

İNM-102

STATİK

Ders – 2

KUVVET VEKTÖRLERİ

Öncelikle **SKALER** ve **VEKTÖR** tanımlarını yapalım.

Skaler: pozitif veya negatif sayılarla tanımlanan, yönü ve doğrultusu olmayan niceliklerdir.

Örneğin; kütle, hacim, uzunluk v.b.

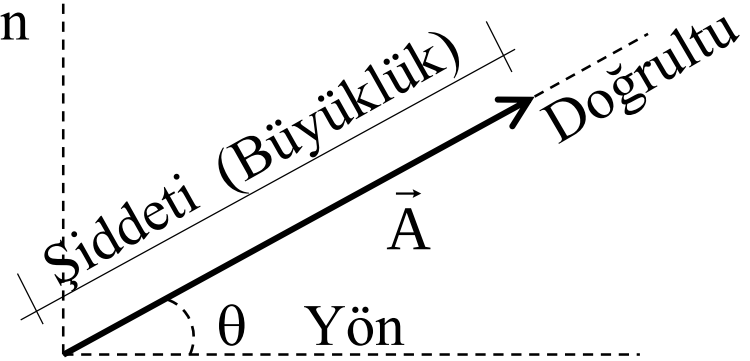
A, B, C gibi harflerle ifade edilebilir.

Vektör: büyüklüğü, doğrultusu ve yönü olan niceliklerdir.

Örneğin; kuvvet ve moment.

$\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ şeklinde gösterilir.

Büyüklüğü ise $|\vec{A}|$ şeklinde gösterilir.



Birim Vektör: Şiddeti 1 birim olan vektöre denir.

VEKTÖRLERDE İŞLEMLER

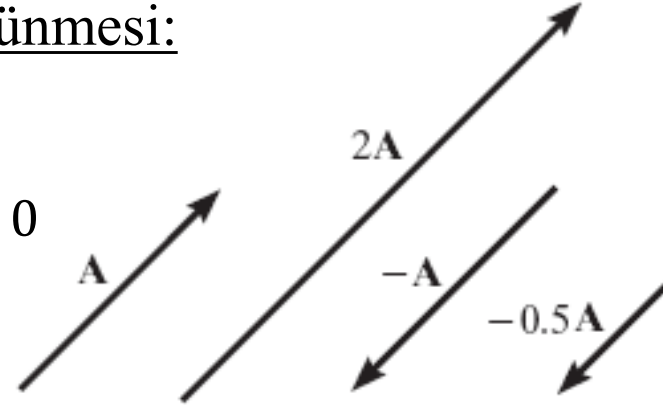
Vektörün bir sayı (skaler) ile çarpılması ve bölünmesi:

A vektörünün a sayısı ile çarpımı $= a\mathbf{A}$

Büyüklüğü $= |a\mathbf{A}|$

$\mathbf{A}/a = (1/a) \mathbf{A}$

$a \neq 0$

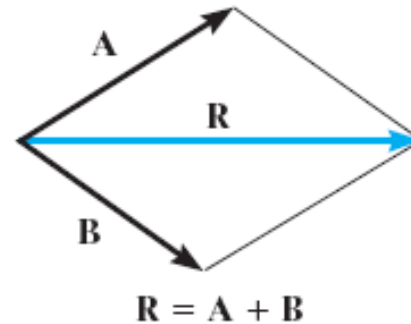
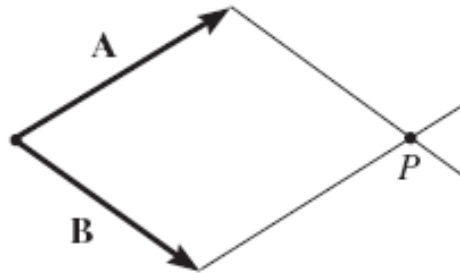
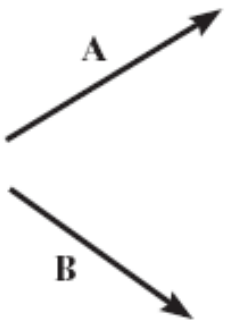


Vektörlerin toplanması:

A ve **B** vektörlerinin toplamının **R** vektörüne eşit olduğunu düşünelim.

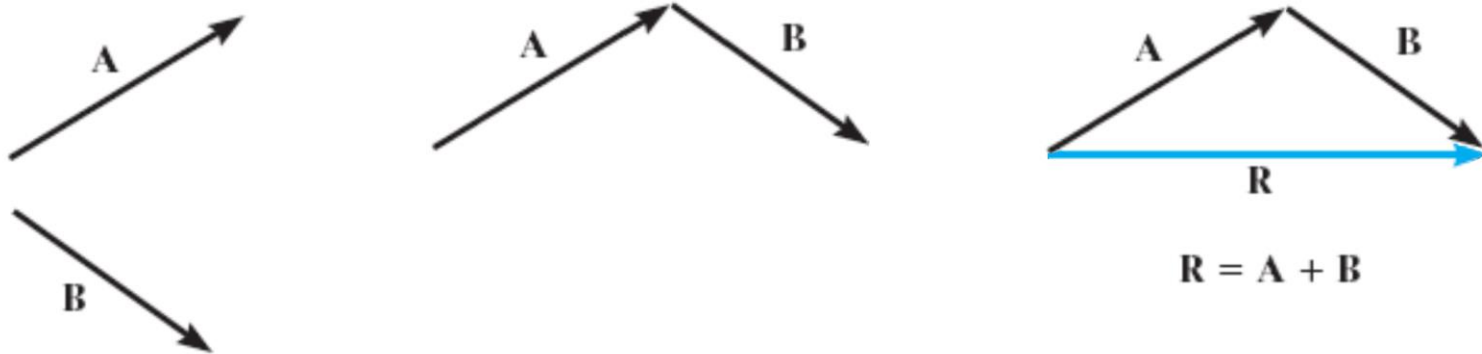
$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

1) *Paralelkenar kuralı*



VEKTÖRLERDE İŞLEMLER

2) Üçgen oluşturma



3) Aynı doğrultudaki vektörlerin toplanması



VEKTÖRLERDE İŞLEMLER

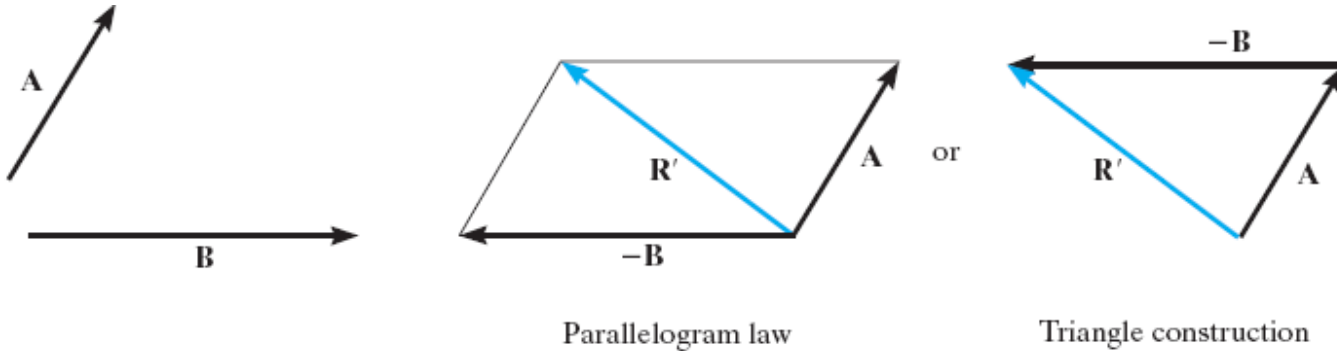
Vektörlerin çıkartılması:

Toplama işleminin özel bir durumudur.

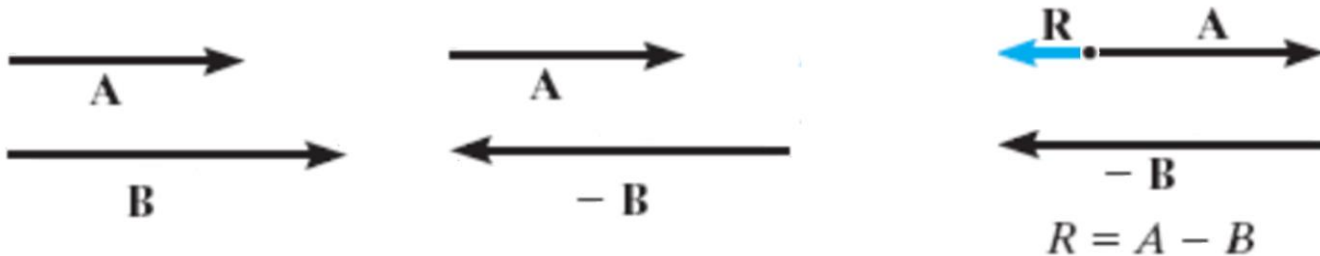
$$\mathbf{R} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$

Vektörel toplama işleminin kuralları bu işlemde de geçerlidir.

