

2. LOJİSTİK ŞEBEKESİ TASARIMI

A series of horizontal lines in teal and light blue colors, with varying lengths and offsets, creating a modern, layered effect across the width of the slide.

Lojistik Şebekesi Tasarımı

- Lojistikte şebeke planlama prosesi, ürünlerin tedarikçilerden talep noktalarına akacağı sistemin tasarlanmasını içerir. Kamu sektöründe ise aynı problem, kullanıcılara hizmet verecek tesis kümesinin belirlenmesi ile ilgilenir. İki durumda da temel sorun yeni tesislerin
 - sayısının,
 - yerinin,
 - içereceği ekipmanın,
 - büyüklüğününbelirlenmesinin yanı sıra mevcut tesislerin
 - kapatılması,
 - yer değiştirmesi,
 - kapasitesinin düşürülmesikararlarının verilmesidir.

Lojistik Şebekesi Tasarımı

- Amaçlar ve kısıtlar sektöre (özel ya da kamu) göre farklılık gösterebilir.
 - Özel sektör:
 - Amaç, tesis kapasitesi ve müşteri servis düzeyi ile ilgili kısıtlar altında yıllık toplam lojistik maliyetini minimize etmektir.
 - Kamu sektörü:
 - Amaç, bütçe kısıtları altında müşterilere hizmet eşitliğinin sağlanmasıdır.

Lojistik Şebekesi Tasarımı

- Yerleşim kararlarına ne zaman ihtiyaç duyulur?
 - Bir lojistik sistemin kurulmasına karar verildiğinde,
 - Talep yapısında ve dağıtım yapılacak yerlerde farklılıklar olduğunda,
 - Malzeme, enerji ve işgücü maliyetlerinde meydana gelen değişiklikleri takiben,
 - Yeni ürünler ya da hizmetler pazara girdiğinde ya da modası geçmiş ürünler pazardan çekildiğinde.

Lojistik Şebekesi Tasarımı

- Yerleşim kararları stratejik ya da taktik olabilir.
 - Tesisler satın alınır ya da kurulur,
 - Tesisler leasing yoluyla kiralanabilir,
 - Tesis alanı ve ekipman kiralanabilir (kamusal ambarlar),
 - Operasyonlar fason yaptırılabilir.

Lojistik Şebekesi Tasarımı

- Yerleşim ve atama kararları birbiriyle ilişkilidir.
 - Yerleşim problemleri tesisin alan sınırlarının tanımlanmasıyla yakından ilişkilidir.
- Yerleşim kararları talebi etkileyebilir
 - Yeni bir RDC'nin açılması daha önce çok uzakta yaşadıkları için yeterli seviyede hizmet alamayan müşterilerin kazanılmasını sağlayabilir.

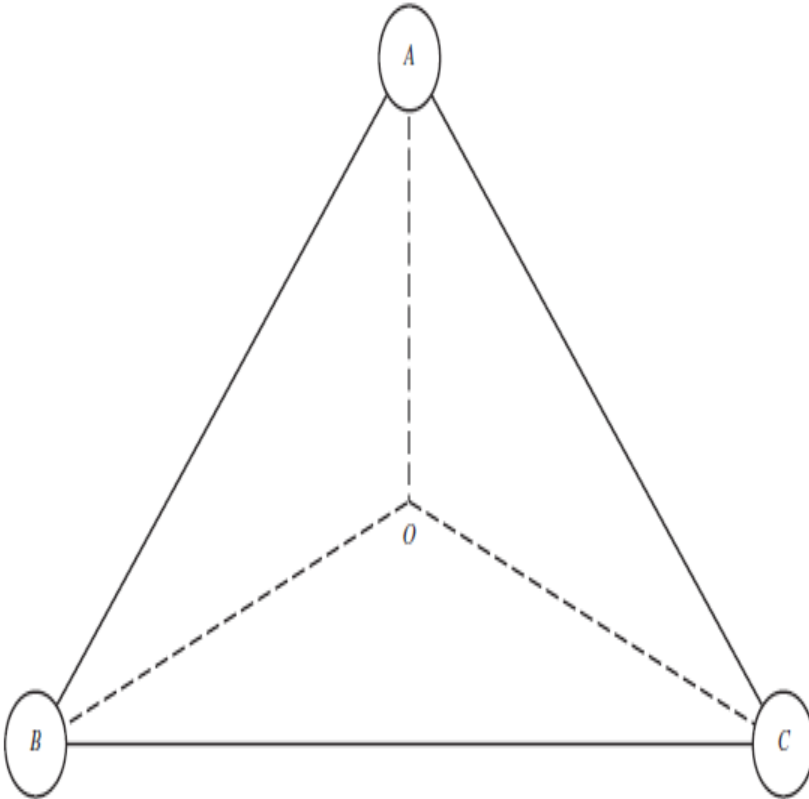
Yerleşim Problemlerinin Sınıflandırılması

