Bölüm 5

Nokta Tahmini ve Güven Aralığı Tahmini

UZAKTAN EĞİTİM UYGULAMA VE ARAŞTIRMA MERKEZİ
telefon 0(312) 202 82 00 • eposta guzem@gazi.edu.tr • adres Gazi Üniversitesi Rektörlük Binası No:6/1

Öğrenme hedefleri

Bu bölümde, :

- Ortalama, oran ve varyans için güven aralığı tahminlerinin inşası ve yorumlanması
- Ortalama veya oran için bir güven aralığı oluşturmak için gerekli örneklemin nasıl belirlenebileceği

öğrenilecektir.

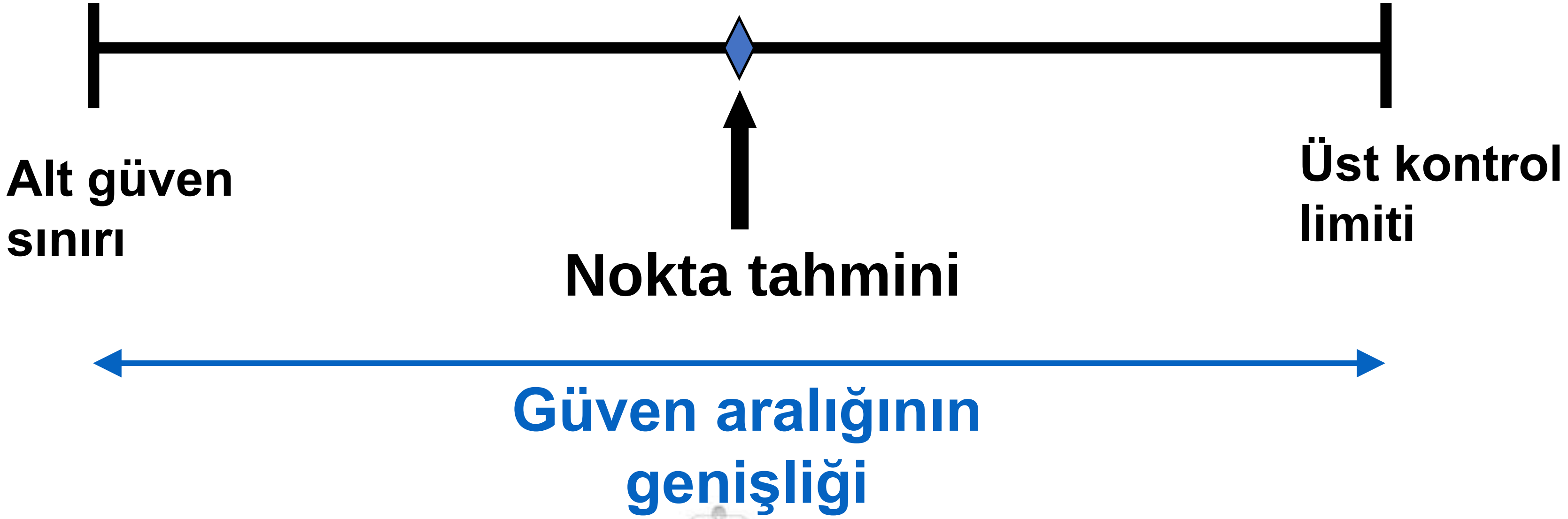
Bölüm anahatları

Bu bölümün içeriği

- Popülasyon ortalaması, μ için güven aralığı
  - Popülasyonun standart sapması σ bilindiğinde
  - Popülasyonun standart sapması σ bilinmediğinde
- Popülasyon orantısı, π için güven aralıkları
- Gerekli örnekleme büyüklüğüne karar verme

Nokta ve aralık tahminleri

- Bir nokta tahmini tek bir sayıdır,
- Bir güven aralığı tahminin değişkenliği hakkında ilave bilgiyi sağlar



Nokta tahmini

- İstatistiksel çıkarsama daima popülasyonun bir ya da daha fazla parametresi hakkında sonuç çıkarmaya odaklanır.
- Bu sürecin önemli bir parçası parametre tahminlerinin elde edilmesidir.
- Varsayalım popülasyonun bir parametresinin **nokta tahminini** (makul bir değer) elde etmek istiyoruz.
- Verilerin daha önce toplandığını ve gözlemlerin $X_1, X_2, \ldots, X_n$ rassal değişkenleri olarak düşünüldüğünü biliyoruz. Böylece gözlemin herhangi bir fonksiyonu veya herhangi bir istatistikte rassal bir değişkendir.
- Örneğin örneklem ortalaması $\overline{X}$ ve örneklem varyansı S^2 istatistiktir ve ayrıca da rassal değişkenlerdir.

Nokta tahmini

- Bir istatistik rassal değişken olduğuna göre bir olasılık dağılımı vardır. Bir istatistiğin olasılık dağılımını **örneklem dağılımı** olarak adlandırıyoruz.
- Örneklem dağılımı kavramı çok önemlidir ve bu bölümde yeri geldikçe bahsedilecektir.
- Çıkarsama problemlerini tartışırken ilgilenilen parametreyi temsil edecek genel bir sembole sahip olmak uygun olacaktır.
- Burada parametreyi temsil etmek üzere yunan alfabesindeki θ (Teta) harfi kullanılacaktır. θ sembolü ortalamayı (μ), varyansı (σ^2) ya da ilgilendiğimiz herhangi bir parametreyi temsil edebilir.
- **Nokta tahminin amacı örneklem verisine bağlı olarak $\boldsymbol{\theta}$ için en uygun tek bir değer seçmektir.** Örneklem istatistiğinin sayısal değeri nokta tahmini olarak kullanılacaktır.

Nokta tahmini

- Genel olarak eğer X, θ parametresiyle karakterize edilen bilinmeyen bir $f(x)$ olasılık dağılımına sahip bir rassal değişkenin ise ve $X_1, X_2, \dots, X_n$ n boyutlu X'den gelen rassal örneklem ise $\widehat{\Theta} = h(X_1, X_2, \dots, X_n)$ istatistiği θ'nın **nokta tahmin edicisi** olarak bilinir.
- $\widehat{\Theta}$ bir rassal değişkendir çünkü rassal değişkenlerin bir fonksiyonudur. Örneklem seçildikten sonra $\widehat{\Theta}$, θ'nın **nokta tahmini** olarak bilinen belirli bir sayısal değer ($\hat{\theta}$) alır.

Herhangi bir θ popülasyon parametresinin nokta tahmini $\widehat{\Theta}$ istatistiğinin tek bir sayısal değeri olan $\hat{\theta}$'dır. $\widehat{\Theta}$ istatistiği **nokta tahmin edicisi** olarak bilinir.

Nokta tahmini

- Örnek olarak, varsayalım ki X rassal değişkeni ortalaması (bilinmeyen) μ olan normal dağılıma uysun.
- Örneklem ortalaması bilinmeyen popülasyon ortalaması μ'nün nokta tahmin edicisidir.
- Yani $\hat{\mu} = \overline{X}$'dır. Örneklem seçildikten sonra, sayısal $\overline{x}$ değeri μ'nün nokta tahminidir. Böylelikle eğer $x_1 = 25$, $x_2 = 30$, $x_3 = 29$ ve $x_4 = 31$ ise μ'nün nokta tahmini aşağıdaki gibidir.

$$\overline{x} = \frac{25 + 30 + 29 + 31}{4} = 28{,}75$$

- Benzer şekilde eğer popülasyon varyansı σ^2 bilinmiyorsa S^2 için nokta tahmin edicisi örneklem varyansı S^2'dir ve örneklem verisinden hesaplanan $S^2 = 6{,}9$ sayısal değeri σ^2'nin nokta tahmini olarak bilinir.

Nokta tahminleri

Bir popülasyon parametresini tahmin edebiliriz …		Örnek istatistiği ile birlikte (bir nokta tahmini)
Ortalama	μ	$\bar{X}$
Oran	π	p
Varyans	σ^2	S^2

Tahmin problemleriyle mühendislik alanında sıklıkla karşılaşılmaktadır. Genellikle aşağıdakileri tahmin etmek isteriz.

- Tek popülasyona ait ortalama μ
- Tek popülasyona ait varyans σ^2 (veya standart sapma σ)
- Bir popülasyonda ilgilenilen bir sınıfa ait nesnelerin oranı p
- İki popülasyonun ortalamaları arasındaki fark $\mu_1 - \mu_2$
- İki popülasyon oranları arasındaki fark $p_1 - p_2$

Bu parametreler için makul nokta tahmin edicileri aşağıdaki gibidir.

- μ için tahmin $\hat{\mu} = \overline{x}$ örneklem ortalaması
- σ^2 için tahmin $\hat{\sigma}^2 = S^2$ örneklem varyansı
- p için tahmin $\hat{p} = x/n$, örneklem oranı (x, n boyutlu rassal örneklemde ilgilenilen sınıfa ait parçaların sayısını göstermekte)
- $\mu_1 - \mu_2$ için tahmin $\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 = \hat{x}_1 - \hat{x}_2$ iki bağımsız rassal örneklem ortalamaları arasındaki fark
- $p_1 - p_2$ için tahmin $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ iki bağımsız rassal örneklemden hesaplanmış örneklem oranları arasındaki fark

Nokta tahmini

- Bir parametrenin nokta tahmin edicisi için çeşitli seçimlerimiz olabilir.
- Örneğin, popülasyon ortalamasını tahmin etmek istiyorsak örneklem ortalamasını, örneklem medyanını, veya belki de örneklem içindeki en büyük ve en küçük gözlem değerlerinin averajını nokta tahmin ediciler olarak düşünebiliriz.
- Belirli parametre için hangi nokta tahmin edicisinin en iyi seçenek olduğunun kararını verebilmek için bu tahmin edicilerin istatistiksel özelliklerini incelememiz ve tahmin edicileri karşılaştırmak için bazı kriterler geliştirmemiz gerekmektedir.

Nokta tahmininin genel özellikleri
yansız tahmin ediciler (unbiased estimators)

Bir tahmin edici bilinmeyen parametrenin gerçek değerine kısmen "yakın" olmalıdır. Formal olarak, eğer $\widehat{\Theta}$'nın beklenen değeri θ'ya eşitse $\widehat{\Theta}$'nın θ'nın yansız tahmin edicisi olduğunu söyleyebiliriz. Bu $\widehat{\Theta}$'nın olasılık dağılımının ortalamasının (ya da $\widehat{\Theta}$'nın örneklem dağılımının ortalamasının) θ'ya eşit olduğunu söylemekle aynı anlama gelmektedir.

Eğer

$$E(\widehat{\Theta}) = \theta$$

ise $\widehat{\Theta}$ nokta tahmin edicisi θ parametresi için **yansız tahmin edicidir.**

Eğer tahmin edici yansız değilse

$$E(\widehat{\Theta}) - \theta$$

farkı $\widehat{\Theta}$ tahmin edicisinin hatası (bias) olarak bilinir.

Eğer tahmin edici yansız ise hata sıfırdır yani $E(\widehat{\Theta}) - \theta = 0.$

Örneklem ortalaması ve varyansı yansız tahmin edicilerdir

- Varsayalım ki X rassal değişkeninin ortalaması μ ve varyansı σ^2 olsun. $X_1, X_2, \ldots, X_n$, X ile temsil edilen popülasyondan seçilen n boyutlu bir rassal örneklem olsun.
- Örneklem ortalaması $\overline{X}$ ve örneklem varyansı S^2'nin sırasıyla μ ve σ^2'nin yansız tahmin edicileri olduğunu gösteriniz.

- İlk önce örneklem ortalamasını dikkate alalım. $E(\overline{X}) = \mu$ olduğunu göstermiştik. Böylece örneklem ortalaması $\overline{X}$ popülasyon ortalaması μ'nün yansız tahmin edicisidir.

Örneklem ortalaması ve varyansı yansız tahmin edicilerdir

Şimdi örneklem varyansını dikkate alalım.

$$E(S^2) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}\right) = \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}E\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2 + \overline{X}^2 - 2X_i\overline{X}\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - n\overline{X}^2\right) = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2) - nE\left(\overline{X}^2\right)\right]$$

$E(X_i^2) = \mu^2 + \sigma^2$ ve $E\left(\overline{X}^2\right) = \mu^2 + \sigma^2/n$ olduğundan

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}(\mu^2 + \sigma^2) - n(\mu^2 + \sigma^2/n)\right] = \frac{1}{n-1}(n\mu^2 + n\sigma^2 - n\mu^2 - \sigma^2)$$

$$= \sigma^2$$

Böylece örneklem varyansı S^2 popülasyon varyansı σ^2'nin yansız bir tahmin edicisidir.

- Bazen örneklem dağılım parametresinin birden fazla yansız tahmin edicisi bulunur. Örneğin, normal dağılımdan alınmış $n = 10$ gözlemden oluşan bir rassal örnekleme ait veriler şu şekilde olsun. $x_1 = 12{,}8$, $x_2 = 9{,}4$, $x_3 = 8{,}7$, $x_4 = 11{,}6$, $x_5 = 13{,}1$, $x_6 = 9{,}8$, $x_7 = 14{,}1$, $x_8 = 8{,}5$, $x_9 = 12{,}1$, $x_{10} = 10{,}3$. Öyleyse örneklem ortalaması aşağıdaki gibidir.

$$\overline{x} = \frac{12{,}8 + 9{,}4 + 8{,}7 + 11{,}6 + 13{,}1 + 9{,}8 + 14{,}1 + 8{,}5 + 12{,}1 + 10{,}3}{10} = 11{,}04$$

- Örneklem medyan değeri

$$\tilde{x} = \frac{10{,}3 + 11{,}6}{2} = 10{,}95$$

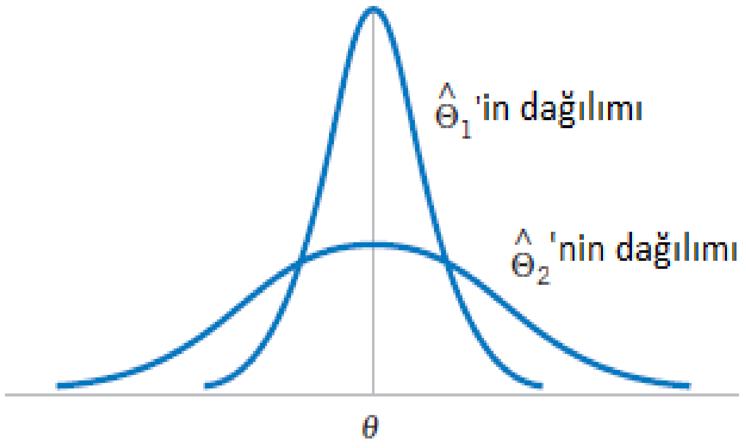
- %10 budanmış ortalama (averaj alınmadan önce en küçük %10 ve en büyük %10 çıkartılarak hesaplanır)

$$\overline{x}_{tr(10)} = \frac{8{,}7 + 9{,}4 + 9{,}8 + 10{,}3 + 11{,}6 + 12{,}1 + 12{,}8 + 13{,}1}{8} = 10{,}98$$

Tek bir yansız tahmin edici olmadığından tahmin ediciyi seçmek için tek başına yansızlık özelliğine güvenemeyiz.

Nokta tahmin edicisinin varyansı

- Varsayalım $\widehat{\Theta}_1$ ve $\widehat{\Theta}_2$ θ'nın yansız tahmin edicileri olsun.
- Bu her bir tahmin edicinin dağılımının gerçek θ değeri civarında merkezlenmesini gerektirir.
- Aşağıdaki şekil bu durumu göstermektedir. $\widehat{\Theta}_1$, $\widehat{\Theta}_2$'ye göre daha düşük bir varyansa sahip olduğu için $\widehat{\Theta}_1$ tahmin edicisi muhtemelen gerçek θ değerine daha yakın bir tahmin değeri üretecektir.
- Birden fazla tahmin edici arasında seçim yaparken mantıksal prensip minimum varyansa sahip tahmin ediciyi seçmektir.