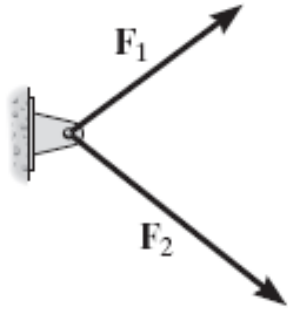
1, 2) Paralelkenar ilkesi, Üçgen oluşturma



3) Aynı doğrultuda çıkarma

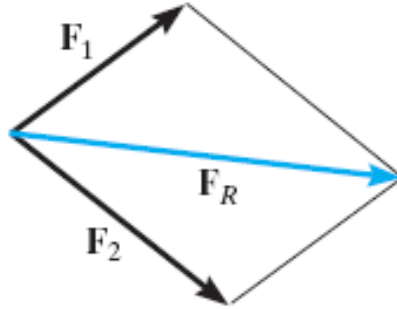


KUVVETLERİN VEKTÖREL OLARAK TOPLANMASI



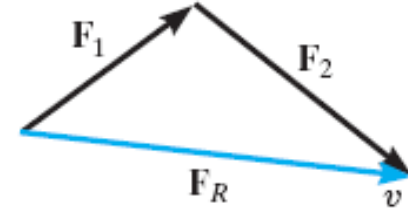
(a)

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$



(b)

Paralelkenar kuralı

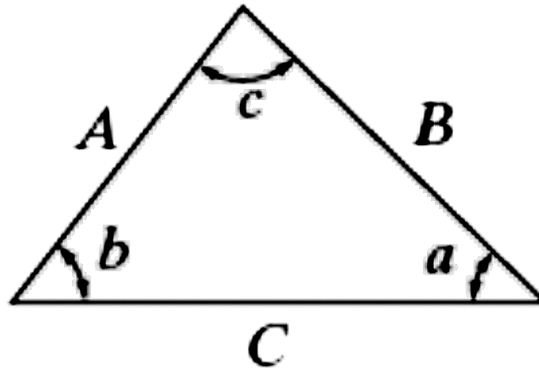
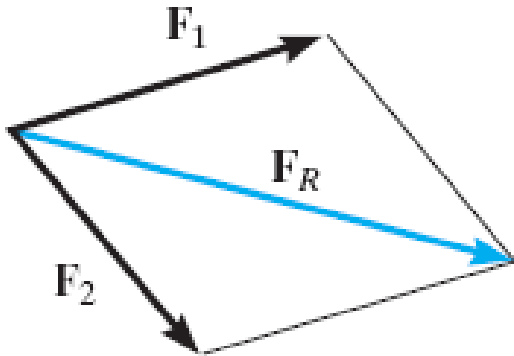


$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

(c)

Üçgen oluşturma

Trigonometrik Analiz



Kosinüs kuralı:

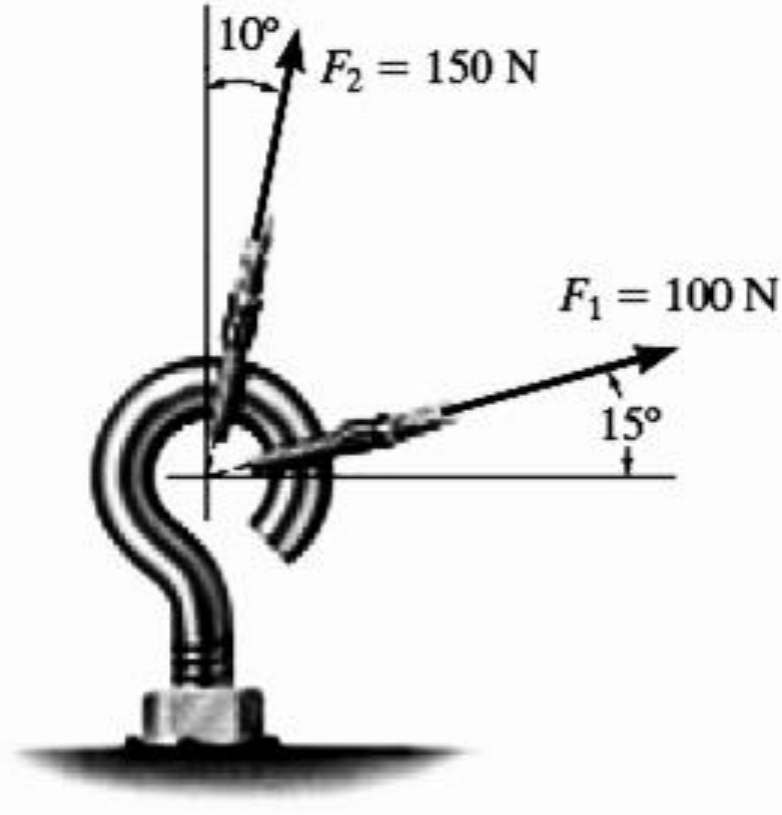
$$C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos c}$$

Sinüs kuralı:

$$\frac{A}{\sin a} = \frac{B}{\sin b} = \frac{C}{\sin c}$$

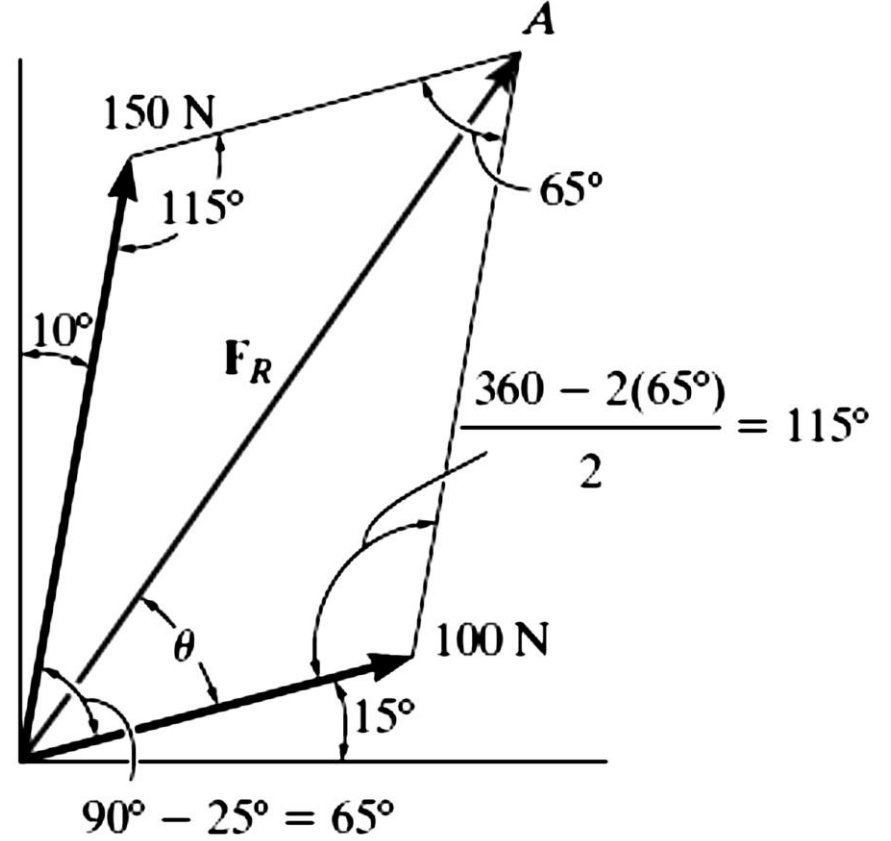
ÖRNEK

Şekildeki kancaya F_1 ve F_2 kuvvetleri etki etmektedir. Bu kuvvetlerin bileşkesini hesaplayınız.



Çözüm:

Paralelkenar ilkesi



Bu çizimde bilinmeyen F_R bileşke kuvvetinin şiddeti ve yönü θ 'dır.

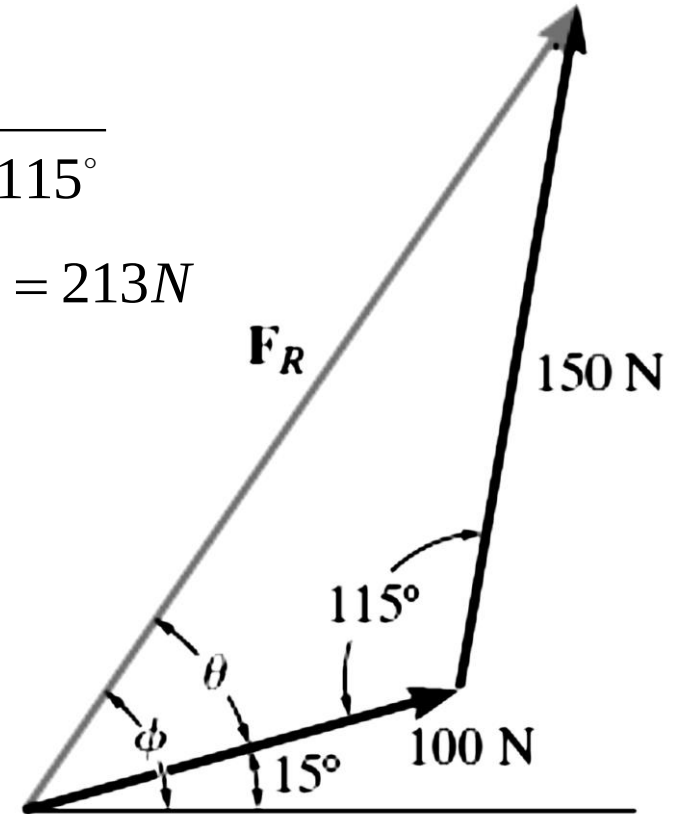
Kosinüs Kuralı

$$F_R = \sqrt{(100\text{ N})^2 + (150\text{ N})^2 - 2(100\text{ N})(150\text{ N})\cos 115^\circ}$$
$$= \sqrt{10000 + 22500 - 30000(-0.4226)} = 212.6\text{ N} = 213\text{ N}$$