- Zaman (Planlama ufku)
 - Tek dönemli/çok dönemli
- Tesis topolojisi
 - Tekli tip/çoklu tip
- Malzeme akışları
 - Tek ürünlü/çok ürünlü
- Tesisler arası etkileşim
 - Aynı tip tesisler arası malzeme akışları olabilir

Yerleşim Problemlerinin Sınıflandırılması

- Baskın malzeme akışları
 - Tek aşamalı/çok aşamalı
- Talep bölünebilirliği
 - Talep bölünebilir/talep bölünemez
- Ulaşımın (nakliyenin) yerleşim kararları üzerindeki etkisi
 - Tam kamyon yükü (full truck load)/eksik kamyon yükü (less than truck load) taşıma

Ulaşımın (nakliyenin) yerleşim kararları üzerindeki etkisi



- Her müşteri tam yük tedarîğe ihtiyaç duyuyorsa, tesisin optimal yerleşimi Steiner noktası O'dadır.
- Tek bir araç tüm noktalara hizmet verebiliyorsa, tesis ABC üçgeninin çevresi boyunca herhangi bir noktada yerleştirilebilir.

Yerleşim Problemlerinde Veri Bütünleştirme

- Yerleşim problemlerinin modellenmesi ve çözülmesi çoğunlukla büyük miktarlarda veri gerektirir.
- Hesaplama zamanlarını ve donanım ihtiyaçlarını kabul edilebilir bir seviyede tutmak için veriler bütünleştirilmelidir.
 - Talep bütünleştirme: müşteriler yerlerine göre (örn: posta kodlarına göre) gruplanabilirler
 - Ürün bütünleştirme: ürünler dağıtım şekillerine ya da ağırlık, hacim, maliyet gibi bir takım özelliklerine göre gruplanabilirler

Yerleşim Problemleri

- Tek aşama tek ürünlü yerleşim problemleri
- İki aşama çok ürünlü yerleşim problemleri
- Kamu sektöründe yerleşim problemleri

Tek Aşama Tek Ürün Yerleşim Problemleri (Single Echelon Single Commodity Location Models)

- Yerleştirilecek tesisler homojen (aynı tip) olmalıdır
- Tesislere giren ya da çıkan malzeme akışları ihmal edilebilir
- Tüm malzeme akışları homojendir bu nedenle tek ürün olarak düşünülebilir
- Taşıma maliyetleri doğrusal ya da parçalı doğrusal ve konkavdır
- Tesis işletim maliyetleri parçalı doğrusal ve konkavdır
- Talep bölünebilir

Tek Aşama Tek Ürün Yerleşim Problemleri

- Problem, iki kümeli tam yönlü bir graf $G(V_1 \cup V_2, A)$ ile modellenenabilir.
- Notasyonlar

Düğümmler

- $V_1 \rightarrow$ potansiyel tesisler
- $V_2 \rightarrow$ müşteriler

Oklar

- $A = V_1 \times V_2$ potansiyel tesislerle talep noktaları arasındaki malzeme akışlarını gösterir