Şekil: $\widehat{\Theta}_1$ ve $\widehat{\Theta}_2$ yansız tahmin edicilerinin örneklem dağılımları

Nokta tahmin edicisinin varyansı

θ'nın tüm yansız tahmin edicilerini dikkate alırsak bunlar içinde en küçük varyansa sahip olanı **minimum varyanslı yansız tahmin edici** (MVYT) olarak bilinir.

Bir anlamda MVYT tüm yansız tahmin ediciler arasında gerçek θ değerine en yakın tahmini $\hat{\theta}$ değerini üretecek tahmin edicidir. Çoğu pratik uygulamada MVYT'yi belirlemek üzere metodolojiler geliştirmek mümkündür. Bu metodoloji dersin kapsamı dışında olsa da normal dağılımla alakalı çok önemli bir sonuç verilecektir.

Eğer $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ortalaması μ ve varyansı σ^2 olan normal dağılımdan çekilmiş n boyutlu bir rassal örneklem ise örneklem ortalaması $\overline{X}$, μ için MVYT'dir.

Nokta tahmin edicisinin varyansı

- Örneğin varsayalım ki popülasyon ortalamasını tahmin etmek istiyoruz (ille de normal dağılım olmak zorunda değil). $X_1, X_2, \ldots, X_n$ gibi n tane gözlemden oluşan bir rassal örneklemimiz olsun ve μ için muhtemel iki tahmin ediciyi karşılaştırmak isteyelim.
- Bunlardan birisi örneklem ortalaması $\overline{X}$ ve diğeri X_i olsun. Örneklem ortalaması için $V(\overline{X}) = \sigma^2/n$ olduğunu ve herhangi bir X_i gözlem değeri için varyansın $V(X_i) = \sigma^2$ olduğunu biliyoruz.
- $V(\overline{X}) < V(X_i)$ olduğundan (örneklem hacmi $n \geq 2$ için) örneklem ortalamasının μ için herhangi bir X_i gözlem değerinden daha iyi bir tahmin edici olduğu sonucuna varabiliriz.

Nokta tahmininin standart hatası

- Bir parametrenin nokta tahmini ya da sayısal bir değer raporlandığında genellikle tahminin hassasiyeti (precision) hakkında bazı fikirlerin verilmesi arzu edilir. Genellikle kullanılan hassasiyet ölçümü kullanılan tahmin edicinin standart hatasıdır.

> $\widehat{\Theta}$ tahmin edicisinin **standart hatası** onun $\sigma_{\widehat{\Theta}} = \sqrt{V(\widehat{\Theta})}$ ile gösterilen standart sapmasıdır. Eğer standart hata tahmin edilebilecek bilinmeyen parametreler içeriyorsa $\sigma_{\widehat{\Theta}}$ formülünde değerlerin yerine konması $\hat{\sigma}_{\widehat{\Theta}}$ ile gösterilen **tahmini standart hatayı** verir.

- Tahmini standart hata bazen $s_{\widehat{\Theta}}$ ya da $se(\widehat{\Theta})$ ile de gösterilmektedir.

Nokta tahmininin standart hatası

- Varsayalım ortalaması μ ve varyansı σ^2 olan normal dağılımdan örneklem aldık. $\overline{X}$'ın dağılımı da ortalaması μ ve varyansı σ^2/n olan normal dağılıma uyar. Böylelikle $\overline{X}$'ın standart hatası aşağıdaki gibidir.

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- Eğer σ'yı bilmiyorsak bunun yerine örneklem standart sapması S yukarıdaki eşitlikte kullanılır. Böylelikle $\overline{X}$'ın tahmini standart hatası aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\hat{\sigma}_{\overline{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}}$$

- Yukarıda olduğu gibi tahmin edici normal dağılıma uyduğunda parametrenin gerçek değerinin bu iki değer arasında olduğundan emin olabiliriz. Büyük n değerleri için birçok nokta tahmin edicisi normal dağıldığından (ya da yaklaşık olarak) bu oldukça kullanışlı bir sonuçtur. Nokta tahmin edicisinin normal dağılmadığı durumlarda bile tahmin edici yansız olduğu sürece parametre tahmininin gerçek değerden en fazla %6 sapacağını söyleyebiliriz.

Örnek: Isıl iletkenlik

- Bir bilimsel makalede demirin ısıl iletkenliğinin ölçülmesiyle ilgili yeni bir metot sunulmuştur. 100 °F'lık bir ısı ve 550 watt'lık bir giriş gücü kullanılarak aşağıdaki 10 adet ısıl geçirgenlik ölçüm değerleri kaydedilmiştir.

41,60	41,48	42,34	41,95	41,86
42,18	41,72	42,26	41,81	42,04

- 100 °F'de 550 watt'ta ısıl iletkenlik ortalamasının nokta tahmini 41,924 olarak hesaplanır.
- Örneklem ortalamasının standart hatası $\sigma_{\overline{X}} = \sigma/\sqrt{n}$ olduğundan ve σ bilinmediğinden bunu örneklem standart sapması $s = 0{,}284$ ile değiştirebilir ve $\overline{X}$ için tahmini standart hata aşağıdaki gibi bulunur.

$$\hat{\sigma}_{\overline{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}284}{\sqrt{10}} = 0{,}0898$$

Güven aralıkları

- Bir aralık tahmini, bir popülasyon karakteristiği hakkında bir nokta tahmininden daha fazla bilgi sağlar

- Bu tür aralık tahminlerine, güven aralıkları denir

Güven aralığı tahmini

- Bir güven aralığı(interval), :
  - örnekten örneğe örnek istatistiklerindeki değişimi dikkate alan
  - bir örnekten elde edilen gözlemlere dayanan
  - Bilinmeyen popülasyon parametrelerine yakınlık hakkında bilgi veren
  - Güven seviyesi ifadesiyle belirtilen
    - ✓ Örn. %95 güvenilirlikte, %99 güvenilirlikte
    - ✓ Hiçbir zaman %100 güvenilirlikte olamaz
- bir değer aralığı (range) verir

Güven aralığı örneği

<u>Mısır Gevreği Dolum örneği</u>

- Popülasyon μ = 368 ortalama ve σ = 15 standart sapmaya sahip.
- Eğer n = 25 boyutunda bir örnek alırsak
  - 368 ± 1.96 * 15 /$\sqrt{25}$ = (362.12, 373.88) aralığının örnek ortalamalarının %95'ini ihtiva edeceğini
  - μ'yü bilmediğimizde, μ'yü tahmin etmek için $\overline{X}$ 'i kullanacağımızı
    - ✓ $\overline{X}$ = 362.3 ise aralık 362.3 ± 1.96 * 15 /$\sqrt{25}$ = (356.42, 368.18) olacak
    - ✓ 356.42 ≤ μ ≤ 368.18 olduğundan bu örneğe dayalı aralık μ hakkında doğru bir önerme yapacaktır.
- bulabiliriz

Fakat 25 boyutunda olası diğer örneklerden gelen aralıklar için ne diyeceğiz?

Güven aralığı örneği

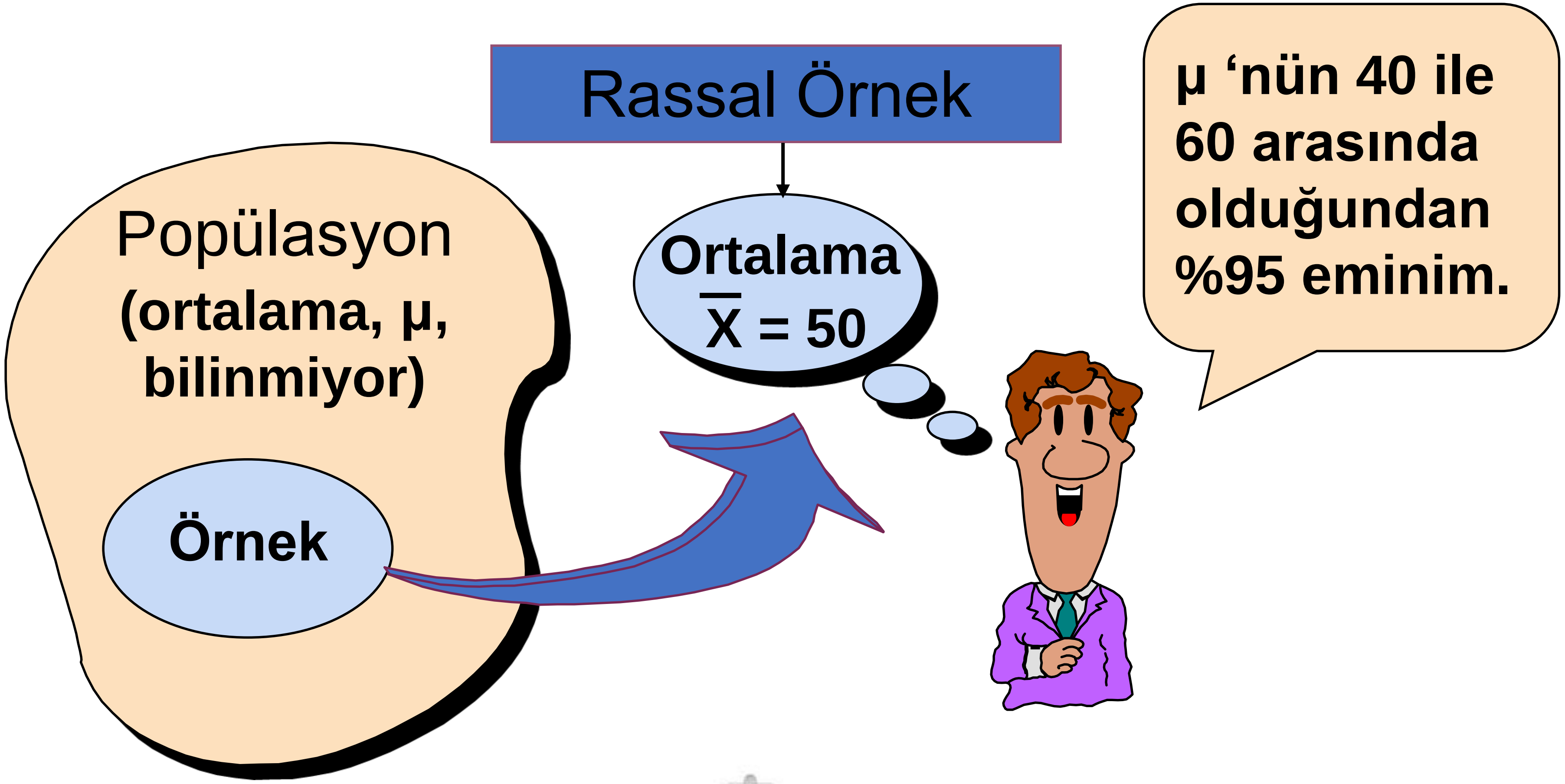
Örnek #	$\overline{X}$	Alt Sınır	Üst Sınır	µ'yü kapsar mı?
1	362.30	356.42	368.18	Evet
2	369.50	363.62	375.38	Evet
3	360.00	354.12	365.88	Hayır
4	362.12	356.24	368.00	Evet
5	373.88	368.00	379.76	Evet

Güven aralığı örnek

- Uygulamada n boyutunda sadece tek bir örnek aldık
- Uygulamada μ'yü bilmiyoruz dolayısıyla aralığın μ'yü içermesi hakkında bilgimiz yok
- Bununla birlikte, bu şekilde oluşturulmuş aralıkların % 95'i μ'yü içereceğini biliyoruz.
- Böylece, aslında seçtiğiniz tek örneğe dayanarak, aralığınızın μ'yü içereceğinden % 95 emin olabilirsiniz (bu bir %95 güven aralığıdır)

Not: 95% güven düzeyi, Z = 1.96 durumunun kullanılmasından kaynaklanmaktadır.

Tahmin süreci



Genel formül

- Tüm güven aralıkları için genel formül:

Nokta Tahmini ± (Kritik Değer)(Standart Hata)

- Nokta Tahmini, ilgilenilen popülasyon parametresini tahmin eden örnek istatistiktir

- Kritik Değer, nokta tahmininin örnekleme dağılımına ve istenen güven seviyesine dayanan bir tablo değeridir

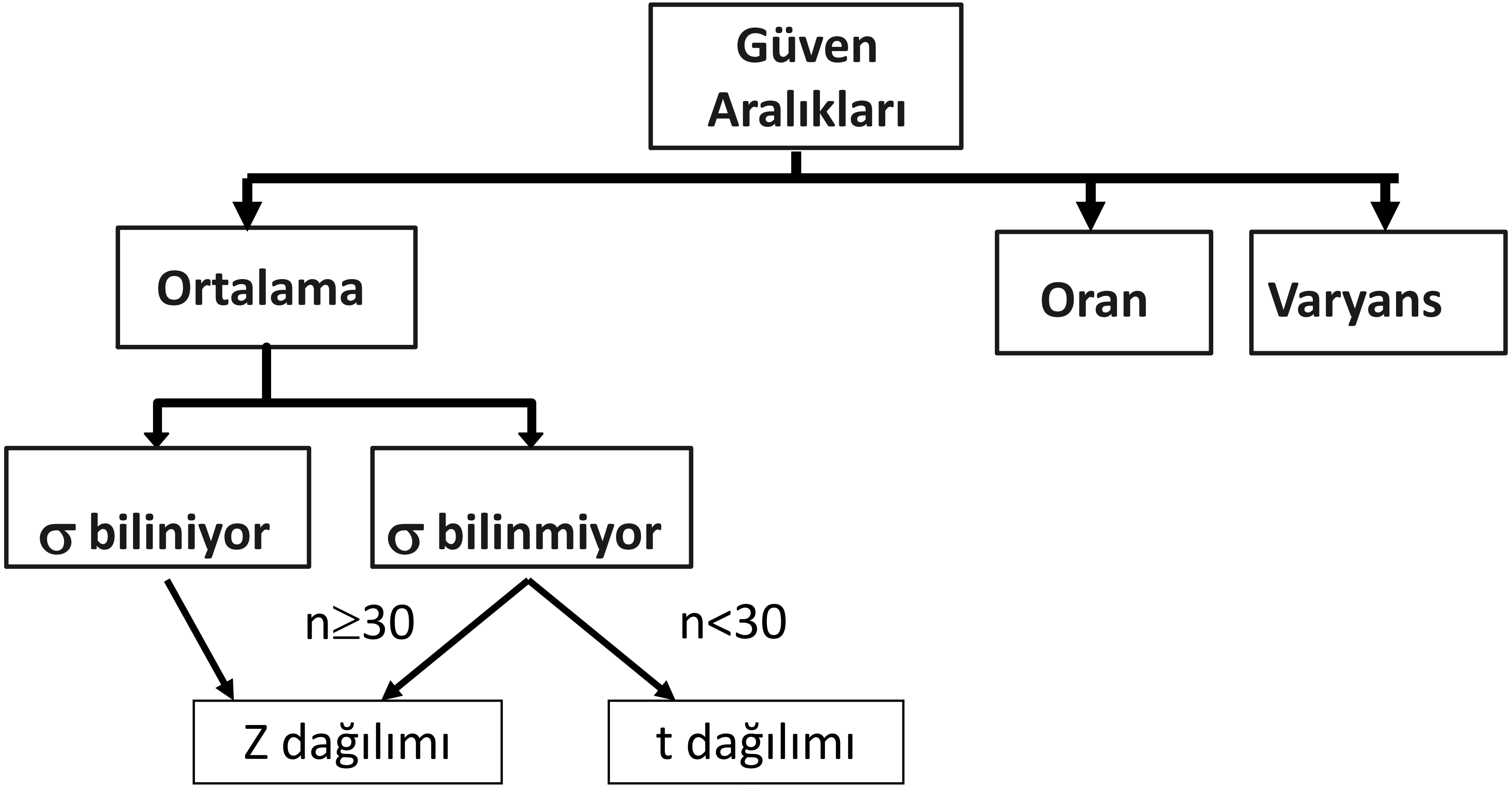
- Standart Hata, nokta tahmininin standart sapmasıdır

