

BÖLÜM V: Doğrusal Olmayan Optimizasyon

o Giriş

[Doğrusal Olmayan Optimizasyon]



- Doğrusal programlama modellerinin temel özelliği amaç fonksiyonu ve tüm kısıtlarının **doğrusal** olmasıdır.
- Bir fonksiyonun doğrusallığını karakterize eden **varsayımlar**:
 - o Oranlılık ve eklenebilirlik
 - o Bölünebilirlik
 - o Belirlilik

[Doğrusal Olmayan Optimizasyon]



- Amaç fonksiyonu ve/veya kısıtlardan **en az birinin doğrusal olmadığı** modellere **Doğrusal olmayan programlama (DOP)** modelleri adı verilir. DOP modellerinin genel formu:

$$\begin{aligned}
 \text{maks(veya min)} \quad z = \quad & f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 \text{s.t.} \quad & g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad [\leq, =, \geq] \quad b_1 \\
 & g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad [\leq, =, \geq] \quad b_2 \\
 & \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 & g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad [\leq, =, \geq] \quad b_m
 \end{aligned}$$

Yöneylem Araştırması II

3

[Doğrusal Olmayan Optimizasyon]



- Bu problemde amaç verilen kısıtları sağlayan ve amaç fonksiyonunu en iyileyen $x_1, x_2, \dots, x_n$ karar değişkeni değerlerinin bulunmasıdır.
- DOP modellerinde pozitiflik koşulları bulunmaz.
- Verilen forma sahip bütün DOP modellerini çözebilecek bir algoritma henüz **geliştirilememiştir**. Buna karşın çeşitli varsayımlarla biçimlenmiş bazı **önemli tipteki DOP modellerinin** çözümünde önemli ilerlemeler sağlanmıştır.

Yöneylem Araştırması II

4

[Doğrusal Olmayan Optimizasyon]



Uygun (Mümkün) Çözüm Bölgesi

- Verilen bir DOP modelinin tüm kısıtlarını sağlayan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ noktalar kümesidir.

Uygun Olmayan Çözüm

- Uygun çözüm bölgesi dışında kalan her bir noktadır.

Optimal Çözüm

- x' uygun çözümü, uygun çözüm bölgesinde bulunan tüm x noktaları için aşağıdaki koşulu sağlıyorsa optimal çözüm olarak adlandırılır:

- Maksimizasyon problemi için $f(x') \geq f(x)$
- Minimizasyon problemi için $f(x') \leq f(x)$

Yerel Eksremum

- Bir DOP için $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ noktası, $i = (1, 2, \dots, n)$ olmak üzere

$|x'_i - x_i| < \varepsilon$ tüm $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ noktaları için

- $f(x') \geq f(x)$ ise x' noktasına yerel maksimum,
- $f(x') \leq f(x)$ ise x' noktasına yerel minimum adı verilir.

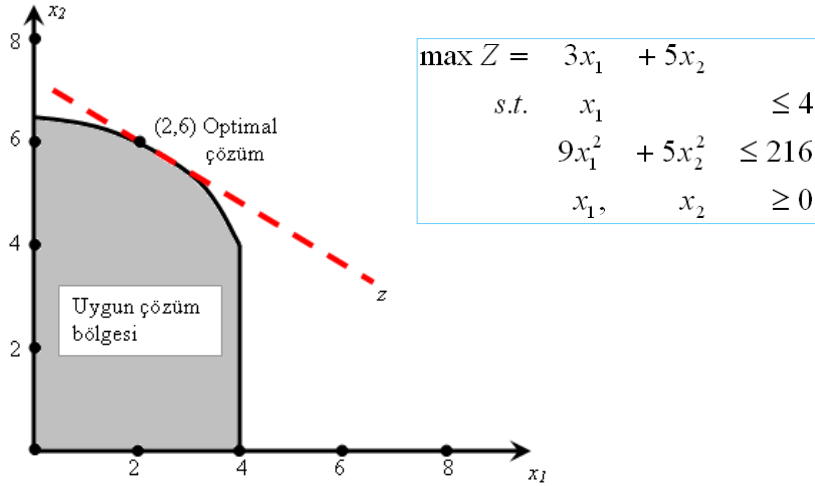
- Yerel maksimum ve yerel minimum değerleri aynı zamanda yerel veya relative ekstremum olarak da adlandırılır.

[Bazı DOP Örnekleri (Örnek 1)]



- Bir ürünün birim başına maliyeti $C\$$ 'dır. Firma ürünün birimini $P\$$ olarak fiyatlandırır, müşteri talebi $D(P)$ birim olmaktadır. Maksimum kar için firma nasıl bir fiyat belirlemelidir.
- Karar değişkeni $\rightarrow P$
- Kar $\rightarrow (P-C)D(P)$
- Dolayısıyla kısıtsız bir maksimizasyon problemi oluşur:
 $\max (P-C)D(P)$

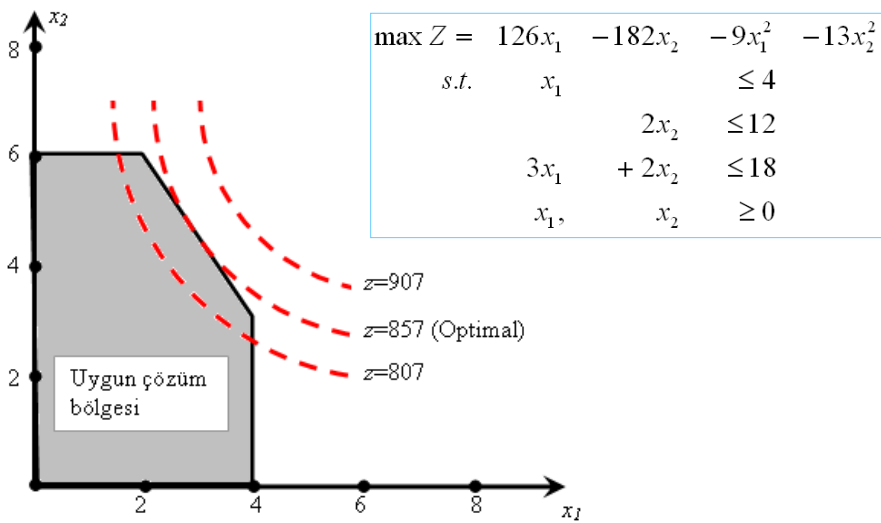
Bazı DOP Modellerinin Grafiksel Gösterimi (Örnek 1)



Yöneylem Araştırması II

7

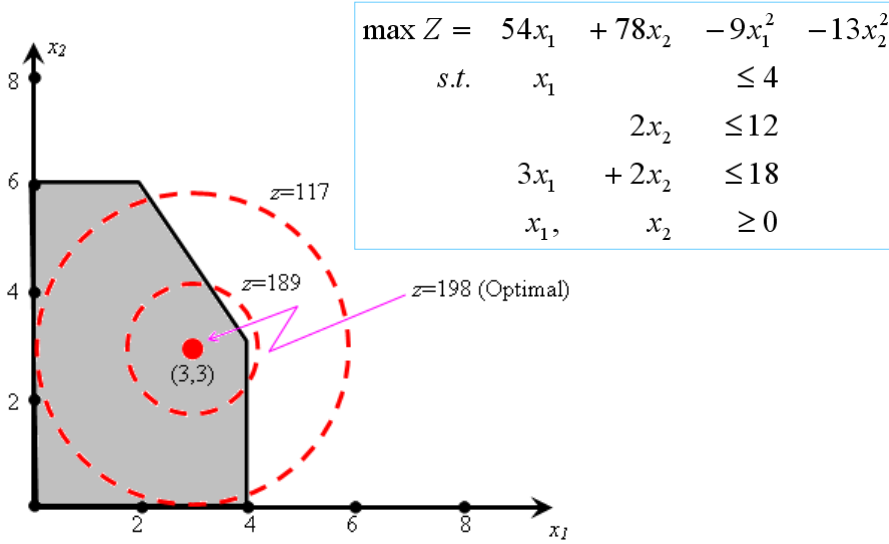
Bazı DOP Modellerinin Grafiksel Gösterimi (Örnek 2)



Yöneylem Araştırması II

8

Bazı DOP Modellerinin Grafiksel Gösterimi (Örnek 3)



Yöneylem Araştırması II

9

Bazı DOP Modellerinin Grafiksel Gösterimi



- Örneklerden de görülebileceği gibi DOP problemlerinin optimal çözümü uygun çözüm bölgesindeki **her hangi bir nokta olabilir**.

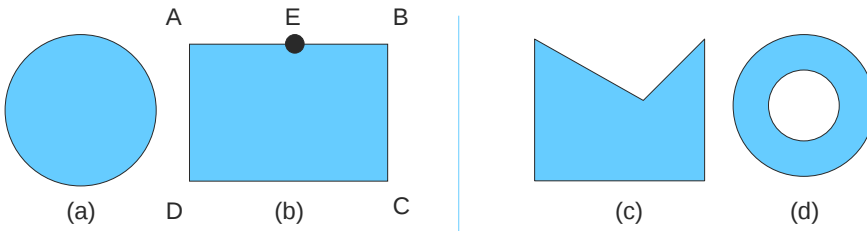
Yöneylem Araştırması II

10

[Konveks Küme]



- Verilen bir S noktalar kümesinde yer alan herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçası tamamen bu küme içerisinde kalıyorsa S kümesine **Konveks Küme** adı verilir.



[Konveks Küme]



- Diğer bir ifadeyle S kümesi konveks ve x_1, x_2 bu kümede yer alan herhangi iki nokta ise bu noktaların konveks kombinasyonu yani $0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ noktası her zaman bu kümenin bir elemanı olacaktır.

[Ekstremum Nokta (Köşe Noktası)]

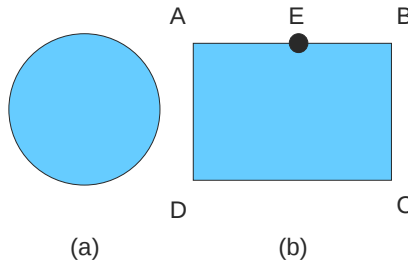


- Verilen bir S konveks kümesinde $P \in S$ olmak üzere tamamıyla bu küme tarafından kapsanan ve P noktasını içeren tüm doğru parçalarında P noktası uç nokta ise, bu noktaya **Ekstremum Nokta** diğer bir ifadeyle **Köşe Noktası** adı verilir.

[Ekstremum Nokta (Köşe Noktası)]



- Şekil (a)'da çemberin üzerinde kalan tüm noktalar ve Şekil (b)'de A, B, C, D noktaları ekstremum noktalar iken, E noktası ekstremum değildir çünkü AB doğru parçasında E noktası uç nokta değildir.



[Konveks ve Konkav Fonksiyonlar]



- $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, S konveks kümesinin tüm $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ noktalarında tanımlı bir fonksiyon olsun. $x^A \in S$, $x^B \in S$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere:
 - $f(\lambda x^A + (1-\lambda)x^B) \leq \lambda f(x^A) + (1-\lambda)f(x^B)$ eşitsizliği her zaman sağlanıyorsa $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonuna konveks fonksiyon denir.
 - $f(\lambda x^A + (1-\lambda)x^B) \geq \lambda f(x^A) + (1-\lambda)f(x^B)$ eşitsizliği her zaman sağlanıyorsa $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonuna konkav fonksiyon denir.

Yöneylem Araştırması II

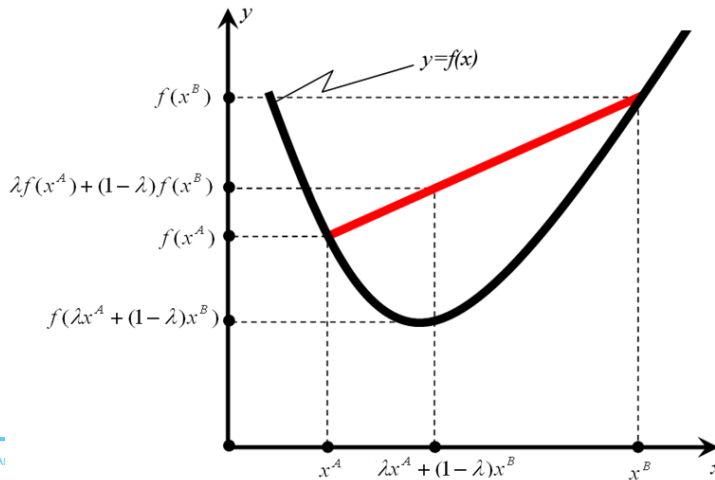
15

[Konveks ve Konkav Fonksiyonlar]



- Her $x^A \in S$ ve $x^B \in S$ noktaları için

$$f(\lambda x^A + (1-\lambda)x^B) \leq \lambda f(x^A) + (1-\lambda)f(x^B)$$
 eşitsizliği sağlandığından aşağıdaki fonksiyon konvektir.