Tek Aşama Tek Ürün Yerleşim Problemleri

Notasyon-devam

- $d_j, j \in V_2 \rightarrow j$ müşterisinin talebi
- $q_i, i \in V_1 \rightarrow$ potansiyel i tesisinin kapasitesi
- $u_i, i \in V_1 \rightarrow$ potansiyel i tesisindeki faaliyet seviyesini ifade eden karar değişkeni
- $s_{ij}, i \in V_1, j \in V_2 \rightarrow i$ tesisinden j talep noktasına giden ürün miktarını (akış miktarı) ifade eden karar değişkeni
- $c_{ij}(s_{ij}), i \in V_1, j \in V_2 \rightarrow s_{ij}$ birim ürünü i tesisinden j müşterisine taşımanın maliyeti
- $F_i(u_i), i \in V_1 \rightarrow$ potansiyel i tesisini u_i seviyesinde çalıştırmanın maliyeti

Tek Aşama Tek Ürün Yerleşim Problemleri

$$\text{Minimize } \sum_{i \in V_1} \sum_{j \in V_2} c_{ij}(s_{ij}) + \sum_{i \in V_1} F_i(u_i) \quad (1)$$

$$\text{Subject to } \sum_{j \in V_2} s_{ij} = u_i \quad i \in V_1 \quad (2)$$

$$\sum_{j \in V_1} s_{ij} = d_j \quad j \in V_2 \quad (3)$$

$$u_i \leq q_i \quad i \in V_1 \quad (4)$$

$$s_{ij} \geq 0 \quad i \in V_1, j \in V_2 \quad (5)$$

$$u_i \geq 0 \quad i \in V_1 \quad (6)$$

Tek Aşama Tek Ürün Yerleşim Problemleri

- Tüm potansiyel tesis-müşteri çiftleri arasındaki bağlantılar uygun olmak zorunda değildir.
 - Yüksek taşıma maliyetli bağlantılar (hizmet kalitesi gereksinimi) dikkate alınmayabilir
 - Bu, ilgili s_{ij} değişkenleri modelden silinerek yapılır
- Bu genel modelde iki özel durum söz konusudur.
 - Doğrusal taşıma maliyetleri ve sabit tesis maliyetleri
 - Doğrusal taşıma maliyetleri ve parçalı doğrusal tesis işletim maliyetleri

SESC-Doğrusal taşıma maliyetleri ve sabit tesis maliyetleri

- Birim akış başına taşıma maliyetleri sabittir.

$$c_{ij}(s_{ij}) = \bar{c}_{ij} \cdot s_{ij}, \quad i \in V_1, j \in V_2$$

- Tesis maliyetleri sadece sabit bir maliyetle tanımlanır.

$$F_i(u_i) = \begin{cases} f_i, & u_i > 0 \\ 0, & u_i = 0 \end{cases} \quad i \in V_1 \quad (7)$$

SESC-Doğrusal taşıma maliyetleri ve sabit tesis maliyetleri

- Modelleme konuları:
 - u_i değişkeni yerine i tesisi açılırsa 1 aksi halde 0 değeri alan y_i değişkeni tanımlanır
 - (7)'yi (tesis işletim maliyetini) şu şekilde yazabiliriz

$$F_i(y_i) = f_i \cdot y_i, \quad i \in V_1$$

- Bu durumda kısıt (2) ve (4) aşağıdaki gibi ifade edilebilir

$$\sum_{j \in V_2} s_{ij} \leq q_i \cdot y_i, \quad i \in V_1$$

SESC-Doğrusal taşıma maliyetleri ve sabit tesis maliyetleri

- Modelleme konuları:
 - Bu yeni değişken seti, kolaylıkla, açılacak tesis sayısı için alt ve üst sınırlar tanımlanmasına izin verir

$$\sum_{i \in V_1} y_i = p$$

- Son olarak, $i \in V_1, j \in V_2$ için X_{ij} değişkenlerini, i tesisi tarafından d_j talebinin karşılanan oranı olarak tanımlarsak

$$\left. \begin{aligned} s_{ij} &= d_j \cdot X_{ij}, & i \in V_1, j \in V_2 \\ u_i &= \sum_{j \in V_2} d_j \cdot X_{ij}, & i \in V_1 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