Sinüs Kuralı

$$\frac{150\text{ N}}{\sin \theta} = \frac{212.6\text{ N}}{\sin 115^\circ}$$
$$\sin \theta = \frac{150\text{ N}}{212.6\text{ N}} (0.9063) \cong 0.64$$

$$\theta = 39.8^\circ$$

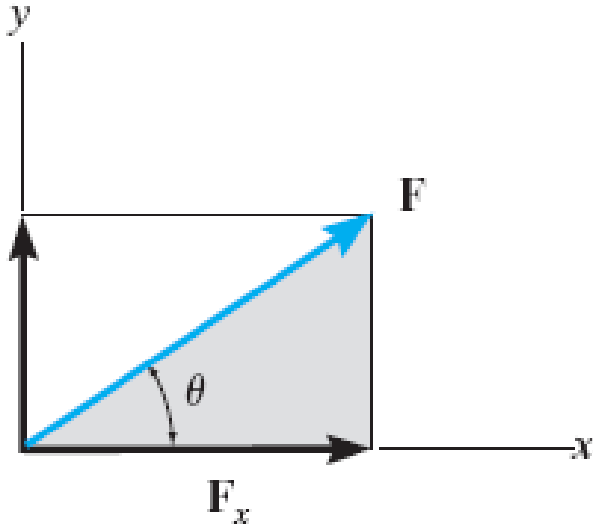


F_R bileşke kuvvetinin yatay ile yaptığı ϕ açısının hesabı

$$\phi = 39.8^\circ + 15^\circ$$
$$= 54.8^\circ$$

VEKTÖRLERİN KARTEZYEN KOORDİNAT SİSTEMİNDE GÖSTERİLİŞİ

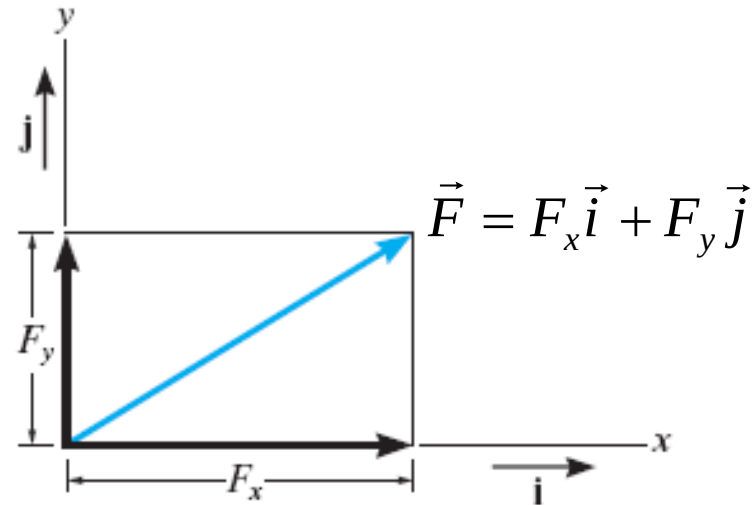
Skaler Notasyon



$$F = F_x + F_y$$

$$F_x = F \cos \theta \quad \text{ve} \quad F_y = F \sin \theta$$

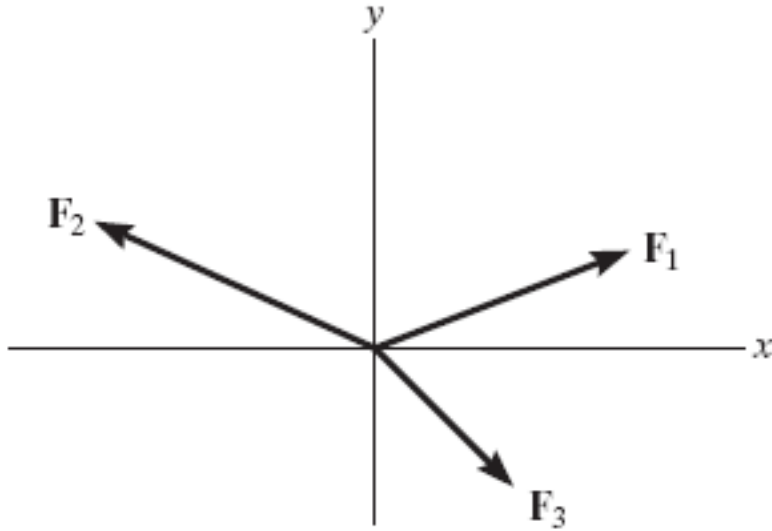
Kartezyen Vektör Notasyonu



- **i** ve **j** kartezyen birim vektörleri x ve y doğrultularını ifade etmek için kullanılır.
- **i** ve **j** birim vektörleri boyutsuz birim şiddete sahiptir. (= 1)
- Şiddet daima pozitiftir. F_x ve F_y skalerleri ile ifade edilir.

VEKTÖRLERİN KARTEZYEN KOORDİNAT SİSTEMİNDE GÖSTERİLİŞİ

Düzlemsel Bileşke Kuvvet



$$F_1 = F_{1x}i + F_{1y}j$$

$$F_2 = -F_{2x}i + F_{2y}j$$

$$F_3 = F_{3x}i - F_{3y}j$$

Çok sayıda düzlemsel kuvvetin bileşkesini hesaplamak için;

- Kuvvetler x ve y bileşkelerine ayrılır.
- Aynı doğrultudaki skaler bileşenler toplanır.
- Paralel kenar teoremi kullanılır.
- Kartezyen vektör gösterimi kullanılır.

VEKTÖRLERİN KARTEZYEN KOORDİNAT SİSTEMİNDE GÖSTERİLİŞİ

Düzlemsel Bileşke Kuvvet

Vektörel notasyon ile,

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

$$\vec{F}_1 = F_{1x}\vec{i} + F_{1y}\vec{j} \quad , \quad \vec{F}_2 = F_{2x}\vec{i} + F_{2y}\vec{j}$$

$$\vec{F}_3 = F_{3x}\vec{i} + F_{3y}\vec{j}$$

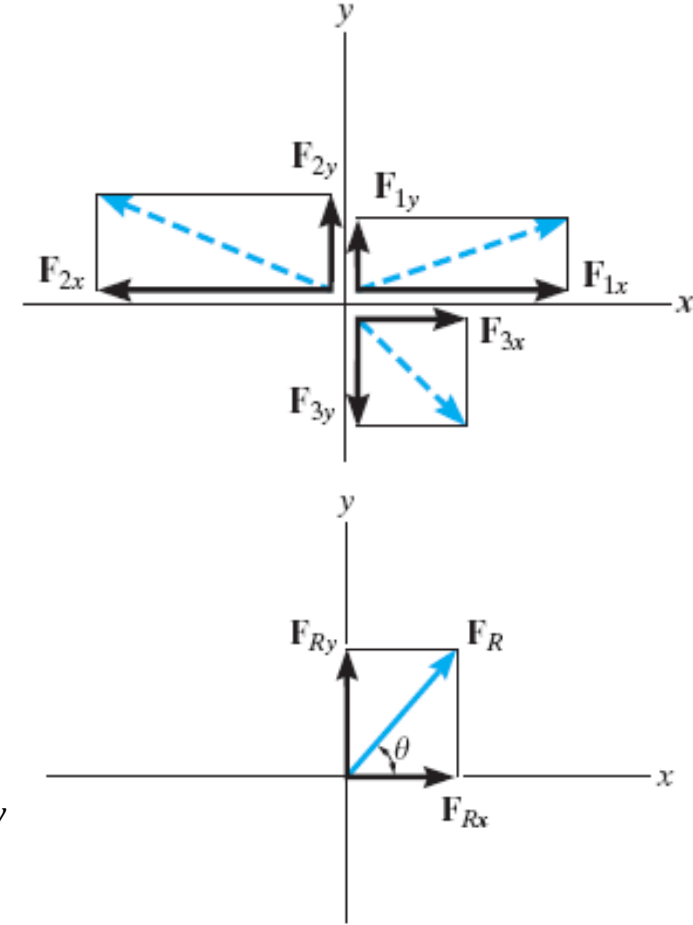
$$\begin{aligned}\vec{F}_R &= (F_{1x} + F_{2x} + F_{3x})\vec{i} + (F_{1y} + F_{2y} + F_{3y})\vec{j} \\ &= (F_{Rx})\vec{i} + (F_{Ry})\vec{j}\end{aligned}$$

Skaler notasyon ile,

$$F_{Rx} = F_{1x} - F_{2x} + F_{3x} \quad , \quad F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} - F_{3y}$$

Her koşulda,

$$\left. \begin{aligned} F_{Rx} &= \sum F_x \\ F_{Ry} &= \sum F_y \end{aligned} \right\} \left. \begin{array}{l} \text{Pozitif veya} \\ \text{negatif} \\ \text{değerler} \\ \text{dikkate} \\ \text{alınmalı.} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \mathbf{F}_R \text{ bileşke} \\ \text{kuvvetinin} \\ \text{büyüklüğü Pisagor} \\ \text{Teoremi ile} \\ \text{hesaplanabilir.} \end{array} \right\}$$