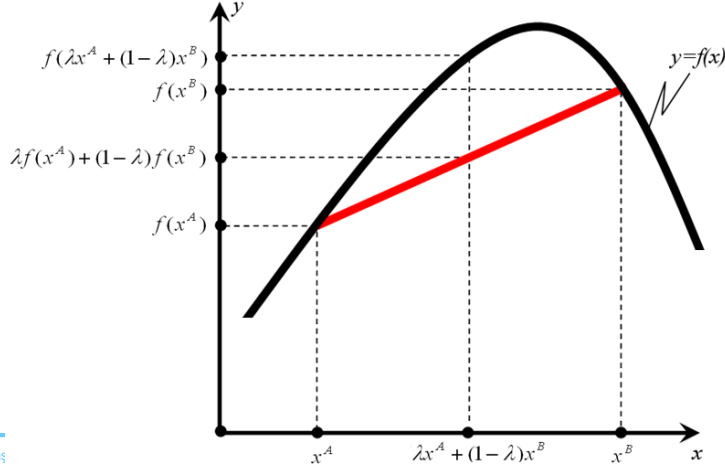
Yöneylem Aı

16

[Konveks ve Konkav Fonksiyonlar]



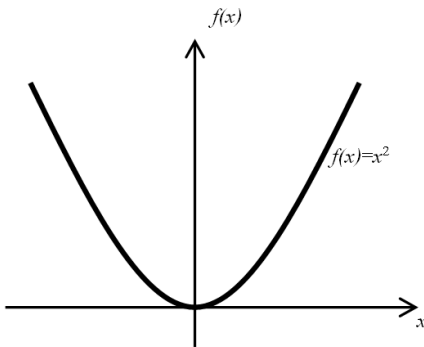
- Her $x^A \in S$ ve $x^B \in S$ noktaları için
- $$f(\lambda x^A + (1-\lambda)x^B) \geq \lambda f(x^A) + (1-\lambda)f(x^B)$$
- eşitsizliği sağlandığından aşağıdaki fonksiyon konkavdır.



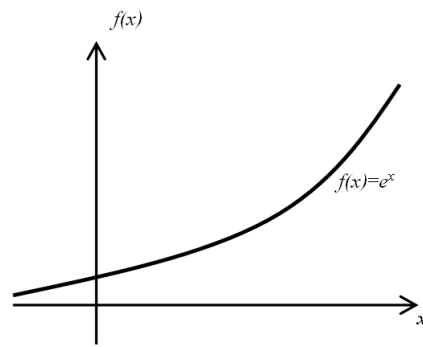
Yöneylem Araş

17

[Konveks ve Konkav Fonk.(Örnekler)]



Konveks

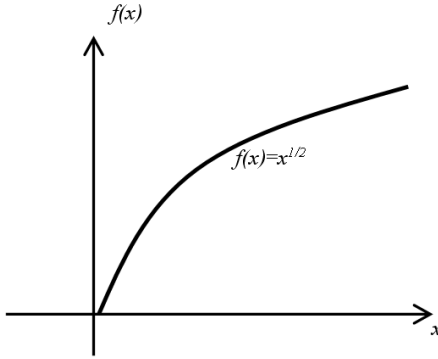


Konveks

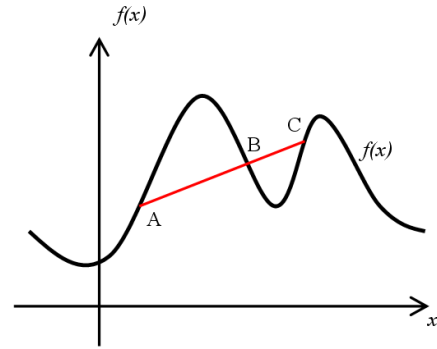
Yöneylem Araştırması II

18

[Konveks ve Konkav Fonk.(Örnekler)]



Konkav



Ne Konveks Ne Konkav

[Konveks ve Konkav Fonk. (Örnek 1)]



- $f(x) = ax + b$ fonksiyonunun hem konveks hem de konkav olduğunu gösteriniz.

x^A ve x^B verilen iki nokta olsun.

$$\begin{aligned} f(\lambda x^A + (1-\lambda)x^B) &= a[\lambda x^A + (1-\lambda)x^B] + b \\ &= \lambda[ax^A + b] + (1-\lambda)[ax^B + b] \\ &= \lambda f(x^A) + (1-\lambda)f(x^B) \Rightarrow \end{aligned}$$

fonksiyon hem konveks, hem konkavdır.

[Konveks ve Konkav Fonk. (Örnek 2)]



■ $f(x) = x^2$ fonksiyonunun $S = \mathbb{R}^1$ 'de konveks olduğunu gösteriniz.

x^A ve x^B verilen iki nokta olsun.

Konvekslik şartı $f(\lambda x^A + (1-\lambda)x^B) \leq \lambda f(x^A) + (1-\lambda)f(x^B)$ şeklindedir.

$$\begin{aligned} f(\lambda x^A + (1-\lambda)x^B) &= (\lambda x^A + (1-\lambda)x^B)^2 \\ &= \lambda^2 (x^A)^2 + 2\lambda(1-\lambda)x^A x^B + (1-\lambda)^2 (x^B)^2 \end{aligned}$$

Verilen ifadeler konvekslik şartında yerine yazılırsa:

$$\lambda^2 (x^A)^2 + 2\lambda(1-\lambda)x^A x^B + (1-\lambda)^2 (x^B)^2 \stackrel{?}{\leq} \lambda (x^A)^2 + (1-\lambda)(x^B)^2. \text{ Sol tarafı sağ tarafa atılırsa:}$$

$$\lambda (x^A)^2 + (1-\lambda)(x^B)^2 - [\lambda^2 (x^A)^2 + 2\lambda(1-\lambda)x^A x^B + (1-\lambda)^2 (x^B)^2] \stackrel{?}{\geq} 0. \text{ İfade düzenlenirse:}$$

$$\lambda(1-\lambda)[(x^A)^2 - 2x^A x^B + (x^B)^2] \stackrel{?}{\geq} 0$$

$$\lambda(1-\lambda)[x^A - x^B]^2 \stackrel{?}{\geq} 0$$

Bu eşitsizlikte $0 \leq \lambda \leq 1$ olduğundan $\lambda(1-\lambda) \geq 0$ 'dır.

$$[x^A - x^B]^2 \geq 0 \text{ 'dır.}$$

$f(x)$ fonksiyonu
konvektir.

[Konveks ve Konkav Fonk. Özellikleri]



- $f(x)$ fonksiyonu konveks (konkav) ise $g(x) = -f(x)$ fonksiyonu konkavdır (konveksdir).
- Konveks(konkav) fonksiyonların toplamı yine konveks(konkav) bir fonksiyondur.
- Uygun çözüm bölgesi konveks olan bir DOP probleminde:
 - Amaç fonksiyonu $\max f(x)$ ve $f(x)$ konkav bir fonksiyonsa bulunacak yerel maksimum aynı zamanda global maksimumdur, yani problemin optimal çözümüdür.
 - Amaç fonksiyonu $\min f(x)$ ve $f(x)$ konveks bir fonksiyonsa bulunacak yerel minimum aynı zamanda global minimumdur, yani problemin optimal çözümüdür.

[Kısıtsız Tek Değişkenli DOP Modelleri]



- ✓ $f(x)$ fonksiyonu **konveks** ise $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 0$ koşulunu sağlayan x^* noktası global **minimumdur**.
- ✓ $f(x)$ fonksiyonu **konkav** ise $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 0$ koşulunu sağlayan x^* noktası global **maksimumdur**.

- Fonksiyon konveks veya konkav olmasına karşın sürekli artan veya azalan bir yapıya sahipse x 'in bütün değerleri için türevler sıfırdan farklı olacaktır. Bu durumda x 'in sonlu bir değeri için hiçbir minimum veya maksimum bulunmaz.

Yöneylem Araştırması II

23

[Kısıtsız Tek Değişkenli DOP Modelleri]



Teorem 1

S konveks setindeki her x değeri için $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \geq 0$ ise $f(x)$ fonksiyonu S 'de konvektir.

Teorem 2

S konveks setindeki her x değeri için $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \leq 0$ ise $f(x)$ fonksiyonu S 'de konkavdır.

Özet

$S = R^1$ 'de tanımlı $f(x)$ fonksiyonu için:

✓ x^* 'in global minimum olması için

✚ Gerek şart: $f'(x^*) = 0$

✚ Yeter şart: $f''(x^*) \geq 0$

✓ x^* 'in global maksimum olması için

✚ Gerek şart: $f'(x^*) = 0$

✚ Yeter şart: $f''(x^*) \leq 0$

Yön

24

[Kısıtsız Tek Değişkenli DOP Modelleri (Örnek 1)]



- $f(x)=x^2$ fonksiyonunun $S=R^1$ 'de konveks olduğunu gösteriniz.

$$f'(x) = 2x$$

$$f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow \text{Konveks bir fonksiyondur.}$$

$$f'(x) = 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ 'da global minimum vardır.}$$

[Kısıtsız Tek Değişkenli DOP Modelleri (Örnek 2)]



- $f(x)=ax^4$ fonksiyonunun $S=R^1$ 'de konveks/konkav durumunu inceleyiniz.

$$f'(x) = 4ax^3$$

$$f''(x) = 12ax^2, \text{ burada her zaman } x^2 > 0 \text{ olacağından}$$

- $a > 0 \Rightarrow f''(x) \geq 0$ olup $f(x)$ konveks olur.

- $a < 0 \Rightarrow f''(x) \leq 0$ olup $f(x)$ konkav olur.

[Kısıtsız Tek Değişkenli DOP Modelleri (Örnek 3)]



- $f(x)=x^3$ fonksiyonunun $S=R^1$ 'de konveks/konkav durumunu inceleyiniz.

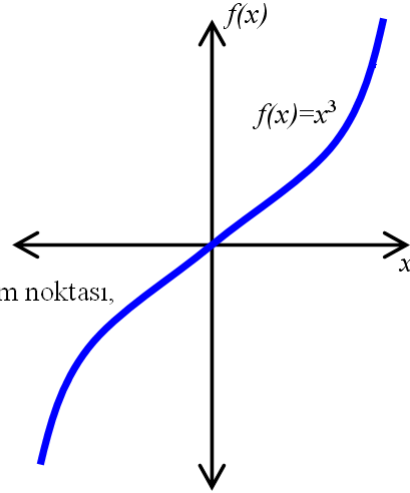
$$f'(x) = 3x^2$$

$$f''(x) = 6x, \text{ burada}$$

- $x < 0 \Rightarrow f''(x) < 0$,
- $x > 0 \Rightarrow f''(x) > 0$ olacaktır.

Yani $f(x)$ fonksiyonu:

- $S = R^1$ 'de ne konveks ne konkav,
- $S = (-\infty, 0)$ 'da konkav,
- $x = 0$ 'da $f''(x) = 0$ olduğundan dönüm noktası,
- $S = (0, \infty)$ 'da konveks olacaktır.



[Kısıtsız Tek Değişkenli DOP Modelleri (Örnek 4)]



- Bir birim ürünün üretimi \$5 mal olmaktadır. x birim üretilirse her birim $10-x$ \$ 'a satılmaktadır. Maksimum kar için ne kadar üretilmelidir.