Güven düzeyi

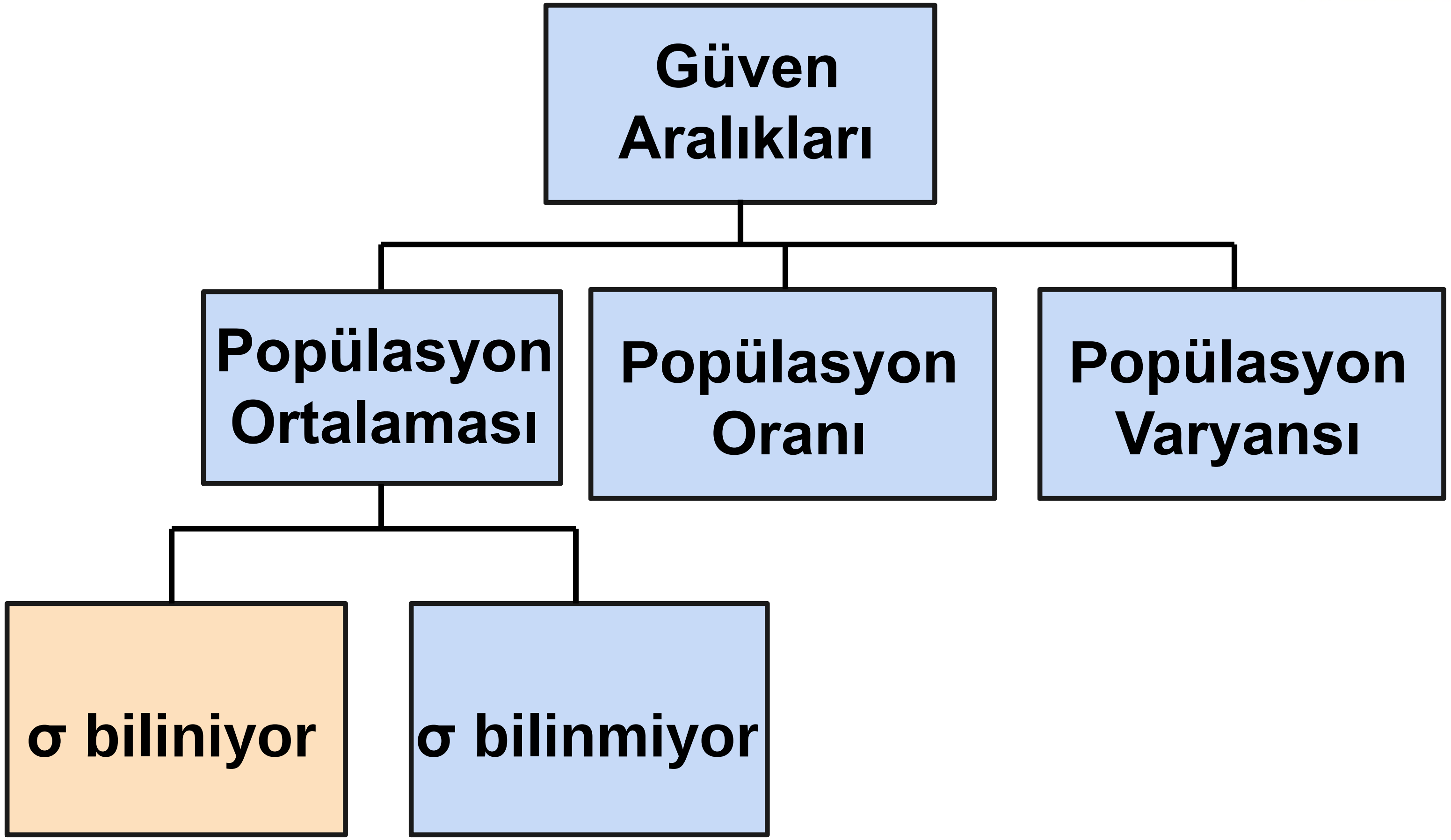
- Güven Düzeyi
  - Aralığın bilinmeyen popülasyon parametresini içereceği güven seviyesidir
  - Bir yüzde olarak gösterilir (%100'den az)

Güven düzeyi, (1-α)

- Güven Düzeyinin %95 olduğunu varsayalım
- (1 - α) = 0.95 olarak da yazılabilir,   (yani α = 0.05)
- İlişkili bir frekans yorumu:
    - kurulabilecek olan güven aralıklarının %95'i bilinmeyen doğru anakütle parametresini içerecektir.
- Belirli bir aralık doğru parametreyi ya içerecektir ya da içermeyebilir.
    - Belirli bir aralık için bir olasılık durumu söz konusu değildir


Güven Aralıkları
Ortalama
Oran
Varyans
σ biliniyor
σ bilinmiyor
n≥30
n<30
Z dağılımı
t dağılımı

Güven aralıkları



μ için güven aralığı (σ biliniyor)

- Varsayımlar
  - Popülasyon standart sapması σ biliniyor
  - Popülasyon normal dağılmış
  - Popülasyon normal dağılıma uymuyorsa, geniş örnekler kullan

- Güven aralığı tahmini:

$$\boxed{\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$\bar{X}$ nokta tahmini

$Z_{\alpha/2}$ herbir kuyrukta $\alpha/2$ olasılığı için normal dağılım kritik değeri

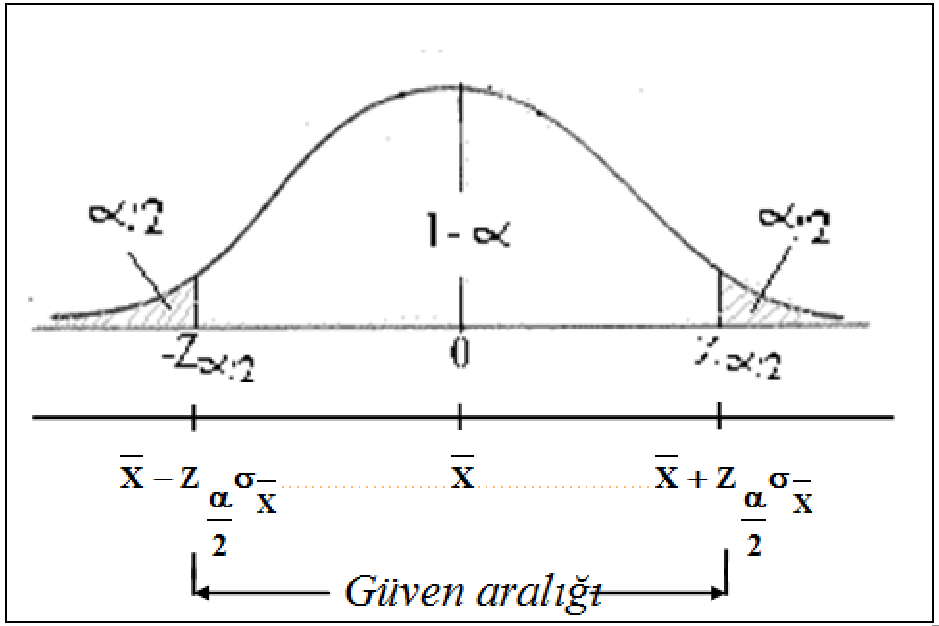
$\sigma/\sqrt{n}$ standart hata

μ için güven aralığı (σ biliniyor)

Eğer $\overline{x}$ varyansı bilinen σ^2 olan normal dağılımdan alınmış n boyutlu bir rassal örneklemin örneklem ortalaması ise μ için $\%100(1-\alpha)$ GA aşağıdaki gibidir.

$$\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

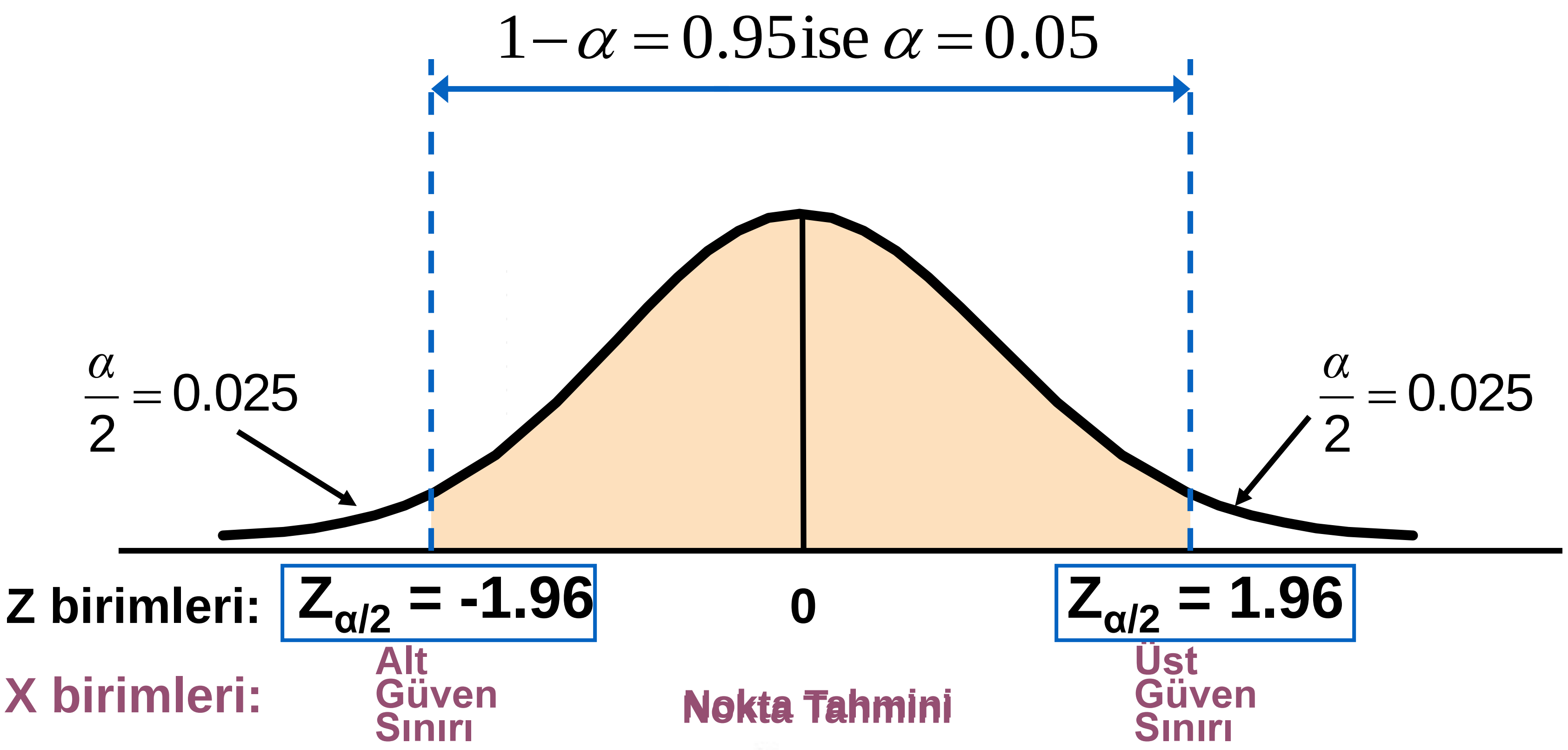
Burada $z_{\alpha/2}$ standart normal dağılımın üst $100\alpha/2$ yüzde değeridir.



Kritik değerin bulunması, $Z_{\alpha/2}$

- Bir %95 güven aralığını düşünün:

$$Z_{\alpha/2} = \pm 1.96$$



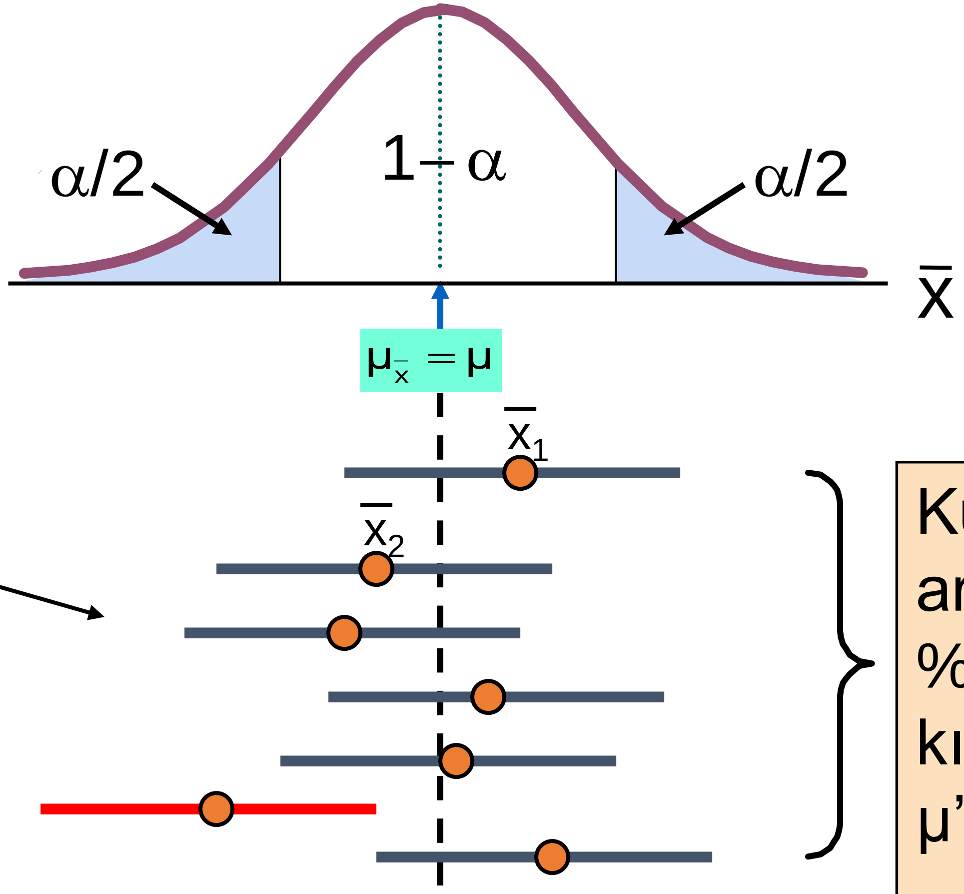
Yaygın güven seviyeleri

- Yaygın olarak kullanılan güven seviyeleri %90, %95 ve %99'dur

Güven Seviyesi	**Güven Katsayısı,** $1-\alpha$	$Z_{\alpha/2}$ **değeri**
80%	**0.80**	**1.28**
90%	**0.90**	**1.645**
95%	**0.95**	**1.96**
98%	**0.98**	**2.33**
99%	**0.99**	**2.58**
99.8%	**0.998**	**3.08**
99.9%	**0.999**	**3.27**

Aralıklar ve güven seviyesi

Ortalamanın Örnekleme Dağılımı



Güven Aralıkları

Aralıklar

$$\bar{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

'den

$$\bar{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

'e kadar yayılır

Kurulmuş aralıkların %(1-α)x100 kısmı μ'yü içerir;

%(α)x100 kısmı içermez.

Aralık genişliğini etkileyen faktörler

Aralık

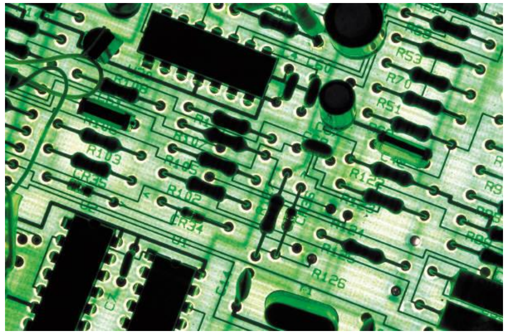
$\bar{X} - Z \cdot \sigma_{\bar{X}}$ 'dan $\bar{X} + Z \cdot \sigma_{\bar{X}}$ 'ya uzanir.

- Verilerin yayılımı (σ)
- Örnek hacmi
- Güven seviyesi ($1 - \alpha$)

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

Örnek

- Geniş normal dağılımlı bir popülasyondan alınan 11 devreli bir örnek için ortalama direnç 2.20 ohm'dur. Geçmiş test verilerinden popülasyonun standart sapmasının 0.35 ohm olduğunu biliyoruz.
- Popülasyonun doğru ortalama direnci için bir %95 güven aralığı oluşturun.



Örnek

- Geniş normal dağılımlı bir popülasyondan alınan 11 devreli bir örnek için ortalama direnç 2.20 ohmdur. Geçmiş test verilerinden popülasyonun standart sapmasının 0.35 ohm olduğunu biliyoruz.