SESC-Doğrusal taşıma maliyetleri ve sabit tesis maliyetleri

$$\text{Minimize } \sum_{i \in V_1} \sum_{j \in V_2} c_{ij} \cdot X_{ij} + \sum_{i \in V_1} f_i \cdot y_i \quad (9)$$

Subject to

$$\sum_{i \in V_1} X_{ij} = 1, \quad j \in V_2 \quad (10)$$

$$\sum_{j \in V_2} d_j \cdot X_{ij} \leq q_i \cdot y_i, \quad i \in V_1 \quad (11)$$

$$\sum_{i \in V_1} y_i = p, \quad (12)$$

$$0 \leq X_{ij} \leq 1, \quad i \in V_1, j \in V_2, \quad (13)$$

$$y_i \in \{0, 1\}, \quad i \in V_1 \quad (14)$$

where $c_{ij} = \bar{c}_{ij} \cdot d_j, \quad i \in V_1, j \in V_2$

SESC-Doğrusal taşıma maliyetleri ve sabit tesis maliyetleri

- Özel Durum: Kapasitelendirilmiş Tesis Yerleşimi (Capacitated Plant Location-CPL)

$$\text{Minimize } \sum_{i \in V_1} \sum_{j \in V_2} c_{ij} \cdot X_{ij} + \sum_{i \in V_1} f_i \cdot y_i \quad (9)$$

$$\text{Subject to } \sum_{i \in V_1} X_{ij} = 1, \quad j \in V_2 \quad (10)$$

$$\sum_{j \in V_2} d_j \cdot X_{ij} \leq q_i \cdot y_i, \quad i \in V_1 \quad (11)$$

$$X_{ij} \geq 0, \quad i \in V_1, j \in V_2, \quad (13)$$

$$y_i \in \{0, 1\}, \quad i \in V_1 \quad (14)$$

SESC-Doğrusal taşıma maliyetleri ve sabit tesis maliyetleri

- Özel Durum: Basit Tesis Yerleşimi (Simple Plant Location-SPL)

$$\text{Minimize } \sum_{i \in V_1} \sum_{j \in V_2} c_{ij} \cdot X_{ij} + \sum_{i \in V_1} f_i \cdot y_i \quad (9)$$

Subject to

$$\sum_{i \in V_1} X_{ij} = 1, \quad j \in V_2 \quad (10)$$

$$\sum_{j \in V_2} X_{ij} - |V_2| \cdot y_i \leq 0, \quad i \in V_1 \quad (16)$$

$$X_{ij} \geq 0, \quad i \in V_1, j \in V_2, \quad (13)$$

$$y_i \in \{0, 1\}, \quad i \in V_1 \quad (14)$$

SESC-Doğrusal taşıma maliyetleri ve sabit tesis maliyetleri

- Özel Durum: P-medyan Modeli

$$\text{Minimize } \sum_{i \in V_1} \sum_{j \in V_2} c_{ij} \cdot X_{ij} \quad (15)$$

Subject to

$$\sum_{i \in V_1} X_{ij} = 1, \quad j \in V_2 \quad (10)$$

$$\sum_{j \in V_2} X_{ij} - |V_2| \cdot y_i \leq 0, \quad i \in V_1 \quad (16)$$

$$\sum_{i \in V_1} y_i = p, \quad (12)$$

$$X_{ij} \geq 0, \quad i \in V_1, j \in V_2, \quad (13)$$

$$y_i \in \{0, 1\}, \quad i \in V_1 \quad (14)$$

SESC-Doğrusal taşıma maliyetleri ve sabit tesis maliyetleri

- **Talep Tahsisi:** Verilen açık bir tesisler kümesi $(\bar{V}_1 \subseteq V_1)$ için $\bar{V}_1$ 'e optimal talep tahsisi aşağıdaki LP modeliyle belirlenebilir.

$$\text{Minimize } \sum_{i \in \bar{V}_1} \sum_{j \in V_2} c_{ij} \cdot X_{ij} \quad (17)$$

