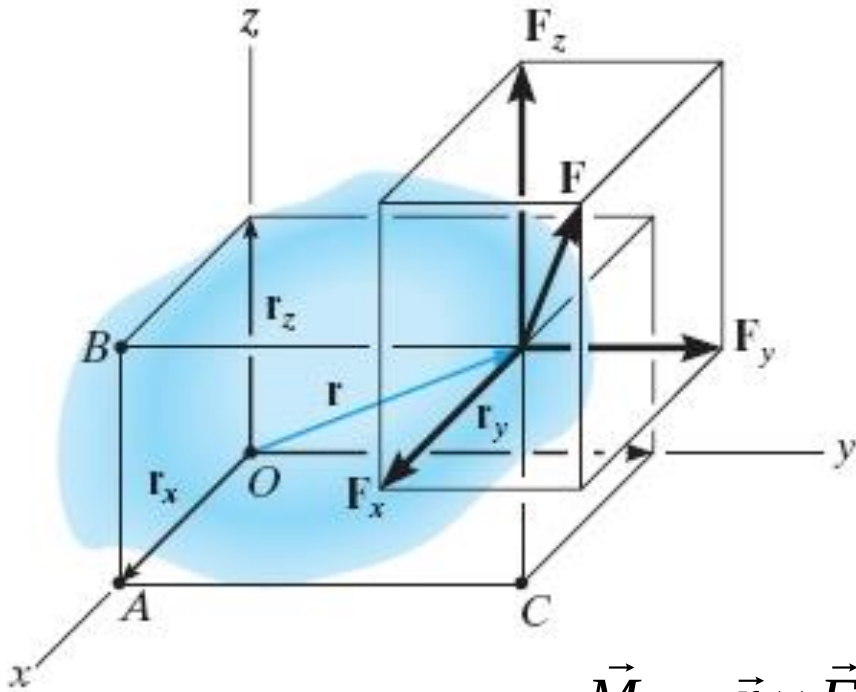
KUVVET SİSTEMLERİNİN BİLEŞKESİ



$$\vec{M}_0 = \vec{r}_1 \times \vec{F} = \vec{r}_2 \times \vec{F} = \vec{r}_3 \times \vec{F}$$

KUVVET SİSTEMLERİNİN BİLEŞKESİ

Kartezyen Vektör Formülasyonu

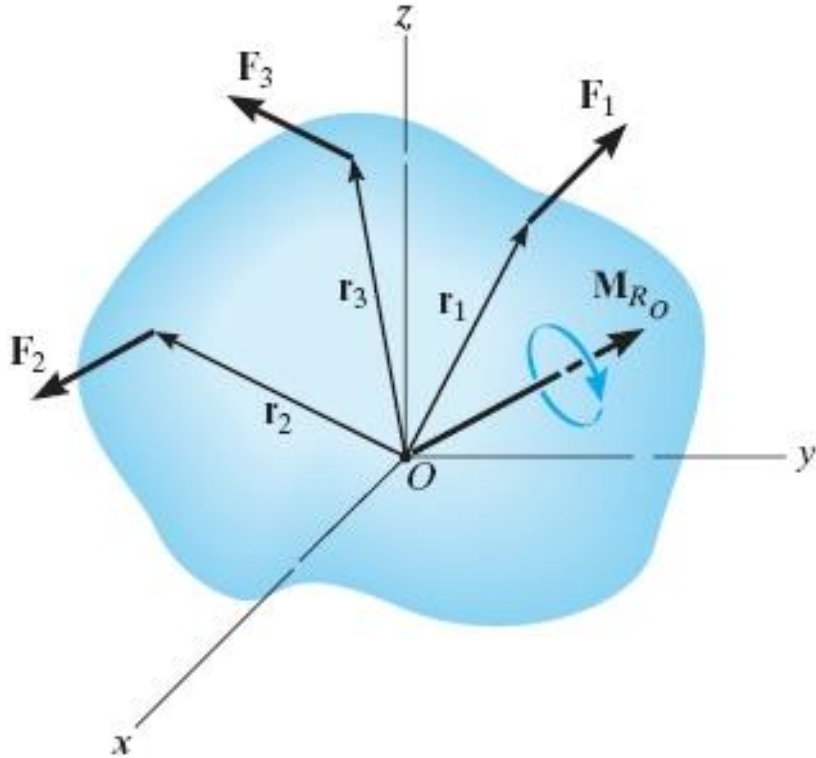


$$\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$= (r_y F_z - r_z F_y) \vec{i} - (r_x F_z - r_z F_x) \vec{j} + (r_x F_y - r_y F_x) \vec{k}$$