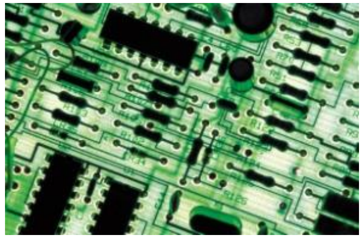
Çözüm:

$$\overline{X} \pm Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$= 2.20 \pm 1.96\,(0.35/\sqrt{11})$$

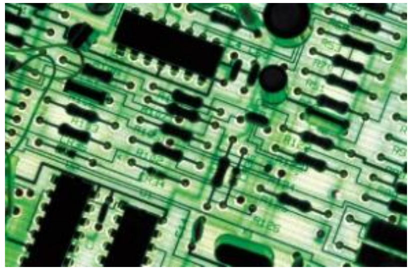
$$= 2.20 \pm 0.2068$$

$$\boxed{1.9932 \le \mu \le 2.4068}$$



Yorumlama

- Doğru ortalama direncin 1.9932 ile 2.4068 ohm aralığında olduğundan %95 eminiz
- Her ne kadar gerçek ortalama bu aralıkta olsa da olmayabilse de, bu şekilde oluşan aralıkların % 95'i gerçek ortalamayı içerecektir.



Örnek

- Metalik malzemelere bir teknikle darbe testi uygulanmaktadır. Bu teknik darbe enerjisini ölçmekte ve sıcaklık düşüşüyle malzemenin sünek yapıdan kırılgan yapıya geçiş yapıp yapmadığını belirlemek için kullanılmaktadır. Belirli bir metale ait numuneler için 10 adet darbe enerjisi (*J*) ölçümü yapılmıştır.

Örnek

. Bu değerler 64,1-64,7-64,5-64,6-64,5-64,3-64,6-64,8-64,2 ve 64,3'tür. Darbe enerjisinin standart sapması $\sigma = 1J$ olan normal dağılıma uyduğu bilinmektedir. Ortalama darbe enerjisi μ için %95 GA oluşturmak istiyoruz.

Gerekli değerler $z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1,96$, $n = 10$ ve $\overline{x} = 64,46$'dır. Bu veriler ışığında %95 GA aşağıdaki gibidir.

$$\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$64,46 - 1,96\frac{1}{\sqrt{10}} \leq \mu \leq 64,46 + 1,96\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$63,84 \leq \mu \leq 65,08$$

Pratik Yorum: Örneklem verisine dayanarak, ortalama darbe enerjisi için oldukça makul bir aralık $63,84\ J \leq \mu \leq 65,08\ J$ olacaktır.

Örnek

- n = 25 hacimli bir şans örneğinin ortalaması $\overline{X}$ = 50 dir. Populasyonun standart sapmasının σ_X = 10 olduğu bilindiğine göre μ_X için 95%'lik güven aralığını oluşturunuz.

Örnek

$$P(\bar{X} - Z_{\alpha/2} \times \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{\alpha/2} \times \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

$$P(50 - 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{25}} \leq \mu \leq 50 + 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{25}}) = 0.95$$

$$P(46.08 \leq \mu \leq 53.92) = 0.95$$

Örnek

- Bir tezgahta üretilen parçaların dış çaplarının standart sapması σ=2.4 cm'dir. Tezgahın üretiminden rastgele seçilen 16 parçanın dış çap ortalaması 3.2 cm olarak bulunmuştur. %5 hata (%95 güven) seviyesinde anakütle ortalamasının güven aralığını tahmin ediniz.

Örnek

σ=2.4 cm **n**=16 parça $\bar{X}$=3.2 cm **1-α=0.95 → α=0.05 α/2=0.025**

Z tablosundan **$Z_{\alpha/2}=Z_{0.05/2}=Z_{0.025}=1.96$** değeri alınır.

$$\underbrace{\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} . \sigma_{\bar{X}}}_{\text{aralığın alt sınırı}} < \mu < \underbrace{\bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} . \sigma_{\bar{X}}}_{\text{aralığın üst sınırı}}$$

$$3.2 - 1.96\sqrt{\frac{(2.4)^2}{16}} < \mu < 3.2 + 1.96\sqrt{\frac{(2.4)^2}{16}}$$

$$\rightarrow 2.024 < \mu < 4.376$$

Alınan örneklere göre sözü edilen tezgahta üretilen parçaların dış çapları **ortalamasının** %5 hata (%95 doğruluk) payı ile 2.024 cm ile 4.376 cm arasında olacağı söylenebilir.

Örnek: Tek uçlu güven sınırı

- Darbe testindeki verilerin aynısı ortalama darbe enerjisi için %95 alt güven aralığı oluşturulmak istediğimizi düşünelim.
- $\overline{x} = 64{,}46$, $\sigma = 1J$ ve $n = 10$ olduğunu hatırlayalım.

$$\overline{x} - z_{\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu$$

$$64{,}46 - 1{,}64\frac{1}{\sqrt{10}} \leq \mu$$

$$63{,}94 \leq \mu$$

Güven seviyesi ve tahminin hassasiyeti

- Bir önceki örnekteki %95 güven seviyesi keyfi olarak seçilmişti. Daha yüksek bir güven seviyesi örneğin %99 seçseydik ne olurdu?
- Gerçekten daha yüksek bir güven seviyesi istememiz makul görünüyor mu? $\alpha = 0{,}01$ için $z_{\alpha/2} = z_{0{,}005} = 2{,}58$ bulunur? $\alpha = 0{,}05$ için $z_{\alpha/2} = z_{0{,}025} = 1{,}96$ bulunmuştu. Böylelikle %95 güven aralığının uzunluğu

$$2(1{,}96\,\sigma/\sqrt{n}) = 3{,}92\,\sigma/\sqrt{n}$$

- şeklinde olur. Halbuki %99 GA'nın uzunluğu

$$2(2{,}58\,\sigma/\sqrt{n}) = 5{,}16\,\sigma/\sqrt{n}$$

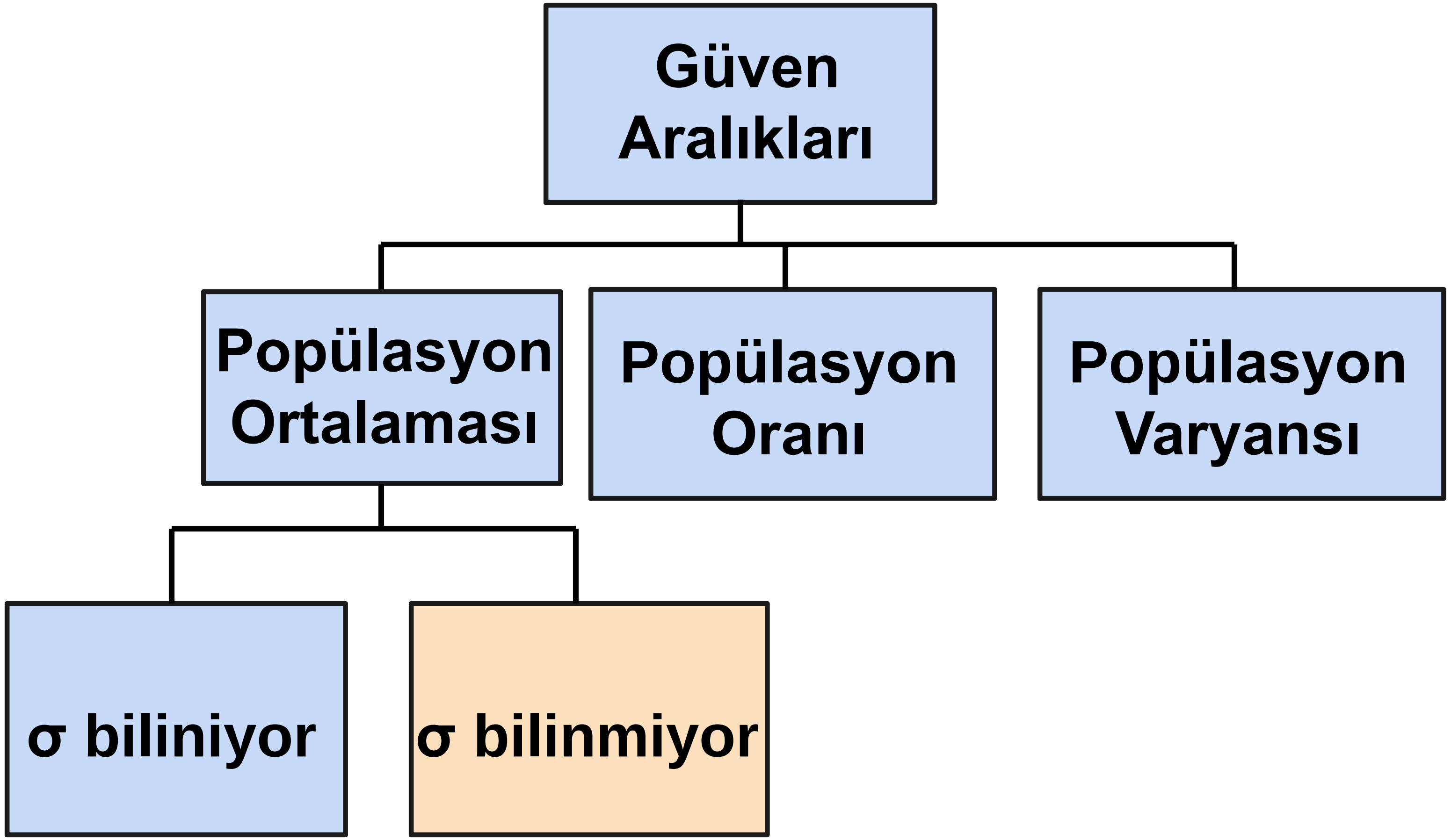
- şeklinde çıkmaktadır.

Güven seviyesi ve tahminin hassasiyeti

- Böylece %99 GA, %95 GA'dan daha uzundur.
- Bu durum bizim neden %99 GA'da daha yüksek bir güven seviyesine sahip olduğumuzun bir göstergesidir. Genel olarak sabit bir n örneklem hacmi σ standart sapması için daha yüksek güven seviyesi daha uzun GA anlamına gelmektedir.

- GA'nın uzunluğu tahmine ait **hassasiyetin** bir ölçüsüdür. Daha önce hassasiyetin güven seviyesi ile ters ilişkili olduğunu görmüştük. Karar verme amaçları açısından yeterince dar ve uygun bir güvene sahip bir güven aralığı elde etmeyi arzularız. Belirlenen uzunlukta veya hassasiyette bir GA elde etmenin bir yolu örneklem boyutu n değerini belirlemektir.

Güven aralıkları



σ'yı gerçekten biliyor musunuz?

- Büyük ihtimalle hayır!

- Aslında hemen hemen tüm gerçek hayat işletme durumlarında, σ bilinemez.

- Eğer σ'nın bilindiği bir durum mevcutsa μ'de bilinmektedir. (σ'yı hesaplamak için μ'yü bilmemiz gerektiğinden dolayı.)

- Eğer μ'yü gerçek olarak biliyorsak, onu tahmin etmek için bir örneklem oluşturmak gerekli değildir.

Anakütle varyansı bilinmediği durumda normal dağılımın ortalaması ile ilgili güven aralığı

- Anakütle varyansının bilinmediği, fakat örnek hacminin 30 veya daha büyük olduğu ($n \geq 30$) durumlarda örnek varyansı (S^2) kullanılarak Z dağılımı yardımıyla güven aralığı oluşturulur.

- Anakütle varyansının bilinmediği durumlarda örnek hacmi 30 dan küçük ($n<30$) ise küçük örnek teorisine göre geliştirilen t dağılımı yardımıyla güven aralığı oluşturulur.

Anakütle varyansı bilinmediği durumda normal dağılımın ortalaması ile ilgili güven aralığı

- Varsayalım ki ilgilendiğimiz popülasyon ortalaması bilinmeyen μ ve varyansı bilinmeyen σ^2 olan normal dağılım olsun.

- Bu dağılımdan çektiğimiz n boyutlu rassal örneklemin $X_1, X_2, \ldots, X_n$ şeklinde olduğunu kabul edelim. $\overline{X}$ ve S^2 sırasıyla örneklem ortalaması ve örneklem varyansı olsun.

- μ için iki-uçlu GA oluşturmak isteyelim. Eğer σ^2 biliniyorsa biliyoruz ki $Z = (\overline{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ standart normal dağılıma uymaktadır.

- Eğer σ^2 bilinmiyorsa mantıklı bir yol σ'yı örneklem standart sapması S ile değiştirmektir.

Örnek

- 1993 yılında yayınlanan bir çalışmada balıklardaki civa kirliliği üzerine inceleme yapılmıştır. Florida gölünde 53 tane balıktan oluşan bir örneklem seçilmiş ve kas dokularındaki civa miktarı ölçülmüştür (ppm). Civa miktarları aşağıdaki gibi çıkmıştır.

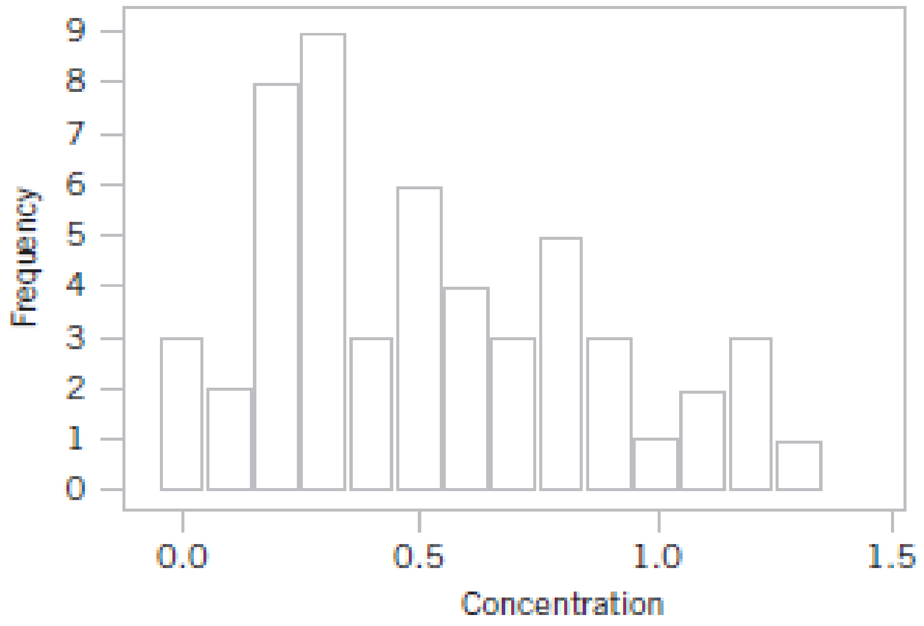
1,230	**0,490**	**0,490**	**1,080**	**0,590**	**0,280**	**0,180**	**0,100**	**0,940**
1,330	**0,190**	**1,160**	**0,980**	**0,340**	**0,340**	**0,190**	**0,210**	**0,400**
0,040	**0,830**	**0,050**	**0,630**	**0,340**	**0,750**	**0,040**	**0,860**	**0,430**
0,044	**0,810**	**0,150**	**0,560**	**0,840**	**0,870**	**0,490**	**0,520**	**0,250**
1,200	**0,710**	**0,190**	**0,410**	**0,500**	**0,560**	**1,100**	**0,650**	**0,270**
0,270	**0,500**	**0,770**	**0,730**	**0,340**	**0,170**	**0,160**	**0,270**	

Örnek

- Minitab paket programından alınan istatistiksel özetler aşağıdaki gibidir:

Variable	N	Mean	Median	TrMean	StDev	SE Mean
Concentration	53	0.5250	0.4900	0.5094	0.3486	0.0479

Variable	Minimum	Maximum	Q1	Q3
Concentration	0.0400	1.3300	0.2300	0.7900



Örnek

- Veriler için oluşturulan histogram incelendiğinde dağılımın normal olmadığı ve sağa çarpık olduğu görülmektedir.
- μ için yaklaşık %95 GA oluşturmak istiyoruz. $\imath$ 30 40 olduğundan GA formülünü kullanmak için normallik varsayımı gerekmemektedir.
- Gerekli veriler $n = 53$, $\overline{x} = 0{,}5250$, $s = 0{,}3486$ ve $z_{0{,}025} = 1{,}96$'dır. μ için yaklaşık %95 GA aşağıdaki gibidir.

$$\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$0{,}5250 - 1{,}96\frac{0{,}3486}{\sqrt{53}} \leq \mu \leq 0{,}5250 + 1{,}96\frac{0{,}3486}{\sqrt{53}}$$

$$0{,}4311 \leq \mu \leq 0{,}6189$$

μ için güven aralığı (σ bilinmediğinde)

- Eğer popülasyonun standart sapması σ bilinmiyorsa ve alınan örnek sayısı 30'dan az ise, yerine örnek standart sapması, S konulabilir.
- S örnekten örneğe değişken özellikte olduğundan, bu durum ekstra bir belirsizlik doğurur.
- Bundan dolayı normal dağılım yerine t dağılımı kullanırız.