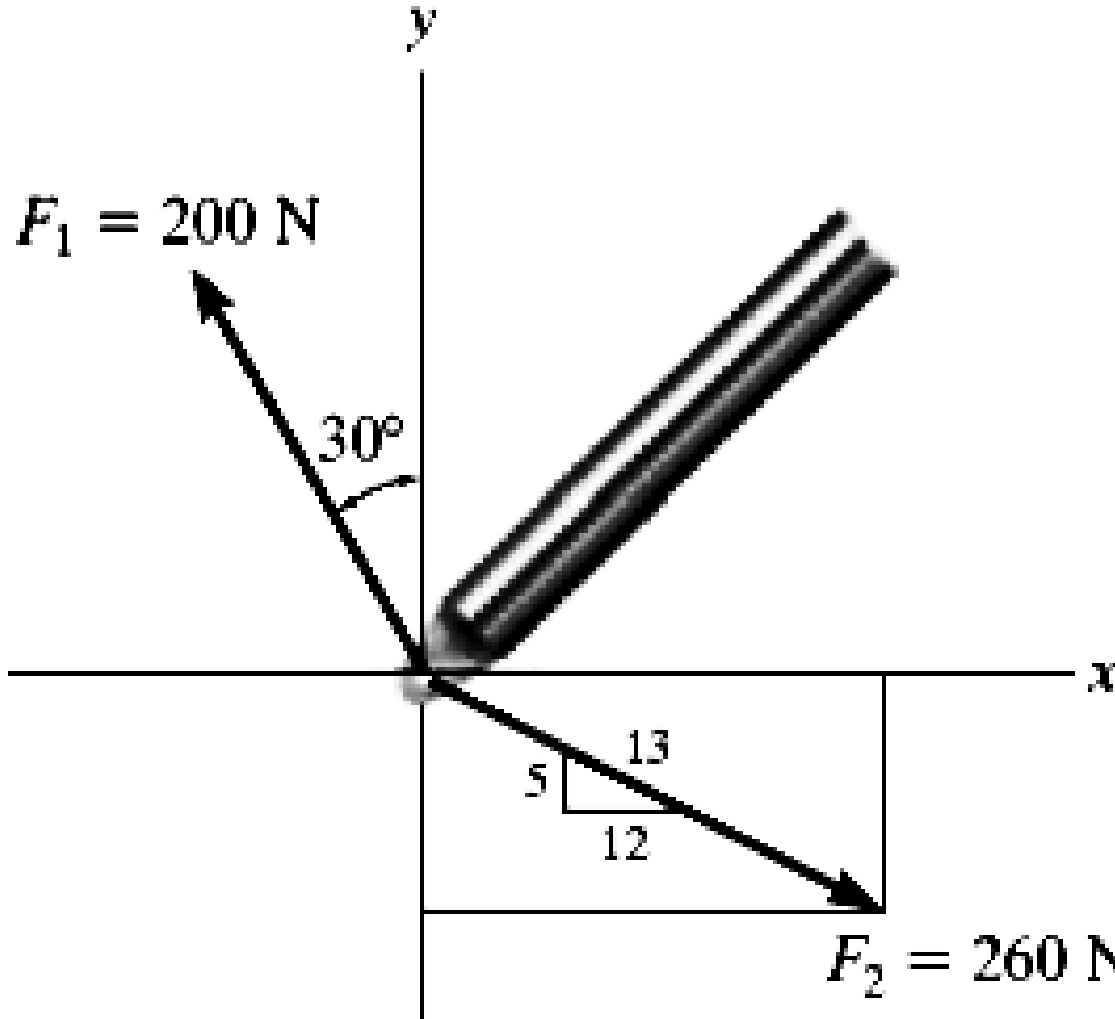
$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} \right|$$

ÖRNEK

Şekildeki çubuğa etki eden kuvvetlerin x ve y bileşenlerini hesaplayarak her kuvveti skaler ve kartezyen vektör olarak gösteriniz.

Gösterim:



$$200\text{ N} = 100\text{ N} \leftarrow$$

$$173\text{ N} \uparrow$$

$$F_{2x} = 240\text{ N} \rightarrow$$

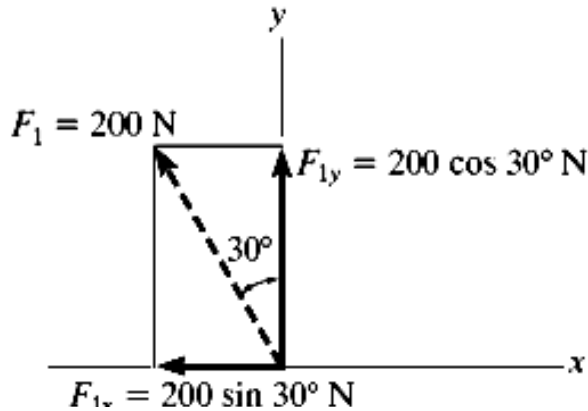
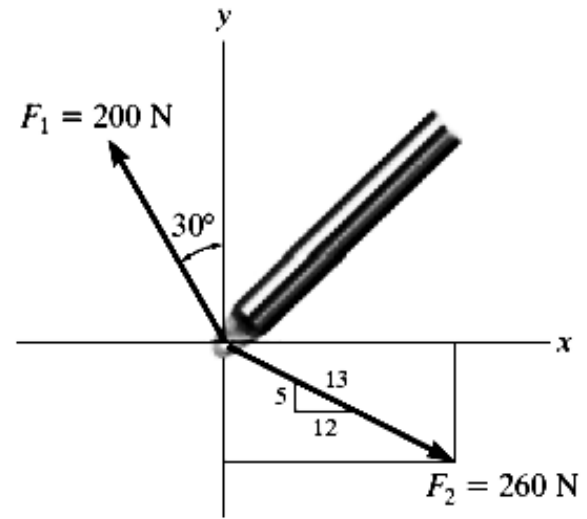
$$F_{2y} = -100\text{ N} = 100\text{ N} \downarrow$$

ÖRNEK

Şekildeki çubuğa etki eden kuvvetlerin x ve y bileşenlerini hesaplayarak her kuvveti skaler ve kartezyen vektör olarak gösteriniz.

Çözüm:

Vektörel notasyon ile,



$$F_{1x} = -200 \sin 30^\circ\text{ N} = -100\text{ N}$$

$$F_{1y} = 200 \cos 30^\circ\text{ N} = 173\text{ N}$$

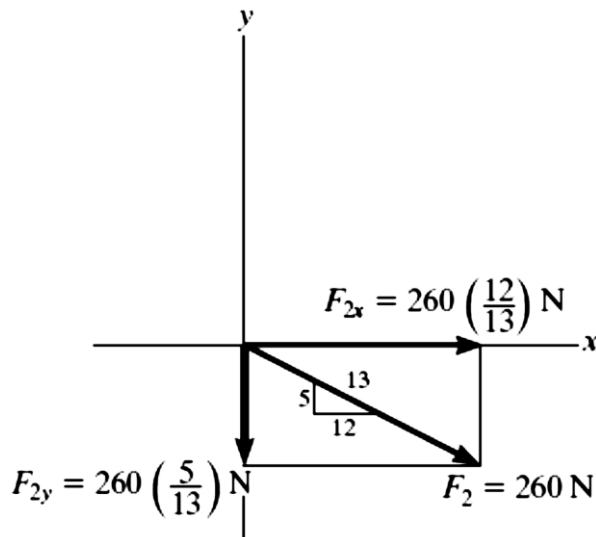
$$\vec{F}_1 = \{-100\vec{i} + 173\vec{j}\}\text{ N}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$$

$$F_{2x} = 260\left(\frac{12}{13}\right) = 240\text{ N}$$

$$F_{2y} = 260\left(\frac{5}{13}\right) = 100\text{ N}$$

$$\vec{F}_2 = \{240\vec{i} - 100\vec{j}\}\text{ N}$$



ÖRNEK

Şekildeki halkaya etki eden bileşke kuvveti skaler ve vektörel olarak hesap ediniz ve doğrultusunu bulunuz.