Subject to

$$\sum_{i \in \bar{V}_1} X_{ij} = 1, \quad j \in V_2 \quad (18)$$

$$\sum_{j \in V_2} d_j \cdot X_{ij} \leq q_i, \quad i \in \bar{V}_1 \quad (19)$$

$$X_{ij} \geq 0, \quad i \in \bar{V}_1, j \in V_2, \quad (20)$$

SESC-Doğrusal taşıma maliyetleri ve sabit tesis maliyetleri

- Yukarıdaki problemin optimal çözümünde bazı X_{ij}^* değerleri kapasite kısıtı (19) nedeniyle kesirli olabilir, yani $j \in V_2$ düğümlerinin talebi birden fazla $i \in V_1$ düğümü tarafından karşılanabilir.
- Ancak, kapasite kısıtları olmadığında (basit tesis yerleşimi-SPL ve p-medyan modellerindeki gibi) her j düğümünün talebinin en ucuz i tesisi tarafından karşılandığı en az bir optimal çözüm vardır (tek atama özelliği-single assignment property)

SESC-Doğrusal taşıma maliyetleri ve sabit tesis maliyetleri

- Bu çözüm aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$i_j \in \bar{V}_1$$

$$i_j = \arg \min_{i \in \bar{V}_1} c_{ij}$$

şartına uyan bir tesis olsun

$$X_{ij}^* = \begin{cases} 1, & i = i_j \text{ ise} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

kuralı uygulanarak
değişkenlerin değerleri
belirlenebilir.

SESC-Doğrusal taşıma maliyetleri ve konkav parçalı doğrusal tesis işletme maliyetleri

- Şimdiye kadar tesis işletme maliyetleri sadece sabit maliyetlerle karakterize edilmişti.
- Eğer bir tesisin maliyeti faaliyet seviyesine bağlı ise, işletim maliyetleri parçalı doğrusal olduğu sürece, problemi hala bir MIP olarak modelleyebiliriz.
- Bu durumda, problem, kukla potansiyel tesisler (kukla değişkenler) kullanarak ve maliyetleri ve kapasiteleri uygun bir şekilde tanımlayarak daha önce verilen SESC modeline dönüştürülebilir.
- Aşağıda 3 özel durum tartışılmıştır.

SESC-Doğrusal taşıma maliyetleri ve konkav parçalı doğrusal tesis işletme maliyetleri

- Durum A
- $i \in V_1$ tesisinin işletim maliyeti aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$F_i(u_i) = \begin{cases} f_i + g_i \cdot u_i, & \text{if } u_i > 0 \\ 0, & \text{if } u_i = 0 \end{cases} \quad i \in V_1$$

$$u_i = \sum_{j \in V_2} d_j \cdot X_{ij} \quad \text{ile ifade ediliyordu.}$$

SESC-Doğrusal taşıma maliyetleri ve konkav parçalı doğrusal tesis işletme maliyetleri