μ için güven aralığı (σ bilinmediğinde)

- Varsayımlar
  - Popülasyon standart sapması bilinmemektedir.
  - Popülasyon normal dağılıma uymaktadır.
- Student t Dağılımı kullanılır
- Güven aralığı tahmini:

$$\boxed{\overline{X} \pm t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}}$$

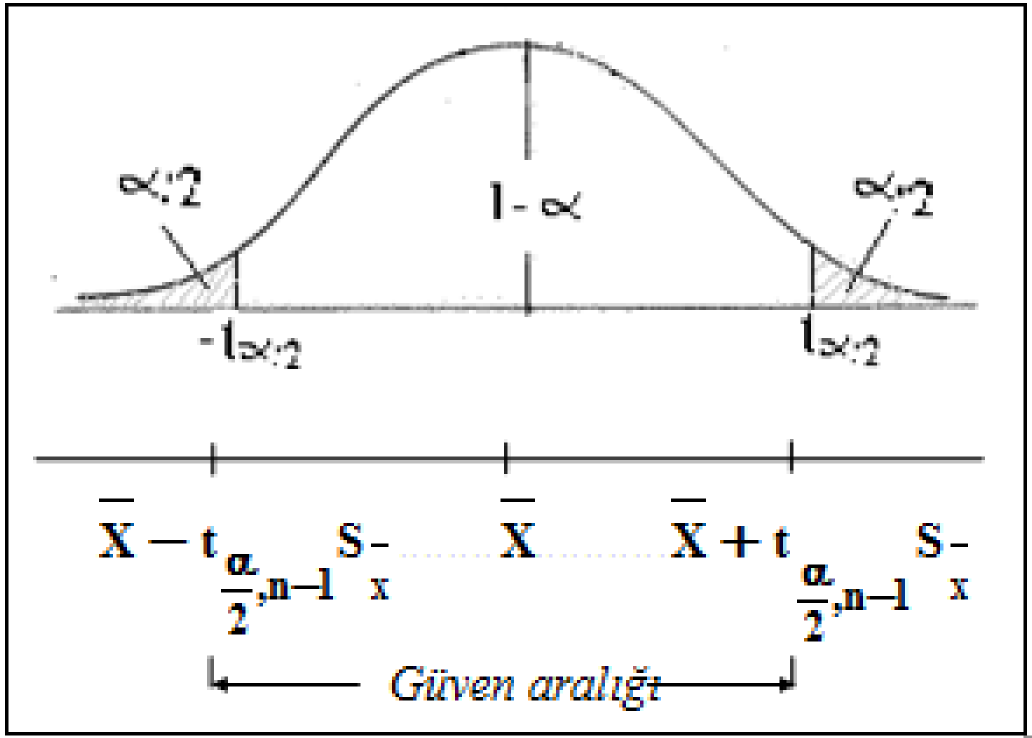
($t_{\alpha/2}$,n -1 serbestlik derecesine sahip ve her bir kuyrukta α/2 alanına sahip t dağılımının kritik değeridir.)

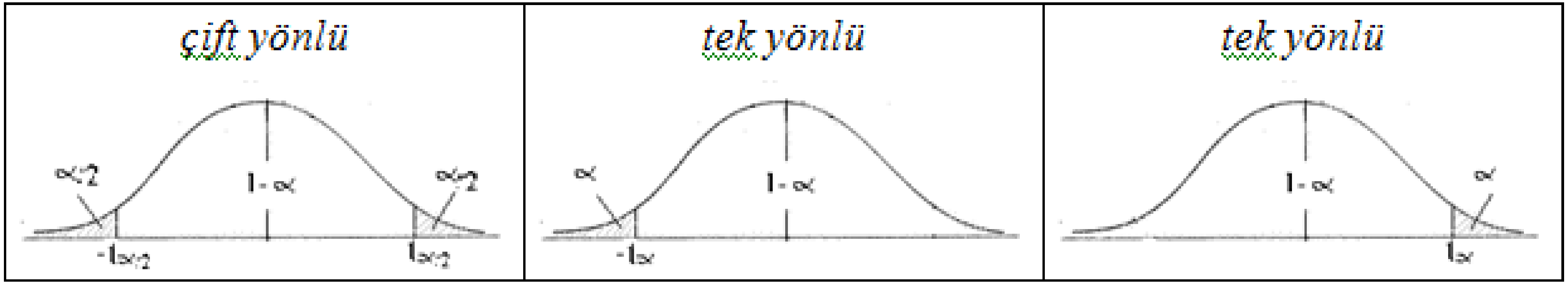
μ için güven aralığı (σ bilinmediğinde)

Eğer $\overline{x}$ ve s varyansı (bilinmeyen) σ^2 olan normal dağılımdan alınmış rassal örneklemin ortalaması ve standart sapması ise μ için $\%100(1-\alpha)$ güven aralığı

$$\overline{x} - t_{\alpha/2,n-1} s/\sqrt{n} \le \mu \le \overline{x} + t_{\alpha/2,n-1} s/\sqrt{n}$$

şeklinde olur. $t_{\alpha/2,n-1}$ $n-1$ serbestlik derecesine sahip t dağılımının üst kısmında kalan alanı $100\alpha/2$ yapan değerdir.


∝/2
1 - ∝
∝/2
$-t_{\alpha/2}$
$t_{\alpha/2}$
$\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2},n-1} S_{\bar{x}}$
$\bar{X}$
$\bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2},n-1} S_{\bar{x}}$
Güven aralığı


çift yönlü
tek yönlü
tek yönlü
∝/2
1 - ∝
∝/2
$-t_{\alpha/2}$
$t_{\alpha/2}$
∝
1 - ∝
$-t_{\alpha}$
1 - ∝
∝
t_{α}

Student t dağılımı

- t bir dağılım ailesidir.
- $t_{\alpha/2}$ değeri serbestlik derecesine (s.d.) bağlıdır.
  - Örnek ortalaması hesaplandıktan sonra değişmesi serbest olan gözlemlerin sayısıdır.

$$\boxed{s.d. = n - 1}$$

Serbestlik derecesi (s.d.)

Örnek ortalaması hesaplandıktan sonra değişmesi serbest olan gözlemlerin sayısı

Örnek: 3 sayının ortalamasının 8 olduğunu düşünün

X_1 = 7 olsun
X_2 = 8 olsun
X_3 nedir?

→

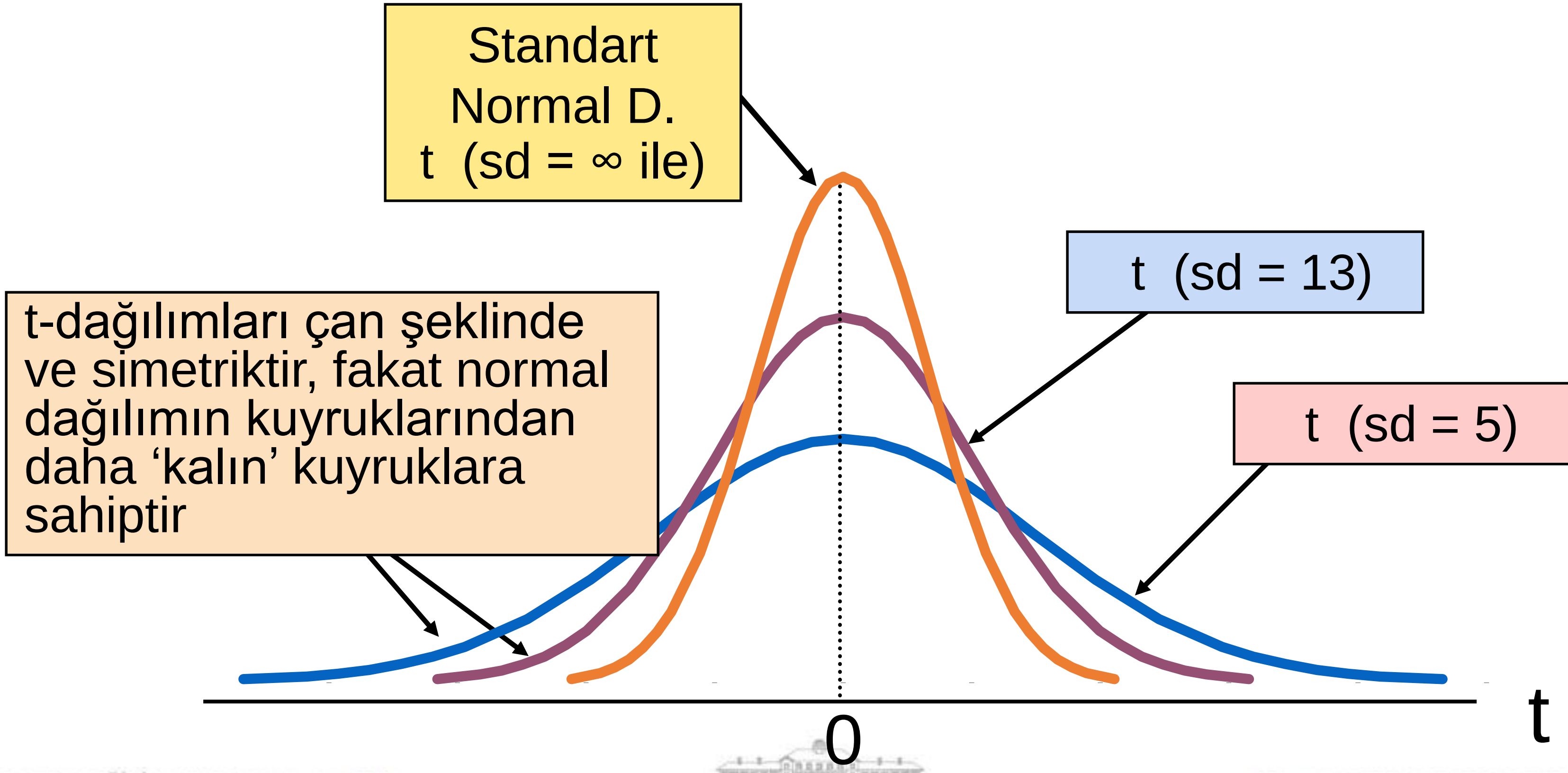
Eğer bu üç değerin ortalaması 8.0 ise,
X_3 9 olmalıdır
(yani, X_3 değişmekte serbest değildir)

Burada, n = 3, böylece serbestlik derecesi = n – 1 = 3 – 1 = 2

(2 değer herhangi bir sayı olabilir, fakat üçüncü değer verilen bir ortalama için değişmekte serbest değildir)

Student t dağılımı

Not: n arttıkça $t \longrightarrow Z$

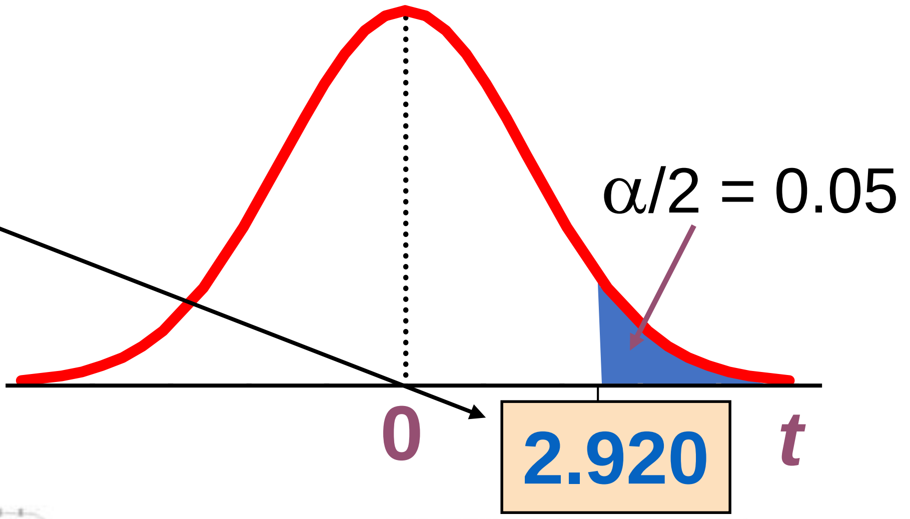


Student t tablosu

	Üst Kuyruk Alanı		
sd	.10	**.05**	.025
1	3.078	6.314	12.706
2	1.886	**2.920**	4.303
3	1.638	2.353	3.182

Tablonun gövdesi, olasılıkları değil t değerlerini içermektedir.

n = 3
sd = n - 1 = 2
$\alpha = 0.10$
$\alpha/2 = 0.05$



Seçilmiş t dağılımı değerleri

Z değeri ile kıyaslayarak

Güven Seviyesi	t (10 s.d.)	t (20 s.d.)	t (30 s.d.)	Z (∞ s.d.)
0.80	1.372	1.325	1.310	1.28
0.90	1.812	1.725	1.697	1.645
0.95	2.228	2.086	2.042	1.96
0.99	3.169	2.845	2.750	2.58

Not: n arttıkça t $\longrightarrow$ Z

t dağılımı güven aralığı örneği

Ortalaması $\overline{X}$ = 50 ve standart sapması S = 8 olan n = 25 büyüklüğünde bir örnek alalım. μ için %95 güven aralığını oluşturun

- s.d. = n – 1 = 24, yani $t_{\alpha/2} = t_{0.025} = 2.0639$

Güven aralığı;

$$\overline{X} \pm t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} = 50 \pm (2.0639) \frac{8}{\sqrt{25}}$$

$46.698 \le \mu \le 53.302$

t dağılımı güven aralığı örneği

- Bu aralığın yorumlanması, örnekleme yaptığınız popülasyonun yaklaşık olarak normal bir dağılım olduğu varsayımını gerektirir. (özellikle n sadece 25 olduğunda).
- Bu durum:
  - Normal olasılık diyagramı veya
  - Kutu diyagramı

oluşturarak kontrol edilebilir.

Örnek

- Malzeme Mühendisliği dergisinde yayınlanan bir makalede 22 adet U-700 alaşımının çekme yapışma testlerine ilişkin sonuçları raporlamıştır. Numunelerin dayanabildikleri çekme yükü megapaskal cinsinden aşağıdaki gibidir.

19,8	10,1	14,9	7,5	15,4	15,4
15,4	18,5	7,9	12,7	11,9	11,4
11,4	14,1	17,6	16,7	15,8	
19,5	8,8	13,6	11,9	11,4	

- Örneklem ortalaması $\overline{x} = 13{,}71$ ve örneklem standart sapması $s = 3{,}55$'dir. μ için %95 GA oluşturmak istiyoruz. $n = 22$ olduğu için $n - 1 = 21$ serbestlik derecesine sahip t için $t_{0{,}025{,}21} = 2{,}080$. GA aşağıdaki gibi oluşturulur.

$$\overline{x} - t_{\alpha/2,n-1} s/\sqrt{n} \le \mu \le \overline{x} + t_{\alpha/2,n-1} s/\sqrt{n}$$
$$13{,}71 - 2{,}080(3{,}55)/\sqrt{22} \le \mu \le 13{,}71 + 2{,}080(3{,}55)/\sqrt{22}$$
$$13{,}71 - 1{,}57 \le \mu \le 13{,}71 + 1{,}57$$
$$12{,}14 \le \mu \le 15{,}28$$

Örnek

- Bir işyerinde çalışan işçilerin boylarına göre tezgah yüksekliklerinin ayarlanması amacıyla bir araştırma yürütülmüştür. Farklı bölümlerden rasgele 25 işçi seçilmiş ve boyları ölçülmüştür. İşçilerin boyları ortalaması 1.72 m ve varyansı 0.18 olarak belirlendiğine göre %99 güven (%1 hata) seviyesinde anakütle ortalamasının güven sınırlarını tahmin ediniz.