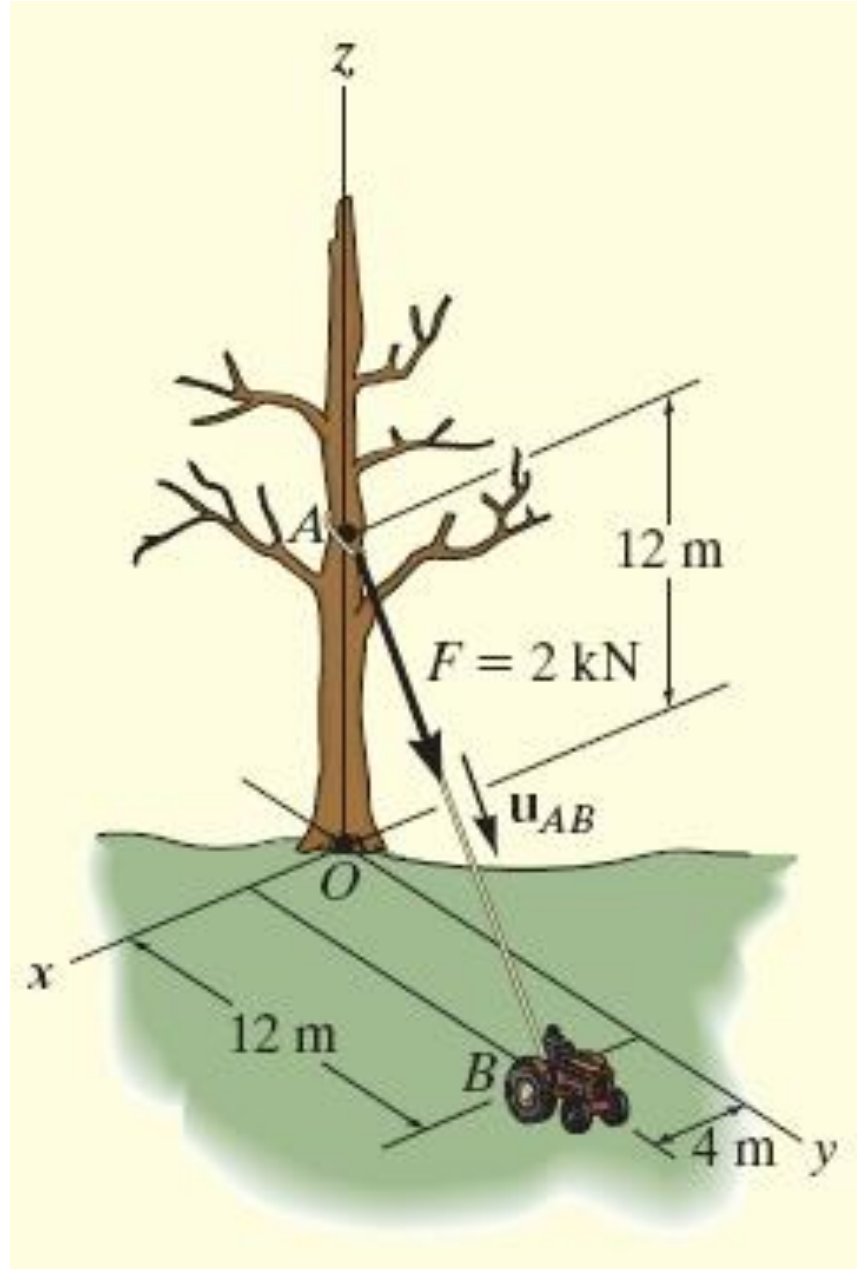
KUVVET SİSTEMLERİNİN BİLEŞKESİ

Kuvvet sisteminin bileşke momenti:



$$\vec{M}_{Ro} = \sum(\vec{r} \times \vec{F})$$

ÖRNEK:



F kuvveti ile O noktasında oluşturulan momenti hesaplayınız ve kartezyen vektör olarak ifade ediniz.