$P(x)$ üretilen x birim için karı gösterirse,

$$P(x) = x(10 - x) - 5x = 5x - x^2 \quad 0 \leq x \leq 10$$

Olup aşağıdaki DOP modelinin çözümü aranacaktır.

$$\max P(x)$$

$$s.t. 0 \leq x \leq 10$$

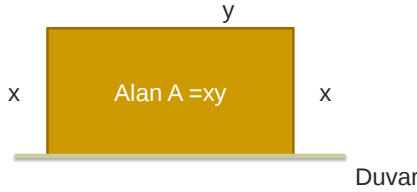
$$P'(x) = 5 - 2x = 0 \Rightarrow x_1 = 2,5$$

$P''(x) = -2 < 0 \Rightarrow P(x)$ konkavdır. Buna göre $x_1 = 2,5$ global maksimum değeri olup $P(2,5) = 6,25$ optimum çözümdür.

[Kısıtsız Tek Değişkenli DOP Modelleri (Örnek 5)]



- Bir çiftçinin evinin bahçesini çevirmek üzere 200m'lik çit teli mevcuttur. Bahçeyi bir dikdörtgen olarak çevirirken, evinin duvarı bir kenarı olmak üzere üç kenarını çitle çevirmek istemektedir. Çiftçinin çevirdiği alanın en büyük olabilmesi için bahçenin ebatları ne olmalıdır?



Yöneylem Araştırması II

29

[Kısıtsız Tek Değişkenli DOP Modelleri (Örnek 5)]



- Tüm telin uzunluğu 200m olduğundan x veya y'yi diğeri cinsinden bir fonksiyon olarak yazmamız gerekir.
- $2x+y=200 \Rightarrow y=200-2x$
- Alan fonksiyonu $A=xy$, x'e bağlı olarak yazılırsa ; $A(x) = x(200-2x) = 200x-2x^2$
- Bu fonksiyon üzerinde işlem yapmadan önce x'in değer aralığını belirlememiz gerekir.
- $2x+y=200$ eşitliğinden $0 < x < 100$ aralığında inceleme yapmamız gerektiği ortaya çıkmaktadır.
- $\frac{dA}{dx} = 200 - 4x \Rightarrow \frac{dA}{dx} = 0$ olduğu noktada ekstremum nokta söz konusudur. $x=50$ noktasında çözüm bulunmuştur.
- $\frac{d^2A}{dx^2} = -4 < 0$ olduğundan fonksiyon konkavdır, bulunan çözüm maksimum çözümdür. Buna göre ebatları $x=50$ $y=100$ $A=5000m^2$

Yöneylem Araştırması II

30

[Kısıtsız Tek Değişkenli DOP Modelleri]

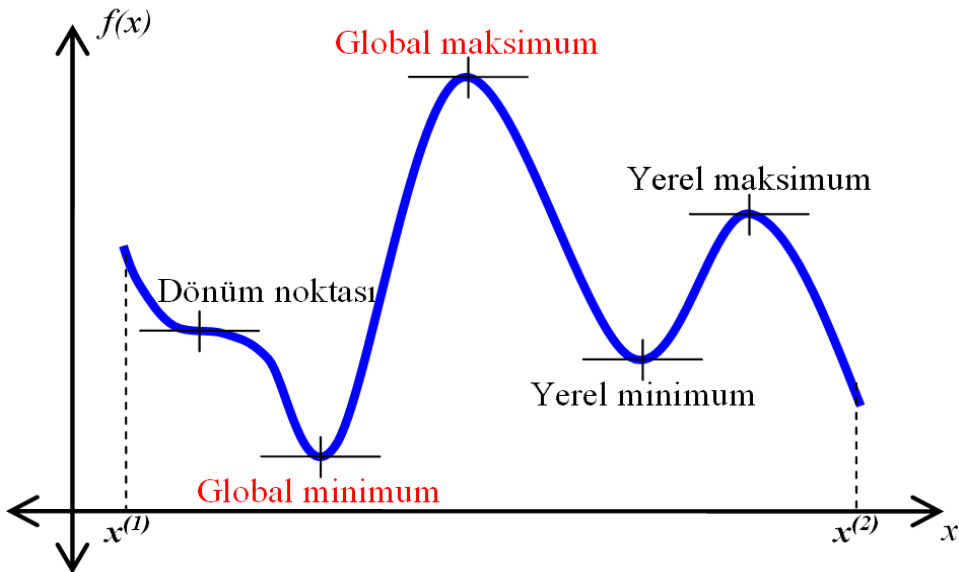


- Verilen fonksiyonun konveks/konkav özelliği bilinmiyor veya ne konveks ne konkavsa problemin $x^{(1)} \leq x \leq x^{(2)}$ aralığında optimal çözümünün bulunmasında aşağıdaki yol izlenir.
 - **ADIM 1:** Verilen aralıktaki (uygun çözüm bölgesi, S) bütün yerel ekstremum noktalar bulunur.
 - **ADIM 2:** Maksimizasyon problemi için amaç fonksiyonu değeri en büyük, minimizasyon problemi içinse amaç fonksiyonu değeri en küçük olan ekstremum nokta optimal çözüm olarak seçilir.

Yöneylem Araştırması II

31

[Kısıtsız Tek Değişkenli DOP Modelleri]



Yöneylem Araştırması II

32

[Kısıtsız Tek Değişkenli DOP Modelleri]



- Yerel extremuma aday 3 tip nokta bulunur:
 - Durum 1: $x^{(1)} < x < x^{(2)}$ aralığındaki $f'(x)=0$ eşitliğini sağlayan noktalar (durağan noktalar),
 - Durum 2: $f'(x)$ 'in hesaplanamadığı noktalar,
 - Durum 3: $x^{(1)} \leq x \leq x^{(2)}$ aralığında $x^{(1)}$ ve $x^{(2)}$ uç noktaları.

[Kısıtsız Tek Değişkenli DOP Modelleri]

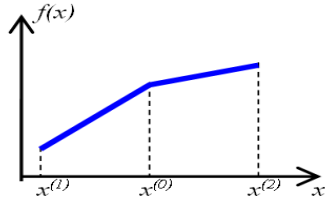


- Durum 1' uygun noktaların tespitinde aşağıdaki teorem kullanılır.
- Teorem: $f'(x^{(0)})=0$ olacak şekilde verilen bir $x^{(0)}$ noktası için birinci derecenin üzerinde sıfırdan farklı değere sahip ilk türevinin:
 - a) Derecesi çift sayı ve değeri pozitifse $x^{(0)}$ noktasında yerel minimum vardır.
 - b) Derecesi çift sayı ve değeri negatifse $x^{(0)}$ noktasında yerel maksimum vardır.
 - c) Derecesi tek sayı ise $x^{(0)}$ noktası dönüm noktasıdır, extremum yoktur.

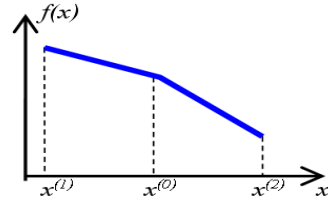
Kısıtsız Tek Değişkenli DOP Modelleri



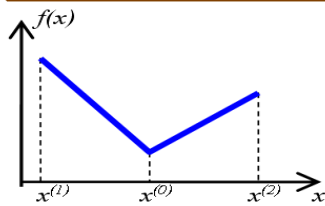
- Durum 2 için $f'(x^{(0)})$ 'ın hesaplanamadığını varsayalım. $x^{(1)} < x^{(0)}$, $x^{(2)} > x^{(0)}$ ve $x^{(1)}$ ve $x^{(2)}$ $x^{(0)}$ 'a çok yakın noktalar olmak üzere:



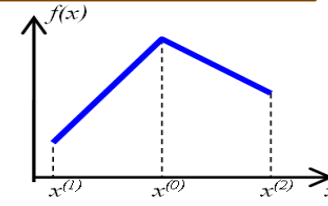
Yerel ekstremum yok



Yerel ekstremum yok



Yerel minimum



Yerel maksimum

Kısıtsız Tek Değişkenli DOP Modelleri



- Durum 3 içinse aşağıdaki kararlar alınır.
 - $f'(x^{(1)}) > 0$ ise $x^{(1)}$ 'de yerel minimum vardır.
 - $f'(x^{(1)}) < 0$ ise $x^{(1)}$ 'de yerel maksimum vardır.
 - $f'(x^{(2)}) > 0$ ise $x^{(2)}$ 'de yerel maksimum vardır.
 - $f'(x^{(2)}) < 0$ ise $x^{(2)}$ 'de yerel minimum vardır.
 - $f'(x^{(1)}) = 0$ veya $f'(x^{(2)}) = 0$ ise ilgili noktada Durum 2'de yapılan analiz yoluyla ekstremum araştırılır.

[Örnek 1



$\max f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$ probleminin optimal çözümünü bulunuz.
 $s.t. 0 \leq x \leq 10$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \quad \text{ve} \quad f''(x) = 6x - 6 \quad (\text{Ne konveks, ne konkav})$$

Adım 1: (Extremum noktaların bulunması)

Durum 1: $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2) = 0 \Rightarrow$

$$x^{(1)} = 0, f''(x^{(1)}) = -6 < 0 \Rightarrow \text{Yerel maksimum}$$

$$x^{(2)} = 2, f''(x^{(2)}) = 6 > 0 \Rightarrow \text{Yerel minimum}$$

Durum 2: $0 \leq x \leq 10$ aralığındaki her değer için $f'(x)$ mevcuttur.

Durum 3: $x^{(3)} = 0, f'(x^{(3)}) = 0 \Rightarrow f(0) = -1, f(0.1) \cong -1,2 \Rightarrow \text{Yerel maksimum}$
 $x^{(4)} = 10, f'(x^{(4)}) = 240 > 0 \Rightarrow \text{Yerel maksimum}$

Adım 2: (Optimal çözümün tespiti)

Yerel maksimum	$f(x)$
$x^{(1)} = 0$	-1
$x^{(3)} = 0$	-1
$x^{(4)} = 10$	699

← Optimal çözüm
 $x^* = 10, f(x^*) = 699$

[Örnek 2



$$f(x) = \begin{cases} 2 - (x-1)^2 & 0 \leq x \leq 3 \\ -3 + (x-4)^2 & 3 \leq x \leq 6 \end{cases} \quad \text{olmak üzere}$$

$\max f(x)$ probleminin optimal çözümünü bulunuz
 $s.t. 0 \leq x \leq 6$

Örnek 2



$$f(x) = \begin{cases} 2 - (x-1)^2 & 0 \leq x \leq 3 \\ -3 + (x-4)^2 & 3 \leq x \leq 6 \end{cases}; f'(x) = \begin{cases} -2(x-1) & 0 \leq x \leq 3 \\ 2(x-4) & 3 \leq x \leq 6 \end{cases} \text{ ve } f''(x) = \begin{cases} -2 & 0 \leq x \leq 3 \\ 2 & 3 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

Adım 1: (Ekstremum Noktaların araştırılması)

Durum 1: $f'(x) = 0 \Rightarrow$

$x^{(1)} = 1, f''(x^{(1)}) = -2 < 0 \Rightarrow$ Yerel maksimum

$x^{(2)} = 4, f''(x^{(2)}) = 2 > 0 \Rightarrow$ Yerel minimum

Durum 2: $x = 3$ noktasında fonksiyon türevlenebilir değildir çünkü 3'den biraz küçük bir değer için $f'(x)$ -4'e yakın, 3'den biraz büyük bir değer için de $f'(x)$ -2'e yakındır. $f(2,9) = -1,61$; $f(3) = -2$ ve $f(3,1) = -2,19$ olduğundan $x = 3$ noktasında ekstremum yoktur.