Örnek

Anakütle varyansı (σ^2) bilinmediği ve örnek hacmi (n=25) 30 dan küçük olduğu için güven aralığının oluşturulmasında t dağılımından yararlanılacaktır

SD=n-1=25-1=24 $\quad$ $1-\alpha=0.99 \rightarrow \alpha=0.01$ $\quad$ $\alpha/2=0.005$ $\quad$ $t_{\alpha/2,n-1}= t_{0.005;24}=2.797$

$$\underbrace{1.72-2.797\cdot\sqrt{\frac{0.18}{25}}}_{\text{aralığın alt sınırı}} < \mu < \underbrace{1.72+2.797\cdot\sqrt{\frac{0.18}{25}}}_{\text{aralığın üst sınırı}} \Rightarrow 1.48 < \mu < 1.96$$

%99 güven düzeyinde sözü edilen işyerindeki işçilerin boyları ortalamasının 1.48m ile 1.96m arasında olacağı söylenebilir(veya olması beklenir)

Örnek

- Bir fabrikada rasgele üretilen 25 ürünün ortalama ağırlığı 1040 gr standart sapması 25 gr bulunmuştur. %95 güvenle bu imalat prosesinde üretilen ürünlerin ortalama ağırlığı hangi aralıkta yer alır?

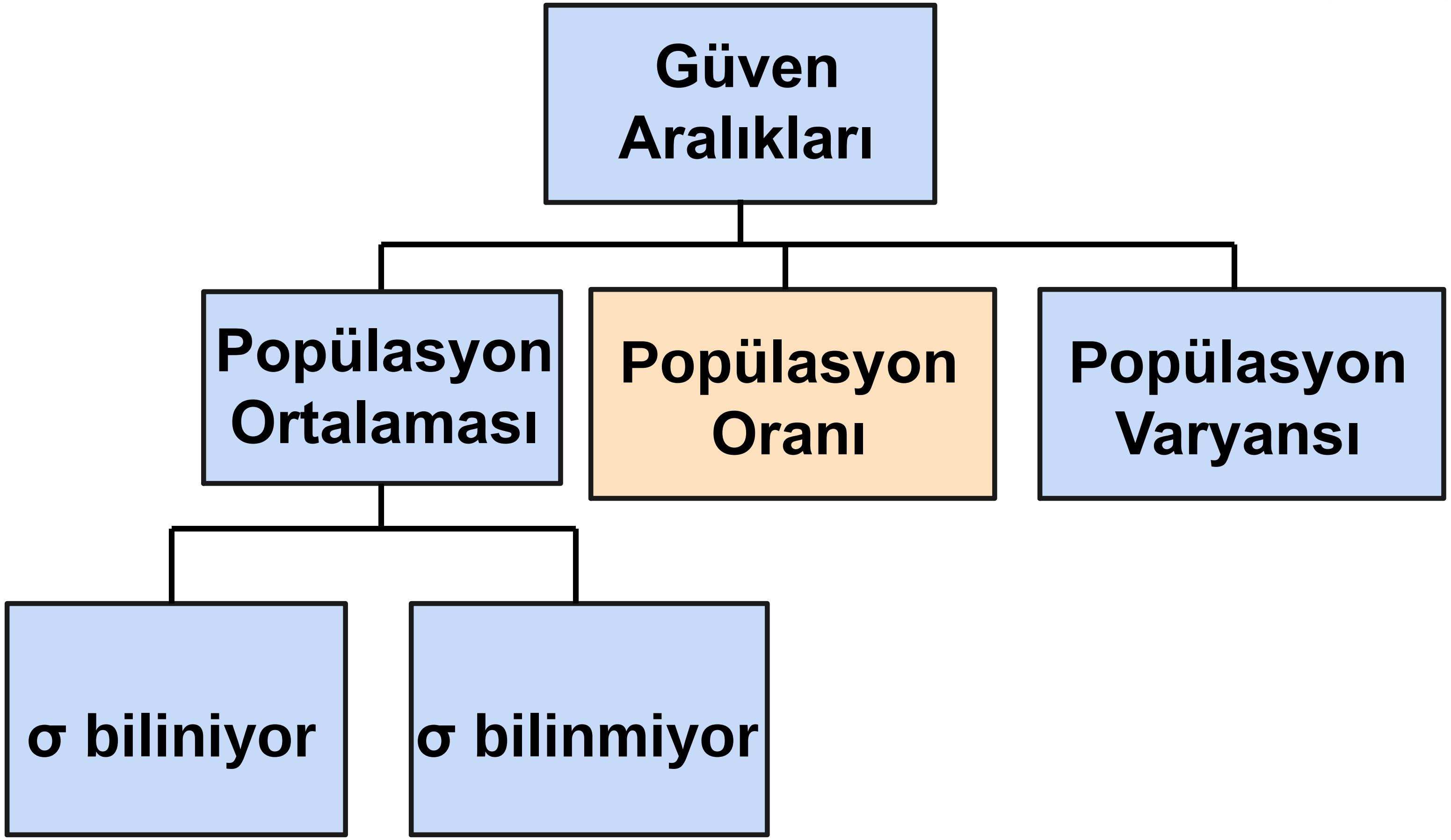
Örnek

$$\bar{X} - t_{v;\alpha/2} \times \frac{s_x}{\sqrt{n\text{-}1}} \le \mu \le \bar{X} + t_{v;\alpha/2} \times \frac{s_x}{\sqrt{n\text{-}1}}$$

$$1040 - 2.064\frac{25}{\sqrt{25}} \le \mu \le 1040 + 2.064\frac{25}{\sqrt{25}}$$

$$1029.47 \le \mu \le 1050.53$$

Güven aralıkları



Popülasyon oranı, π için güven aralığı

- Popülasyon oranı (π) için aralık tahmini, bir örnekleme oranındaki (p) belirsizlikten dolayı tolerans eklenerek hesaplanabilir

Popülasyon oranı, π için güven aralığı

- Örnek boyutunun büyük olması durumunda, örnek dağılımının

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$$

standart sapmasıyla yaklaşık olarak normal dağıldığını hatırlayalım

Örnek veriden bunu tahmin edebiliriz:

$$\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

Güven aralığı uç noktaları

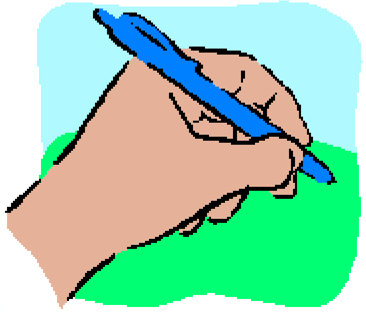
- Popülasyon oranı için üst ve alt güven sınırları şu formülle hesaplanır:

$$p \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

-
    - $Z_{\alpha/2}$ istenilen güven seviyesi için standart normal dağılım değeri
    - p örnek oranı
    - n örnek boyutu olmak üzere
- Not: np > 5 ve n(1-p) > 5 olmalıdır.

Örnek

- 100 kişilik rasgele bir örnekte, 25'inin solak olduğu görülmektedir.
- Solakların gerçek orantısı için %95 güven aralığını oluşturun



Örnek

- 100 kişilik rasgele bir örnekte, 25'inin solak olduğu görülmektedir. Solakların gerçek orantısı için %95 güven aralığını oluşturun

$$p \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{p(1-p)/n}$$

$$= 25/100 \pm 1.96\sqrt{0.25(0.75)/100}$$

$$= 0.25 \pm 1.96(0.0433)$$

$$\boxed{= 0.1651 \le \pi \le 0.3349}$$

Yorumlar

- Popülasyondaki solakların doğru orantısının 16.51% ve 33.49% aralığında olduğundan %95 eminiz

- Her ne kadar gerçek orantı 0.1651 ‘dan 0.3349’a aralığında olsa da ya da olmayabilse de, 100 kişi boyutlu örneklerden bu şekilde oluşan aralıkların % 95'i gerçek orantıyı içerecektir.

Örnek

- 400 lise öğrencisinden oluşan bir örnekte 32 öğrenci üniversite sınavını kazanmıştır. Üniversite öğrencilerinin sınavı kazanma oranı için %95'lik güven aralığını bulunuz.

Örnek

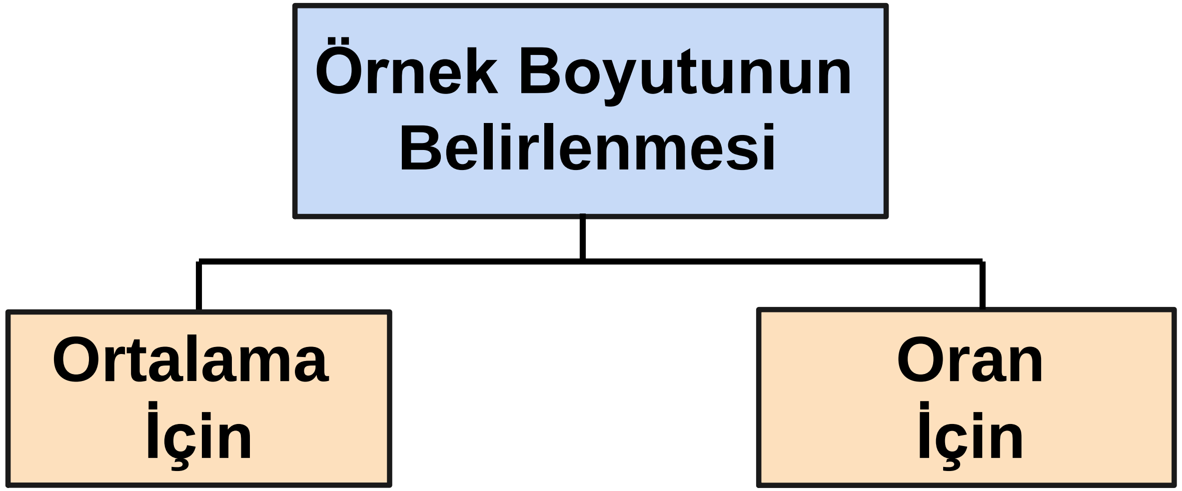
$$p = \frac{32}{400} = 0.08$$

$$P(p - Z_{\alpha/2}.S_p \leq P \leq p + Z_{\alpha/2}.S_p) = 1 - \alpha$$

$$P\left(0.08 - 1.96\sqrt{\frac{0.08(1-0.08)}{400}} \leq P \leq 0.08 + 1.96\sqrt{\frac{0.08(1-0.08)}{400}}\right) = 0.95$$

$$P(0.053 \leq P \leq 0.107) = 0.95$$

Örnek boyutunun belirlenmesi



Örnekleme hatası

- Gerekli örnek büyüklüğü, tanımlanan bir güven seviyesi ($1 - \alpha$) ile arzu edilen bir hata payına (e) ulaşmak için bulunabilir.
- Hata payı örnekleme hatası olarak da adlandırılır.
  - popülasyon parametresinin tahmini içindeki hatalı ölçüm miktarı
  - güven aralığını oluşturmak için nokta tahminine eklenen ve çıkarılan miktar

Örnek boyutunun belirlenmesi

Örnek Boyutunun Belirlenmesi

Ortalama İçin

Örnekleme Hatası(hata payı)

$$\overline{X} \pm Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$e = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Örnek boyutunun belirlenmesi

Örnek Boyutunun Belirlenmesi

Ortalama İçin

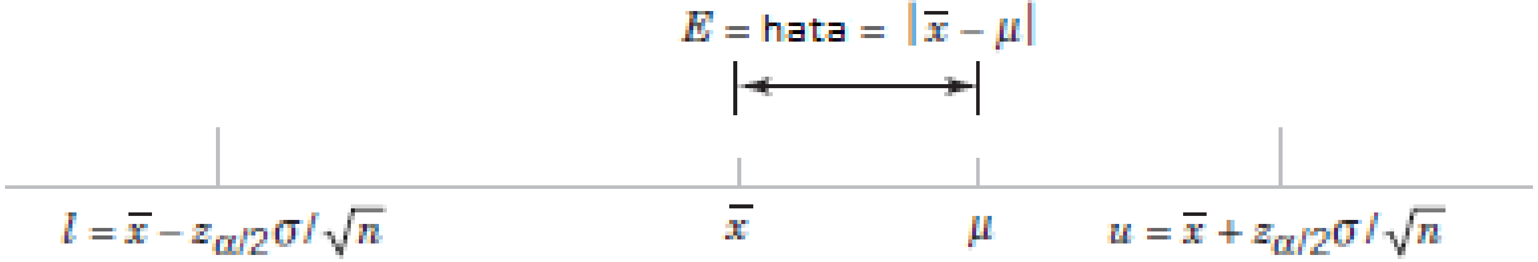
$$e = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

n için denklem çözülerek şu formül bulunur

$$n = \frac{Z_{\alpha/2}^2 \sigma^2}{e^2}$$

Örnek boyutunun belirlenmesi

- Ortalama için gerekli örnek boyutunun belirlenmesi için, şunlar bilinmelidir:
  - $Z_{\alpha/2}$ kritik değerini tanımlayan istenen $(1 - \alpha)$ güvenlik seviyesi
  - Kabul edilebilir örneklem hatası, e
  - Standart sapma, σ



Gerekli örnek boyutu örneği

Eğer σ = 45 ise, %90 güven seviyesinde ortalamanın ± 5 aralığında tahmin edilmesi için ne boyutta bir örnek belirlenmelidir?

$$n = \frac{Z^2 \sigma^2}{e^2} = \frac{(1.645)^2 (45)^2}{5^2} = 219.19$$

Buradan gerekli örnek sayısı **n = 220** olmalıdır

(Her zaman üste yuvarlayın)

Örnek

- Prosedürün kullanımını göstermek için bir önceki metalik malzemenin hal değişimi problemini yeniden dikkate alalım ve μ üzerindeki %95 GA'da uzunluğun en fazla $1J$ olması için gerekli olan deney sayısını belirlemek isteyelim.
- E'nin tahmini üzerindeki hatanın sınırı GA'nın uzunluğunun yarısı olduğundan n'yi belirlemek için $E = 0{,}5$, $\sigma = 1$ ve $z_{\alpha/2} = 1{,}96$ alınmalıdır. Böylece örneklem hacmi

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{(1{,}96)1}{0{,}5}\right)^2 = 15{,}37 \cong 16$$

- olarak hesaplanacaktır.

Örnek

- Bir tezgahta üretilen parçaların dış çaplarının standart sapması σ=2.4 cm'dir. Tezgahın üretiminden rastgele seçilen 16 parçanın dış çap ortalaması 3.2 cm olarak bulunmuştur. %5 hata (%95 güven) seviyesinde örnek ortalaması (*tahmin edilen değer*) ile anakütle ortalaması (*gerçek değer*) arasındaki farkın (yani hatanın) 1 cm veya daha az olması için alınması gereken örnek hacmi ne olmalıdır?

Örnek

E=1 cm σ=2.4 cm ve $\mathbf{Z}_{\alpha/2}$=1.96 değerleri formülde yerine koyulursa

$$\mathbf{n} = \left(\frac{1.96 * 2.4}{1}\right)^2 \cong 22.12 \cong 23$$

parça örnek alınması gerektiği görülür.

Eğer σ bilinmiyorsa

- Eğer bilinmiyorsa, σ gerekli örnek boyutu formülü kullanılarak tahmin edilebilir
  - σ için en az gerçek σ kadar geniş olması beklenen bir değer kullanın
  - Bir pilot örnek seçin ve σ’yı örnek standart sapma, S ile tahmin edin.