ÇÖZÜM

Şekilde görüleceği üzere hem $\vec{r}_A$ hem de $\vec{r}_B$ moment kolu mesafeleri $\vec{M}_O$ nun hesabında kullanılabilir.

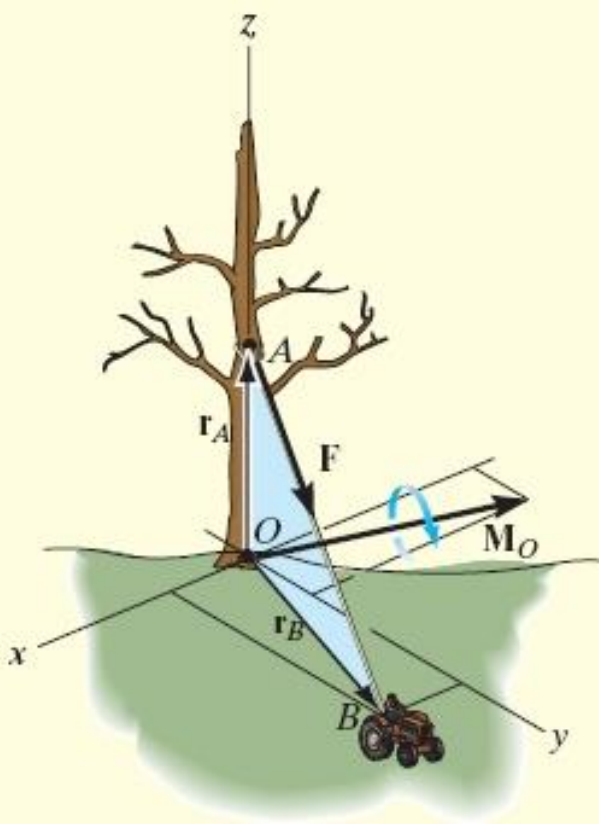
$$\vec{r}_A = \{12\vec{k}\}m$$

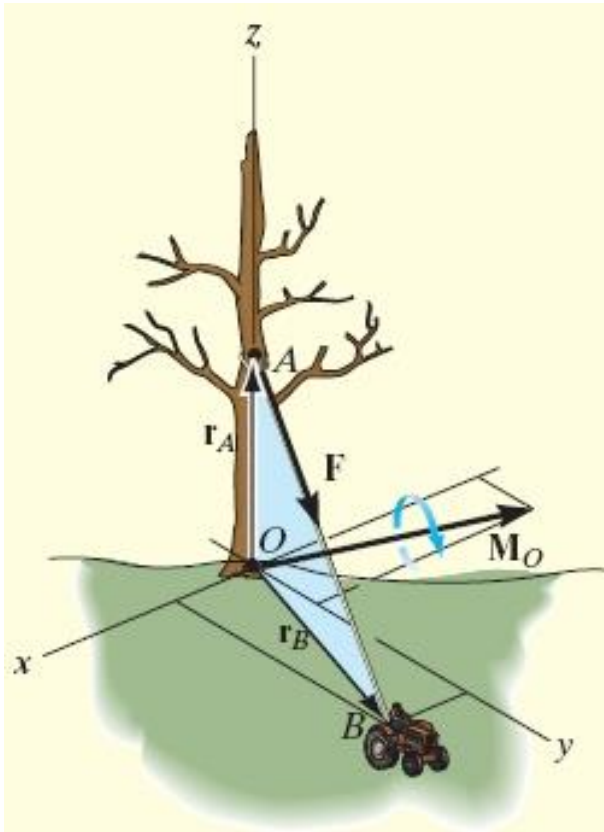
$$\vec{r}_B = \{4\vec{i} + 12\vec{j}\}m$$

$$\vec{F} \text{ kuvvet vektörü ise, } \vec{F} = F \cdot \vec{u}_{AB} = F \frac{(\vec{r}_B - \vec{r}_A)}{|\vec{r}_B - \vec{r}_A|}$$

$$\vec{r}_B - \vec{r}_A = (4\vec{i} + 12\vec{j}) - (12\vec{k}) = 4\vec{i} + 12\vec{j} - 12\vec{k}$$

$$\vec{F} = 2 \frac{4\vec{i} + 12\vec{j} - 12\vec{k}}{\sqrt{4^2 + 12^2 + 12^2}} = \{0,459\vec{i} + 1,376\vec{j} - 1,376\vec{k}\}kN$$