Durum 3: $x^{(3)} = 0, f'(x^{(3)}) = 2 > 0 \Rightarrow$ Yerel minimum

$x^{(4)} = 6, f'(x^{(4)}) = 4 > 0 \Rightarrow$ Yerel maksimum

Adım 2: (Optimal çözümün tespiti)

Yerel maksimum	$f(x)$
$x^{(1)} = 1$	2
$x^{(4)} = 6$	1

← Optimal çözüm
 $x^* = 1, f(x^*) = 2$

Newton-Rapson Yöntemi (NRY)



- Karışık DOP modellerinin çözümü gerek ve yeter koşullardan hareketle bulmak zaman alıcı, çoğu kez de olanaksızdır. Özellikle de $f'(x) = 0$ gerek şartını sayısal olarak çözmek zordur.
- NRY, verilen bir $x^{(1)}$ noktasından başlayarak uygun ekstremum noktaya doğru ilerleyen iteratif bir yaklaşımdır.
- NRY yönteminde son iterasyondaki hareket uzunluğu belli bir eşik değerinden (ε) küçük olunca algoritma sona erer. Algoritma şu şekildedir:

Verilenler: $f(x)$ fonksiyonu, ε durdurma koşulu, $x^{(1)}$ başlangıç noktası,
 $k = 1$

Adım 1: Bir sonraki çözüm noktasını $x^{(k+1)}$ aşağıdaki formülasyonla hesapla:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f'(x^{(k)})}{f''(x^{(k)})}$$

Adım 2: Eğer $|x^{(k+1)} - x^{(k)}| < \varepsilon$ ise dur, değilse $k = k + 1$ al ve Adım 1'e git.

Newton-Rapson Yöntemi (NRY)



Örnek $\min f(x) = \frac{0}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{20}{3}x^3 + 550x^2 - 2000x + 15000$

fonksiyonunu $x^{(1)} = 14$ noktasından başlayarak $\varepsilon = 0.01$ durdurma koşuluyla NRY kullanarak çözünüz.

$$f'(x) = 6x^4 - 71x^3 + 20x^2 + 1100x - 2000$$

$$f''(x) = 24x^3 - 213x^2 + 40x + 1100$$

$$f(x^{(1)}) = 76598.133 \text{ ve } k = 1.$$

Adım 1 $f'(x^{(1)}) = f'(14) = 52992$, $f''(x^{(1)}) = f''(14) = 25768$,

$$x^{(2)} = x^{(1)} - \frac{f'(x^{(1)})}{f''(x^{(1)})} = 14 - \frac{52992}{25768} = 11.943$$

$$f(x^{(2)}) = 11380.786$$

Adım 2 $|x^{(2)} - x^{(1)}| = |11.943 - 14| = 2.057 > \varepsilon$ olduğundan $k = k + 1 = 2$ alınır ve Adım 1'e gidilir.

Yöneylem Araştırması II

41

Newton-Rapson Yöntemi (NRY)



Adım 1 $f'(x^{(2)}) = f'(11.943) = 15116$, $f''(x^{(2)}) = f''(11.943) = 12082$,

$$x^{(3)} = x^{(2)} - \frac{f'(x^{(2)})}{f''(x^{(2)})} = 11.943 - \frac{15116}{12082} = 10.692$$

$$f(x^{(3)}) = 348.178$$

Adım 2 $|x^{(3)} - x^{(2)}| = |10.692 - 11.943| = 1.251 > \varepsilon$ olduğundan $k = k + 1 = 3$ alınır ve Adım 1'e gidilir. İşlemlere bu şekilde devam edilmesiyle aşağıdaki tablo elde edilir.

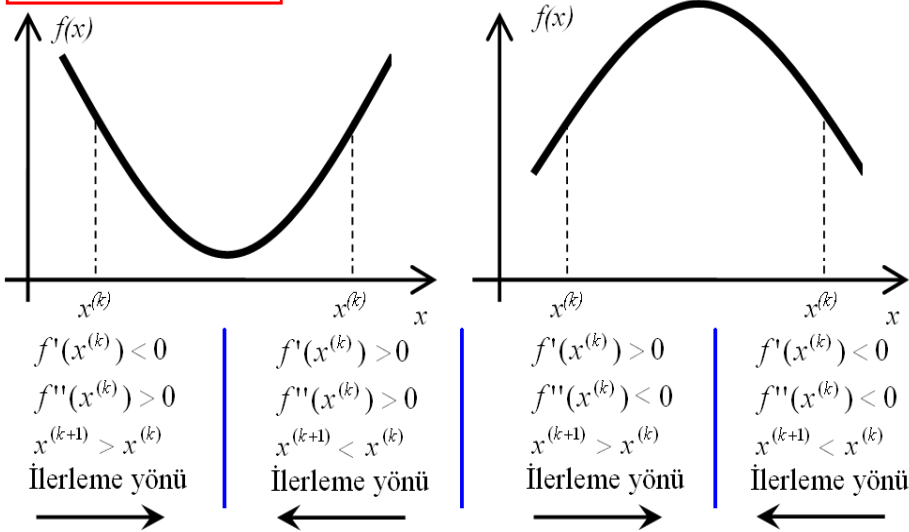
k	$f(x^{(k)})$	$f'(x^{(k)})$	$f''(x^{(k)})$	$x^{(k+1)}$	$ x^{(k+1)} - x^{(k)} $
1	76598.133	52992.000	25768.000	11.943	2.057
2	11380.786	15116.893	12082.828	10.692	1.251
3	348.178	3679.827	6514.347	10.128	0.565
4	-798.149	560.117	4588.272	10.005	0.122
5	-833.271	22.865	4216.207	10.001	0.004

Esasında $f'(10) = 0$ 'dır, yani $x = 10$ 'da ekstremum vardır ve arama bu yöne doğru devam etmektedir.

Newton-Rapson Yöntemi (NRY)



$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f'(x^{(k)})}{f''(x^{(k)})}$$



Kısıtsız Çok Değişkenli DOP Modelleri



$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonu $S = R^n$ 'de tanımlı n değişkenli bir fonksiyon olsun.

Tanım: $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonunun ∇f ile gösterilen gradyanı ($n \times 1$) boyutunda bir vektör olup aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\nabla f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Burada $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonunun x_1 'e göre birinci kısmi türevidir

[Kısıtsız Çok Değişkenli DOP Modelleri]



Tanım: $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonunun $\nabla^2 f$ veya Hf ile gösterilen Hessian ' $(n \times n)$ boyutunda bir matris olup aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\nabla^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n) = H(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Yöneylem Araştırması II

45

[Örnek]



$z = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + 2x_1x_2 + x_3^4$ fonksiyonunun gradyan vektörü ve hessian matrisini bularak, $\nabla f(1,1,-1)$ ve $\nabla^2 f(1,1,-1)$ ifadelerini yazınız.

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1^2 + 2x_2 \\ 2x_1 \\ 4x_3^3 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \nabla f(1,1,-1) = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x_1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12x_3^2 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \nabla^2 f(1,1,-1) = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

Yöneylem Araştırması II

46

[Kısıtsız Çok Değişkenli DOP Modelleri]



Tanım: Bir $(n \times n)$ boyutundaki matrisin i -nci principal minörü, $(n - i)$ adet satır ve $(n - i)$ adet sütunun silinmesiyle elde edilen $(i \times i)$ boyutundaki matrisin determinantıdır. Bir matrisin 1-nci principal minörleri diyagonal elemanlarıdır.

Ömek:
$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$$

1-nci principal minörleri: -2 ve -4

2-nci principal minörü $-2(-4) - (-1)(-1) = 7$ 'dir.

Tanım: Bir $(n \times n)$ boyutundaki matrisin k -nci esas principal minörü, son $(n - k)$ adet satır ve sütunun silinmesiyle elde edilen $(k \times k)$ boyutundaki matrisin determinantıdır. $Hf(x_1, x_2, \dots, x_n)$ hessian matrisinin k -nci esas principal minörü $H_k f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ile gösterilir.

Ömek: $f(x_1, x_2) = x_1^3 + 2x_1x_2 + x_2^2$ için $Hf(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 6x_1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ olup $H_1 f(x_1, x_2) = 6x_1$ ve

$H_2 f(x_1, x_2) = 6x_1(2) - 2(2) = 12x_1 - 4$ olacaktır.

[Kısıtsız Çok Değişkenli DOP Modelleri]



$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonu $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ noktalarında sürekli ve 2. dereceden kısmi türeve sahip bir fonksiyon olsun.

Teorem1: $x \in S$ ve $k = 1, 2, \dots, n$ için $Hf(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 'in tüm principal minörleri negatif olmayan sayılarsa (≥ 0) $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonu konvektir.

Teorem2: $x \in S$ ve $k = 1, 2, \dots, n$ için $Hf(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 'in sıfırdan farklı tüm principal minörleri $(-1)^k$ işaretine sahipse $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonu konkavdır.

[Kısıtsız Çok Değişkenli DOP Modelleri]



Örnek 1: $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ fonksiyonunun $S = \mathbb{R}^2$ 'de konveks olduğunu gösteriniz.

$$H(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

1-nci principal minörler: $2 > 0$, $2 > 0$

2-nci principal minör: $2(2) - 2(2) = 0 \geq 0$

Örnek 2: $f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_1x_2 - 2x_2^2$ fonksiyonunun $S = \mathbb{R}^2$ 'de konkav olduğunu gösteriniz.

$$H(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$$

1-nci principal minörler: $-2 < 0$, $-4 < 0$

2-nci principal minör: $(-2)(-4) - (-1)(-1) = 7 > 0$

[Kısıtsız Çok Değişkenli DOP Modelleri]



Örnek 3: $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 3x_1x_2 + 2x_2^2$ fonksiyonunun $S = \mathbb{R}^2$ 'de ne konveks ne konkav olduğunu gösteriniz.

$$H(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

1-nci principal minörler: $2 > 0$, $4 > 0$ $\left| \Rightarrow \text{Fonksiyon ne konveks ne konkavdır} \right.$

2-nci principal minör: $-1 < 0$

[Kısıtsız Çok Değişkenli DOP Modelleri]



Örnek 4: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_1x_3$ fonksiyonunun $S = \mathbb{R}^3$ 'de konveks olduğunu gösteriniz.

$$H(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

1-nci principal minörler:

- 1 ve 2. satır ve sütunlar silinirse: $4 > 0$
- 1 ve 3. satır ve sütunlar silinirse: $2 > 0$
- 2 ve 3. satır ve sütunlar silinirse: $2 > 0$

2-nci principal minörler:

- 1. satır ve sütun silinirse: $\det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = 7 > 0$
- 2. satır ve sütun silinirse: $\det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = 7 > 0$
- 3. satır ve sütun silinirse: $\det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 3 > 0$

3-nci principal minör H 'in kendi determinantıdır. Birinci satıra göre açılırsa:

$$\det H = 2[(2)(4) - (-1)(-1)] - (-1)[(-1)(4) - (-1)(-1)] + (-1)[(-1)(-1) - (-1)(2)] = 14 - 5 - 3 = 6 > 0$$

Tüm principal minörler (≥ 0) olduğundan fonksiyon konvekstir.

Yöneylem Araştırması II

51

[Kısıtsız Çok Değişkenli DOP Modelleri]



Kısıtsız çok değişkenli DOP modellerinin çözümü için gerek ve yeter koşullar aşağıdaki teoremlerle verilir.

Teorem (Gerek koşul): $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonu $x^A = (x_1^A, x_2^A, \dots, x_n^A)$

noktasında yerel ekstremuma sahipse, bu noktada fonksiyonun gradyanı sıfıra eşittir, yani $\nabla f(x^A) = 0$. Bu teoremle belirlenen noktalara aynı zamanda Durağan Nokta adı verilir.

Teorem (Yeter koşul): $x^A = (x_1^A, x_2^A, \dots, x_n^A)$ durağan noktasındaki $k = 1, 2, \dots, n$

olmak üzere $H_k(x^A)$ hessian matrisinin esas principal minörleri olsun.

1. $k = 1, 2, \dots, n$ için $H_k(x^A) > 0 \Rightarrow x^A$ noktası yerel minimumdur.
2. $k = 1, 2, \dots, n$ için $H_k(x^A) \neq 0$ ve $(-1)^k$ işaretine sahipse x^A noktası yerel maksimumdur.
3. $H_k(x^A) \neq 0$ ve (1) ve (2) durumları sağlanmıyorsa x^A noktasında yerel ekstremum yoktur, eğer noktasıdır (saddle point).

Yöneylem Araştırması II

52

[Kısıtsız Çok Değişkenli DOP Modelleri]



Kısıtsız çok değişkenli DOP modellerinin çözümünde verilen teoremlere uygun şekilde oluşturulan aşağıdaki algoritma kullanılabilir.

Adım 1: Gerek şartı ($\nabla f(x) = 0$) sağlayan kökler araştırılır.