Çözüm:

~~Skaler notasyon ile,~~

$$F_2 = 400 \text{ N}$$
$$F_{Rx} = \Sigma F_x :$$

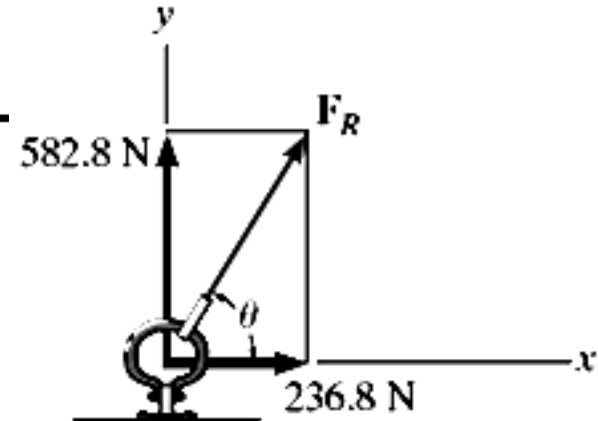
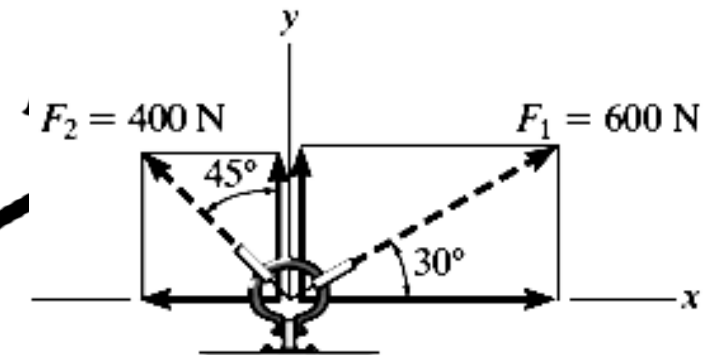
$$F_{Rx} = 600 \cos 30^\circ \text{ N} + 400 \sin 45^\circ \text{ N} = 236.8 \text{ N}$$

$$F_{Ry} = \Sigma F_y :$$

$$F_{Ry} = 600 \sin 30^\circ \text{ N} + 400 \cos 45^\circ \text{ N} = 582.8 \text{ N} \uparrow$$

$$F_R = \sqrt{(236.8 \text{ N})^2 + (582.8 \text{ N})^2} = 629 \text{ N}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{582.8 \text{ N}}{236.8 \text{ N}} \right) = 67.9^\circ$$



Vektörel notasyon ile,

$$\mathbf{F}_1 = \{ 600\cos 30^\circ \mathbf{i} + 600\sin 30^\circ \mathbf{j} \} \text{ N}$$

$$\mathbf{F}_2 = \{ -400\sin 45^\circ \mathbf{i} + 400\cos 45^\circ \mathbf{j} \} \text{ N}$$

Bileşke kuvvet,

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_R &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \\ &= (600\cos 30^\circ \text{N} - 400\sin 45^\circ \text{N})\mathbf{i} + (600\sin 30^\circ \text{N} + 400\cos 45^\circ \text{N})\mathbf{j} \\ &= \{236.8\mathbf{i} + 582.8\mathbf{j}\} \text{N}\end{aligned}$$

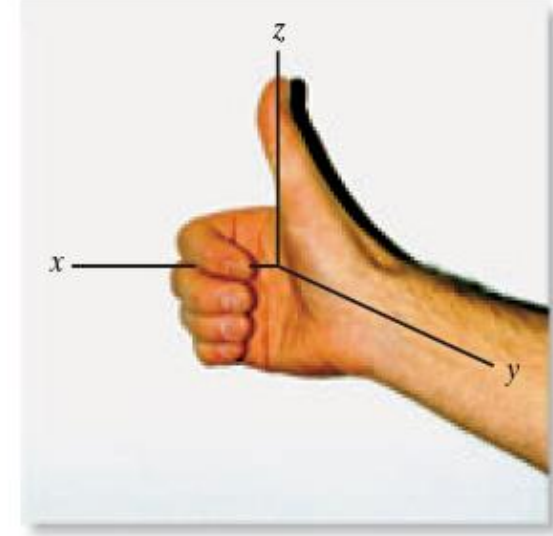
KARTEZYEN VEKTÖRLER

Sağ El Kuralı

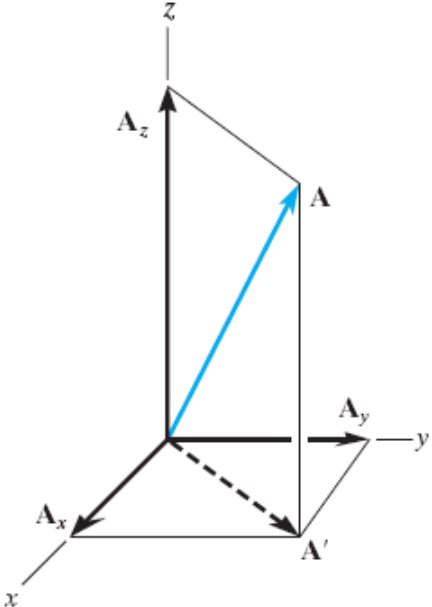
Dikdörtgensel veya kartezyen koordinat sistemi sağ el kuralına göre şu şekilde ifade edilir;

- Sağ elin baş parmağı +z eksenini,
- Sağ elden kolumuza olan doğrultu +y eksenini,
- Sağ el avuç içi +x eksenini gösterir.

İki boyutlu problemlerde +z eksenini sayfa düzlemine dik ve dışarı doğrudur.



Vektörlerin Dikdörtgensel Bileşenleri



Bir $\mathbf{A}$ vektörü, yönelimine bağlı olarak x, y ve z eksenlerinde iki veya daha fazla dikdörtgensel bileşene sahip olabilir.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \mathbf{A}_z$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y$$

İfadeleri birleştirerek, $\mathbf{A}$ aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y + \mathbf{A}_z$$

KARTEZYEN VEKTÖRLER

Birim Vektör

A vektörünün doğrultusu birim vektör ile ifade edilebilir. Birim vektör şiddeti/büyüklüğü 1 birim olan vektördür. **i**, **j** ve **k** vektörleri x, y ve z eksenlerindeki birim vektörlerdir.

A vektörünün doğrultusundaki birim vektörü **u_A** ise;

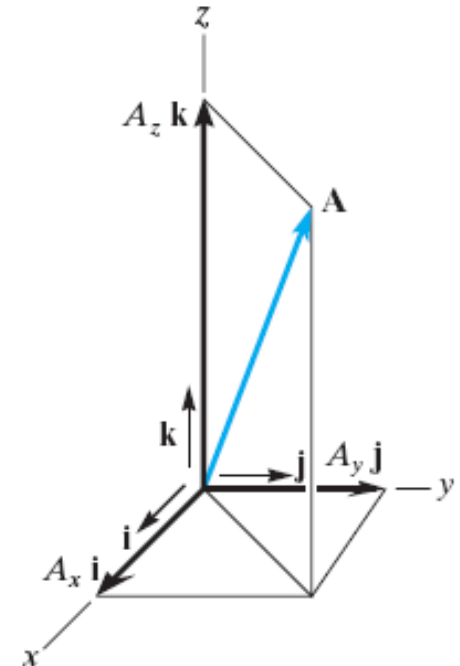
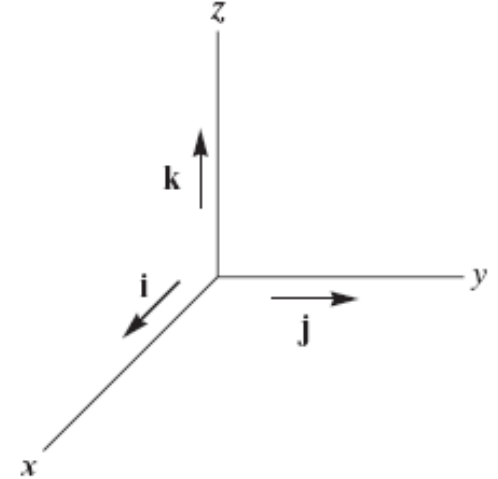
$$\mathbf{A} = A \mathbf{u}_A$$

$$\mathbf{u}_A = \mathbf{A}/A, \mathbf{u}_A = \mathbf{A}/|\mathbf{A}|$$

A vektörünün kartezyen koordinatlarda ifade edilişi;

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$$

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$



KARTEZYEN VEKTÖRLER

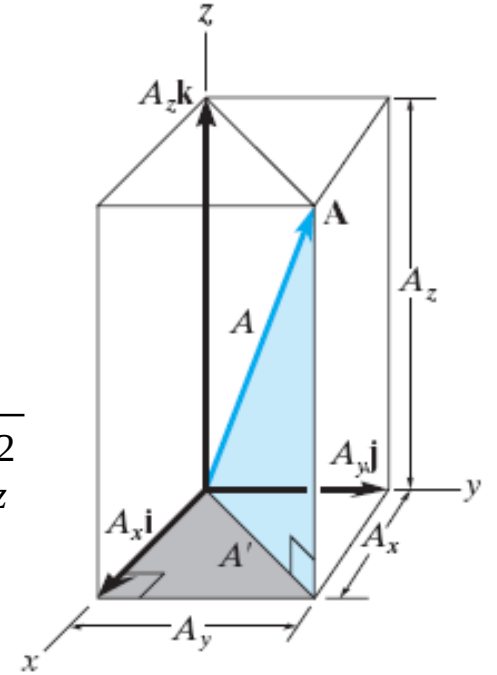
Kartezyen vektörün şiddeti/büyüklüğü

Dikey doğrultudaki (mavi) üçgenden; $A = \sqrt{A'^2 + A_z^2}$

Yatay doğrultudaki (gri) üçgenden; $A' = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$

İki denklemden **A** vektörünün şiddeti hesaplanabilir;

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$



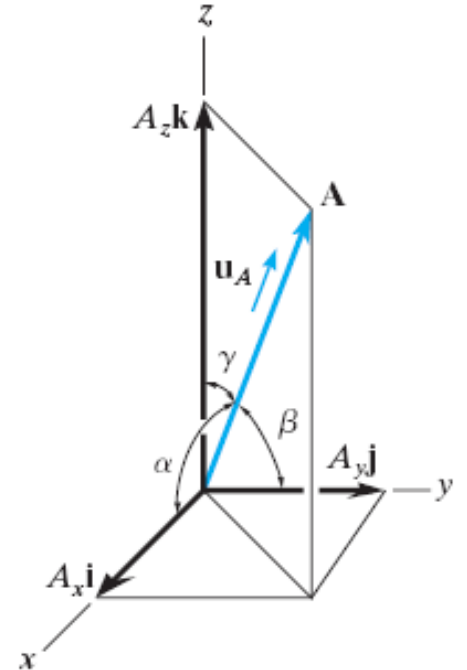
Kartezyen vektörün doğrultusu

α , β ve γ açıları x, y ve z eksenleri ile **A** vektörünün doğrultusunun yaptığı açıları gösterirken ...