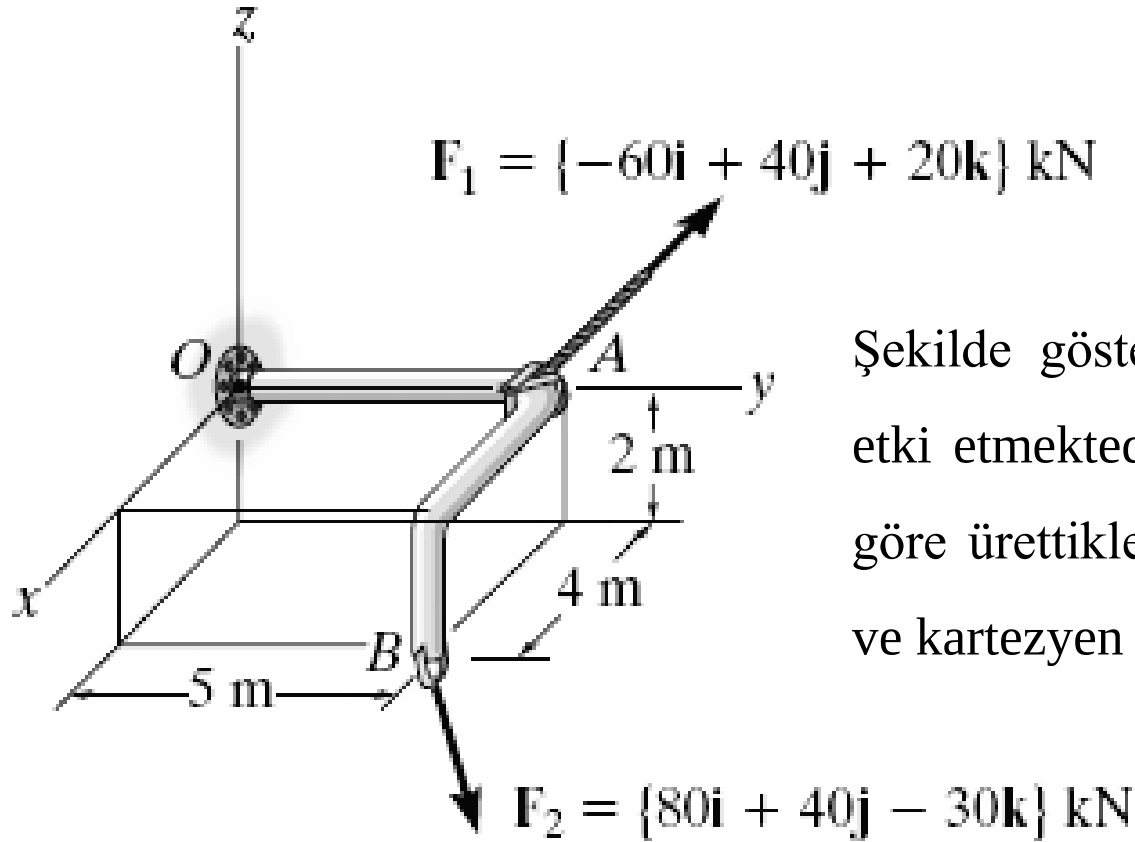
$$\vec{M}_0 = \vec{r}_A \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 12 \\ 0,459 & 1,376 & -1,376 \end{vmatrix}$$

veya

$$\vec{M}_0 = \vec{r}_B \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 12 & 0 \\ 0,459 & 1,376 & -1,376 \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_0 = \{-16,5\vec{i} + 5,51\vec{j}\}kN.m$$

ÖRNEK:



Şekilde gösterilen çubuk üzerine iki kuvvet etki etmektedir. Bu kuvvetlerin O 'daki flanşa göre ürettikleri bileşke momenti hesaplayınız ve kartezyen vektör olarak belirtiniz.