1. Kök bulunamazsa durulur, problemin çözümü yoktur.
2. Kökler analitik olarak bulunamazsa yine durulur, daha sonra açıklanacak olan “En dik iniş” metoduna benzer iteratif çözüm yöntemlerine başvurulur.
3. Bu sistemin $x^{(1)}, x^{(2)}$ v.b. köklere bulunmuşsa Adım 2’ye geçilir.

Adım 2: Her bir $x^{(i)}$ kökü için hessian matrisi oluşturularak ne tip yerel ekstremum olduğu araştırılır.

Adım 3: Fonksiyonun konveks/konkav yapısı araştırılır.

1. Fonksiyon konveks ise yerel en küçük aynı zamanda global en küçük noktadır.
2. Fonksiyon konkav ise yerel en büyük aynı zamanda global en büyük noktadır.
3. $f(x)$, R^n üzerinde konveks veya konkav değilse global optimal söz konusu değildir.

[Kısıtsız Çok Değişkenli DOP Modelleri]



Örnek 1: $\max f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + x_3x_2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$

Adım 1

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2x_1 \\ x_3 - 2x_2 \\ 2 + x_2 - 2x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Bu sistemi sağlayan tek bir çözüm}$$

vardır $x^{(1)} = (1/2, 2/3, 4/3)$

Adım 2

$$H(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$H_1(x^{(1)}) = \det[-2] = -2 < 0, H_2(x^{(1)}) = \det \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = 4 > 0,$$

$$H_3(x^{(1)}) = \det[H(x^{(1)})] = -6 < 0 \Rightarrow x^{(1)} \text{ noktasında yerel maksimum vardır.}$$

[Kısıtsız Çok Değişkenli DOP Modelleri]



Adım 3

$$H(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

1-nci principal minörler:

- 1 ve 2. satır ve sütunlar silinirse: $-2 < 0$
- 1 ve 3. satır ve sütunlar silinirse: $-2 < 0$
- 2 ve 3. satır ve sütunlar silinirse: $-2 < 0$

2-nci principal minörler:

- 1. satır ve sütun silinirse: $\det \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = 3 > 0$
- 2. satır ve sütun silinirse: $\det \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = 4 > 0$
- 3. satır ve sütun silinirse: $\det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 4 > 0$

3-nci principal minör $\det H = -6 < 0$

Fonksiyon konkavdır, Optimal çözüm: $x^* = (1/2, 2/3, 4/3), f(x^*) \cong 1,5833$

Yöneylem Araştırması II

55

[Kısıtsız Çok Değişkenli DOP Modelleri]



Örnek 2: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_1x_3 - x_2^2 + 4x_2x_3 + 3x_3 - 23/8x_3^2$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını araştırınız.

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\ -2x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ x_1 + 4x_2 + 3 - 23/4x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l|l|l} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow & 2x_1 = 2x_2 - x_3 & \text{ve} & 2x_2 = 2x_1 + x_3 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow & 2x_1 = -2x_2 + 4x_3 & \text{ve} & 2x_2 = -2x_1 + 4x_3 \\ \hline & x_2 = 5/4x_3 \dots\dots(1) & & x_1 = 3/4x_3 \dots\dots(2) \end{array}$$

(1) ve (2) $\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$ 'da yerine konursa:

$$(\frac{3}{4}x_3) + 4(\frac{5}{4}x_3) + 3 - \frac{23}{4}x_3 = 0$$

$$5x_3 + 3 - 5x_3 = 0$$

$3 = 0(?) \Rightarrow$ Sistemin çözümü olmadığından verilen fonksiyonun yerel ekstremumu yoktur.

[Kısıtsız Çok Değişkenli DOP Modelleri]



Örnek 3: Bir firma iki tip müşterisi için tek tip ürün üretmektedir. Birinci müşteri için q_1 birim üretirse birim satış fiyatı $\$(70 - 4q_1)$ olmakta, ikinci müşteri için q_2 birim üretirse birim satış fiyatı $\$(150 - 15q_2)$ olmaktadır. q birimin üretim maliyeti $\$(100 + 15q)$ 'dır. Karı maksimum yapmak için her bir müşteriye kaç birim ürün üretilmelidir.

$$\begin{aligned}\max f(q_1, q_2) &= q_1(70 - 4q_1) + q_2(150 - 15q_2) - (100 + 15(q_1 + q_2)) \\ &= 70q_1 - 4q_1^2 + 150q_2 - 15q_2^2 - 100 - 15q_1 - 15q_2 \\ &= 55q_1 - 4q_1^2 + 135q_2 - 15q_2^2 - 100\end{aligned}$$

Adım 1

$$\nabla f(q_1, q_2) = \begin{bmatrix} 55 - 8q_1 \\ 135 - 30q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Tek bir çözüm vardır. } q^{(1)} = \left(\frac{55}{8}, \frac{9}{2}\right)$$

Yöneylem Araştırması II

57

[Kısıtsız Çok Değişkenli DOP Modelleri]



Adım 2

$$H(q^{(1)}) = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -30 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \left. \begin{aligned} H_1(q^{(1)}) &= \det[-8] = -8 < 0 \\ H_2(q^{(1)}) &= \det[H(q^{(1)})] = 240 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{yerel maksimum}$$

Adım 3

1-nci principal minörler:

- 1. satır ve sütun silinirse: $-30 < 0$
- 2. satır ve sütun silinirse: $-8 < 0$

2-nci principal minör: $H_2(q^{(1)}) = \det[H(q^{(1)})] = 240 > 0$

Fonksiyon konkavdır. $q^{(1)} = \left(\frac{55}{8}, \frac{9}{2}\right)$ aynı zamanda global maksimumdur. Firmanın

üretmesi gereken miktarlar ve optimal kazanç değeri

$$q^* = \left(\frac{55}{8}, \frac{9}{2}\right), \quad f(q^*) = 392.81\$$$

Yöneylem Araştırması II

58

[En Dik İniş Yöntemi (Steepest Descent)]



- Bu metodun diğer bir adı da Gradyan yöntemidir.
- Bu yöntem iteratif olarak fonksiyonun gradyanı yönünde (maksimizasyon için $\nabla f(x)$, minimizasyon için $-\nabla f(x)$ yönünde) birbirini izleyen noktalara ilerler ve gradyan vektörü sıfır veya uzunluğu belli bir eşik değerinden (ε) küçük olunca algoritma sona erer.
- Buna karşın gradyan vektörünün sıfır olması optimumluk için sadece gerek koşul olup fonksiyonun konkav/konveks olduğu bilinmedikçe optimumluk doğrulanamaz, yani ulaşılan nokta yerel ekstremumdur.
- Minimizasyon problemi için algoritma şu şekildedir:

Verilenler: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ olmak üzere $f(x)$ fonksiyonu, $\varepsilon > 0$

durdurma koşulu, $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$ başlangıç noktası, $k = 1$

Ana Adım: $\|\nabla f(x^{(k)})\| < \varepsilon$ ise dur, değilse istikamet vektörünü

$d^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)})$ olarak belirle ve $\lambda \geq 0$ olmak üzere

$f(x^{(k)} + \lambda d^{(k)})$ tek değişkenli fonksiyonunu minimum yapan λ

değerini tespit et: $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda d^{(k)}$ ve $k = k + 1$ al, Ana Adımı tekrarla.

[En Dik İniş Yöntemi (Steepest Descent)]



Örnek $\max f(x_1, x_2) = 4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2$

Başlangıç noktası: $x^{(1)} = (1,1)^T$, durdurma koşulu: $\varepsilon = 0,5$

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 4 - 4x_1 - 2x_2 \\ 6 - 2x_1 - 4x_2 \end{pmatrix}; f(x^{(1)}) = 4,00; k = 1$$

Ana Adım: $\nabla f(x^{(1)}) = (-2, 0)^T$, $\|\nabla f(x^{(1)})\| = \sqrt{(-2)^2 + (0)^2} = 2 > \varepsilon \Rightarrow$ devam

$$d^{(1)} = \nabla f(x^{(1)}) = (-2, 0)^T$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \lambda d^{(1)} = (1,1)^T + \lambda(-2,0)^T = (1 - 2\lambda, 1)^T$$

$$f(x^{(1)} + \lambda d^{(1)}) = f(x^{(2)}) = 4(1 - 2\lambda) + 6(1) - 2(1 - 2\lambda)^2 - 2(1 - 2\lambda)(1) - 2(1)^2$$

$$f(x^{(2)}) = -8\lambda^2 + 4\lambda + 4$$

$$f'(x^{(2)}) = -16\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = 1/4$$

$$f''(x^{(2)}) = -16 < 0 \Rightarrow \text{konkav olduğundan } \lambda = 1/4, f(x^{(2)})$$

fonksiyonunu maksimum yapar. Öyleyse:

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \lambda d^{(1)} = (1,1)^T + \lambda(-2,0)^T = (1 - 2\lambda, 1)^T = (1/2, 1)^T;$$

$$f(x^{(2)}) = 4,50; k = 2$$

[En Dik İniş Yöntemi (Steepest Descent)]



Ana Adım (2): $\nabla f(x^{(2)}) = (0,1)^T$, $\|\nabla f(x^{(2)})\| = \sqrt{(0)^2 + (1)^2} = 1 > \varepsilon \Rightarrow \text{devam}$

$$d^{(2)} = \nabla f(x^{(2)}) = (0,1)^T$$

$$x^{(3)} = x^{(2)} + \lambda d^{(2)} = (1/2, 1 + \lambda)^T; f(x^{(3)}) = -2\lambda^2 + \lambda + 9/2$$

$$f'(x^{(3)}) = -4\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1/4; f''(x^{(3)}) = -4 < 0 \Rightarrow \text{Konkav}$$

$$x^{(3)} = (1/2, 1 + \lambda)^T \Rightarrow x^{(3)} = (1/2, 5/4)^T; f(x^{(3)}) = 4,625; k = 3$$

Ana Adım (3): $\nabla f(x^{(3)}) = (-1/2, 0)^T$, $\|\nabla f(x^{(3)})\| = \sqrt{(-1/2)^2 + (0)^2} = 0,5 \geq \varepsilon \Rightarrow \text{devam}$

$$d^{(3)} = \nabla f(x^{(3)}) = (-1/2, 0)^T$$

$$x^{(4)} = x^{(3)} + \lambda d^{(3)} = (1/2 - 1/2\lambda, 5/4)^T; f(x^{(4)}) = -1/2\lambda^2 + 1/4\lambda + 57/8$$

$$f'(x^{(4)}) = -\lambda + 1/4 = 0 \Rightarrow \lambda = 1/4; f''(x^{(4)}) = -1 < 0 \Rightarrow \text{Konkav}$$

$$x^{(4)} = (1/2 - 1/2\lambda, 5/4)^T \Rightarrow x^{(4)} = (3/8, 5/4)^T; f(x^{(4)}) = 4,656; k = 4$$

Ana Adım (4): $\nabla f(x^{(4)}) = (0, 1/4)^T$, $\|\nabla f(x^{(4)})\| = 0,25 < \varepsilon \Rightarrow \text{DUR}$

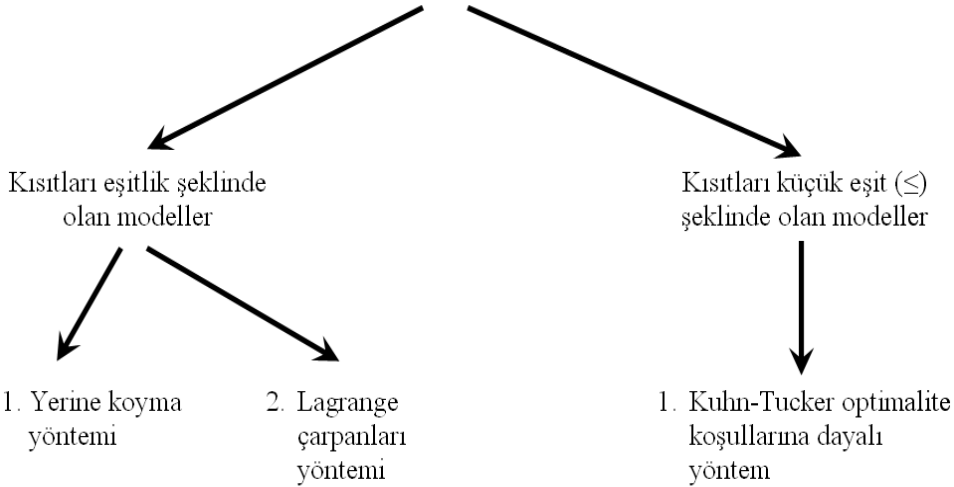
Bulunan çözüm $x^{final} = (3/8, 5/4)^T$, $f(x^{final}) = 4,656$

Bilinen optimal çözüm $x^* = (1/3, 4/3)^T$, $f(x^*) = 4,666$

[Kısıtlı DOP Modelleri]



Kısıtlı DOP Modelleri



Kısıtları eşitlik şeklinde olan DOP Modelleri için Yerine Koyma Yöntemi



- Bu yöntemde verilen model kısıtsız hale getirilerek kısıtsız DOP modelleri için anlatılan yöntemlerle çözülür.

$$\begin{aligned} \min/\max \quad & f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \text{s.t.} \quad & g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned}$$

- Verilen modelde her bir kısıta bir değişken karşılık gelecek şekilde n değişkenin m tanesi X_B , kalanları ise X_R ile gösterilsin. Bu işlemden sonra modelin kısıtları:

$$g_i(X_B, X_R) = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

şeklinde yazılıp, X_B 'ler X_R 'lere bağlı olarak çözülebilirse yani:

$$X_{B_i} = h_i(X_R) \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

ilişkisi bulunabilirse amaç fonksiyonunda X_B 'ler yerine $h(X_R)$ ifadeleri yazılarak model kısıtsız hale dönüştürülür.