- Bu durumda, standart SESC modelinde amaç fonksiyonu yerine

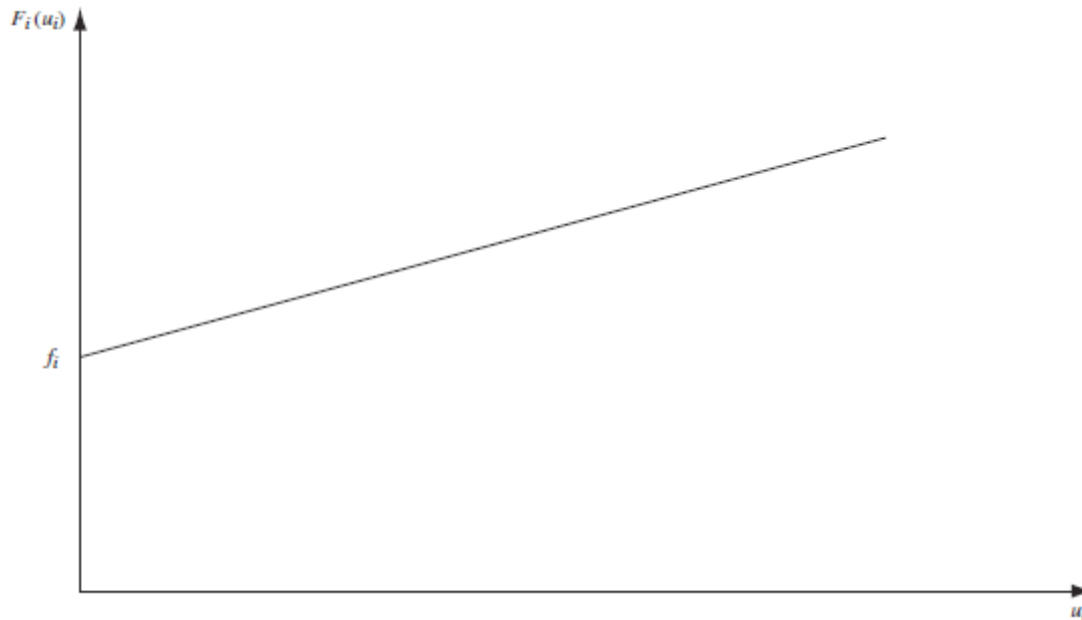
$$\sum_{i \in V_1} \sum_{j \in V_2} t_{ij} \cdot X_{ij} + \sum_{i \in V_1} f_i \cdot y_i \quad (*)$$

denklemini yazabiliriz.

$$t_{ij} = c_{ij} + g_i \cdot d_j, \quad i \in V_1, j \in V_2$$

Amaç fonksiyonu dışında, modelin geri kalanında bir değişiklik yoktur.

SESC-Doğrusal taşıma maliyetleri ve konkav parçalı doğrusal tesis işletme maliyetleri

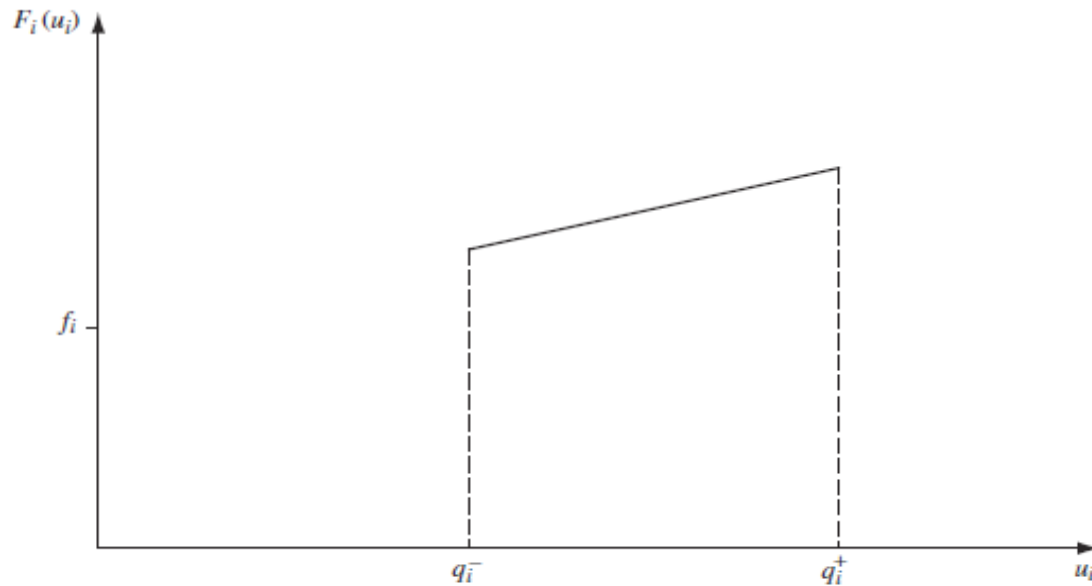


$i \in V_1$ potansiyel tesisinin u_i faaliyet seviyesine göre işletim maliyeti (Durum A)

SESC-Doğrusal taşıma maliyetleri ve konkav parçalı doğrusal tesis işletme maliyetleri

