Bölüm 7

Hipotez Testi: İki Örnekli Testler

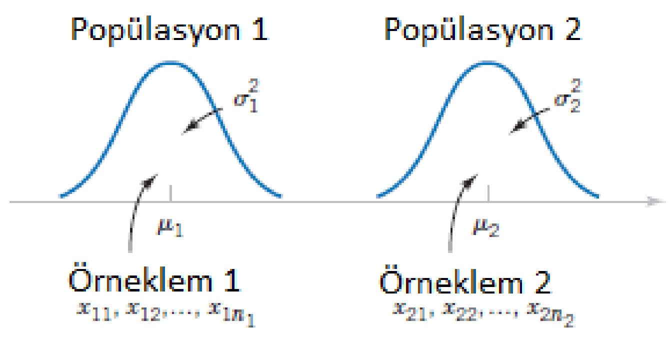
Öğrenme hedefleri

Bu bölümde aşağıdaki konular öğrenilecektir:

- Hipotez testinin,
  - İki bağımsız popülasyonun ortalamaları
  - İki ilişkili popülasyonun ortalamaları
  - İki bağımsız popülasyonun oranları
  - İki bağımsız popülasyonun varyansları

arasında kıyaslama yapılması için nasıl kullanılacağı

Giriş



- Bu bölümde tek örneklem için elde edilen sonuçlar iki örneklem için genişletilecektir.
- Genel durum aşağıdaki şekilde verilmektedir. 1. popülasyonun ortalaması μ_1 ve varyansı σ_1^2 ve 2. popülasyonun ortalaması μ_2 ve varyansı σ_2^2 olsun.
- Çıkarımlar sırasıyla n_1 ve n_2 büyüklüğündeki iki örnekleme dayalı olarak yapılacaktır.
- Yani $X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_1}$ birinci popülasyondan alınmış n_1 büyüklüğündeki rassal örneklem ve $X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n_2}$ ikinci popülasyondan alınmış n_2 büyüklüğündeki rassal örneklem olsun.
- Bu bölümdeki prosedürlerin birçok pratik uygulaması iki popülasyonun parametreleri arasındaki fark üzerine çalışmayı amaçlayan basit karşılaştırmalı deneylere dayanmaktadır.

İki örnekli testler

İki Örnekli Testler

- Popülasyon Ortalamaları, Bağımsız Örnekler
- Popülasyon Ortalamaları, Eşlenik Örnekler
- Popülasyon Oranları
- Popülasyon Varyansları

Örnekler:

- Grup 1 ile Grup 2
- Aynı grubun iyileştirmeden önceki ile sonraki durumu
- Oran 1 ile Oran 2
- Varyans 1 ile Varyans 2

Varyanslar bilindiğinde ortalamalar farkı için hipotez testleri

- $\mu_1 - \mu_2$'nin makul nokta tahmin edicisi örneklem ortalamaları farkı $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$'dir. Beklenen değer özelliklerine göre

$$E(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = E(\overline{X}_1) - E(\overline{X}_2) = \mu_1 - \mu_2$$

ve $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$'nin varyansı

$$V(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = V(\overline{X}_1) + V(\overline{X}_2) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

Varsayımlara yukarıdaki sonuçları dikkate alarak aşağıdakini elde edebiliriz.

$$Z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

rassal değişkeni ortalaması 0 ve varyansı 1 olan standart normal değişkendir.

Varyanslar bilindiğinde ortalamalar farkı için hipotez testleri

Sıfır hipotezi: $H_0: \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$

Test istatistiği: $Z_0 = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - (\Delta_0)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$

Alternatif Hipotez	**Sabit-Seviye Testin Ret Kriteri**
$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$	$z_0 > z_{\alpha/2}$ veya $z_0 < -z_{\alpha/2}$
$H_1: \mu_1 - \mu_2 > \Delta_0$	$z_0 > z_\alpha$
$H_1: \mu_1 - \mu_2 < \Delta_0$	$z_0 < -z_\alpha$

Örnek: Boyanın kuruma zamanı

- Bir ürün geliştirici primer boyanın kuruma zamanının azaltılmasıyla ilgilenmektedir. İki boya formülasyonu test edilecektir: formülasyon 1 standart kimyasaldır ve formülasyon 2 kuruma zamanını azaltması gereken yeni bir içeriğe sahiptir.

- Geçmiş tecrübelerden kuruma zamanına ait standart sapmasının 8 dakika olduğu ve bu değişkenliğin yeni içeriğin eklenmesinden etkilenmemelidir. 10 adet numune formülasyon 1 ile diğer 10 adet numune formülasyon 2 ile boyanmış yani toplam 20 numune rassal sırayla boyanmıştır.

- Kuruma zamanlarına ait örneklem ortalamaları $\overline{x}_1 = 121$ dk. ve $\overline{x}_2 = 112$ dk. olarak bulunmuştur. $\alpha = 0{,}05$ seçildiğinde ürün geliştirici yeni içeriğin etkinliği hakkında ne tür sonuçlar çıkarabilir?

Burada popülasyon ortalamaları arasındaki fark $\mu_1 - \mu_2$ ile ilgilenilmektedir ve $\Delta_0 = 0$'dır.
Sıfır hipotezi H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ veya H_0: $\mu_1 = \mu_2$ şeklindedir. Alternatif hipotez H_1: $\mu_1 > \mu_2$ şeklinde kurulacaktır. Eğer yeni içerik ortalama kuruma zamanını azaltıyorsa H_0 hipotezini reddedeceğiz.
Test istatistiği aşağıdaki gibidir.

$$z_0 = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - 0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Burada $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = (8)^2 = 64$ ve $n_1 = n_2 = 10$'dur. Eğer P-değeri 0,05'ten küçükse H_0 hipotezini reddedeceğiz.
Hesaplamalar
$\overline{x}_1 = 121$ ve $\overline{x}_2 = 112$ olduğundan test istatistiği aşağıdaki gibidir.

$$z_0 = \frac{121 - 112}{\sqrt{\frac{(8)^2}{10} + \frac{(8)^2}{10}}} = 2{,}52$$

$z_0 = 2{,}52$ olduğundan P-değeri $P = 1 - \Phi(2{,}52) = 0{,}0059$ olarak bulunur. Böylece $\alpha = 0{,}05$ için H_0 hipotezi reddedilir.
Pratik Yorum: Boyaya yeni içeriğin eklenmesi kuruma zamanını önemli derecede düşürmüştür.

Örnek

- Varyansları 56 ve 65 olan iki anakütleden sırasıyla 25 ve 30 birimlik örnekler alınmış ve birinci örneğin ortalaması 92, ikinci örneğin ortalaması da 88 olarak hesaplanmıştır.

- Anakütle ortalamalarının farklı olup olmadığını %5 hata seviyesinde test ediniz.

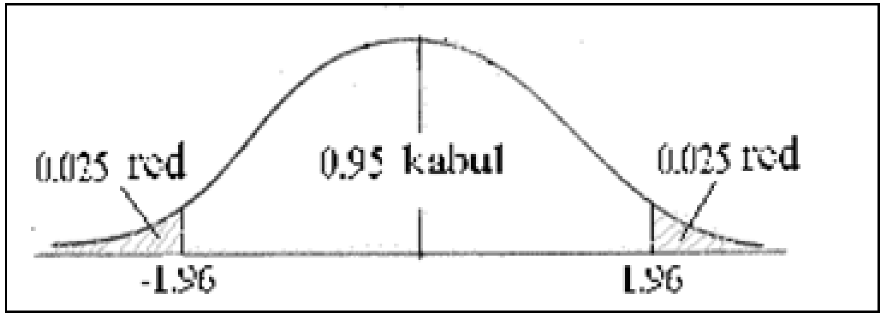
Örnek

i. H_0: $\mu_1=\mu_2$

H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$

ii. $\alpha=0.05$ $\alpha/2=0.05/2=0.025$ $TÇY \rightarrow Z_{\alpha/2}=Z_{0.025}=\pm 1.96$

iii. $$Z_h = \frac{(92-88)-0}{\sqrt{\frac{56}{25}+\frac{65}{30}}} = 1.906$$



iv. $|Z_h| = |1.906| < |Z_{0.025}| = |\pm 1.96|$ $\rightarrow$ H_0 reddedilemez.

v. $\alpha=0.05$ hata {veya $(1-\alpha)=0.95$ güven} seviyesinde anakütle ortalamalarının aynı olduğu söylenebilir. Başka bir ifadeyle, örneklerde gözlenen farklılığın önemli olmadığı, tesadüfî (şans eseri) olduğu kabul edilebilir.

Varyanslar bilindiğinde ortalamalar farkı için güven aralığı

- Bu ifade aşağıdaki gibi düzenlenebilir.
- $P\left(\overline{X}_1-\overline{X}_2-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\le\mu_1-\mu_2\le\overline{X}_1-\overline{X}_2+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)=1-\alpha$
- Böylece $\mu_1-\mu_2$ için %$100(1-\alpha)$ güven aralığı aşağıdaki gibi tanımlanır.

Eğer $\overline{x}_1$ ve $\overline{x}_2$ sırasıyla varyansları bilinen σ_1^2 ve σ_2^2 olan iki bağımsız normal dağılımdan alınmış n_1 ve n_2 büyüklüğündeki rassal örneklemlere ait ortalamalar ise $\mu_1-\mu_2$ için **%$\boldsymbol{100(1-\alpha)}$ güven aralığı** aşağıdaki gibidir.

$$\overline{x}_1-\overline{x}_2-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\le\mu_1-\mu_2\le\overline{x}_1-\overline{x}_2+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Burada $z_{\alpha/2}$ standart normal dağılımın sağ kuyruğunda kalan alanı $\alpha/2$ yapan tablo değeridir.