Örnek boyutunun belirlenmesi

Örnek Boyutunun Belirlenmesi

Oran İçin

$$e = Z\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$$

n için denklem çözülerek şu formül bulunur

$$n = \frac{Z^2_{\alpha/2}\,\pi(1-\pi)}{e^2}$$

Örnek boyutunun belirlenmesi

- Oran için gerekli örnek boyutunun belirlenmesi için, şunlar bilinmelidir:
  - $Z_{\alpha/2}$ kritik değerini tanımlayan istenen (1 - α) güvenlik seviyesi
  - Kabul edilebilir örneklem hatası, e
  - İlgilenilen olayların gerçek oranı, π
    - ✓ π eğer mümkünse bir pilot örnekle tahmin edilebilir (veya ihtiyatlı bir tahminle π ‘nin tahmini olarak 0.5 kullan)

Gerekli örnek boyutu örneği

Geniş bir popülasyonda gerçek hatalı oranının %±3 içerisinde olacak şekilde, %95 güven seviyesinde tahmini için bir örneğin boyutu ne olmalıdır?

(Bir pilot örneğin p = 0.12'yi sağladığını varsayalım)

Gerekli örnek boyutu örneği

Çözüm:

%95 güven düzeyi için, $Z_{\alpha/2} = 1.96$ kullanalım

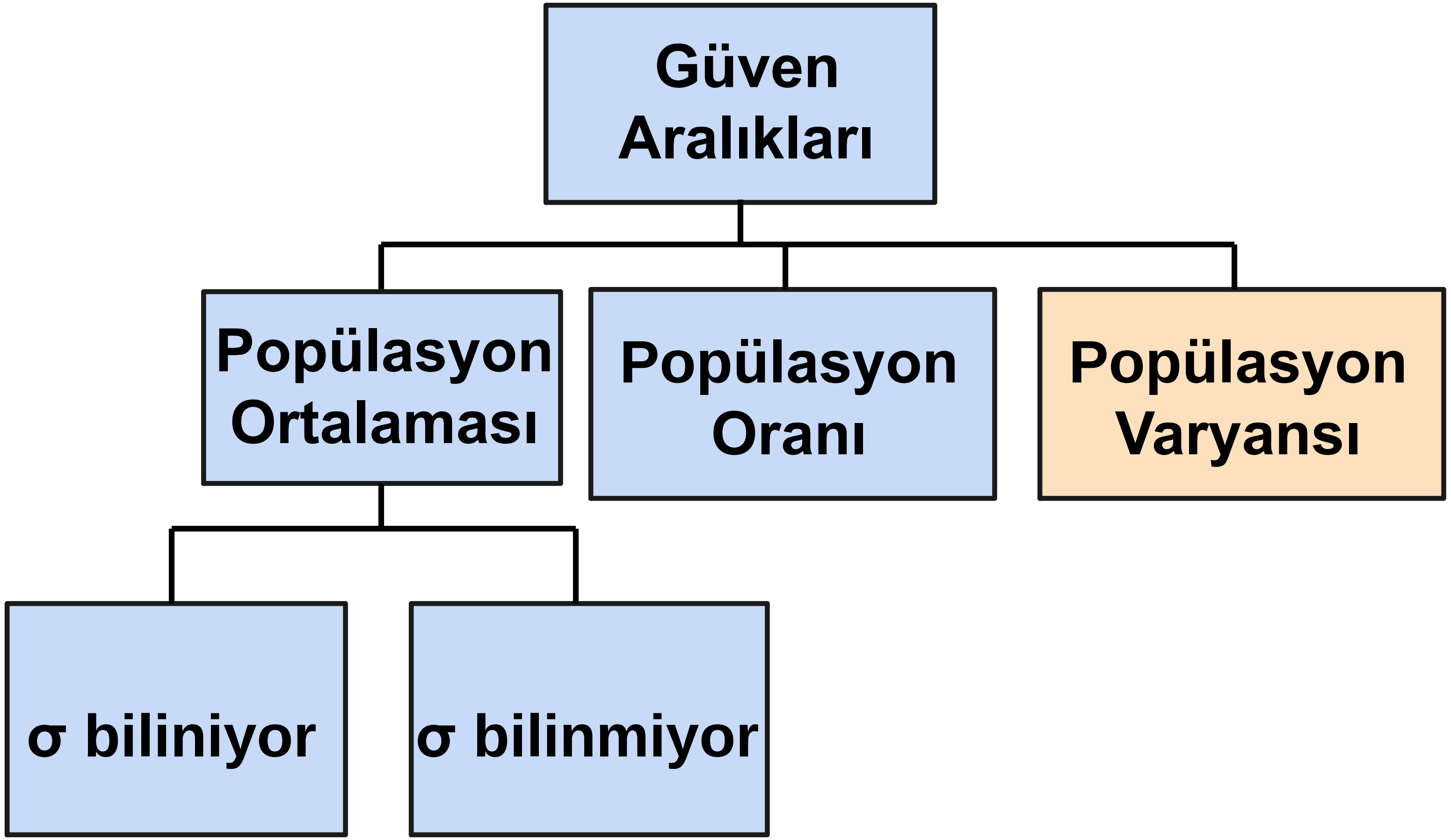
e = 0.03

p = 0.12, π'yi tahmin etmek için bunu kullanalım

$$n = \frac{Z^2_{\alpha/2}\pi(1-\pi)}{e^2} = \frac{(1.96)^2(0.12)(1-0.12)}{(0.03)^2} = 450.74$$

n = 451 kullanılır

Güven aralıkları



Normal dağılımın varyansı ve standart sapması için güven aralığı

- Bazen popülasyonların varyansları ve standart sapmaları ile ilgili güven aralıkları gerekebilir.
- Popülasyon normal dağılım ile modellendiğinde bu bölümde tanımlanan testler ve aralıklar uygulanabilir.
- Aşağıdaki sonuç güven aralıklarının oluşturulmasında temel teşkil etmektedir.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ ortalaması μ ve varyansı σ^2 olan normal dağılımdan alınmış bir rassal örneklem ve S^2 de örneklem varyansı olsun. Öyleyse

$$X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

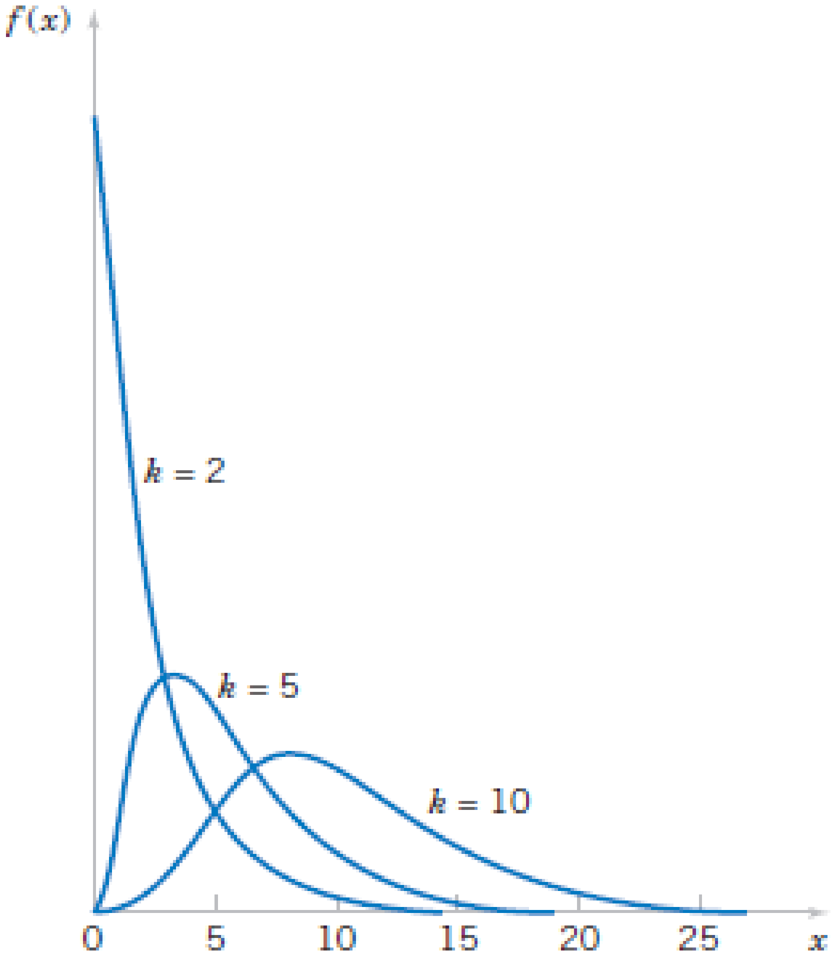
rassal değişkeni $n-1$ serbestlik derecesine sahip Ki-Kare (χ^2) dağılımına uyar.

X^2 Dağılımı

- χ^2 rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$f(x) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} x^{(k/2)-1} e^{-x/2} \qquad x > 0$$

- Burada k serbestlik derecesini göstermektedir.
- χ^2 dağılımının ortalaması ve varyansı sırasıyla k ve $2k$'dır.
- Çeşitli χ^2 dağılımları aşağıdaki şekilde verilmiştir.
- χ^2 rassal değişkeninin pozitif ve sağa çarpık olduğuna dikkat ediniz. Ancak k arttıkça dağılım daha simetrik hale gelmeye başlar.
- $k \to \infty$ iken Ki-Kare dağılımının limit formu normal dağılımdır.

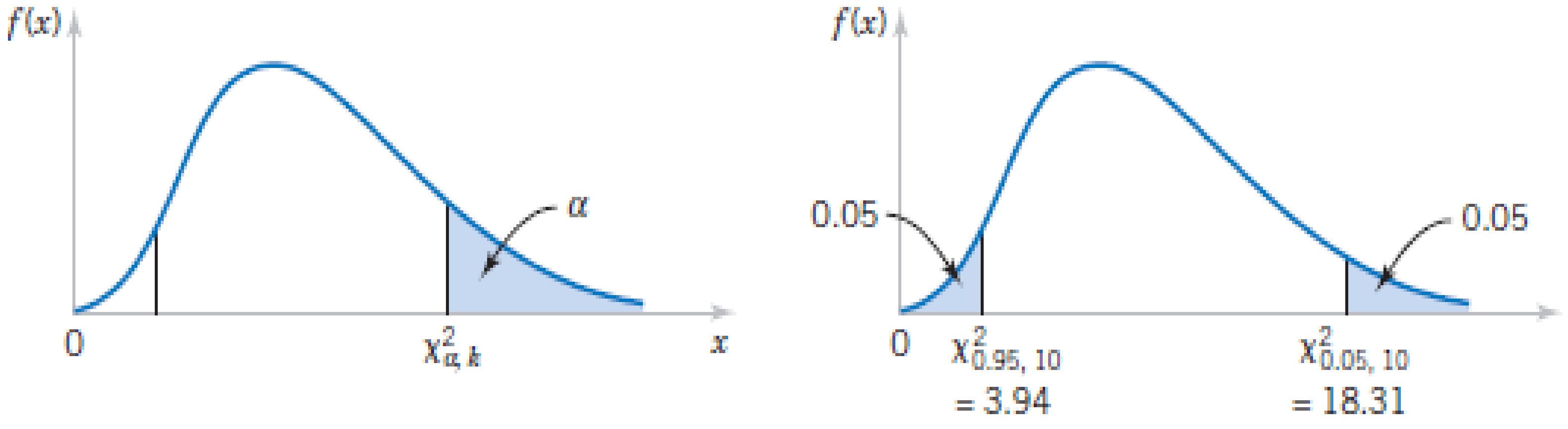


χ^2 Dağılımı

- $\chi^2_{\alpha,k}$ k serbestlik derecesine sahip Ki-Kare rassal değişkeninin bu değeri aşma olasılığını α yapan değer olarak tanımlanır. Yani

$$P(X^2 > \chi^2_{\alpha,k}) = \int_{\chi^2_{\alpha,k}}^{\infty} f(u)du = \alpha$$

- Bu olasılık aşağıdaki şekildeki taralı alana eşittir.



(a) (b)

Bunu biz bir olasılık ifadesi olarak aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$P\left(X^2 > \chi^2_{0,05\,,10}\right) = P\left(X^2 > 18{,}31\right) = 0{,}05$$

Bu değere serbestlik derecesi 10 olan ki-karenin **üst** %5 değeri denir. Bunun tersi bir olarak serbestlik derecesi 10 olan ki-karenin **alt** %5 değeri $\chi^2_{0,95\,,10} = 3{,}94$ olarak tablodan okunur.

σ^2 için $\%100(1-\alpha)$ GA aşağıdaki gibi kolayca oluşturulabilir.

$$X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

Değeri $n-1$ serbestlik derecesine sahip Ki-kare olduğundan aşağıdaki yazılabilir.

$$P\left(\chi^2_{1-\alpha/2\,,n-1} \le X^2 \le \chi^2_{\alpha/2\,,n-1}\right) = 1-\alpha$$

böylece

$$P\left(\chi^2_{1-\alpha/2\,,n-1} \le \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{\alpha/2\,,n-1}\right) = 1-\alpha$$

Yukarıdaki denklem aşağıdaki gibi özetlenebilir.

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2\,,n-1}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2\,,n-1}}\right) = 1-\alpha$$

Böylece σ^2 için aşağıdaki güven aralığı tanımı yapılabilir.

Eğer s^2 varyansı bilinmeyen σ^2 olan normal dağılımdan alınmış n gözleme ait örneklem varyansı ise $\boldsymbol{\sigma^2}$ **için** $\%\mathbf{100(1-\alpha)}$ **güven aralığı** aşağıdaki gibidir.

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2\,,n-1}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2\,,n-1}}$$

$\chi^2_{\alpha/2\,,n-1}$ ve $\chi^2_{1-\alpha/2\,,n-1}$ sırasıyla $n-1$ serbestlik derecesine sahip Ki-Kare dağılımının sağ ve sol tarafta kalan alanı $100\alpha/2$ yapan üst ve alt noktalardır. $\boldsymbol{\sigma}$ **için güven aralığının** alt ve üst limitleri yukarıdaki denklemdeki sınırların kare köküdür.

- σ^2 için $\%100(1-\alpha)$ alt ve üst güven sınırlarını bulmak mümkündür.

σ^2 için $\%100(1-\alpha)$ alt ve üst güven sınırları sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha\,,n-1}} \le \sigma^2 \qquad \text{ve} \qquad \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha\,,n-1}}$$

Örnek: Deterjan dolumu

- Şişelere sıvı deterjan dolumu otomatik bir dolum makinesi tarafından yapılmaktadır. 20 şişeden oluşan bir rassal örneklem için dolum hacminin varyansı $S^2 = 0{,}0153\ lt^2$ gelmiştir. Eğer dolum hacminin varyansı çok genişse şişelerin kabul edilemez bir oranı az ya da çok doldurulmuştur. Dolum hacimlerinin yaklaşık olarak normal dağıldığını kabul edeceğiz. %95 üst güven limiti aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0,95\ ,19}}$$

- veya

$$\sigma^2 \leq \frac{(19)0{,}0153}{10{,}117} = 0{,}0287\ lt^2$$

- Yukarıdaki ifadede her iki tarafın karekökü alındığında standart sapma için GA elde edilebilir.