Kısıtları eşitlik şeklinde olan DOP Modelleri için Yerine Koyma Yöntemi



Örnek 1

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x_1, x_2) = 10x_1 + 5x_2 - x_1x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 = 1 \end{aligned}$$

Bu modelde $n = 2, m = 1$ 'dir. Kısıt yoluyla x_2 değişkeni x_1 cinsinden $x_2 = 1 - 2x_1$ olup bu ifade amaç fonksiyonunda yerine yazılırsa:

$$f(x_1, x_2) = f(x_1, 1 - 2x_1) = 10x_1 + 5(1 - 2x_1) - x_1(1 - 2x_1)$$

$$f(x_1) = 2x_1^2 - x_1 + 5$$

Kısıtsız, hatta tek değişkenli modeli elde edilmiş olur. Bu model daha önce anlatılan yöntemlerle çözümlerse $x_1 = 1/4$ 'de global minimum olduğu bulunur.

Dolayısıyla orijinal modelin optimal çözümü:

$$\begin{aligned} x_1^* &= 1/4 \\ x_2^* &= 1 - 2x_1^* = 1 - 2(1/4) = 1/2 \\ f(x_1^*, x_2^*) &= 39/8 \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Kısıtları eşitlik şeklinde olan DOP Modelleri için Yerine Koyma Yöntemi



Örnek 2

$$\begin{aligned} \max f(x, y) &= -2x^2 - y^2 + xy + 8x + 3y \\ \text{s.t.} \quad 3x + y &= 10 \end{aligned}$$

Bu modelde $n = 2, m = 1$ 'dir. Kısıt yoluyla y değişkeni x cinsinden $y = 10 - 3x$ olup bu ifade amaç fonksiyonunda yerine yazılırsa:

$$f(x, y) = f(x, 10 - 3x) = -14x^2 + 69x - 70$$

Kısıtsız, hatta tek değişkenli modeli elde edilmiş olur. Bu model daha önce anlatılan yöntemlerle çözülürse $x = 69/28$ 'de global maksimum olduğu bulunur. Dolayısıyla orijinal modelin optimal çözümü:

$$\begin{aligned} x^* &= 69/28 \\ y^* &= 1 - 3x^* = 73/28 \\ f(x^*, y^*) &\cong 15.02 \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Yöneylem Araştırması II

65

Kısıtları eşitlik şeklinde olan DOP Modelleri için Yerine Koyma Yöntemi



Örnek 2

$$\begin{aligned} \max f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1x_3 - x_2x_4 \\ \text{s.t.} \quad -x_1^2 + x_3 - 2x_1 &= 0 & \Rightarrow x_3 = x_1^2 + 2x_1 \\ -x_2 + x_4 + 1 &= 0 & \Rightarrow x_4 = x_2 - 1 \end{aligned}$$

Bu ifadeler modelde yerine yazılırsa:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = f(x_1, x_2, (x_1^2 + 2x_1), (x_2 - 1))$$

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 + 2x_1^2 - x_2^2 + x_2$$

Bu model daha önce anlatılan yöntemlerle çözülürse optimal çözüm:

$$\begin{aligned} x_1^* &= -4/3 \\ x_2^* &= 1/2 \\ x_3^* &= -8/9 \\ x_4^* &= -1/2 \\ f(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) &= 37/54 \end{aligned}$$

Yöneylem Araştırması II

66

[Kısıtları eşitlik şeklinde olan DOP Modelleri için Lagrange Çarpanları Yöntemi]



Tanım: Lagrange Fonksiyonu

$$\max(\min) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$s.t. \quad g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

modelini amaç fonksiyonu ve kısıtlarından oluşturulan

$$L(x, \lambda) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i [b_i - g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)]$$

fonksiyonuna “Lagrange fonksiyonu” adı verilir. Burada $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ lagrange çarpanları vektörüdür.

[Kısıtları eşitlik şeklinde olan DOP Modelleri için Lagrange Çarpanları Yöntemi]



$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i [b_i - g_i(x)]$$

Gerek Koşul: Yerel ekstremumlar en az bir $\lambda_i \neq 0$ için aşağıdaki koşulu sağlar.

$$\Delta L(x, L) = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial x_n} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_m} \end{bmatrix} = 0$$

[Kısıtları eşitlik şeklinde olan DOP Modelleri için Lagrange Çarpanları Yöntemi]



Yeter Şart (Global Extremum)

Modelin tüm kısıtları doğrusalsa ve

1. Maksimizasyon problemi için amaç fonksiyonu konkavsa veya
2. Minimizasyon problemi için amaç fonksiyonu konveks ise

Gerek şart aynı zamanda yeter şarttır, yani gerek şartla bulunan çözüm optimal çözümdür.

[Kısıtları eşitlik şeklinde olan DOP Modelleri için Lagrange Çarpanları Yöntemi]



Yeter Şart (Yerel Extremum)

Global extremum için verilen yeter şart sağlanmıyorsa gerek şartı sağlayan $(x^{(1)}, \lambda^{(1)})$ noktasının yerel ekstremum olması için yeter şart aşağıdaki gibidir.

$$P = \begin{bmatrix} [\nabla g_1(x)]^T \\ \vdots \\ [\nabla g_m(x)]^T \end{bmatrix}_{m \times n} \quad \text{ve} \quad Q = \left\| \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{n \times n} \quad \text{olmak üzere} \quad H^B = \begin{bmatrix} 0 & P \\ P^T & Q \end{bmatrix}_{(m+n) \times (m+n)}$$

şeklinde tanımlanan H^B matrisine “Sınırlı Hessian Matrisi” adı verilir.

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & P \\ P^T & Q - \mu I \end{bmatrix}$$

matrisi $(x^{(1)}, \lambda^{(1)})$ sabit noktasında hesaplanan matris olsun. Bu matriste tek bilinmeyen μ ’dür ve $|\Delta| = 0$ polinomunun $|n - m|$ adet gerçel köklerinin:

1. Tamamı negatifse $(x^{(1)}, \lambda^{(1)})$ ’da yerel maksimum vardır,
2. Tamamı pozitifse $(x^{(1)}, \lambda^{(1)})$ ’da yerel minimum vardır,
3. (1) ve (2) sağlanmıyorsa $(x^{(1)}, \lambda^{(1)})$ ’da yerel ekstremum yoktur.

Kısıtları eşitlik şeklinde olan DOP Modelleri için Lagrange Çarpanları Yöntemi



Örnek 1: Bir şirket reklam için \$10000 tahsis etmiştir. TV reklamının dakikası \$3000, radyo reklamının dakikası \$1000'dır. Firma x dakika TV, y dakika radyo reklamı verirse geliri \$1000 cinsinde $f(x, y) = -2x^2 - y^2 + xy + 8x + 3y$ fonksiyonu ile ifade edilmektedir. Firma gelirini nasıl maksimize eder.

Problemin DOP modeli

$$\begin{aligned} \max f(x, y) &= -2x^2 - y^2 + xy + 8x + 3y \\ \text{s.t.} \quad 3x + y &= 10 \end{aligned}$$

Modelin lagrange fonksiyonu

$$L(x, y, \lambda) = -2x^2 - y^2 + xy + 8x + 3y + \lambda(10 - 3x - y)$$

Gerek şart:

$$\nabla L(x, y, \lambda) = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x} \\ \frac{\partial L}{\partial y} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4x + y + 8 - 3\lambda \\ -2y + x + 3 - \lambda \\ 10 - 3x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Verilen eşitlikler çözülrse $x = 69/28, y = 73/28, \lambda = 1/4$ olarak bulunur.

Yöneylem Araştırması II

71

Kısıtları eşitlik şeklinde olan DOP Modelleri için Lagrange Çarpanları Yöntemi



Yeter şart

$$\begin{aligned} \max f(x, y) &= -2x^2 - y^2 + xy + 8x + 3y \\ \text{s.t.} \quad 3x + y &= 10 \end{aligned}$$

Problemde tek bir doğrusal kısıt olduğundan amaç fonksiyonu konkavsa gerek şart aynı zamanda yeter şarttır.

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

1-nci principal minörler:

- 1 satır ve sütun silinirse: $-2 < 0$
- 2. satır ve sütun silinirse: $-4 < 0$

2-nci principal minör: $7 > 0$

Amaç fonksiyonu konkav olduğundan problemin optimal çözümü:

$$x^* = 69/28, y^* = 73/28, f(x^*, y^*) = 15.02$$

Yöneylem Araştırması II

72

Kısıtları eşitlik şeklinde olan DOP Modelleri için Lagrange Çarpanları Yöntemi



- Lagrange çarpanları doğrusal programlamadaki dual fiyatlara karşılık gelir.
- Verilen örnekte reklam bütçesinin 1 birim artırılması karı \$1/4 artıracaktır.
- Eğer bütçedeki artış Δ olursa karda \$0.25 Δ artar.