Örnek: Alüminyum kopma mukavemeti

- Ticari bir nakliye uçağının kanat üretiminde kullanılan iki farklı alüminyum direklerin kopma mukavemeti ile ilgili testler yapılmaktadır.
- Direk üretim süreci ve test prosedüründeki geçmiş tecrübelerden kopma mukavemetlerinin standart sapmalarının bilindiği varsayılmaktadır.
- Elde edilen veriler şu şekildedir: $n_1 = 10$, $\overline{x}_1 = 87{,}6$, $\sigma_1 = 1$, $n_2 = 12$, $\overline{x}_2 = 74{,}5$ ve $\sigma_2 = 1{,}5$. Eğer μ_1 ve μ_2 iki farklı alüminyum çubuğun ortalama kopma mukavemetlerini gösteriyorsa $\mu_1 - \mu_2$ kopma mukavemet farkına ilişkin %90 GA aşağıdaki gibidir:

$$\overline{x}_1 - \overline{x}_2 - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \overline{x}_1 - \overline{x}_2 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$87{,}6 - 74{,}5 - 1{,}645\sqrt{\frac{(1)^2}{10} + \frac{(1{,}5)^2}{12}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 87{,}6 - 74{,}5 + 1{,}645\sqrt{\frac{(1)^2}{10} + \frac{(1{,}5)^2}{12}}$$

- Böylece kopma mukavemetine ait fark için %90 GA (kg/mm^2) aşağıdaki gibidir:

$$12{,}22 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 13{,}98$$

Örnek

- Bir yabancı dil kursunun A sınıfında bilgisayar destekli ve B sınıfında klasik yöntemlerle eğitim verilmektedir. Kursun başlangıcından 6 hafta sonra her iki sınıfa da aynı test uygulanarak sonuçlar karşılaştırılmıştır. A sınıfından rassal olarak seçilen 40 öğrencinin test sonucunda elde ettiği ortalama başarı notu 86 ve standart sapması 12, B sınıfından rassal olarak seçilen 35 öğrencinin ortalama başarı notu 72 ve standart sapması 14’tür. Her iki sınıftaki öğrencilerin ortalama başarı notları arasındaki farkın güven aralığını %99 olasılıkla belirleyiniz.

Çözüm

$$\bar{X}_1 = 86 \qquad S_1 = 12 \qquad n_1 = 40$$

$$\bar{X}_2 = 72 \qquad S_2 = 14 \qquad n_2 = 35$$

$$P\left(\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - Z_{\alpha/2} \times \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \le \mu_1 - \mu_2 \le \left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) + Z_{\alpha/2} \times \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \right) = 1 - \alpha$$

$$P\left((86 - 72) - 2.58 \times \sqrt{\frac{12^2}{40} + \frac{14^2}{35}} \le \mu_1 - \mu_2 \le (86 - 72) + 2.58 \times \sqrt{\frac{12^2}{40} + \frac{14^2}{35}} \right) = 0.99$$

$$P(6.18 \le \mu_1 - \mu_2 \le 21.82) = 0.99$$

Örneklem hacmi formülleri

Örneklem hacminin hesabı tek örneklem için geliştirilen örneklem hacmi hesabıyla yakından ilgilidir.

α önem seviyesine sahip iki-uçlu alternatif hipotez için en az $1-\beta$ güce sahip gerçek ortalamalar arasındaki fark Δ'yı tespit edebilmek için gerekli örneklem hacmi $n_1 = n_2 = n$ aşağıdaki gibidir.

$$n \cong \frac{\left(z_{\alpha/2}+z_{\beta}\right)^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{(\Delta-\Delta_0)^2}$$

Bu yaklaşım $\Phi\left(z_{\alpha/2}-(\Delta-\Delta_0)\sqrt{n}/\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)$ değeri β'ya göreli olarak küçük iken iyi sonuçlar vermektedir.

α önem seviyesine sahip tek-uçlu alternatif hipotez için en az $1-\beta$ güce sahip gerçek ortalamalar arasındaki fark $\Delta\,(\neq \Delta_0)$'yı tespit edebilmek için gerekli örneklem hacmi $n_1 = n_2 = n$ aşağıdaki gibidir.

$$n \cong \frac{\left(z_{\alpha}+z_{\beta}\right)^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{(\Delta-\Delta_0)^2}$$

Örnek

- Örneklem hacmi denklemlerinin kullanımını göstermek için boya kuruma zamanları örneğini dikkate alalım ve varsayalım ki eğer kuruma zamanları arasındaki gerçek fark en çok 10 dakika ise biz bu farkı en az %90 olasılıkla tespit etmek istiyoruz.
- Sıfır hipotezi altında $\Delta_0 = 0$'dır. $\Delta = 10$, $\alpha = 0{,}05$ (dolayısıyla $z_\alpha = z_{0,05} = 1{,}645$) olmak üzere tek-uçlu bir alternatif hipotezimiz var ve güç 0,90 olduğundan $\beta = 0{,}10$ (dolayısıyla $z_\beta = z_{0,10} = 1{,}28$) olacaktır. Böylelikle gerekli örneklem hacmi aşağıdaki gibi bulunur.

$$n = \frac{\left(z_\alpha + z_\beta\right)^2\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)}{(\Delta - \Delta_0)^2} = \frac{(1{,}645 + 1{,}28)^2\left[(8)^2 + (8)^2\right]}{(10 - 0)^2} = 11$$

Varyanslar bilinmediğinde ortalamalar farkı için hipotez testleri

Popülasyon Ortalamaları, Bağımsız örnekler *

- σ_1 ve σ_2 bilinmiyor, eşit kabul edildiğinde
- σ_1 ve σ_2 bilinmiyor, eşit kabul edil**me**diğinde

Amaç: İki Popülasyonun ortalamaları arasındaki fark, $\mu_1 - \mu_2$ için hipotezlerin testi veya bir güven aralığı oluşturulması

Fark için nokta tahmini

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2$$

Varyanslar bilinmediğinde ortalamalar farkı için hipotez testleri

Popülasyon Ortalamaları, Bağımsız örnekler

- σ_1 ve σ_2 bilinmiyor, eşit kabul edildiğinde *
- σ_1 ve σ_2 bilinmiyor, eşit kabul edil**me**diğinde *

Her iki anakütleden çekilen örnek sayıları 30'dan fazla ise, varyansların birbirlerine eşit kabul edilip edilmemelerine bakılmaksızın s_1 ve s_2 değerleri ile test istatistiği aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$z_{STAT} = \frac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - \left(\mu_1 - \mu_2\right)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

Örnek

- Aynı faaliyet kolunda üretim yapan fabrikaların birincisinden tesadüfi olarak seçilen 80 mamulün ortalama dayanma süresi 135 gün ve standart sapması 15 gün; ikincisinden alınan 95 mamulün ise ortalama dayanma süresi 130 gün ve standart sapması 18 gündür. %1 önem seviyesinde, birinci fabrikada üretilen mamullerin ortalama dayanma süresinin daha fazla olduğunu söyleyebilir miyiz?

Örnek

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ $\alpha = 0.01$ 0.5-0.01=0.4900 $Z_{tab} = 2.33$

$H_1 : \mu_1 > \mu_2$

$$z_{STAT} = \frac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - \left(\mu_1 - \mu_2\right)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{135 - 130}{\sqrt{\frac{225}{80} + \frac{324}{95}}} = 2$$

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 > \mu_2$

$$P(Z > 2) = 0.5 - 0.4772 = 0.0228$$

%1 önem seviyesinde sıfır hipotezi kabul edilerek birinci fabrikada üretilen mamullerin ortalama dayanma süresinin diğerlerinden daha fazla olmadığına karar verilir.

İki ortalama arasındaki fark: Bağımsız örnekler

- Farklı veri kaynakları
  - Örnek sayıları 30'dan az
  - Bağımsız
    - ✓ Diğer popülasyondan seçilen örnek üzerinde etkisi olmayan bir popülasyondan seçilen örnek

Popülasyon Ortalamaları, Bağımsız örnekler *

σ_1 ve σ_2 bilinmiyor, eşit kabul edildiğinde → Bilinmeyen σ'yı tahmin etmek için S_p kullanılır. **Toplu varyanslı t testi** kullanılır.

σ_1 ve σ_2 bilinmiyor, eşit kabul edil**me**diğinde → Bilinmeyen σ_1 ve σ_2'yi tahmin etmek için S_1 ve S_2 kullanılır. **Ayrık varyanslı t testi** kullanılır.

İki popülasyon ortalaması için hipotez testi

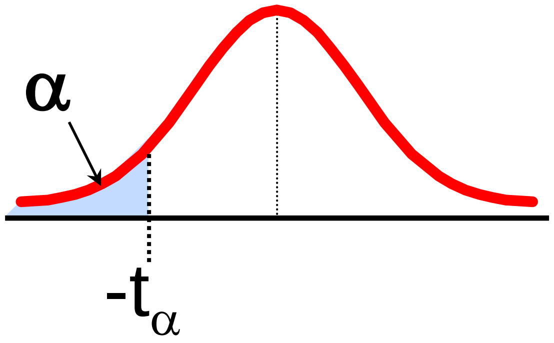
İki Popülasyon Ortalaması, Bağımsız Örnekler

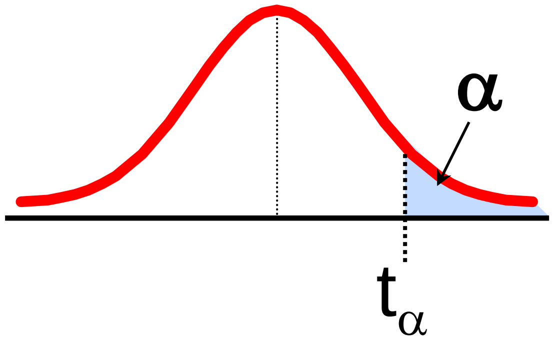
Alt-kuyruk testi:	Üst-kuyruk testi:	İki kuyruklu test:
$H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_1: \mu_1 < \mu_2$	$H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_1: \mu_1 > \mu_2$	$H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$
yani,	yani,	yani,
$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ $H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$	$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ $H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$	$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

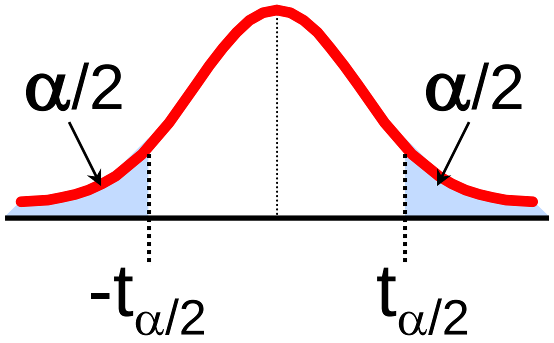
$\mu_1 - \mu_2$ için hipotez testi

İki Popülasyonun Ortalaması Bağımsız Örnekler

Alt-kuyruk testi:	Üst-Kuyruk testi:	İki Kuyruklu test:
$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ $H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$	$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ $H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$	$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$







$t_{STAT} < -t_{\alpha,n1+n2-2}$ ise H_0 'ı reddet

$t_{STAT} > t_{\alpha,n1+n2-2}$ ise H_0 'ı reddet

$t_{STAT} < -t_{\alpha/2,n1+n2-2}$ veya $t_{STAT} > t_{\alpha/2,n1+n2-2}$ ise H_0 'ı reddet

μ_1 - μ_2 için σ_1 ve σ_2 bilinmediğinde ve eşit kabul edildiğinde hipotez testi

Popülasyon Ortalamaları, Bağımsız örnekler

σ_1 ve σ_2 bilinmiyor, eşit kabul edildiğinde *

σ_1 ve σ_2 bilinmiyor, eşit kabul edil**me**diğinde

Varsayımlar:

- Örnekler rassal olarak ve birbirinden bağımsız olarak oluşturulur
- Popülasyonlar Normal dağılmıştır veya her iki örnek boyutu da en fazla 30 eleman vardır
- Popülasyon varyansları bilinmemekte fakat eşit kabul edilmektedir.