$0^\circ \leq \alpha, \beta \text{ ve } \gamma \leq 180^\circ$ gibi bir ilişki olduğu varsayılırsa,

A vektörünün doğrultman (doğrultu) kosinüsleri ;

$$\cos \alpha = \frac{A_x}{A}, \cos \gamma = \frac{A_z}{A}, \cos \beta = \frac{A_y}{A}$$



KARTEZYEN VEKTÖRLER

Kartezyen vektörün doğrultusu

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$$

olarak tanımlandığına göre,

$$\mathbf{u}_A = \mathbf{A} / A = (A_x/A) \mathbf{i} + (A_y/A) \mathbf{j} + (A_z/A) \mathbf{k} \quad \mathbf{A} \text{ nın birim vektörü } (\mathbf{u}_A) \text{ şeklinde olmaktaydı.}$$

$$\text{Burada; } A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

$\mathbf{A}$ nın birim vektörü ($\mathbf{u}_A$) ayrıca şu şekilde ifade edilebilir.

$$\mathbf{u}_A = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}$$

$$\mathbf{u}_A = 1 \text{ ve } A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \text{ olduğundan,}$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

olacaktır.

$$\mathbf{A} = A \mathbf{u}_A$$

$$= A \cos \alpha \mathbf{i} + A \cos \beta \mathbf{j} + A \cos \gamma \mathbf{k}$$

$$= A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$$

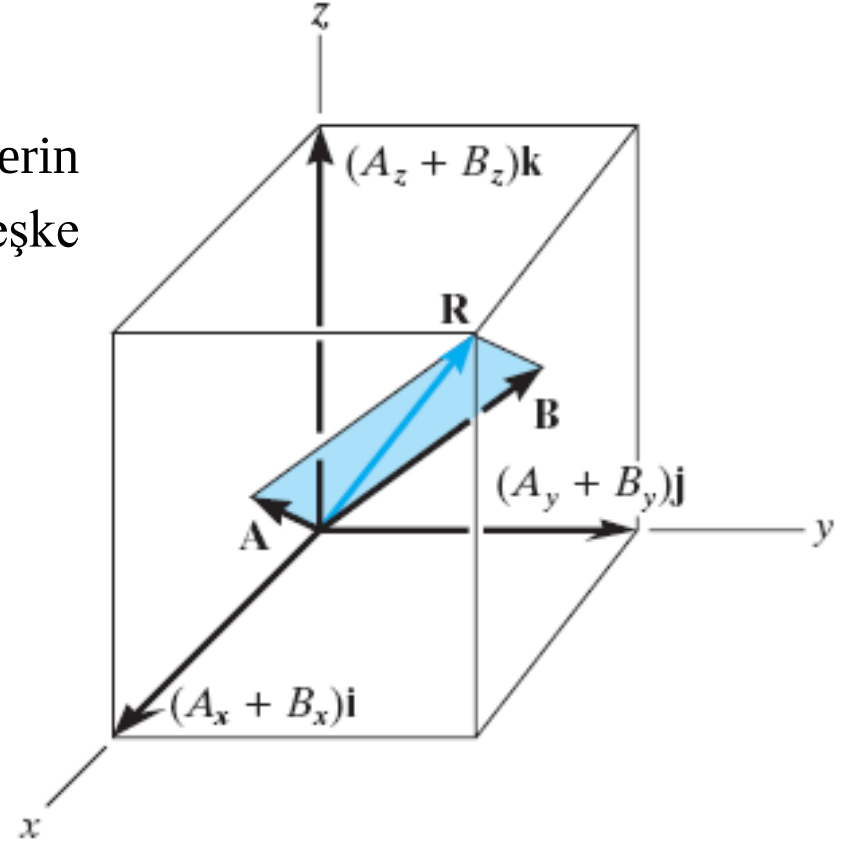
KARTEZYEN VEKTÖRLERİN TOPLANMASI ve ÇIKARTILMASI

Noktasal Tekil Yük

Sistemdeki bütün yüklerin veya kuvvetlerin toplamına eşit olan kuvvete veya yüke bileşke kuvvet veya noktasal tekil yük denir.

$$\mathbf{F}_R = \sum \mathbf{F} = \sum F_x \mathbf{i} + \sum F_y \mathbf{j} + \sum F_z \mathbf{k}$$

$$\vec{F}_R = \sum \mathbf{F} = \sum F_x \vec{i} + \sum F_y \vec{j} + \sum F_z \vec{k}$$



ÖRNEK

Şekildeki kuvveti kartezyen vektör olarak ifade ediniz.

Çözüm:

Vektör ile eksenler arasındaki iki açı bilindiğine göre, üçüncü aşağıdaki gibi hesaplanabilir

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 60^\circ + \cos^2 45^\circ = 1$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - (0.5)^2 - (0.707)^2} = \pm 0.5$$

$F = 200 \text{ N}$
İki olasılık mevcuttur,

$$\alpha = \cos^{-1}(0.5) = 60^\circ, \quad \alpha = \cos^{-1}(-0.5) = 120^\circ$$

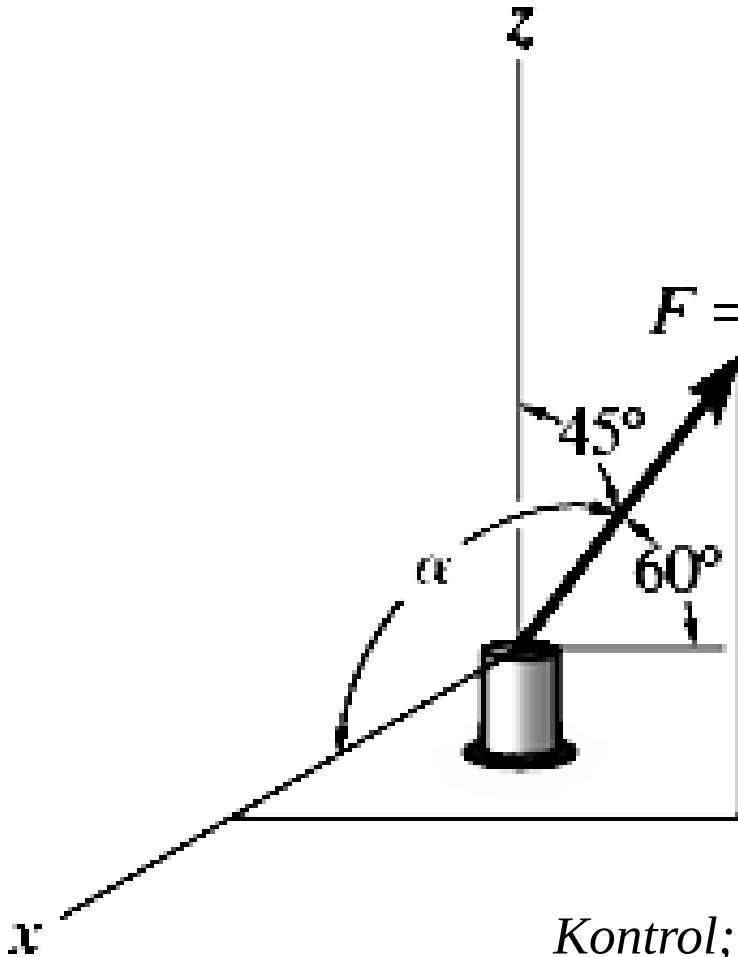
F_x +x yönünde olduğundan $\alpha = 60^\circ$ alınır.