- Durum B
- Bu durumda, faaliyet seviyesi q_i^- değerinin altında ya da q_i^+ eşliğinin üstünde olan bir tesis için ekonomik olarak etkin çalıştırılamıyordur. Aradaki değerler için işletim maliyeti doğrusal olarak artmaktadır.
- Bu durum, standart SESC modelinin kapasite kısıtı
$$\sum_{j \in V_2} d_j \cdot X_{ij} \leq q_i \cdot y_i, \quad i \in V_1$$
 yerine
$$q_i^- \cdot y_i \leq \sum_{j \in V_2} d_j \cdot X_{ij} \leq q_i^+ \cdot y_i, \quad i \in V_1$$
 kısıtı yazılarak modellenenebilir.
- Maliyet Durum A için hesaplandığı gibi hesaplanır.

SESC-Doğrusal taşıma maliyetleri ve konkav parçalı doğrusal tesis işletme maliyetleri



$i \in V_1$ potansiyel tesisinin u_i faaliyet seviyesine göre işletim maliyeti (Durum B)

SESC-Doğrusal taşıma maliyetleri ve konkav parçalı doğrusal tesis işletme maliyetleri

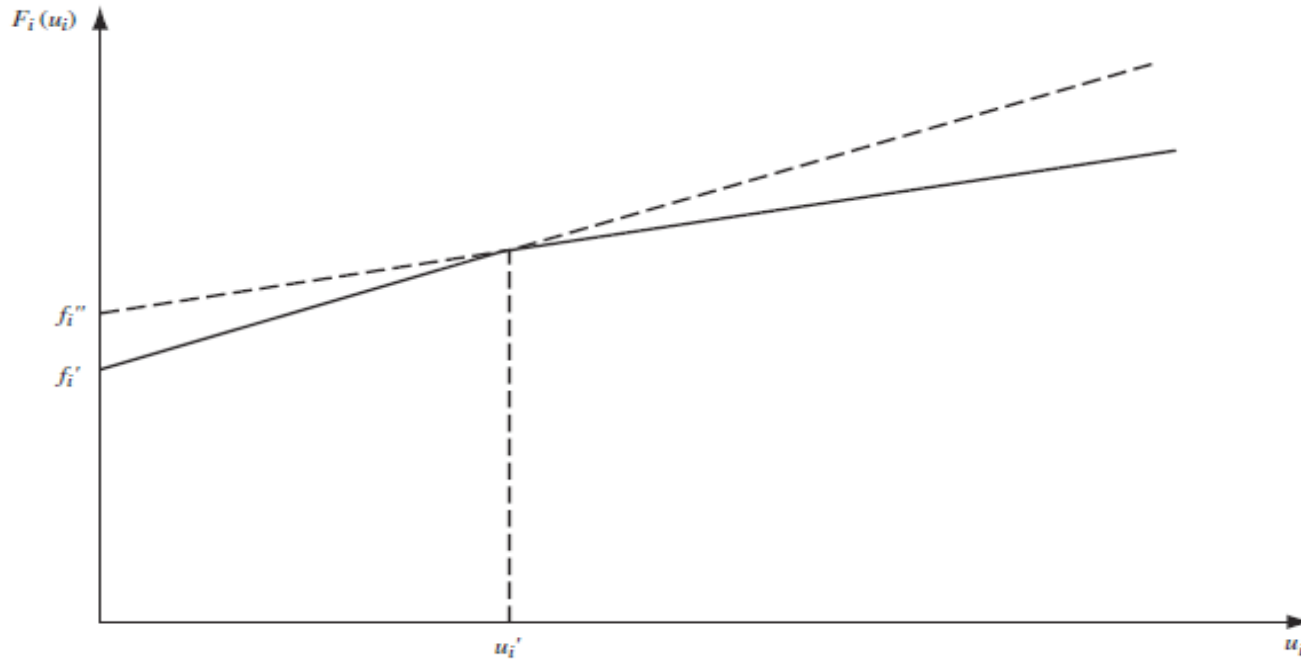
- Durum C
- Ölçek ekonomisi nedeniyle, $i \in V_1$ potansiyel tesisinin işletme maliyeti $F_i(u_i)$, tesisin faaliyet seviyesinin konkav parçalı doğrusal fonksiyonudur.
- Farklı faaliyet seviyeleri için farklı değişken ve sabit maliyetler söz konusudur. En basit durumda sadece iki parçalı doğru vardır.