μ_1 - μ_2 için σ_1 ve σ_2 bilinmediğinde ve eşit kabul edildiğinde hipotez testi

Popülasyon Ortalamaları, Bağımsız örnekler

- σ_1 ve σ_2 bilinmiyor, eşit kabul edildiğinde *
- σ_1 ve σ_2 bilinmiyor, eşit kabul edil**me**diğinde

- Toplu varyans:

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}$$

- Test istatistiği:

$$t_{STAT} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

- t_{STAT} için s.d. = $(n_1 + n_2 - 2)$

μ_1 - μ_2 için σ_1 ve σ_2 bilinmediğinde ve eşit kabul edildiğinde hipotez testi

Sıfır Hipotezi: $H_0: \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$

Test istatistiği: $T_0 = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - \Delta_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$

Alternatif Hipotez	**Sabit Seviye Testler için Ret Kriteri**
$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$	$t_0 > t_{\alpha/2, n_1+n_2-2}$ veya $t_0 < -t_{\alpha/2, n_1+n_2-2}$
$H_1: \mu_1 - \mu_2 > \Delta_0$	$t_0 > t_{\alpha, n_1+n_2-2}$
$H_1: \mu_1 - \mu_2 < \Delta_0$	$t_0 < -t_{\alpha, n_1+n_2-2}$

μ_1 - μ_2 için σ_1 ve σ_2 bilinmediğinde ve eşit kabul edildiğinde güven aralığı

Popülasyon Ortalamaları, Bağımsız örnekler

- σ_1 ve σ_2 bilinmiyor, eşit kabul edildiğinde *
- σ_1 ve σ_2 bilinmiyor, eşit kabul edil**me**diğinde

$\mu_1 - \mu_2$ için güven aralığı:

$$\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) \pm t_{\alpha/2,n_1+n_2-2}\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$$

$t_{\alpha/2}$ için s.d. = $n_1 + n_2 - 2$

Toplu varyans t testi örneği

Bir borsa firmasının finansal analisti olarak görev yapıyorsunuz. NYSE & NASDAQ ‘da listelenen hisse senetleri arasında temettü getirisinde bir fark var mıdır? Aşağıdaki verileri elde etmişsiniz:

	NYSE	**NASDAQ**
Sayı	**21**	**25**
Örnek Ortalaması	**3.27**	**2.53**
Örnek Std. Sap.	**1.30**	**1.16**

Her iki popülasyonun yaklaşık olarak eşit varyanslarla normal dağıldığı varsayılarak, ortalama getiride bir fark var mıdır (α = 0.05)?

Toplu varyans t testi örneği: Test istatistiğinin hesaplanması

H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ yani ($\mu_1 = \mu_2$)
H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$ yani ($\mu_1 \neq \mu_2$)

Test İstatistiği:

$$t = \frac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - \left(\mu_1 - \mu_2\right)}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{\left(3.27 - 2.53\right) - 0}{\sqrt{1.5021\left(\frac{1}{21} + \frac{1}{25}\right)}} = \boxed{2.040}$$

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^{\,2} + (n_2 - 1)S_2^{\,2}}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)} = \frac{(21-1)1.30^2 + (25-1)1.16^2}{(21\text{-}1) + (25-1)} = 1.5021$$

Toplu varyans t testi örneği: Hipotez testi çözümü

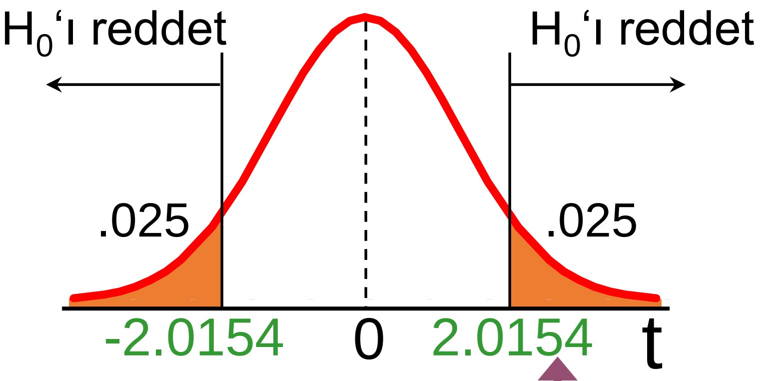
H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ yani ($\mu_1 = \mu_2$)

H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$ yani ($\mu_1 \neq \mu_2$)

$\alpha = 0.05$

sd = 21 + 25 - 2 = 44

Kritik değerler: $t_{0.025,44} = \pm 2.0154$



2.040

Test İstatistiği:

$$t = \frac{3.27 - 2.53}{\sqrt{1.5021\left(\frac{1}{21} + \frac{1}{25}\right)}} = \boxed{2.040}$$

Karar:

$\alpha = 0.05$ için H_0'ı reddet

Çıkarım:

Ortalamalarda bir fark olduğu hakkında delil vardır.

Toplu varyans t testi örneği: μ_1 - μ_2 için güven aralığı

H_0'ı reddettiğimizden dolayı $\mu_{NYSE} > \mu_{NASDAQ}$ olduğundan %95 emin olabilir miyiz?

μ_{NYSE} - μ_{NASDAQ} için %95 Güven Aralığı

$$\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) \pm t_{\alpha/2, n_1+n_2-2} \sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} = 0.74 \pm 2.0154 \times 0.3628 = (0.009,\ 1.471)$$

0 tüm aralıktan daha küçük olduğundan, $\mu_{NYSE} > \mu_{NASDAQ}$ ifadesinden %95 emin olabiliriz

Varyans bilinmediği durumda ortalamalar farkı için güven aralığı

- **Durum 1: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$**

Varyanslar eşit iken ortalamalar farkı $\mu_1 - \mu_2$ için güven aralığı geliştirmek için

$$T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

istatistiğinin dağılımı $n_1 + n_2 - 2$ serbestlik derecesine sahip t-dağılımıdır. Böylece $P\left(-t_{\alpha/2,n_1+n_2-2} \leq T \leq t_{\alpha/2,n_1+n_2-2}\right) = 1 - \alpha$ olacaktır. Şimdi T yerine yukarıdaki eşitliği koyduğumuzda $\mu_1 - \mu_2$ için $\%100(1-\alpha)$ güven aralığını elde etmiş oluruz.

Eğer $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, s_1^2 ve s_2^2 varyansları eşit ancak bilinmeyen iki normal popülasyondan alınmış n_1 ve n_2 büyüklüğündeki rassal örneklemlere ilişkin ortalamalar ve standart saplamaları gösteriyorsa, ortalamalar farkı $\mu_1 - \mu_2$ için $\%100(1-\alpha)$ güven aralığı aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\overline{x}_1 - \overline{x}_2 - t_{\alpha/2,n_1+n_2-2}s_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \overline{x}_1 - \overline{x}_2 + t_{\alpha/2,n_1+n_2-2}s_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

Burada $s_p = \sqrt{[(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2]/(n_1+n_2-2)}$ ortak popülasyon standart sapmasının birleşik tahmin edicisidir ve $t_{\alpha/2,n_1+n_2-2}$ değeri $n_1 + n_2 - 2$ serbestlik derecesine sahip t-dağılımının üst kuyruğunda kalan alanı $\alpha/2$ yapan tablo değeridir.

Örnek

- İki katalizörün kimyasal bir sürecin ortalama çıktısını nasıl etkilediği analiz edilmektedir.
- Katalizör 1 hali hazırda kullanılmaktadır ancak Katalizör 2 makbuldür. Katalizör 2 daha ucuz olduğundan eğer süreç çıktısını değiştirmiyorsa kullanılmalıdır.
- Tesis içerisinde bir test yapılmış ve sonuçlar aşağıdaki tabloda verilmiştir. Ortalama çıktılar arasında bir fark var mıdır? $\alpha = 0,05$ alınız ve varyansların eşit olduğunu kabul ediniz.