ÇÖZÜM:

$$\vec{r}_A = \{5\vec{j}\}m$$

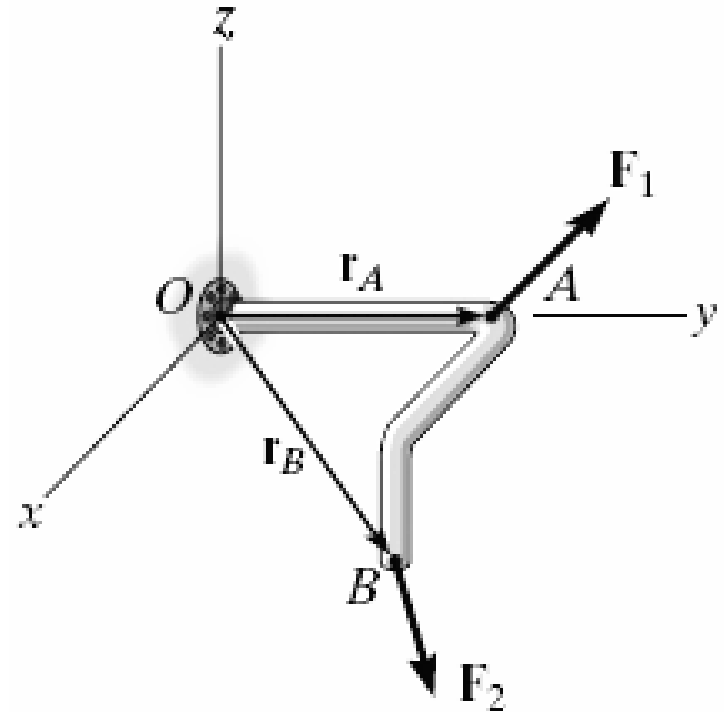
$$\vec{r}_B = \{4\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}\}m$$

$$\vec{M}_{Ro} = \Sigma \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$

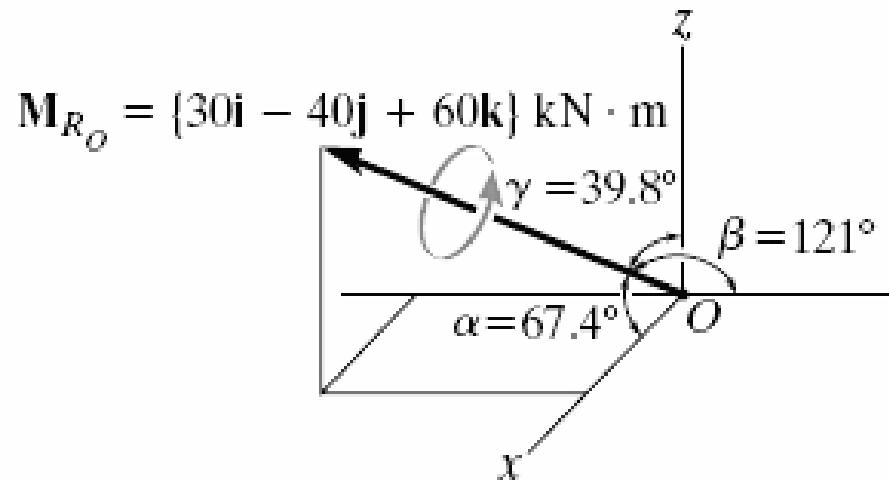
$$\vec{M}_{Ro} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 5 & 0 \\ -60 & 40 & 20 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 5 & -2 \\ 80 & 40 & -30 \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_{Ro} = [5*20-0*40] \vec{i} - [0*20-0*(-60)] \vec{j} + [0*40-5*(-60)] \vec{k} +$$
$$[5*(-30)-(-2)*40] \vec{i} - [4*(-30)-(-2)*80] \vec{j} + [4*40-5*80] \vec{k}$$

$$\vec{M}_{Ro} = \{30\vec{i} - 40\vec{j} + 60\vec{k}\} \text{ kN.m}$$



ÇÖZÜM:



$$\cos \alpha = \frac{30}{\sqrt{30^2 + (-40)^2 + 60^2}} = \frac{30}{78,1} = 0,384 \rightarrow \alpha = 67,4^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{-40}{\sqrt{30^2 + (-40)^2 + 60^2}} = \frac{-40}{78,1} = -0,512 \rightarrow \beta = 120,8^\circ$$

$$\cos \gamma = \frac{60}{\sqrt{30^2 + (-40)^2 + 60^2}} = \frac{60}{78,1} = 0,768 \rightarrow \gamma = 39,8^\circ$$