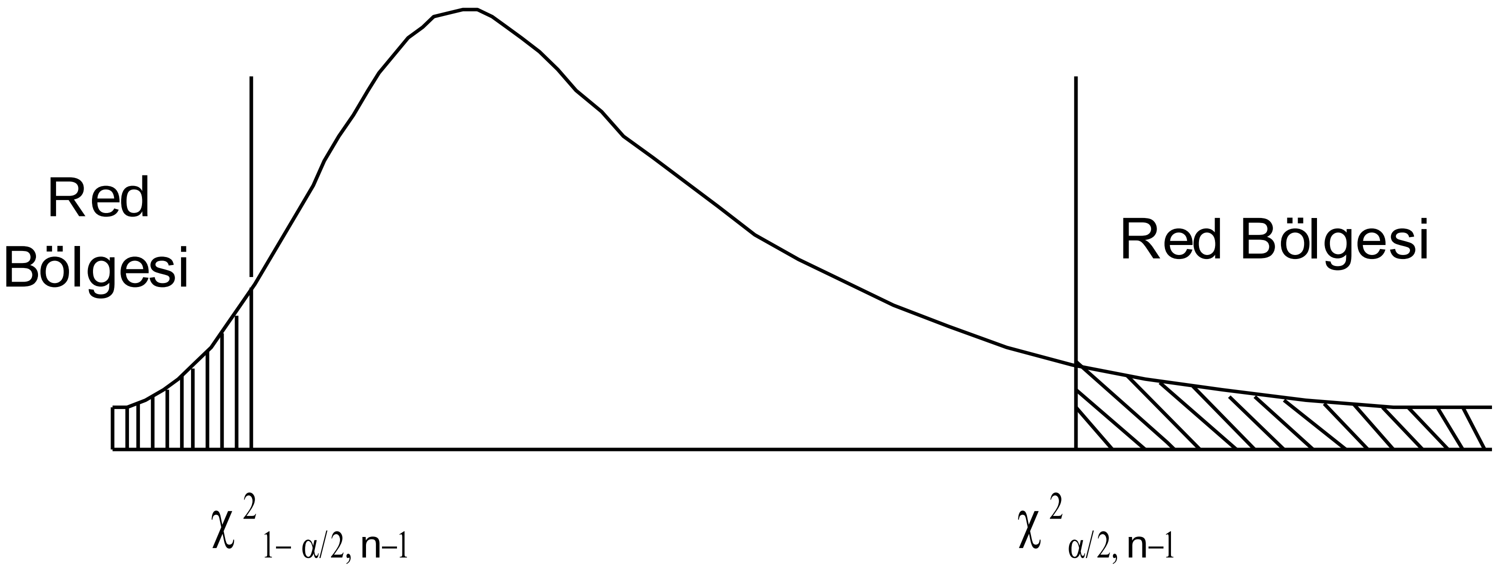
$$\sigma \leq 0{,}17$$

Örnek

- Bir çimento fabrikasında üretilen çimentodan yapılan betonların sağlamlığının incelenmesi amacıyla 10 beton örneği alınmış ve bu örneklerin sağlamlılıkları saptanmıştır. Bu örneklerin ortalama, varyansı ve diğer bilgiler aşağıda verilmiştir. Fabrikanın ürettiği tüm betonların varyansına ilişkin güven aralığını hesaplayınız.

$\bar{x} = 312 \quad S^2 = 195$ $\qquad 1-\alpha = 0.90$ $\qquad \alpha=0.10$

Çözüm



$$\chi^2_{0.95;9} = 3.33 \qquad \chi^2_{0.05;9} = 16.92$$

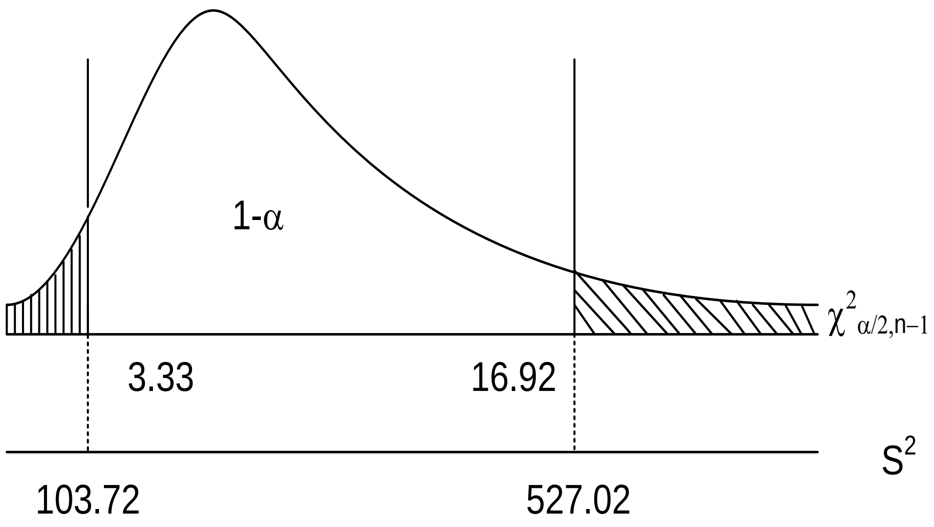
$$\alpha = 0.10 \qquad \bar{x} = 312 \qquad S^2 = 195$$

$$P\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}\right] = 1-\alpha$$

$$P\left[\frac{9(195)}{\chi^2_{0.05;9}} < \sigma^2 < \frac{9(195)}{\chi^2_{0.95;9}}\right] = 0.90$$

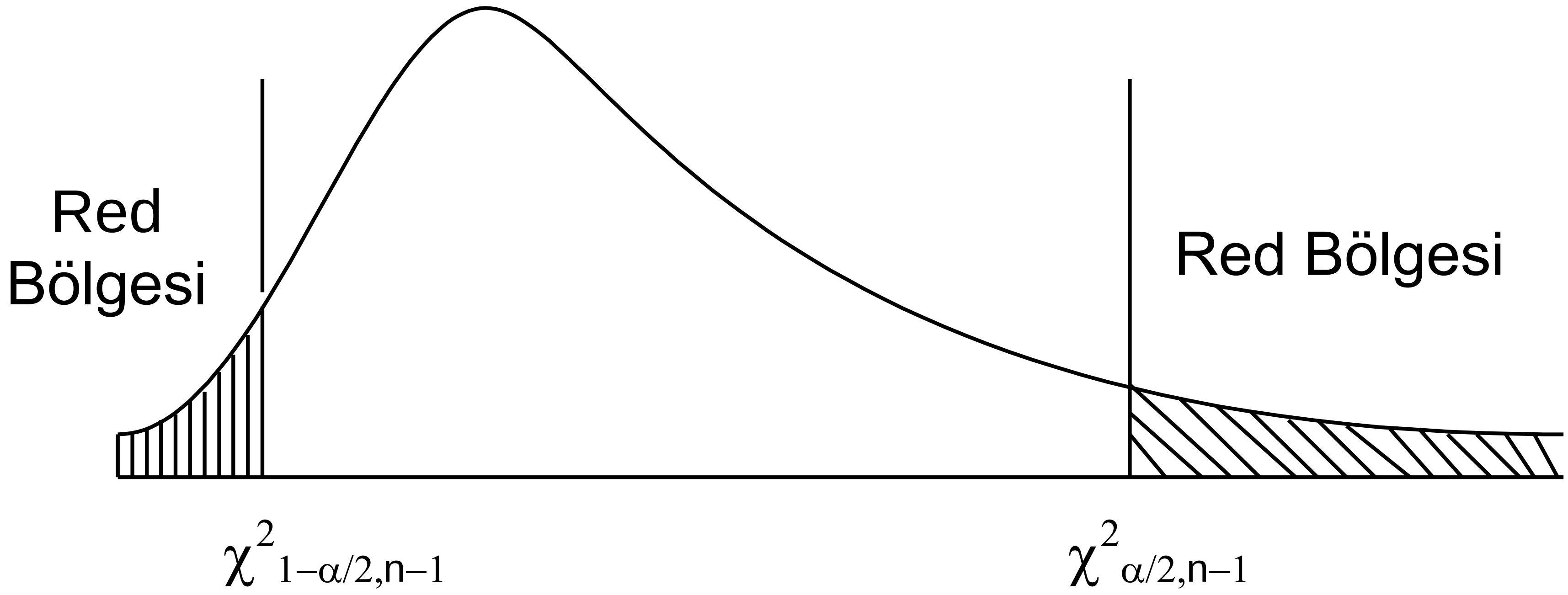
$$P\left[\frac{9(195)}{16.92} < \sigma^2 < \frac{9(195)}{3.33}\right] = 0.90$$

$$P\left(103.72 < \sigma^2 < 527.02\right) = 0.90$$



Örnek

- Denenen bir motorun 16 deneme sürüşündeki yakıt tüketimlerinin standart sapması 2.2 galondur. Motorun yakıt tüketiminin gerçek değişkenliğini ölçen anakütle varyansının %99 güven aralığını hesaplayınız. $n=16$ $s=2.2$



$$\chi^2_{0.995,15} = 4.60 \qquad \chi^2_{0.005,15} = 32.80$$

$\alpha = 0.01$ n=16 S=2.2

$$\chi^2_{0.005,15} = 32.80$$

$$\chi^2_{0.995,15} = 4.60$$

$$P\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}\right] = 1-\alpha$$

$$P\left[\frac{15(2.2)^2}{32.80} < \sigma^2 < \frac{15(2.2)^2}{4.60}\right] = 0.99$$

$$P\left[2.21 < \sigma^2 < 15.78\right] = 0.99$$

Etik konular

- Bir güven aralığı tahmininde (örnekleme hatasını yansıtan) bir nokta tahminine her zaman yer verilmelidir.
- Güven seviyesi mutlaka her zaman belirtilmelidir.
- Örnek boyutu mutlaka belirtilmelidir.
- Güven aralığı tahmininin bir yorumu da sağlanmalıdır.

Bölüm özeti

Bu bölümde;

- Güven aralığı kavramı
- Nokta tahminleri & güven aralığı tahminleri
- Ortalama için güven aralığı tahminlerinin bulunması (σ biliniyorsa)
- Ortalama için güven aralığı tahminlerinin bulunması (σ bilinmiyorsa)
- Orantı için güven aralığı tahminlerinin bulunması
- Ortalama ve orantı için gerekli örnek boyutunun belirlenmesi
- Varyans için güven aralığı tahminleri
- Güven aralığı tahmininde etik konular tartışılmıştır.

Denetimde Güven Aralığı Tahmini

Öğrenme hedefleri

Bu bölümde:

- Güven aralığı tahminlerinin denetimde nasıl kullanılacağı

öğrenilecektir.

Denetimde uygulamalar

- Denetimde istatiksel örneklemenin altı avantajı
  - Örnekleme daha az zaman alıcı ve daha az maliyetlidir
  - Örnekleme işin başında örnek boyutunun hesaplanması için nesnel bir yol sağlar
  - Örnekleme nesnel ve savunulabilir sonuçlar sağlar.
    - ✓ Örneklemenin ölçülebilen istatistiksel ilkelere dayanıyor olması nedeniyle, denetim bir yöneticinin önünde savunulabilirdir.

Denetimde uygulamalar

- Örneklem, örnekleme hatasının bir tahminini sağlar
  - ✓ Denetçilere popülasyonla ilgili bulgularını bilinen bir örneklem hatası ile genelleştirmelerine imkan verir.
  - ✓ Popülasyon hakkında daha kesin sonuçlar sağlar
- Örneklem geniş popülasyonlarla ilgili sonuçların oluşturulmasında daha isabetlidir.
  - ✓ Büyük bir popülasyonda her maddenin incelenmemesi örneklem hatasına bağlıdır
- Örnekleme denetçilere farklı bireyler tarafından toplanmış örneklerin birleştirilmesi ve daha sonra birlikte değerlendirilmesi imkanını verir.

Popülasyon toplam miktarı için güven aralığı

- N boyutundaki bir popülasyon için nokta tahmini:

$$\boxed{\textit{Popülasyon}\,\text{toplam} = \mathrm{N}\overline{\mathrm{X}}}$$

- Güven aralığı tahmini:

$$\boxed{N\overline{X} \pm N(t_{\alpha/2})\frac{\mathrm{S}}{\sqrt{\mathrm{n}}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}$$

(Yer değiştirme yapmadan oluşturulan örneklemedir, bundan dolayı güven aralığı formülünde sınırlı popülasyon düzeltmesi kullanılmalıdır)

Popülasyon toplamı için güven aralığı: Örnek

Bir firma 1000 hesap içeren bir popülasyona sahiptir ve popülasyon toplam değerini tahmin etmek istemektedir.

Ortalama bakiyesi $87.6 bin ve standart sapması $22.3 bin olan 80 hesap içeren bir örnek seçilmiştir.

Toplam bakiyenin %95 güven aralığı tahminini bulunuz.

Örnek çözümü

$$N = 1000, \quad n = 80, \quad \bar{X} = 87.6, \quad S = 22.3$$

$$N\bar{X} \pm N(t_{\alpha/2}) \frac{S}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

$$= (1000)(87.6) \pm (1000)(1.9905) \frac{22.3}{\sqrt{80}} \sqrt{\frac{1000-80}{1000-1}}$$

$$= 87{,}600 \pm 4{,}762.48$$

Toplam bakiye için %95 güven aralığı \$82,837.52'den \$92,362.48'e kadardır

Toplam fark için güven aralığı

- N boyutunda bir popülasyon için nokta tahmini:

$$\boxed{\mathrm{Toplam\,Fark} = \mathrm{N}\overline{\mathrm{D}}}$$

- Ortalama fark, $\overline{\mathrm{D}}$:

$$\boxed{\begin{gathered}\overline{\mathrm{D}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i}{n} \\ \mathrm{D_i} = \textit{denetlenmiş}\ \mathrm{deger - orijinal\ deger}\end{gathered}}$$

Toplam fark için güven aralığı

- Güven aralığı tahmini:

$$N\overline{D} \pm N(t_{\alpha/2})\frac{s_D}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

$$S_D = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(D_i - \overline{D})^2}{n-1}}$$ olduğunda

Tek taraflı güven aralıkları

- Uygulama: iç kontrollerle uyumlu olmayan öğelerin oranı için üst sınırı bul

$$\text{Ust Sınır} = p + Z_{\alpha}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

-
  - Z_{α} istenilen güvenlik seviyesi için standart normal dağılım değeri
  - p uyumlu olmayan öğelerin örnek oranı
  - n Örnek boyutu
  - N popülasyon boyutu

Konu özeti

Bu konuda aşağıdakiler tartışılmıştır;

- Denetimde güven aralığı tahmininin uygulamaları
  - Popülasyon toplamı için güven aralığı tahmini
  - Popülasyonda toplam fark için güven aralığı tahmini
  - Uyumlu olmayan oran için tek taraflı güven aralıkları

Sonlu Popülasyonlar İçin Tahmin & Örnek Boyutu Belirleme

Konu öğrenme hedefleri

Bu konuda, aşağıdakiler öğrenilecektir:

- μ ya da π için bir güven aralığı hesaplarken bir sonlu popülasyon düzeltme çarpanının ne zaman kullanılacağı
- μ ya da π için bir güven aralığı hesaplarken bir sonlu popülasyon düzeltme çarpanının nasıl kullanılacağı
- μ ya da π için bir güven aralığı için bir örnek boyutu hesaplarken bir sonlu popülasyon düzeltme çarpanının nasıl kullanılacağı

Popülasyonun %5'inden daha fazla örneklemede fpc kullanımı (n/N > 0.05)

Fpc ile μ için Güven Aralığı

$$\bar{X} \pm t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

Fpc ile π için Güven Aralığı

$$p \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

Bir fpc ya örnek ortalamasının ya da örnek oranının standart hatasını basitçe düşürür.

µ İçin fpc ile güven aralığı

$\mathrm{N}=1000, \mathrm{n}=100, \overline{\mathrm{X}}=50, \mathrm{s}=10$ olduğunu varsayalım

$$95\%\ \text{CI for } \mu : \bar{X} \pm t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} =$$

$$50 \pm 1.984 \frac{10}{\sqrt{100}} \sqrt{\frac{1000-100}{1000-1}} =$$

$$50 \pm 1.88 = (48.12, 51.88)$$

Bir fpc ile örnek boyutunun belirlenmesi

- Bir fpc olmadan örnek boyutunu (n_0) hesapla
  - μ için: $$n_0 = \frac{Z^2_{\alpha/2}\sigma^2}{e^2}$$
  - π için : $$n_0 = \frac{Z^2_{\alpha/2}\pi(1-\pi)}{e^2}$$
- Nihai örnek boyutuna (n) ulaşmak için aşağıdaki formülden faydalanarak fpc'yi uygula.
  - $n = n_0 N / (n_0 + (N-1))$

Konu özeti

Bu konuda şunlar tartışıldı;

- μ ya da π için bir güven aralığının hesaplanmasında sonlu popülasyon düzeltmesinin (fpc) ne zaman kullanılacağı
- μ ya da π için bir güven aralığının hesaplanmasında sonlu popülasyon düzeltmesi (fpc) kullanılarak oluşturulan formüller
- μ ya da π için bir örnek boyutunun hesaplanmasında kullanılan formüller