Gözlem No	Katalizör 1	Katalizör 2
1	91,50	89,19
2	94,18	90,95
3	92,18	90,46
4	95,39	93,21
5	91,79	97,19
6	89,07	97,04
7	94,72	91,07
8	89,21	92,75
	$\bar{x}_1 = 92,255$	$\bar{x}_2 = 92,733$
	$s_1 = 2,39$	$s_2 = 2,98$

Burada ilgilenilen parametreler sırasıyla katalizör 1 ve 2 kullanıldığındaki ortalama süreç çıktıları μ_1 ve μ_2'dir ve : $\mu_1 - \mu_2 = 0$ olup olmadığını test etmek istiyoruz. Sıfır hipotezi H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ veya H_0: $\mu_1 = \mu_2$

Alternatif hipotez H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$ şeklinde oluşturulacaktır. Test istatistiği

Yukarıdaki tablo incelendiğinde $\bar{x}_1 = 92{,}255$, $s_1 = 2{,}39$, $n_1 = 8$, $\bar{x}_2 = 92{,}733$, $s_2 = 2{,}98$ ve $n_2 = 8$ olarak bulunur. Böylece

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{(7)(2{,}39)^2 + (7)(2{,}98)^2}{8 + 8 - 2} = 7{,}30$$

$$s_p = \sqrt{7{,}30} = 2{,}70$$

ve

$$t_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{2{,}70\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{92{,}255 - 92{,}733}{2{,}70\sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}}} = -0{,}35$$

Sonuç: t-tablosundan $t_{0.40,14} = 0{,}258$ ve $t_{0.25,14} = 0{,}692$ olarak bulunur. $0{,}258 < 0{,}35 < 0{,}692$ olduğundan ve alternatif hipotez iki uçlu olduğundan $0{,}50 < P < 0{,}80$ olarak bulunur. Sonuç olarak P-değeri $\alpha = 0{,}05$ değerinden büyük olduğu için sıfır hipotezi reddedilemez.

Örnek: Çimento hidrasyonu

- Bilimsel bir dergide yayınlanan bir makalede standart çimentodaki kalsiyum ağırlığı ve kurşun karıştırılmış çimentonun analiz sonuçları raporlanmıştır.
- İndirgenmiş kalsiyum seviyesi çimentodaki hidrasyon mekanizmasının tıkandığını belirtecek ve çimentonun yapısındaki çeşitli bölgelere suyun hücum etmesine müsaade edecektir.
- 10 adet standart çimento numunesi için ortalama kalsiyum ağırlığı $\overline{x}_1 = 90$ ve standart sapması $s_1 = 5{,}0$ iken 15 adet kurşun karıştırılmış çimentodaki ortalama kalsiyum ağırlığı $\overline{x}_2 = 87$ ve standart sapması $s_2 = 4{,}0$ olarak hesaplanmıştır.
- Kalsiyum ağırlığının normal dağıldığını ve varsayıyoruz ve iki farklı çimento tipi için ortalamalar farkı $\mu_1 - \mu_2$ için %95 güven aralığı oluşturacağız. Ayrıca iki normal popülasyonun aynı standart sapmaya sahip olduğunu kabul ediyoruz.

Örnek: Çimento hidrasyonu

- Ortak standart sapmanın birleşik tahmin edicisi aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{(9)(5{,}0)^2 + (14)(4{,}0)^2}{10 + 15 - 2} = 19{,}52$$

- Böylece birleşik standart sapma tahmini $s_p = \sqrt{19{,}52} = 4{,}4$. %95 GA aşağıdaki gibi bulunur.

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - t_{0,025,23} s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + t_{0,025,23} s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

- Ya da $t_{0,025,23} = 2{,}069$ eşitliği ile yer değiştirdiğimizde

$$90 - 87 - 2{,}069(4{,}4)\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{15}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 90 - 87 + 2{,}069(4{,}4)\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{15}}$$

Öyleyse

$$-0{,}72 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 6{,}72$$

Pratik Yorum: %95 GA'nın o değerini içerdiğine dikkat edelim. Böylece bu güven seviyesinde ortalamalar arasında bir fark olduğu sonucuna varamayız.

μ_1 - μ_2 için σ_1 ve σ_2 bilinmediğinde ve eşit kabul edilmediğinde hipotez testi

Popülasyon Ortalamaları, Bağımsız örnekler

- σ_1 ve σ_2 bilinmiyor, eşit kabul edildiğinde
- σ_1 ve σ_2 bilinmiyor, eşit kabul edil**me**diğinde *

Varsayımlar:

- Örnekler rassal olarak ve birbirinden bağımsız olarak oluşturulur
- Popülasyonlar Normal dağılmıştır veya her iki örnek boyutu da en fazla 30 eleman vardır
- Popülasyon varyansları bilinmemekte ve eşit kabul edilememektedir.

μ_1 - μ_2 için σ_1 ve σ_2 bilinmediğinde ve eşit kabul edilmediğinde hipotez testi

Popülasyon Ortalamaları, Bağımsız örnekler

- σ_1 ve σ_2 bilinmiyor, eşit kabul edildiğinde
- σ_1 ve σ_2 bilinmiyor, eşit kabul edil**me**diğinde *

Test İstatistiği:

$$t_{STAT} = \frac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - \left(\mu_1 - \mu_2\right)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}}$$

t_{STAT} için s.d. ν =

$$\nu = \frac{\left(\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{\left(\dfrac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \dfrac{\left(\dfrac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$$

Durum 2: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

- Çoğu durumda $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ varsayımı mantıklı olmayabilir. Bu varsayım geçersiz olduğunda $T^* = [\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)]/\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}$ değerinin serbestlik derecesi yukarıda verilen v olan yaklaşık t-dağılımına uyduğu gerçeğini kullanarak $\mu_1 - \mu_2$ için %100$(1-\alpha)$ GA aşağıdaki gibi oluşturulur.

Eğer $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, s_1^2 ve s_2^2 varyansları bilinmeyen ve birbirinden farklı iki normal popülasyondan alınmış n_1 ve n_2 büyüklüğündeki rassal örneklemlere ilişkin ortalamalar ve standart saplamaları gösteriyorsa, ortalamalar farkı $\mu_1 - \mu_2$ için %100$(1-\alpha)$ güven aralığı aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\overline{x}_1 - \overline{x}_2 - t_{\alpha/2,v}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \overline{x}_1 - \overline{x}_2 + t_{\alpha/2,v}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

$t_{\alpha/2,v}$ serbestlik derecesi v olan t-dağılımının üst kuyruğunda kalan alanı $\alpha/2$ yapan tablo değeridir.

Ayrık varyans t testi örneği

Bir borsa firmasının finansal analisti olarak görev yapıyorsunuz. NYSE & NASDAQ ‘da listelenen hisse senetleri arasında temettü getirisinde bir fark var mıdır? Aşağıdaki verileri elde etmişsiniz:

	NYSE	NASDAQ
Sayı	**21**	**25**
Örnek Ortalaması	**3.27**	**2.53**
Örnek Std. Sap.	**1.30**	**1.16**

Her iki popülasyonun yaklaşık olarak eşit olmayan varyanslarla normal dağıldığı varsayılarak, ortalama getiride bir fark var mıdır (α = 0.05)?

Ayrık varyans t testi örneği: Test istatistiğinin hesaplanması

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ yani $(\mu_1 = \mu_2)$
$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ yani $(\mu_1 \neq \mu_2)$

Test İstatistiği:

$$t = \frac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - \left(\mu_1 - \mu_2\right)}{\sqrt{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)}} = \frac{\left(3.27 - 2.53\right) - 0}{\sqrt{\left(\frac{1.30^2}{21} + \frac{1.16^2}{25}\right)}} = \boxed{2.019}$$

$$\nu = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}} = \frac{\left(\frac{1.30^2}{21} + \frac{1.16^2}{25}\right)^2}{\frac{\left(\frac{1.30^2}{21}\right)^2}{20} + \frac{\left(\frac{1.16^2}{25}\right)^2}{24}} = 40.57$$

Serbestlik Derecesi= 40 kullanılmalıdır

Ayrık varyans t testi örneği: Hipotez testi çözümü

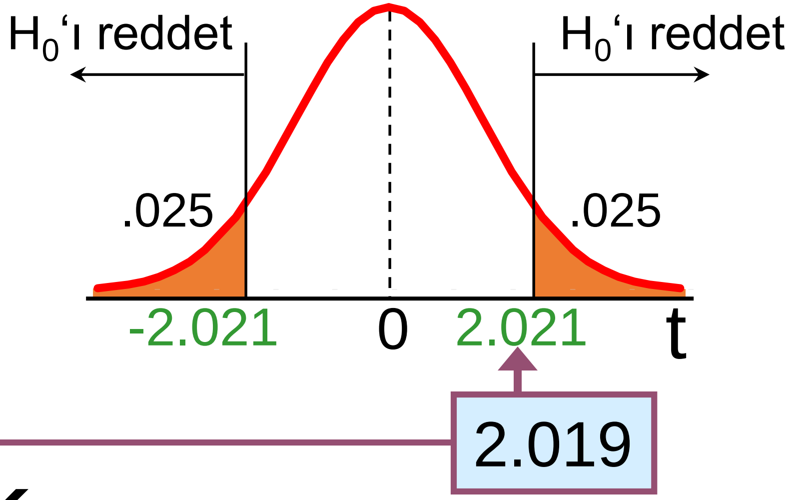
$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ yani $(\mu_1 = \mu_2)$

$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ yani $(\mu_1 \neq \mu_2)$

$\alpha = 0.05$

sd = 40

Kritik değerler: $t_{0.025,40} = \pm 2.021$



Test İstatistiği:

$t = 2.019$

Karar:

$\alpha = 0.05$ için H_0 reddedilemez

Çıkarım:

Ortalamalarda bir fark olduğu hakkında delil yoktur.

Örnek

- İçme suyundaki arsenik miktarı önemli bir sağlık riskidir. Arizona Republic (27 Mayıs, 2001) dergisinde yayınlanan bir makale Phoenix'teki 10 metropol bölgesindeki ve 10 Arizona kırsal bölgesindeki içme sularına ait arsenik miktarları ölçülmüştür (ppb). Veriler aşağıdaki gibidir. Önem seviyesi 0.05.

Metropol Phoenix		**Kırsal Arizona**	
$(\bar{x}_1 = 12,5$,	$s_1 = 7,63)$	$(\bar{x}_2 = 27,5$,	$s_2 = 15,3)$
Phoenix,	3	Rimrock,	48
Chandler,	7	Goodyear,	44
Gilbert,	25	New River,	40
Glendale,	10	ApacheJunction,	38
Mesa,	15	Buckeye,	33
ParadiseValley,	6	Nogales,	21
Peoria,	12	Black Canyon City,	20
Scottsdale,	25	Sedona,	12
Tempe,	15	Payson,	1
Sun City,	7	Casa Grande,	18

Örnek

Phoenix'teki metropol bölgeler ile Arizona'daki kırsal bölgelerdeki arsenik konsantrasyonu ortalamaları arasında bir fark olup olmadığını test etmek istiyoruz.