$F = 200 \text{ N}$ olarak verilmişti,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= F \cos \alpha \mathbf{i} + F \cos \beta \mathbf{j} + F \cos \gamma \mathbf{k} \\ &= (200 \cos 60^\circ) \mathbf{i} + (200 \cos 60^\circ) \mathbf{j} + (200 \cos 45^\circ) \mathbf{k} \\ &= \{100.0 \mathbf{i} + 100.0 \mathbf{j} + 141.4 \mathbf{k}\} \text{ N} \end{aligned}$$

$$\text{Kontrol; } F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$= \sqrt{(100.0)^2 + (100.0)^2 + (141.4)^2} = 200 \text{ N}$$

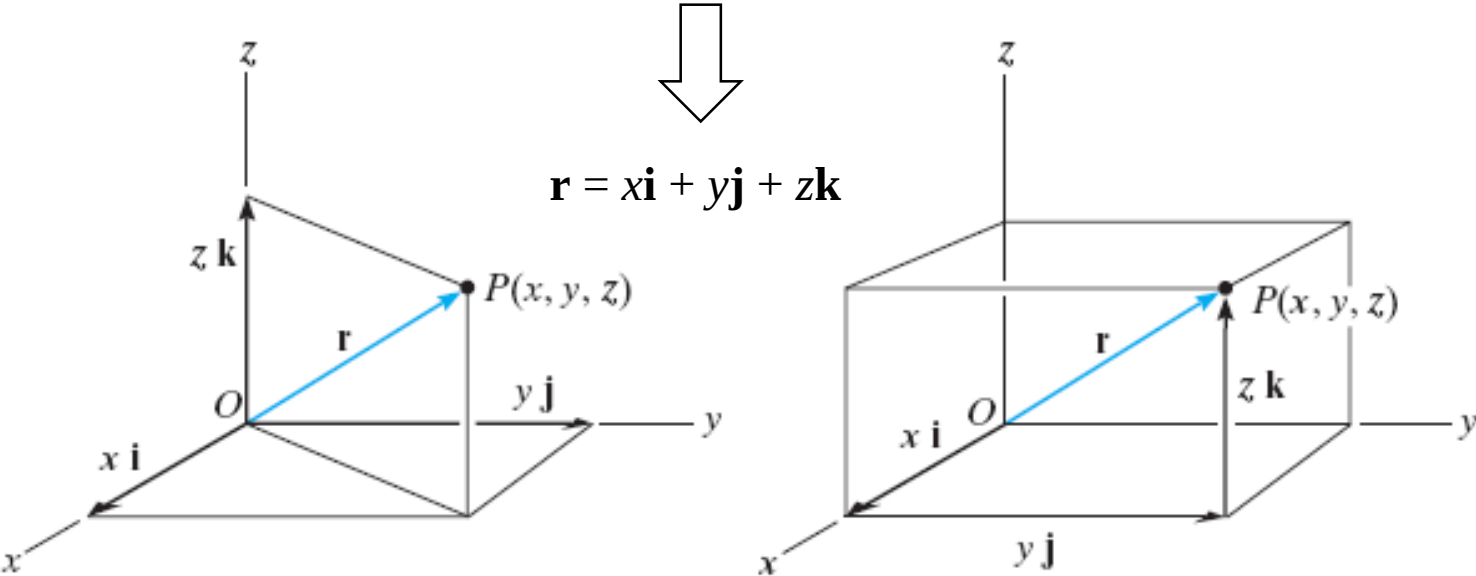
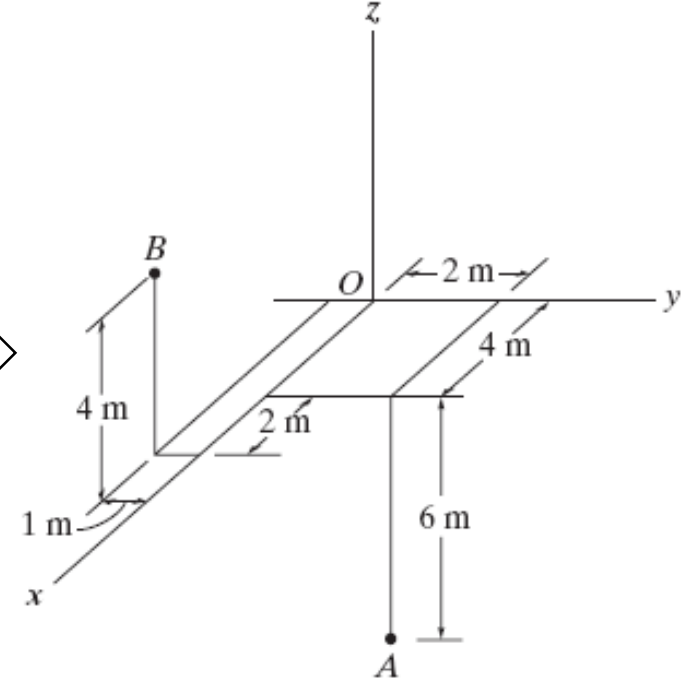


KONUM VEKTÖRLERİ

x, y ve z koordinatları sağ el kuralına göre belirlenmiş olmak koşulu ile;

Bir cismin yüksekliği ve diğer boyutları orjine göre bağl olarak ölçülür.

Pozisyon vektörü ise herhangi bir noktaya bağlı olarak başka bir noktanın konumunu ifade eden vektördür.



KONUM VEKTÖRLERİ

$$\mathbf{r}_A + \mathbf{r} = \mathbf{r}_B$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A = (x_B - x_A)\mathbf{i} + (y_B - y_A)\mathbf{j} + (z_B - z_A)\mathbf{k}$$

veya

$$\mathbf{r} = (x_B - x_A)\mathbf{i} + (y_B - y_A)\mathbf{j} + (z_B - z_A)\mathbf{k}$$

ÖRNEK

A ve B noktaları arasına bir ip bağlanmıştır. İpin A noktasından B noktasına doğru uzunluğunu ve doğrultusunu bulunuz.

Çözüm:

$$A(1, 0, -3), B(-2, 2, 3)$$

A noktasından B noktasına konum vektörü $\mathbf{r}$ ise,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$$

$$\mathbf{r} = [-2\text{m} - 1\text{m}]\mathbf{i} + [2\text{m} - 0]\mathbf{j} + [3\text{m} - (-3\text{m})]\mathbf{k} \\ = \{-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}\}\text{m}$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{(-3)^2 + (2)^2 + (6)^2} = 7\text{m}$$

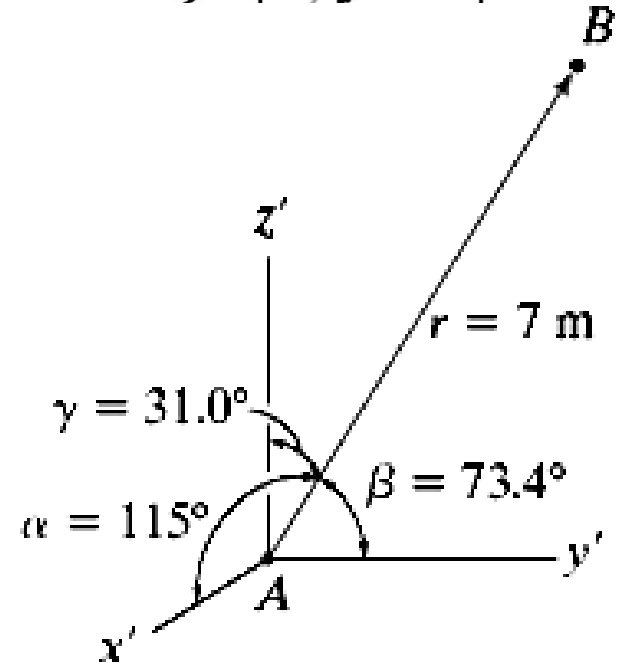
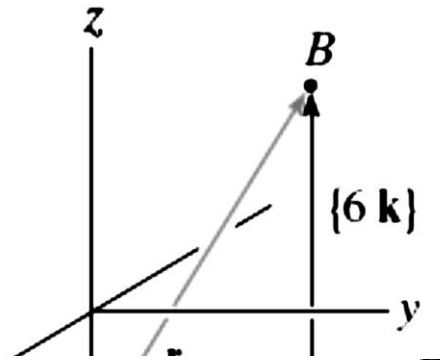
$\mathbf{r}$ konum vektörünün birim vektörü $\mathbf{u}$,

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}/r = -3/7\mathbf{i} + 2/7\mathbf{j} + 6/7\mathbf{k}$$

$$\alpha = \cos^{-1}(-3/7) = 115^\circ$$

$$\beta = \cos^{-1}(2/7) = 73.4^\circ$$

$$\gamma = \cos^{-1}(6/7) = 31.0^\circ$$



BİR DOĞRULTU BOYUNCA YÖNLENEN KUVVET VEKTÖRÜ

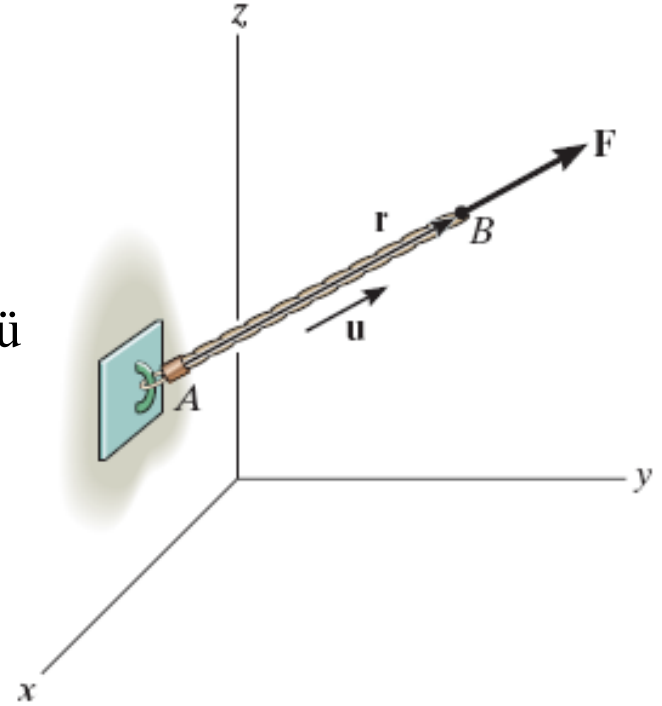
Üç boyutlu (3B) problemlerde F kuvvetinin etki doğrultusu iki nokta ile tarif edilir. F kuvveti bir kartezyen vektör olarak formüle edilebilir.