Kısıtları eşitlik şeklinde olan DOP Modelleri için Lagrange Çarpanları Yöntemi



Örnek 2:

$$\begin{aligned} \min f(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ \text{s.t.} \quad &4x_1 + x_2^2 + 2x_3 - 14 = 0 \end{aligned}$$

Modelin lagrange fonksiyonu

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \lambda(14 - 4x_1 - x_2^2 - 2x_3)$$

Gerek şart

$$\nabla L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x_1} \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} \\ \frac{\partial L}{\partial x_3} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - 4\lambda \\ 2x_2 - 2\lambda x_2 \\ 2x_3 - 2\lambda \\ 14 - 4x_1 - x_2^2 - 2x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \text{ 'dan } x_1 = 2\lambda \text{ -----(1)}$$

Kısıtları eşitlik şeklinde olan DOP Modelleri için Lagrange Çarpanları Yöntemi



$$\nabla L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x_1} \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} \\ \frac{\partial L}{\partial x_3} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - 4\lambda \\ 2x_2 - 2\lambda x_2 \\ 2x_3 - 2\lambda \\ 14 - 4x_1 - x_2^2 - 2x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \text{ 'dan } 2x_2(1 - \lambda) = 0 \text{ ise}$$

$$x_2 = 0 \text{ veya } \lambda = 1 \text{ ----- (2)}$$

$$\lambda = 1 \text{ ----- (3)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 0 \text{ 'dan } x_3 = \lambda \text{ ----- (4)}$$

(1), (3) ve (4) ifadeleri $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$ 'da yerine konursa:

$$14 - 4(2(1)) - x_2^2 - 2(1) = 0 \Rightarrow x_2^2 = 4, \text{ Buradan}$$

Çözüm 1

$$x^{(1)} = (x_1, x_2, x_3, \lambda) = (2, 2, 1, 1), f(x^{(1)}) = 9$$

Çözüm 2

$$x^{(2)} = (x_1, x_2, x_3, \lambda) = (2, -2, 1, 1), f(x^{(2)}) = 9$$

Kısıtları eşitlik şeklinde olan DOP Modelleri için Lagrange Çarpanları Yöntemi



$$\nabla L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x_1} \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} \\ \frac{\partial L}{\partial x_3} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - 4\lambda \\ 2x_2 - 2\lambda x_2 \\ 2x_3 - 2\lambda \\ 14 - 4x_1 - x_2^2 - 2x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(1), (2) ve (4) ifadeleri $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$ 'da yerine konursa:

$$14 - 4(2\lambda) - (0)^2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 7/5, \text{ Buradan}$$

Çözüm 3

$$x^{(3)} = (x_1, x_2, x_3, \lambda) = (14/5, 0, 7/5, 7/5), f(x^{(3)}) = 9.8$$

Kısıtları eşitlik şeklinde olan DOP Modelleri için Lagrange Çarpanları Yöntemi



Yeter Şart (Kısıtlar doğrusal değil-yerel ekstremum)

$$P = [\nabla g_1(x)]_{1 \times 3}^T = [4 \quad 2x_2 \quad 2]$$

$$Q = \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2-2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$H^B = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & P \\ \hline P^T & Q \end{array} \right]_{4 \times 4} = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 4 & 2x_2 & 2 \\ \hline 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2x_2 & 0 & 2-2\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

Yöneylem Araştırması II

77

Kısıtları eşitlik şeklinde olan DOP Modelleri için Lagrange Çarpanları Yöntemi



Çözüm 1 ($x^{(1)} = (x_1, x_2, x_3) = (2, 2, 1)$, $f(x^{(1)}) = 9$) için

$$H^B(2, 2, 1) = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 4 & 4 & 2 \\ \hline 4 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right], \Delta = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 4 & 4 & 2 \\ \hline 4 & 2-\mu & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -\mu & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2-\mu \end{array} \right]$$

$$|\Delta| = 9\mu^2 - 26\mu + 16 = 0 \Rightarrow \mu_1 = 2 > 0, \mu_2 = 8/9 > 0 \Rightarrow \text{Yerel min}$$

Çözüm 2 ($x^{(2)} = (x_1, x_2, x_3) = (2, -2, 1)$, $f(x^{(2)}) = 9$) için

$$|\Delta| = 9\mu^2 - 26\mu + 16 = 0 \Rightarrow \mu_1 = 2 > 0, \mu_2 = 8/9 > 0 \Rightarrow \text{Yerel min}$$

Çözüm 3 ($x^{(3)} = (x_1, x_2, x_3) = (14/5, 0, 7/5)$, $f(x^{(3)}) = 9.8$) için

$$|\Delta| = 5\mu^2 - 6\mu - 8 = 0 \Rightarrow \mu_1 = 2 > 0, \mu_2 = -0.8 < 0 \Rightarrow \text{Extremum yok}$$

Çözüm 1 ve çözüm 2'nin amaç fonksiyonu değerleri eşit olduğundan bu noktalardan birisi seçilir.

Yöneylem Araştırması II

78

Kısıtları eşitlik şeklinde olan DOP Modelleri için Lagrange Çarpanları Yöntemi



Örnek 2:

$$\begin{aligned} \max f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1 x_3 - x_2 x_4 \\ \text{s.t.} \quad &-x_1^2 + x_3 - 2x_1 = 0 \\ &-x_2 + x_4 + 1 = 0 \end{aligned}$$

Modelin lagrange fonksiyonu

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda_1, \lambda_2) = x_1 x_3 - x_2 x_4 + \lambda_1 (x_1^2 - x_3 + 2x_1) + \lambda_2 (x_2 - x_4 - 1)$$

Kısıtları eşitlik şeklinde olan DOP Modelleri için Lagrange Çarpanları Yöntemi



Gerek şart

$$\nabla L(x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{bmatrix} x_3 - 2\lambda_1 x_1 + 2\lambda_1 \\ -x_4 + \lambda_2 \\ x_1 - \lambda_1 \\ -x_2 - \lambda_2 \\ x_1^2 - x_3 + 2x_1 \\ x_2 - x_4 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

İlk 4 eşitlikten $x_1 = \lambda_1, x_2 = -\lambda_2, x_3 = -2\lambda_1 - 2\lambda_1^2$ ve $x_4 = \lambda_2$ bulunur. Bu ifadeler son iki eşitlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} (\lambda_1)^2 - (-2\lambda_1 - 2\lambda_1^2) + 2(\lambda_1) &= 3\lambda_1^2 + 4\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \text{ veya } \lambda_1 = -4/3 \\ -1 + (-\lambda_2) - (\lambda_2) &= -1 - 2\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = -1/2 \end{aligned}$$

Buradan, Çözüm 1:

$$x^{(1)} = (x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda_1, \lambda_2) = (0, 1/2, 0, -1/2, 0, -1/2)$$

Çözüm 2:

$$x^{(2)} = (x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda_1, \lambda_2) = (-4/3, 1/2, -8/9, -1/2, -4/3, -1/2)$$

Kısıtları eşitlik şeklinde olan DOP Modelleri için Lagrange Çarpanları Yöntemi



Yeter şart (kısıtlar doğrusal değil, yerel ekstremum):

$$P = \begin{bmatrix} [\nabla g_1(x)]^T \\ [\nabla g_2(x)]^T \end{bmatrix}_{2 \times 4} = \begin{bmatrix} -2x_1 - 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \left\| \frac{\partial L}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H^B = \left[\begin{array}{c|c} 0 & P \\ \hline P^T & Q \end{array} \right]_{6 \times 6} = \left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 0 & -2x_1 - 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ \hline -2x_1 - 2 & 0 & 2\lambda_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Yöneylem Araştırması II

81

Kısıtları eşitlik şeklinde olan DOP Modelleri için Lagrange Çarpanları Yöntemi



Çözüm 1 için $(x^{(1)} = (x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda_1, \lambda_2) = (0, 1/2, 0, -1/2, 0, -1/2))$:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -\mu & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -\mu \end{bmatrix}$$

olmak üzere $|\Delta| = 0$ denklemi çözülünce $\mu_1 = 0$ veya $\mu_1 = -1 < 0$ olduğundan bu noktada yerel ekstremum yoktur.

Çözüm 2 için $(x^{(2)} = (x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda_1, \lambda_2) = (-4/3, 1/2, -8/9, -1/2, -4/3, -1/2))$:

Aynı işlemler bu çözüm için de yapıldığında

$\mu_1 = -4/3 < 0$, $\mu_2 = -4/3 < 0$ bulunur. Dolayısıyla çözüm 2'de amaç fonksiyonu $f(x) = 37/54$ olmak üzere maksimum değerini alır.

Yöneylem Araştırması II

82

Kısıtları eşitsizlik şeklinde olan DOP Modelleri için Kuhn-Tucker Koşulları



- Kuhn-Tucker koşulları bu problemlerin çözümde gerek şart olup lagrange çarpanları yöntemine dayanır.
- Bu koşullar belirli şartlar altında aynı zamanda yeter şarttır (Daha sonra açıklanacak).
- Bu koşulların kullanılabilmesi için tüm eşitsizliklerin (varsa negatif olmama koşulları dahil) “küçük-eşit” formuna çevrilmesi gerekir. Bu amaçla aşağıdaki işlemlerden faydalanılabilir.

$$\begin{array}{lcl}
 h(x) \geq 0 & \longrightarrow & \begin{array}{l} -h(x) \leq 0 \\ -h(x) \leq 0 \end{array} \\
 h(x) = 0 & \longrightarrow & h(x) \leq 0
 \end{array}$$

- Şimdi Kuhn-Tucker koşullarını lagrange çarpanları yöntemini kullanarak çıkartalım.

Yöneylem Araştırması II

83

Kısıtları eşitsizlik şeklinde olan DOP Modelleri için Kuhn-Tucker Koşulları



$$\begin{array}{ll}
 \max / \min & f(x) \quad (x = (x_1, x_2, \dots, x_n)) \\
 \text{s.t.} & g_i(x) \leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)
 \end{array}$$

şimdi ($\leq$) formundaki kısıtları ($=$) formuna çevirebilmek amacıyla kısıtlara S_i^2 gevşek değişkenlerini ekleyelim. Bu işlemden sonra elde edilen aşağıdaki model, yukarıdaki orijinal modele denk olacaktır.

$$\begin{array}{ll}
 \max / \min & f(x) \quad (x = (x_1, x_2, \dots, x_n)) \\
 \text{s.t.} & g_i(x) + S_i^2 = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)
 \end{array}$$

Modelin lagrange fonksiyonu ve gerek şart aşağıdaki şekilde yazılacaktır.

$$L(x, S, \lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i [g_i(x) + S_i^2]$$

$$L(x, S, \lambda) = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x} \\ \frac{\partial L}{\partial S} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} \\ -2\lambda_i S_i \\ -(g_i(x) + S_i^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Yöneylem Araştırması II

84

Kısıtları eşitsizlik şeklinde olan DOP Modelleri için Kuhn-Tucker Koşulları



- İkinci denklem takımı ($\lambda_i S_i = 0$) λ_i , i -nci kısıtın gölge fiyatı olmak üzere doğrusal programlamadaki complementary slackness koşullarına karşılık gelir ve aşağıdaki sonuçlar çıkarılır:
 1. $S_i \neq 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$ olmalı (bağlayıcı olmayan kısıt)
 2. $\lambda_i \neq 0 \Rightarrow S_i = 0$ olmalı (bağlayıcı kısıt)
- Üçüncü denklem takımından ise ($g_i(x) + S_i^2 = 0$) aşağıdaki sonuçlar çıkarılır:
 1. $S_i \neq 0 (S_i^2 > 0) \Rightarrow g_i(x) \neq 0$ olmalı
 2. $S_i = 0 (S_i^2 = 0) \Rightarrow g_i(x) = 0$ olmalı
- İkinci ve üçüncü denklem takımlarından çıkarılan sonuçlar birleştirilirse aşağıdaki gibi tek bir sonuca ulaşılır:

$\left. \begin{array}{l} 1. \quad \lambda_i \neq 0 \Rightarrow S_i = 0 \text{ dolayısıyla } g_i(x) = 0 \\ 2. \quad S_i \neq 0 \text{ dolayısıyla } g_i(x) \neq 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda_i g_i(x) = 0$

Yöneylem Araştırması II

85

Kısıtları eşitsizlik şeklinde olan DOP Modelleri için Kuhn-Tucker Koşulları



- Lagrange fonksiyonuna dikkat edilecek olursa $g_i(x) + S_i^2$ kısıtının sıfır olabilmesi için maksimizasyon probleminde $\lambda_i \geq 0$, minimizasyon probleminde de $\lambda_i \leq 0$ ($-\lambda_i \geq 0$) olmalıdır.
- Belirtilen açıklamalar sonucunda $x^{(1)}$ ve $\lambda^{(1)}$ noktasının ekstremum nokta olabilmesi için Kuhn-Tucker gerek koşulları aşağıdaki gibi özetlenebilir.

Maksimizasyon	$\begin{aligned} \lambda_i^{(1)} &\geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\ \frac{\partial f(x^{(1)})}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i^{(1)} \left[\frac{\partial g_i(x^{(1)})}{\partial x_j} \right] &= 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\ \lambda_i^{(1)} g_i(x^{(1)}) &= 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\ g_i(x^{(1)}) &\leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned}$
Minimizasyon	$\begin{aligned} \lambda_i^{(1)} &\geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\ \frac{\partial f(x^{(1)})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i^{(1)} \left[\frac{\partial g_i(x^{(1)})}{\partial x_j} \right] &= 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\ \lambda_i^{(1)} g_i(x^{(1)}) &= 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\ g_i(x^{(1)}) &\leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned}$

Kısıtları eşitsizlik şeklinde olan DOP Modelleri için Kuhn-Tucker Koşulları



Yeter Koşullar

- Kuhn-Tucker gerek koşullarının aynı zamanda yeter koşul olduğu durumlar aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Optimizasyon yönü	Amaç fonksiyonu	Çözüm uzayı
Maksimizasyon	Konkav	Konveks
Minimizasyon	Konveks	Konveks

- Problem bu koşulları sağlamıyor veya sağladığı bulunamıyorsa verilen bir $x^{(1)}$ noktasının maksimum/minimum nokta olması için A bağlayıcı (aktif) kısıt seti ($\lambda_i \neq 0$) olmak üzere birinci derece yeter koşul aşağıdaki gibidir.