İlgilenilen parametreler iki coğrafik bölge için ortalama arsenik konsantrasyonlarıdır (μ_1, μ_2) . $\mu_1 - \mu_2 = 0$ olup olmadığıyla ilgileniyoruz.

Sıfır hipotezi: $H_0\colon \mu_1 - \mu_2 = 0$ ya da $H_0\colon \mu_1 = \mu_2$

Alternatif hipotez: $H_1\colon \mu_1 \neq \mu_2$

Test istatistiği

$$t_0^* = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}$$

t_0^* için serbestlik derecesi

$$v = \frac{\left(\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \dfrac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}} = 13$$

Örnek

Böylece, $\alpha = 0{,}05$ sabit önem seviyesi testi kullanarak eğer $t_0^* > t_{0,025,13} = 2{,}160$ veya $t_0^* < -t_{0,025,13} = -2{,}160$ ise sıfır hipotezi H_0: $\mu_1 = \mu_2$ 'yi reddedeceğiz.

Hesaplamalar: Örneklem verisi kullanıldığında

$$t_0^* = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{12{,}5 - 27{,}5}{\sqrt{\frac{(7{,}63)^2}{10} + \frac{(15{,}3)^2}{10}}} = -2{,}77$$

Sonuç: $t_0^* = -2{,}77 < -t_{0,025,13} = -2{,}160$ olduğundan sıfır hipotezi reddedilir.

Pratik Yorum: Arizona'nın kırsal kesimlerindeki içme suyundaki arsenik konsantrasyonunun ortalaması Phoenix'in metropol bölgelerindeki içme suyunun arsenik konsantrasyonu ortalamasından farklı olduğuna dair güçlü bulgular vardır. Dahası Arizona bölgelerindeki arsenik konsantrasyonu daha yüksektir. Bu test için yaklaşık olarak $P = 0{,}016$ bulunur.

İlişkili popülasyonlar eşlenik fark testi

İlişkili Örnekler

İki ilişkili popülasyonun ortalamalarını test eder

- Eşlenik ve birleştirilmiş örnekler
- Tekrarlanmış ölçüler (önce/sonra)
- Eşlenik değerlerin arasındaki farkı kullanır:

$$D_i = X_{1i} - X_{2i}$$

- Nesnelerin arasındaki değişimi ortadan kaldırır
- Varsayımlar:
  - Her iki popülasyon normal dağılmıştır
  - veya, Normal dağılmamışsa, geniş örnekler kullanılır

İlişkili popülasyonlar eşlenik fark testi

i. eşlenik fark D_i 'dir

$$D_i = X_{1i} - X_{2i}$$

eşlenik fark popülasyon ortalaması μ_D için nokta tahmini $\bar{D}$:

$$\bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i}{n}$$

Örnek standart sapması S_D :

$$S_D = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (D_i - \bar{D})^2}{n-1}}$$

n, eşlenik örnekteki eş sayısıdır

Eşlenik fark testi: t_{STAT}'ın bulunması

- μ_D için test istatistiği:

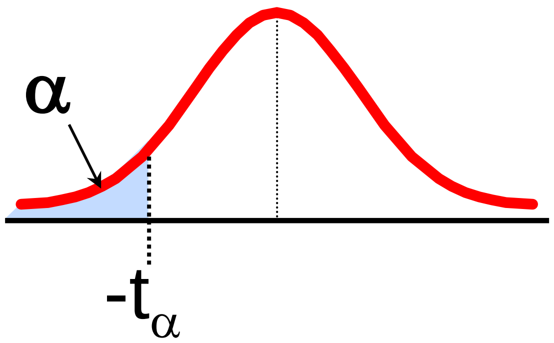
$$\boxed{t_{STAT} = \frac{\bar{D} - \mu_D}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}}}$$

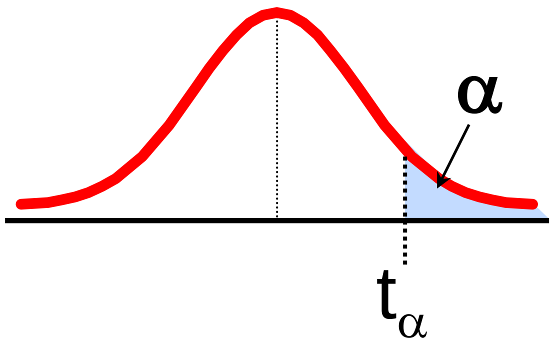
- t_{STAT} için s.d. $n - 1$'dir.

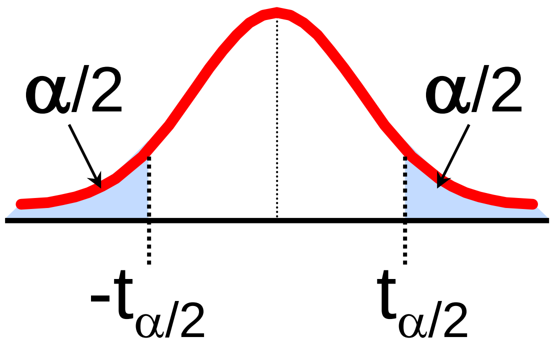
Eşlenik fark testi: Hipotezler

Eşlenik Örnekler

Alt Kuyruk testi:	Üst Kuyruk testi:	İki Kuyruklu test:
$H_0: \mu_D = 0$ $H_1: \mu_D < 0$	$H_0: \mu_D = 0$ $H_1: \mu_D > 0$	$H_0: \mu_D = 0$ $H_1: \mu_D \neq 0$







$t_{STAT} < -t_{\alpha,n-1}$ ise H_0'ı reddet

$t_{STAT} > t_{\alpha,n-1}$ ise H_0'ı reddet

$t_{STAT} < -t_{\alpha/2,n-1}$ veya $t_{STAT} > t_{\alpha/2,n-1}$ ise H_0'ı reddet

t_{STAT} için s.d. $n – 1$'dir

Eşlenik fark testi: hipotezler

- Sıfır hipotezi: $H_0: \mu_D = \Delta_0$

  Test istatistiği: $T_0 = \frac{\overline{D} - \Delta_0}{S_D/\sqrt{n}}$

Alternatif Hipotez	**Sabit-Seviye Testi için Ret Bölgesi**
$H_1: \mu_D \neq \Delta_0$	$t_0 > t_{\alpha/2,n-1}$ veya $t_0 < -t_{\alpha/2,n-1}$
$H_1: \mu_D > \Delta_0$	$t_0 > t_{\alpha,n-1}$
$H_1: \mu_D < \Delta_0$	$t_0 < -t_{\alpha,n-1}$

- Yukarıdaki test istatistiği formülündeki $\overline{D}$, n adet $D_1, D_2, \dots, D_n$ farklarının örneklem ortalaması ve S_D bu farkların örneklem standart sapmasıdır.

Eşlenik fark güven aralığı

μ_D için Güven Aralığı

$$\boxed{\bar{D} \pm t_{\alpha/2,n-1} \frac{S_D}{\sqrt{n}}}$$

$$S_D = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(D_i - \bar{D})^2}{n-1}}$$ olduğunda

Eşlenik fark güven aralığı

Eğer $\overline{d}$ ve s_D sırasıyla n adet normal dağılmış ölçüm çiftlerine ait farkların örneklem ortalaması ve standart sapmasını gösteriyorsa **ortalamalar farkı $\boldsymbol{\mu_D = \mu_1 - \mu_2}$ için %$\mathbf{100(1-\alpha)}$ güven aralığı** aşağıdaki gibi bulunur.

$$\overline{d} - t_{\alpha/2,n-1}\, s_D/\sqrt{n} \leq \mu_D \leq \overline{d} + t_{\alpha/2,n-1}\, s_D/\sqrt{n}$$

Burada $t_{\alpha/2,n-1}$ $n-1$ serbestlik derecesine sahip t-dağılımının sağ kuyruğunda kalan alanı $\alpha/2$ yapan tablo değeridir.

Eşlenik fark testi: Örnek

- Satış elemanlarınızı "müşteri hizmeti" eğitim çalışmasına gönderdiğinizi düşünelim. Eğitim şikayet sayılarında bir fark oluşturdu mu? Aşağıdaki verileri topladığınızı düşünelim:

Satış Elemanı	Şikayet Sayıları: Önce (1)	Sonra (2)	(2) - (1) Fark, D_i
C.B.	6	4	- 2
T.F.	20	6	-14
M.H.	3	2	- 1
R.K.	0	0	0
M.O.	4	0	- 4
			-21

$$\overline{D} = \frac{\sum D_i}{n}$$

$$= -4.2$$

$$S_D = \sqrt{\frac{\sum (D_i - \overline{D})^2}{n-1}}$$

$$= 5.67$$

Eşlenik fark testi: Çözüm

- Eğitim şikayet sayılarında bir fark oluşturdu mu? (0.01 önem seviyesinde)?

H_0: $\mu_D = 0$
H_1: $\mu_D \neq 0$

$\alpha = .01$

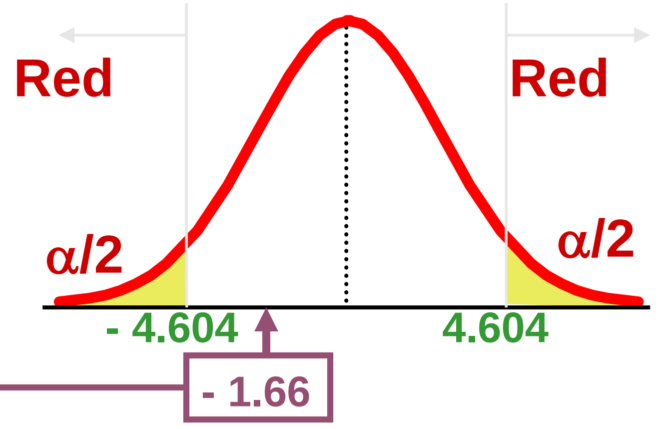
$\bar{D} = -4.2$

$t_{0.005,4} = \pm 4.604$

s.d. = n - 1 = 4

Test İstatistiği:

$$t_{STAT} = \frac{\bar{D} - \mu_D}{S_D/\sqrt{n}} = \frac{-4.2 - 0}{5.67/\sqrt{5}} = \boxed{-1.66}$$



Karar: ***H_0'ı reddetme***

(t_{stat} red bölgesinde değildir)

Çıkarım: Şikayet sayılarında önemli bir değişme olmamıştır.