$\mathbf{F}$ = 3B kartezyen koordinat sisteminde bir kuvvet vektörü

$\mathbf{r}$ = $\mathbf{F}$ kuvvetinin uygulandığı B noktasının A noktasına göre kuvvet ile aynı doğrultu üzerinde olan konum vektörü

$\mathbf{u}$ = Kuvvet ve konum vektörlerinin doğrultusundaki birim vektör

$$\mathbf{F} = F \mathbf{u} = F (\mathbf{r}/r)$$



ÖRNEK

Şekildeki halat B noktasından 350 N'luk bir kuvvet ile AB doğrultusunda çekilmektedir. A noktasına etki eden kuvveti kartezyen vektör olarak ifade ederek doğrultusunu bulunuz.

Çözüm:

$$A (0\text{m}, 0\text{m}, 7.5\text{m}) \quad B (3\text{m}, -2\text{m}, 1.5\text{m})$$

$$\mathbf{r} = (3\text{m} - 0\text{m})\mathbf{i} + (-2\text{m} - 0\text{m})\mathbf{j} + (1.5\text{m} - 7.5\text{m})\mathbf{k} \\ = \{3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}\} \text{ m}$$

Konum vektörü büyüklüğü = AB halatının boyu

$$r = \sqrt{(3\text{m})^2 + (-2\text{m})^2 + (-6\text{m})^2} = 7\text{m}$$

Birim vektör,

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}/r$$

$$\mathbf{u} = 3/7\mathbf{i} - 2/7\mathbf{j} - 6/7\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F} = F\mathbf{u}$$

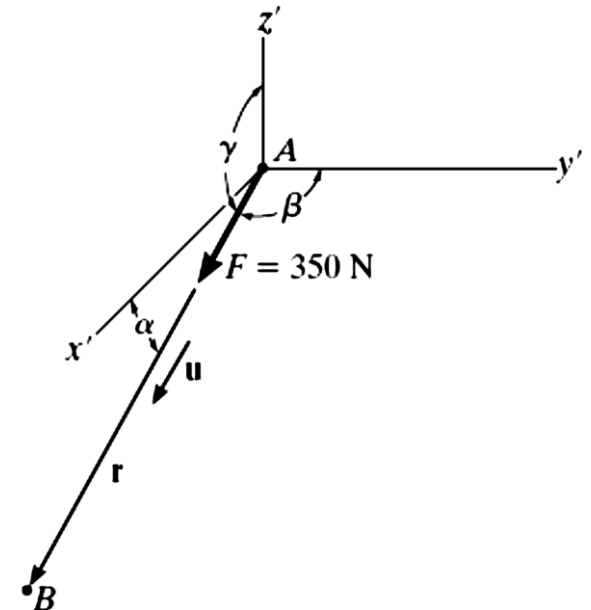
$$= 350\text{N}(3/7\mathbf{i} - 2/7\mathbf{j} - 6/7\mathbf{k})$$

$$= \{150\mathbf{i} - 100\mathbf{j} - 300\mathbf{k}\} \text{ N}$$

$$\alpha = \cos^{-1}(3/7) = 64.6^\circ$$

$$\beta = \cos^{-1}(-2/7) = 107^\circ$$

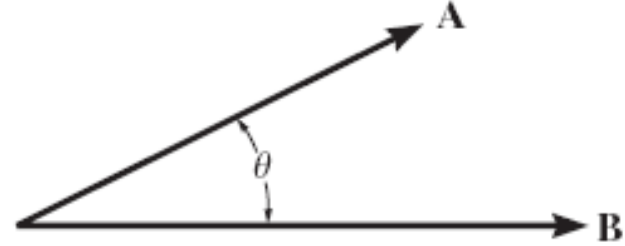
$$\gamma = \cos^{-1}(-6/7) = 149^\circ$$



VEKTÖRLERİN SKALER (NOKTA) ÇARPIMI

A ve **B** vektörlerinin skaler çarpımı **A•B** şeklinde yazılır.

A ve **B** vektörlerinin büyüklüklerini ve başlangıç noktalarındaki birbiri arasındaki açıyı ifade eder.



$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta \quad \text{burada, } 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$$

Sonuç bir skaler olduğundan skaler çarpım olarak adlandırılır.

Skaler Çarpım Kuralları

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

Yerdeğiştirme kuralı

$$a(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (a\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (a\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})a$$

Bir skaler ile çarpım kuralı

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})$$

Dağılım kuralı

VEKTÖRLERİN SKALER (NOKTA) ÇARPIMI

Kartezyen birim vektörlerin skaler çarpımı

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = (1)(1) \cos 0^\circ = 1$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = (1)(1) \cos 90^\circ = 0$$

Benzer biçimde,

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1 \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1 \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0 \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0 \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0$$

Kartezyen vektör skaler çarpım formülasyonu

$$\begin{aligned}\vec{A} \bullet \vec{B} &= (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) \bullet (B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}) \\&= A_x B_x (\vec{i} \text{😊} \vec{i}) + A_x B_y (\vec{i} \text{❌} \vec{j}) + A_x B_z (\vec{i} \text{❌} \vec{k}) \\&\quad + A_y B_x (\vec{j} \text{❌} \vec{i}) + A_y B_y (\vec{j} \text{😊} \vec{j}) + A_y B_z (\vec{j} \text{❌} \vec{k}) \\&\quad + A_z B_x (\vec{k} \text{❌} \vec{i}) + A_z B_y (\vec{k} \text{❌} \vec{j}) + A_z B_z (\vec{k} \text{😊} \vec{k})\end{aligned}$$

VEKTÖRLERİN SKALER (NOKTA) ÇARPIMI

Uygulamalar

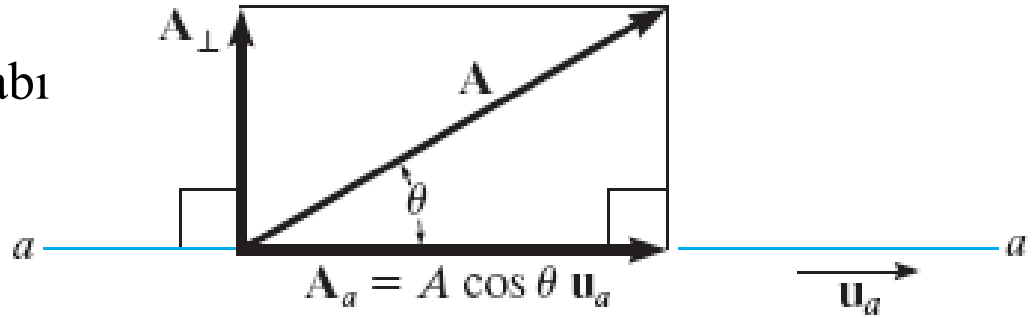
1) İki vektör arasındaki açının bulunması

$$\theta = \cos^{-1} [(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) / (AB)] \quad 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$$

2) Vektörün herhangi bir çizgiye paralel ve dik bileşenlerinin hesabı

$$A_a = A \cos \theta = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}$$

$$A_\perp = |\vec{A}| \sin \theta$$



ÖRNEK

Şekildeki $\mathbf{F} = \{300\mathbf{j}\}$ N'luk kuvvetin AB çubuğu doğrultusundaki ve buna dik bileşenlerini bulunuz.

Çözüm :

$$A(0,0,0) \quad , \quad B(2,6,3)$$

$$\vec{u}_B = \frac{\vec{r}_B}{|\vec{r}_B|} = \frac{2\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}}{\sqrt{(2)^2 + (6)^2 + (3)^2}} = 0.286\vec{i} + 0.857\vec{j} + 0.429\vec{k}$$

Böylece,

$$|\vec{F}_{AB}| = |\vec{F}| \cos \theta = \vec{F} \cdot \vec{u}_B = (300\vec{j}) \cdot (0.286\vec{i} + 0.857\vec{j} + 0.429\vec{k})$$
$$= (0)(0.286) + (300)(0.857) + (0)(0.429) = 257.1 \text{ N}$$

Skaler değer pozitif olduğu için $\mathbf{F}_{AB}$ kuvvet vektörü $\mathbf{u}_B$ birim vektörü ile aynı yöndedir.

$$\vec{F}_{AB} = |\vec{F}_{AB}| \vec{u}_{AB} = (257.1 \text{ N})(0.286\vec{i} + 0.857\vec{j} + 0.429\vec{k}) = \{73.5\vec{i} + 220\vec{j} + 110\vec{k}\} \text{ N}$$

$$\vec{F}_\perp = \vec{F} - \vec{F}_{AB} = 300\vec{j} - (73.5\vec{i} + 220\vec{j} + 110\vec{k}) = \{-73.5\vec{i} + 80\vec{j} - 110\vec{k}\} \text{ N}$$

$$|\vec{F}_\perp| = \sqrt{|\vec{F}|^2 - |\vec{F}_{AB}|^2} = \sqrt{(300 \text{ N})^2 - (257.1 \text{ N})^2} = 155 \text{ N} \quad \text{veya} \quad |\vec{F}_\perp| = \sqrt{(-73.5)^2 + (80)^2 + (-110)^2} = 155 \text{ N}$$