- $i \in A$ için $[\nabla g_i(x^{(1)})]^T d = 0$ koşulunu sağlayan n boyutlu d istikamet vektörü bulunur.
- Bulunan d için:
 - Eğer $d^T \nabla^2 L(x^{(1)}) d > 0 \Rightarrow x^{(1)}$ noktası yerel minimumdur.
 - Eğer $d^T \nabla^2 L(x^{(1)}) d < 0 \Rightarrow x^{(1)}$ noktası yerel maksimumdur.

Kısıtları eşitsizlik şeklinde olan DOP Modelleri için Kuhn-Tucker Koşulları



Örnek 1

$$\begin{aligned} \max f(x_1, x_2, x_3) &= x_1(30 - x_1) + x_2(50 - 2x_2) - 3x_1 - 5x_2 - 10x_3 \\ \text{s.t.} \quad &x_1 + x_2 \leq x_3 \quad \rightarrow x_1 + x_2 - x_3 \leq 0 \\ &x_3 \leq 17.3 \quad \rightarrow x_3 - 17.3 \leq 0 \end{aligned}$$

Modelin kısıtları doğrusal olduğundan çözüm kümesi konvektir. Amaç fonksiyonu konkav ise bulunacak Kuhn-Tucker noktası problemin optimal çözümü olacaktır. Amaç fonksiyonunu düzenlersek:

$$f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 27x_1 - x_2^2 + 45x_2 - 10x_3$$

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} -2x_1 + 27 \\ -2x_2 + 45 \\ -10 \end{bmatrix} \text{ ve } H = \nabla^2 f(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

→ Birinci principal minörler: 0, -2 < 0, -2 < 0

→ İkinci principal minörler: 0, 0, 4 > 0

→ Üçüncü principal minör: 0

Görüldüğü gibi sıfırdan farklı principal minörler $(-1)^k$ işaretine sahip olduğundan amaç fonksiyonu konkavdır.

Kısıtları eşitsizlik şeklinde olan DOP Modelleri için Kuhn-Tucker Koşulları



Problemnin Kuhn-Tucker koşulları

Birinci koşul

$$(1) \lambda_1 \geq 0$$

$$(2) \lambda_2 \geq 0$$

İkinci koşul

$$(3) -2x_1 + 27 - \lambda_1 = 0$$

$$(4) -2x_2 + 45 - \lambda_1 = 0$$

$$(5) -10 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

Üçüncü koşul

$$(6) \lambda_1(x_1 + x_2 - x_3) = 0$$

$$(7) \lambda_2(x_3 - 17.3) = 0$$

Dördüncü koşul

$$(8) x_1 + x_2 - x_3 \leq 0$$

$$(9) x_3 - 17.3 \leq 0$$

Durum 1: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Rightarrow$ Mümkün değil (5) sağlanmaz.

Durum 2: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0 \Rightarrow$ (5)'den $\lambda_2 = -10 \Rightarrow$ (2) sağlanmaz.

Durum 3: $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0 \Rightarrow$ (5)'den $\lambda_1 = 10$, (3)'den $x_1 = 8.5$, (4)'den

$x_2 = 8.75$, (6)'dan $x_3 = 17.25$ bulunur.

$x^{(1)} = (x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda_1, \lambda_2) = (8.5, 8.75, 17.25, 10, 0)$ Kuhn-Tucker koşullarını sağlar, problemin optimal çözümüdür.

Durum 4: $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0 \Rightarrow$ Üçüncü durum optimal çözümü verdi, bu durumu incelemeye gerek yok.

Kısıtları eşitsizlik şeklinde olan DOP Modelleri için Kuhn-Tucker Koşulları



Örnek 2

$$\begin{aligned} \min f(x_1, x_2) &= 4x_1^2 + 3x_2^2 - 10x_1 - 20x_2 \\ \text{s.t.} \quad &2x_1 + 3x_2 \leq 6 \rightarrow 2x_1 + 3x_2 - 6 \leq 0 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \rightarrow -x_1 \leq 0 \\ &\rightarrow -x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

Modelin kısıtları doğrusal olduğundan çözüm kümesi konvektir. Amaç fonksiyonu konveks ise bulunacak Kuhn-Tucker noktası problemin optimal çözümü olacaktır.

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 8x_1 - 10 \\ 6x_2 - 20 \end{bmatrix} \text{ ve } H = \nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ Birinci principal minörler: $6 > 0, 8 > 0$

$\rightarrow$ İkinci principal minör: $48 > 0$

Görüldüğü gibi amaç fonksiyonu konvektir.

Kısıtları eşitsizlik şeklinde olan DOP Modelleri için Kuhn-Tucker Koşulları



Problemnin Kuhn-Tucker koşulları

Birinci koşul

- (1) $\lambda_1 \geq 0$
- (2) $\lambda_2 \geq 0$
- (3) $\lambda_3 \geq 0$

İkinci koşul

- (4) $8x_1 - 10 + 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0$
- (5) $6x_2 - 20 + 3\lambda_1 - \lambda_3 = 0$

Üçüncü koşul

- (6) $\lambda_1(2x_1 + 3x_2 - 6) = 0$
- (7) $\lambda_2(-x_1) = 0$
- (8) $\lambda_3(-x_2) = 0$

Dördüncü koşul

- (9) $2x_1 + 3x_2 - 6 \leq 0$
- (10) $-x_1 \leq 0$
- (11) $-x_2 \leq 0$

Modeldeki karar değişkeni sayısı 2 olduğundan aynı anda en fazla 2 kısıt aktif olabilir. Eşitlik kısıtlarından türetilen kısıtlar ise her zaman aktiftir, yani bağlayıcıdır.

Durum 1: $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0 \Rightarrow$ Mümkün değil, en fazla iki kısıt aktif olabilir.

Durum 2: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0 \Rightarrow$ (4)'den $x_1 = 5/4$, (5)'den $x_2 = 10/3$, (9) sağlanmaz

Durum 3: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 > 0 \Rightarrow$ (4)'den $x_1 = 5/4$, (8)'den $x_2 = 0$, (5)'den $\lambda_3 = -20$, (3) sağlanmaz.

Durum 4: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0 \Rightarrow$ (7)'den $x_1 = 0$, (5)'den $x_2 = 10/3$, (4)'den $\lambda_2 = -10$, (2) sağlanmaz.

Kısıtları eşitsizlik şeklinde olan DOP Modelleri için Kuhn-Tucker Koşulları



Problemnin Kuhn-Tucker koşulları

Birinci koşul

- (1) $\lambda_1 \geq 0$
- (2) $\lambda_2 \geq 0$
- (3) $\lambda_3 \geq 0$

İkinci koşul

- (4) $8x_1 - 10 + 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0$
- (5) $6x_2 - 20 + 3\lambda_1 - \lambda_3 = 0$

Üçüncü koşul

- (6) $\lambda_1(2x_1 + 3x_2 - 6) = 0$
- (7) $\lambda_2(-x_1) = 0$
- (8) $\lambda_3(-x_2) = 0$

Dördüncü koşul

- (9) $2x_1 + 3x_2 - 6 \leq 0$
- (10) $x_1 \leq 0$
- (11) $x_2 \leq 0$

Durum 5: $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0 \Rightarrow$

(4)'den $x_1 = 1/8(10 - 2\lambda_1)$ -----(12)

(5)'den $x_2 = 1/6(20 - 3\lambda_1)$ -----(13)

(12), (13) ve (9)'dan

$$2[1/8(10 - 2\lambda_1)] + 3[1/6(20 - 3\lambda_1)] - 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 13/4$$

(4)'den $x_1 = 7/16$, (5)'den $x_2 = 41/24$

$x^{(1)} = (x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (7/16, 41/24, 13/4, 0, 0)$ Kuhn-Tucker koşullarını sağlar, problemin optimal çözümüdür.

Kısıtları eşitsizlik şeklinde olan DOP Modelleri için Kuhn-Tucker Koşulları



Problemnin Kuhn-Tucker koşulları

Birinci koşul

- (1) $\lambda_1 \geq 0$
- (2) $\lambda_2 \geq 0$
- (3) $\lambda_3 \geq 0$

İkinci koşul

- (4) $8x_1 - 10 + 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0$
- (5) $6x_2 - 20 + 3\lambda_1 - \lambda_3 = 0$

Üçüncü koşul

- (6) $\lambda_1(2x_1 + 3x_2 - 6) = 0$
- (7) $\lambda_2(-x_1) = 0$
- (8) $\lambda_3(-x_2) = 0$

Dördüncü koşul

- (9) $2x_1 + 3x_2 - 6 \leq 0$
- (10) $x_1 \leq 0$
- (11) $x_2 \leq 0$

Durum 6: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0 \Rightarrow$ Durum 5 optimal, incelemeye gerek yok.

Durum 7: $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 > 0 \Rightarrow$ Durum 5 optimal, incelemeye gerek yok.

Durum 8: $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0 \Rightarrow$ Durum 5 optimal, incelemeye gerek yok.

Kısıtları eşitsizlik şeklinde olan DOP Modelleri için Kuhn-Tucker Koşulları



Örnek 3

$$\begin{aligned} \max f(x_1, x_2) &= x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad x_1^2 + x_2^2 &\leq 1 \rightarrow x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0 \end{aligned}$$

Problemnin Kuhn-Tucker koşulları

Birinci koşul

- (1) $\lambda_1 \geq 0$

İkinci koşul

- (2) $1 - 2\lambda_1 x_1 = 0$
- (3) $1 - 2\lambda_1 x_2 = 0$

Üçüncü koşul

- (4) $\lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0$

Dördüncü koşul

- (5) $x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0$

Durum 1: $\lambda_1 = 0 \Rightarrow$ Mümkün değil, (2) sağlanmaz.

Durum 2: $\lambda_1 > 0 \Rightarrow$ (2)'den $x_1 = \frac{1}{2\lambda_1}$, (3)'den $x_2 = \frac{1}{2\lambda_1}$, (4)'den $x_1^2 + x_2^2 = 1$

ve $2\left(\frac{1}{2\lambda_1}\right)^2 = 1 \Rightarrow \lambda_1 = -\sqrt{2}/2$ için (1) sağlanmaz, $\lambda_1 = \sqrt{2}/2$ için

$$x^{(1)} = (x_1, x_2, \lambda_1) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Kısıtları eşitsizlik şeklinde olan DOP Modelleri için Kuhn-Tucker Koşulları



Yeter şart

Durum 2'ye göre birinci kısıt aktif olduğundan $[\nabla g_1(x^{(1)})]^T d = 0$ olmalı.

$d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$, $\nabla g_1(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$, $\nabla g_1(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$ ifadeleri yerine konursa:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow d_2 = -d_1, d = \begin{bmatrix} d_1 \\ -d_1 \end{bmatrix}$$

bulunur. Problemin lagrange fonksiyonu:

$$L(x, S, \lambda) = x_1 + x_2 - \lambda_1 (x_1^2 + x_2^2 - 1 + S_1^2)$$

$$\nabla L(x) = \begin{bmatrix} 1 - 2x_1\lambda_1 \\ 1 - 2x_2\lambda_1 \end{bmatrix}, \nabla^2 L(x) = \begin{bmatrix} -2\lambda_1 & 0 \\ 0 & -2\lambda_1 \end{bmatrix}, \nabla^2 L(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Bu ifadeler yeter koşul $d^T \nabla^2 L(x^{(1)}) d < 0$ ifadesinde yerine konursa:

$$\begin{bmatrix} d_1 & -d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ -d_1 \end{bmatrix} < 0 \quad \left[-\sqrt{2} d_1 \quad \sqrt{2} d_1 \right] \begin{bmatrix} d_1 \\ -d_1 \end{bmatrix} < 0$$

$$-2\sqrt{2}d_1^2 < 0 \Rightarrow \text{Bulunan nokta optimal.}$$