Örnek: Çelik kirişlerin kesme mukavemeti

- Bilimsel bir dergide yayınlanan bir makalede çelik kirişlerin kesme mukavemetinin tahmini için birkaç metodun karşılaştırma sonuçları raporlanmıştır.
- Bu metotlardan ikisi olan *A* ve *B* prosedürleri için 9 spesifik kirişe uygulanmış ve kesme mukavemeti sonuçları yandaki tabloda gösterilmiştir.
- Bu iki metot arasında (ortalama olarak) bir fark olup olmadığını test etmek istiyoruz. Hata 0.001.

Kiriş	A metodu	B Metodu	Fark d_j
S1/1	1.186	1.061	0.125
S2/1	1.151	0.992	0.159
S3/1	1.322	1.063	0.259
S4/1	1.339	1.062	0.277
S5/1	1.200	1.065	0.135
S6/1	1.402	1.178	0.224
S6/2	1.365	1.037	0.328
S6/3	1.537	1.086	0.451
S6/4	1.559	1.052	0.507

Örnek: Çelik kirişlerin kesme mukavemeti

- Burada ilgilenilen parametre iki metot arasında kesme mukavemeti ortalamaları arasındaki farktır. Yani $\mu_D = \mu_1 - \mu_2 = 0$
- Sıfır hipotezi $H_0: \mu_D = 0$ olur. $H_1: \mu_D \neq 0$ ve test istatistiği aşağıdaki gibidir.

$$t_0 = \frac{\bar{d}}{s_D/\sqrt{n}}$$

- Eğer *P*-değeri 0,05'ten küçükse sıfır hipotezini reddedeceğiz.
- d_j farklarına ilişkin örneklem ortalaması ve standart sapması sırasıyla $\bar{d} = 0{,}2769$ ve $s_d = 0{,}1350$'dir ve böylece test istatistiği

$$t_0 = \frac{\bar{d}}{s_D/\sqrt{n}} = \frac{0{,}2769}{0{,}1350/\sqrt{9}} = 6{,}15$$

- Sonuç: $t_{0,0005,8} = 5{,}041$ olduğu için ve test istatistiği bu değeri aştığı için *P*-değeri $2(0{,}0005) = 0{,}001$'dir. Böylelikle, mukavemet tahmin metotlarının farklı çıktılar ürettiği sonucuna varırız.

Örnek: Paralel park araçları

- Ergonomi dergisinde yapılan bir çalışmada $n = 14$ kişiden farklı tekerlek kalınlıklarına ve dönme yarıçaplarına sahip iki arabayı paralel olarak park etmeleri istenmiştir.
- Her bir kişi için park zamanları kaydedilmiş ve aşağıdaki tabloda verilmiştir.
- Fark sütunundan $\overline{d} = 1{,}21$ ve $s_D = 12{,}68$ olarak hesaplarız.
- $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$ için %90 güven aralığı aşağıdaki gibi bulunur.

	Otomobil		Fark
Kişi	$1(x_{1j})$	$2(x_{2j})$	d_j
1	37.0	17.8	19.2
2	25.8	20.2	5.6
3	16.2	16.8	-0.6
4	24.2	41.4	-17.2
5	22.0	21.4	0.6
6	33.4	38.4	-5.0
7	23.8	16.8	7.0
8	58.2	32.2	26.0
9	33.6	27.8	5.8
10	24.4	23.2	1.2
11	23.4	29.6	-6.2
12	21.2	20.6	0.6
13	36.2	32.2	4.0
14	29.8	53.8	-24.0

Örnek: Paralel park araçları

- $$\bar{d} - t_{0,05,13}\, s_D/\sqrt{n} \leq \mu_D \leq \bar{d} + t_{0,05,13}\, s_D/\sqrt{n}$$
$$1,21 - 1,771\,(12,68)/\sqrt{14} \leq \mu_D \leq 1,21 + 1,771\,(12,68)/\sqrt{14}$$
$$-4,79 \leq \mu_D \leq 7,21$$

μ_D üzerindeki GA'nın o değerini kapsadığı görülmektedir. Bu durum %90 güven seviyesinde iki farklı arabanın park zamanları ortalamaları arasında bir fark olduğu dair bir bulgu olmadığı anlamına gelmektedir.

İki popülasyonun oranları

Popülasyon Oranları

Amaç: iki popülasyonun oranları arasındaki fark, $\boxed{\pi_1 - \pi_2,}$ için hipotez testi yapılması veya bir güven aralığı oluşturulması,

Varsayımlar:

$n_1 \pi_1 \geq 5$, $n_1(1- \pi_1) \geq 5$

$n_2 \pi_2 \geq 5$, $n_2(1- \pi_2) \geq 5$

Fark için nokta tahmini $p_1 - p_2$

İki popülasyonun oranları

Popülasyon Oranları

Başlangıçta sıfır hipotezinin doğru olduğunu varsayıyoruz, dolayısıyla $\pi_1 = \pi_2$ olduğunu ve iki örneğin tahminlerini birleştirdiğimizi varsayıyoruz

Genel oran için birleştirilmiş tahmin:

$$\bar{p} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$$

X_1 ve X_2 ‘nin 1 ve 2 örneklerindeki ilgi duyulan nesnelerin sayısı olduğu durumda

İki popülasyonun oranları

Popülasyon Oranları

$\pi_1 - \pi_2$ için test istatistiği bir Z istatistiğidir:

$$Z_{STAT} = \frac{(p_1 - p_2) - (\pi_1 - \pi_2)}{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

$$\bar{p} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2} \quad , \quad p_1 = \frac{X_1}{n_1} \quad , \quad p_2 = \frac{X_2}{n_2}$$ olduğu durumda

İki popülasyonun oranları için hipotez testi

Popülasyon oranları

Alt kuyruk testi:

$H_0: \pi_1 = \pi_2$
$H_1: \pi_1 < \pi_2$

yani,

$H_0: \pi_1 - \pi_2 = 0$
$H_1: \pi_1 - \pi_2 < 0$

Üst kuyruk testi:

$H_0: \pi_1 = \pi_2$
$H_1: \pi_1 > \pi_2$

yani,

$H_0: \pi_1 - \pi_2 = 0$
$H_1: \pi_1 - \pi_2 > 0$

İki Kuyruklu test:

$H_0: \pi_1 = \pi_2$
$H_1: \pi_1 \neq \pi_2$

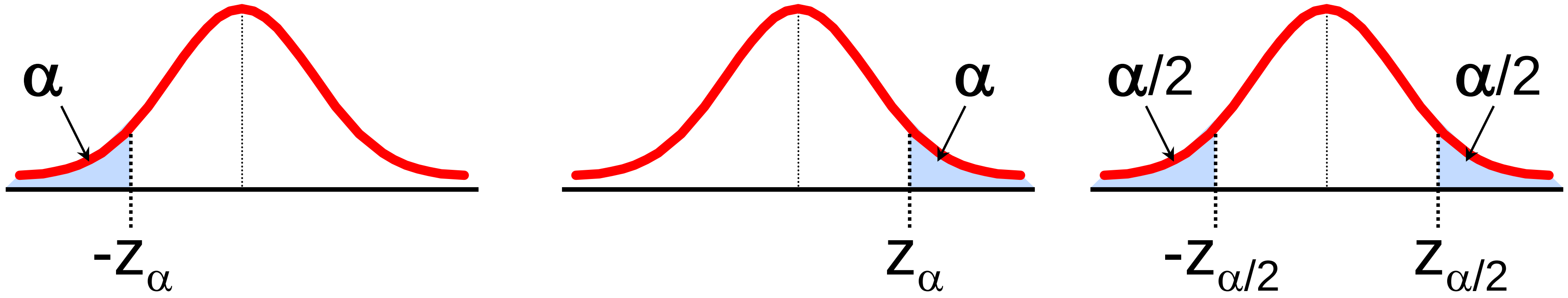
yani,

$H_0: \pi_1 - \pi_2 = 0$
$H_1: \pi_1 - \pi_2 \neq 0$

İki popülasyonun oranları için hipotez testi

Popülasyon Oranları

Alt Kuyruk testi:	Üst Kuyruk testi:	İki Kuyruklu test:
$H_0: \pi_1 - \pi_2 = 0$ $H_1: \pi_1 - \pi_2 < 0$	$H_0: \pi_1 - \pi_2 = 0$ $H_1: \pi_1 - \pi_2 > 0$	$H_0: \pi_1 - \pi_2 = 0$ $H_1: \pi_1 - \pi_2 \neq 0$



$Z_{STAT} < -Z_\alpha$ ise H_0 ‘ı Reddet	$Z_{STAT} > Z_\alpha$ ise H_0 ‘ı Reddet	$Z_{STAT} < -Z_{\alpha/2}$ veya $Z_{STAT} > Z_{\alpha/2}$ ise H_0 ‘ı Reddet

Hipotez testi örneği:
İki popülasyonun oranları

A Önerisine Evet oyu verecek erkekler ve kadınlar arasındaki oranda önemli bir fark var mıdır?

- Rassal bir örnekte, 72 erkeğin 36'sı ve 50 kadının 35'i Evet oyu vereceğini belirtmişlerdir
- .05 önem seviyesinde test edelim

Hipotez testi örneği:
İki popülasyonun oranları

- Hipotez Testi:

H_0: $\pi_1 - \pi_2 = 0$ (iki oran da birbirine eşit)
H_1: $\pi_1 - \pi_2 \neq 0$ (oranlar arasında önemli derecede bir fark mevcut)

- Örnek oranları:
  - Erkekler: $p_1 = 36/72 = 0.50$
  - Kadınlar: $p_2 = 35/50 = 0.70$
    - Genel oran için birleştirilmiş tahmin:

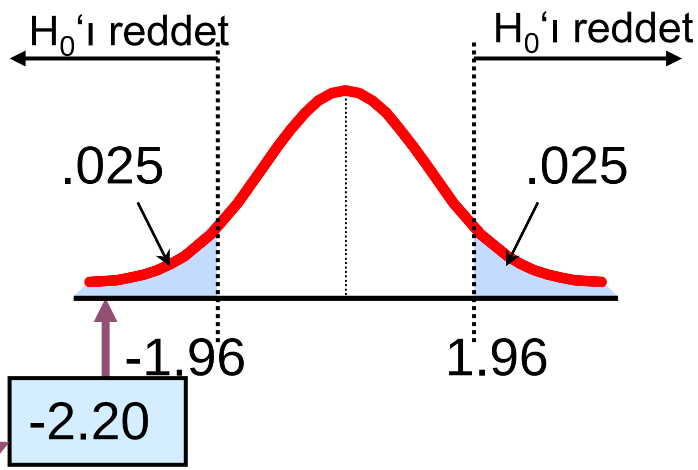
$$\bar{p} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2} = \frac{36 + 35}{72 + 50} = \frac{71}{122} = .582$$

Hipotez testi örneği: İki popülasyonun oranları

$\pi_1 - \pi_2$ için test istatistiği:

$$Z_{STAT} = \frac{(p_1 - p_2) - (\pi_1 - \pi_2)}{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

$$= \frac{(.50 - .70) - (0)}{\sqrt{.582(1-.582)\left(\frac{1}{72} + \frac{1}{50}\right)}} = -2.20$$



Karar: H_0'ı reddet

Çıkarım: Erkeklerde ve kadınlarda Evet oyu verecek kişiler için oranlar arasında bir fark olduğuna dair delil mevcuttur.

Kritik Değerler= ±1.96
α = .05 için

Örnek

- Bir video kaset kiralayıcısı macera filmi kiralamanın yöredeki erkek ve kadınlar itibariyle farklılık gösterip göstermediğini merak etmektedir. Sözkonusu şahıs belli bir zaman dönemi içersinde dükkanına gelen 60 erkekten 51'nin ve 40 kadından 20'sinin macera filmi kiraladığını müşahede etmiştir. Bu verilere göre yöredeki erkeklerin kadınlardan daha fazla macera filmi kiraladığını % 5 önem seviyesinde söyleyebilir misiniz?

Örnek

$$p_1 = \frac{51}{60} = 0.85 \qquad p_2 = \frac{20}{40} = 0.50$$

$$p = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2} \qquad p = \frac{60(0.85) + 40(0.50)}{60 + 40} = 0.71$$

$$H_0 : P_1 = P_2$$
$$H_1 : P_1 > P_2$$

$$Z_{tab=}1.645$$

$$Z_h = \frac{(p_1 - p_2)}{\sqrt{p(1-p)(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} \qquad Z_h = \frac{0.85 - 050}{\sqrt{0.71(1-0.71)(\frac{1}{60} + \frac{1}{40})}} = 3.78$$

H_0 RET

İki popülasyonun oranları için güven aralığı

Popülasyon Oranları

$\pi_1 - \pi_2$ için güven aralığı:

$$\left(p_1 - p_2\right) \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$$

Örnek

- İki farklı ilacın bir hastalığı tedavi etme oranlarının farklı olup olmadığı kontrol edilmek istenmektedir. Bu amaçla 1000'er adet hasta üzerinde A ve B ilaçları denensin. Tedavi sonunda A ve B ilaçlarının uygulandığı hastaların sırasıyla 825 ve 760'ının iyileştiği gözlendiğine göre ilaçların hastalığı tedavi etme oranlarının farkının %95'lik güven aralığını bulunuz.

Çözüm

- $n_1 = 1000$, $n_2 = 1000$

$$p_1 = \frac{825}{1000} = 0.825 \qquad p_2 = \frac{760}{1000} = 0.760$$

$$S_{p_1 - p_2} = \sqrt{\frac{p_1.q_1}{n_1} + \frac{p_2.q_2}{n_2}} = \sqrt{\frac{0.825.(1-0.825)}{1000} + \frac{0.760.(1-0.760)}{1000}}$$

$$= 0.018$$

$$\Pr\left(\left(p_1 - p_2\right) - Z_{\alpha/2} \times S_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} \le P_1 - P_2 \le \left(p_1 - p_2\right) + Z_{\alpha/2} \times S_{p_1 - p_2}\right) = 1 - \alpha$$

$$\Pr\left(\left(0.82 - 0.760\right) - 1.96 \times 0.018 \le P_1 - P_2 \le \left(0.82 - 0.760\right) + 1.96 \times 0.018\right) = 0.95$$

$$\mathbf{Pr}\left(0.029 \le P_1 - P_2 \le 0.10\right) = 0.95$$

İki popülasyonun varyanslarının testi

İki Popülasyonun Varyansları İçin Testler *

F test istatistiği

Hipotezler	F_{STAT}
$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	
$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$	S_1^2 / S_2^2
$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$	

S_1^2 = Örnek 1'in varyansı (büyük örnek varyansı)

n_1 = Örnek 1'in örnek boyutu

S_2^2 = Örnek 2'nin varyansı (küçük örnek varyansı)

n_2 = Örnek 2'nin örnek boyutu

$u = n_1 - 1$ = pay serbestlik derecesi

$v = n_2 - 1$ = payda serbestlik derecesi

İki popülasyonun varyanslarının testi

Sıfır hipotezi: $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Test istatistiği: $F_0 = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}$

Alternatif Hipotez	**Ret Kriteri**
$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$f_0 > f_{\alpha/2,n_1-1,n_2-1}$ $veya$ $f_0 < f_{1-\alpha/2,n_1-1,n_2-1}$
$H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$f_0 > f_{\alpha,n_1-1,n_2-1}$
$H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$f_0 < f_{1-\alpha,n_1-1,n_2-1}$

F dağılımı

- F tablosundan kritik F değeri bulunur
- İki serbestlik derecesi olması gereklidir: pay ve payda
- Büyük örnek varyansına sahip olan örnek her zaman pay'dır.

ik

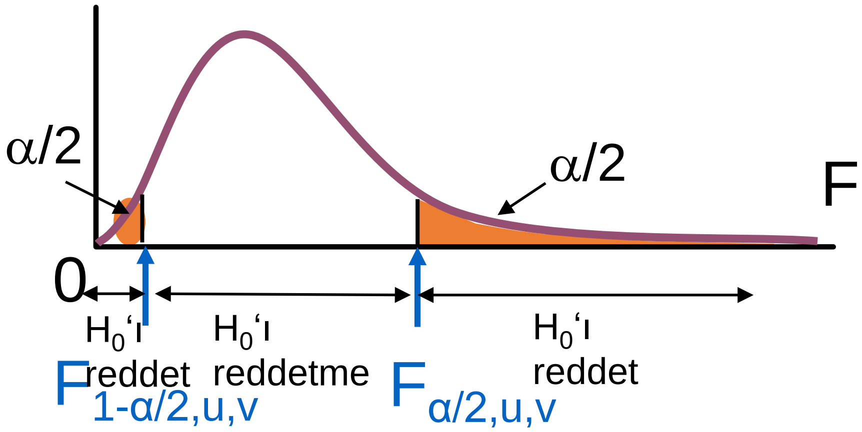
$$F_{STAT} = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

u=sd$_1$ = n$_1$ – 1 ; v=sd$_2$ = n$_2$ – 1

- F tablosunda,
  - Pay serbestlik derecesi sütunu tanımlar
  - Payda serbestlik derecesi satırı tanımlar

Red bölgesinin bulunması

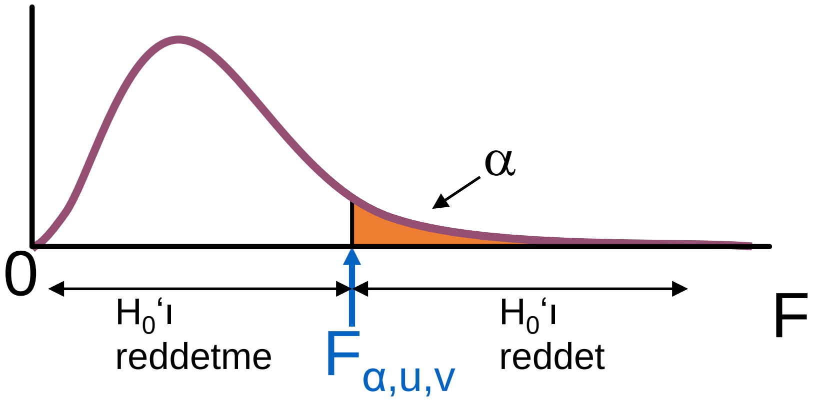
$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$
$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$



$F_{STAT} > F_{\alpha/2,u,v}$ veya $F_{STAT} > F_{1-\alpha/2,u,v}$ ise

H_0'ı reddet

$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$
$H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$



$F_{STAT} > F_{\alpha,u,v}$ ise H_0'ı reddet

F tablosu

- Örneğin $u = 5$ ve $v = 10$ ise tablodan

$$P\left(F > f_{0{,}05{,}5{,}10}\right) = P(F_{5,10} > 3{,}33) = 0{,}05$$

Olarak bulunur. Yani $F_{5,10}$ için sağ kuyrukta kalan alanı yüzde 5 yapan değer $f_{0{,}05{,}5{,}10} = 3{,}33$'tür.

- F tablosu $\alpha \leq 0{,}25$ olmak üzere belirli $f_{\alpha,u,v}$ değerleri için üst (sağ) kuyrukta bulunan alan değerlerini vermektedir. Alt (sol) kuyruk alanı için tablo değerleri $f_{1-\alpha,u,v}$ aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$f_{1-\alpha,u,v} = \frac{1}{f_{\alpha,v,u}}$$

- Örnek olarak, $f_{0{,}95{,}5{,}10}$ alt kuyruk yüzdesini veren değeri bulmak için

$$f_{0{,}95{,}5{,}10} = \frac{1}{f_{0{,}05{,}10{,}5}} = \frac{1}{4{,}74} = 0{,}211$$

F testi: Örnek

Bir borsa firmasının finansal analisti olarak görev yapıyorsunuz. NYSE & NASDAQ ‘da listelenen hisse senetleri arasında temettü getirisinde bir fark var mıdır? Aşağıdaki verileri elde etmişsiniz:

	NYSE	NASDAQ
Sayı	**21**	**25**
Örnek Ortalaması	**3.27**	**2.53**
Örnek Std. Sap.	**1.30**	**1.16**

NYSE & NASDAQ varyanslarının arasında α = 0.05 seviyesinde bir fark var mıdır?

F testi: Örnek çözümü

- Hipotez Testini oluşturalım:

$H_0: \sigma^2_1 = \sigma^2_2$ (varyanslar arasında bir fark yoktur)
$H_1: \sigma^2_1 \neq \sigma^2_2$ (varyanslar arasında belirli bir fark vardır)

- $\alpha = 0.05$ için F kritik değerini bulalım:
- Pay s.d. $= n_1 - 1 = 21 - 1 = 20$
- Payda s.d. $= n2 - 1 = 25 - 1 = 24$

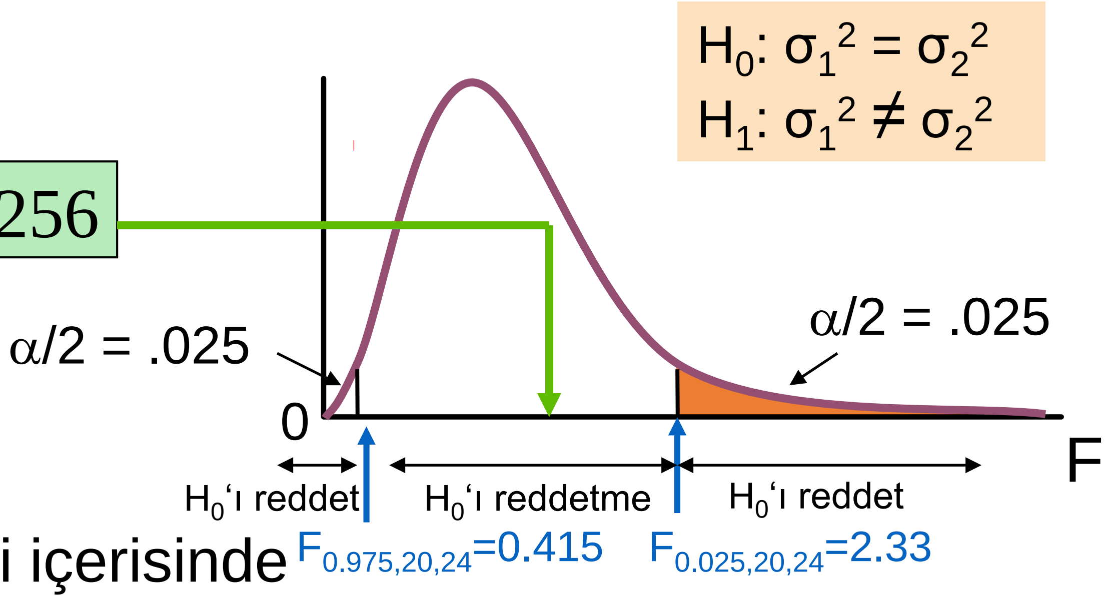
- $F_{\alpha/2} = F_{.025,\ 20,\ 24} = 2.33$

- $F_{1-\alpha/2} = F_{.975,\ 20,\ 24} = 1/\ F_{.025,\ 24,\ 20} = 1/2.41 = 0.415$

F testi: Örnek çözümü

- Test İstatistiği:

$$F_{STAT} = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{1.30^2}{1.16^2} = \boxed{1.256}$$



- F_{STAT} = 1.256 red bölgesi içerisinde değildir, o zaman H_0 reddedilmez

- Çıkarım: α = .05 seviyesinde varyanslar arasında bir fark olduğuna dair bariz bir kanıt yoktur.

Örnek: Yarı iletkenin asitle yakılmasındaki değişkenlik

- Yarı iletken devre levhalarındaki oksit tabakaları uygun kalınlığı elde etmek için gaz karışımıyla yakılmaktadır.
- Bu oksit tabakaların kalınlığındaki değişkenlik levhanın kritik bir karakteristiğidir ve sonraki işlem aşamaları için düşük değişkenlik arzu edilmektedir.
- Oksit tabakanın değişkenliğinin azaltılmasında iki gaz karışımı üzerinde hangisinin daha iyi olduğunu anlamak için çalışılmaktadır.
- Her bir gaz karışımı ile 16 devre levhası yakılmıştır. Oksit kalınlıklarına ait örneklem standart sapması $s_1 = 1{,}96$ angström ve $s_2 = 2{,}13$ angström olarak bulunmuştur.
- Bu her iki gazdan birinin diğerine göre tercih edilebileceğine dair bir bulgu var mıdır? $\alpha = 0{,}05$ olarak alınız.
- Burada ilgilenilen parametre oksit kalınlıklarına ait varyanslardır. Her iki gaz karışımı için de oksit kalınlığının normal dağıldığını kabul edeceğiz.

Örnek: Yarı iletkenin asitle yakılmasındaki değişkenlik

Sıfır hipotezi: H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$
Alternatif Hipotez: H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$
Test istatistiği:

$$F_0 = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

$n_1 = n_2 = 16$ ve $\alpha = 0{,}05$ olduğundan eğer $f_0 > f_{0,025,15,15} = 2{,}86$ ise veya $f_0 < f_{0,975,15,15} = 1/f_{0,025,15,15} = 0{,}35$ ise sıfır hipotezi H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ reddedilecek.

Hesaplamalar: $s_1^2 = (1{,}96)^2 = 3{,}84$ ve $s_2^2 = (2{,}13)^2 = 4{,}54$ olduğundan test istatistiğinin değeri

$$f_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{3{,}84}{4{,}54} = 0{,}85$$

Sonuç: $f_{0,975,15,15} = 0{,}35 < 0{,}85 < f_{0,025,15,15} = 2{,}86$ olduğundan 0,05 önem seviyesinde sıfır hipotezi H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ hipotezini reddedemeyiz.

İki varyans oranı için güven aralığı

σ_1^2/σ_2^2 üzerinde güven aralığı oluşturmak için

$$F = \frac{S_2^2/\sigma_2^2}{S_1^2/\sigma_1^2}$$

Değerinin örneklem dağılımı $n_2 - 1$ ve $n_1 - 1$ serbestlik derecesine sahip F dağılımıdır. Böylelikle $P\left(f_{1-\alpha/2,n_2-1,n_1-1} \leq F \leq f_{\alpha/2,n_2-1,n_1-1}\right) = 1 - \alpha$ olacaktır. Burada F yerine yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı yazıldığında ve gerekli işlemler yapıldığında σ_1^2/σ_2^2 için $\%100(1-\alpha)$ GA oluşturulur.

Eğer s_1^2 ve s_2^2 varyansları bilinmeyen σ_1^2 ve σ_2^2 olan iki bağımsız normal popülasyondan alınmış n_1 ve n_2 büyüklüğündeki rassal örneklemlere ait örneklem varyanslarını gösteriyorsa σ_1^2/σ_2^2 oranı için $\%100(1-\alpha)$ güven aralığı aşağıdaki gibidir.

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} f_{1-\alpha/2,n_2-1,n_1-1} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{s_1^2}{s_2^2} f_{\alpha/2,n_2-1,n_1-1}$$

Burada $f_{\alpha/2,n_2-1,n_1-1}$ ve $f_{1-\alpha/2,n_2-1,n_1-1}$ değerleri $n_2 - 1$ pay ve $n_1 - 1$ payda serbestlik derecesine sahip F dağılımında sırasıyla sağ ve sol kuyruklarda kalan alanları $\alpha/2$ yapan tablo değerleridir. Standart sapmalara ait GA yukarıdaki eşitsizliğin karekökü alınarak bulunabilir.

Örnek: Titanyum alaşımı için yüzey tesviyesi

- Bir şirket jet-türbin motorlarında kullanmak üzere pervane üretmektedir.
- Üretim operasyonlarından birinde titanyum alaşım üzerinde belirli bir yüzey tesviyesi için taşlama işlemini gerektirmektedir.
- İki farklı taşlama işlemi kullanılabilmekte ve her iki işlem de aynı ortalama yüzey pürüzlülüğüne sahip parçalar üretebilmektedir.
- İmalat mühendisi en düşük yüzey pürüzlülüğü değişkenliği üreten işlemi seçmek istemektedir.
- $n_1 = 11$ parçadan oluşan bir rassal örneklem birinci işlemden seçilmiş ve standart sapma $s_1 = 5{,}1$ mikro inç bulunmuş ve buna karşılık $n_2 = 16$ parçadan oluşan bir rassal örneklem ikinci işlemden seçilmiş ve standart sapma $s_2 = 4{,}7$ mikro inç bulunmuştur.
- Standart sapmalar oranı σ_1/σ_2 için %90 GA oluşturalım.

Örnek: Titanyum alaşımı için yüzey tesviyesi

İki sürecin bağımsız olduğunu yüzey pürüzlülüklerinin normal dağıldığını kabul ederek aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz.

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} f_{0,95,15,10} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{s_1^2}{s_2^2} f_{0,05,15,10}$$

$$\frac{(5,1)^2}{(4,7)^2} 0,39 \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{(5,1)^2}{(4,7)^2} 2,85$$

Her üç tarafında karekökü alındığında

$$0,678 \leq \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \leq 1,832$$

Bu güven aralığı 1 değerini kapsadığı için her iki sürecin yüzey pürüzlüklerinin standart sapmalarının %90 güven seviyesinde farklı olduğuna ait yeterli bir bulgu yoktur.

Bölüm özeti

Bu bölümde aşağıdaki konular işlenmiştir:

- İki bağımsız örneğin kıyaslanması
  - İki ortalamanın farkları için birleştirilmiş varyans t testi uygulanmıştır
  - İki ortalamanın farkları için ayrık varyans t testi uygulanmıştır
  - İki ortalamanın farkları için güven aralığı oluşturulmuştur

- İki ilişkili örneğin (eşlenik örnekler) kıyaslanması
  - Ortalama farkı için eşlenik t testi uygulanmıştır
  - Ortalama farkları için güven aralığı oluşturulmuştur

Bölüm özeti

- İki popülasyonun oranlarının karşılaştırılması
  - İki popülasyonun oranları için Z testi uygulanmıştır
  - İki popülasyonun oranları arasındaki fark için güven aralığı oluşturulmuştur.
- İki popülasyonun varyansları testi için F testi uygulanmıştır