$$F_i(u_i) = \begin{cases} f_i'' + g_i'' \cdot u_i, & \text{if } u_i > u_i' \\ f_i' + g_i' \cdot u_i, & \text{if } 0 < u_i \leq u_i' \\ 0, & \text{if } u_i = 0 \end{cases} \quad i \in V_1$$

SESC-Doğrusal taşıma maliyetleri ve konkav parçalı doğrusal tesis işletme maliyetleri

- Burada $f'_i < f''_i$ ve $g'_i > g''_i$ dir.
- Bu problemi modellemek için her potansiyel tesis, maliyet fonksiyonundaki parçalı doğrular kadar yapay tesisle değiştirilir.
- Örneğin, eğer yukarıdaki maliyet fonksiyonu tutuyorsa, $i \in V_1$ tesisi işletme maliyetleri, sırasıyla f'_i ve f''_i sabit maliyetleri ve g'_i ve g''_i marjinal maliyetleri ile karakterize edilen i' ve i'' tesisleriyle değiştirilir.
- Bu yolla problem, durum A'da olduğu gibi modellenebilir, çünkü her optimal çözümde yapay tesislerden sadece biri seçilir.

SESC-Doğrusal taşıma maliyetleri ve konkav parçalı doğrusal tesis işletme maliyetleri



$i \in V_1$ potansiyel tesisinin u_i faaliyet seviyesine göre işletim maliyeti (Durum C)

Kamu Sektöründe Lojistik Tesis Yerleşimi

- İtfaiye ve ambulans istasyonlarının yerleşimi
- Bu tip sistemlerde sadece parasal amaçlar (maliyet minimizasyonu gibi) dikkate alınamaz. Bir kamusal hizmet sisteminde tüm kullanıcılar için yeterli bir servis düzeyi sağlamak önemlidir.
- Böyle durumlarda belli modeller kullanılır.
 - P-merkez (P-center) modelleri
En dezavantajlı kullanıcının servis zamanı minimize edilir.
 - Bölge kaplama (location-covering) modelleri
Her kullanıcının önceden belirlenmiş bir maksimum ulaşım zamanı içinde ulaşılabileceği minimum maliyetli tesis kümesi belirlenmektedir.

P-merkez modelleri

- P-center modelinde amaç, bir graf üzerindeki p adet tesisi, bir kullanıcıdan en yakın tesise maksimum seyahat zamanını minimize edecek şekilde yerleştirmektir.
- Minimax problemi olarak da bilinir, çünkü amaç talep ve talebe en yakın tesis arasındaki maksimum uzaklığı minimize etmektir.
- P-center modelleri geniş bir coğrafi alana yayılmış kullanıcılara eşit hizmet sağlanması gerektiği durumlarda uygulama alanı bulur.

P-merkez modelleri

P-center problemlerinde iki durum söz konusudur.

- Mutlak merkez problemleri (absolute center problems)
 - Tesisler, şebeke üzerinde herhangi bir yere (şebekenin düğümleri ya da dalları/ayrıtları) yerleştirilebilirler.
- Düğüm merkez problemleri (vertex center problems)
 - Tesislerin, sadece düğümler üzerine yerleştirilebildiği problemler.

* Mutlak merkez problemlerinin çözümü, düğüm merkez problemlerinin çözümünden daha iyi sonuç verebilir.

Düğüm P-merkez formülasyonu

Girdiler:

d_{ij} : i talep düğümünden j aday tesis yerine uzaklık

h_i : i düğümündeki talep

P : yerleştirilecek tesis sayısı

Karar değişkenleri:

$$X_j = \begin{cases} 1, & \text{aday } j \text{ düğümüne tesis kurulursa} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

Y_{ij} : i düğümü talebinin j düğümüne kurulmuş tesis tarafından karşılanan oranı

W : bir talep noktası ile en yakın tesis arasındaki maksimum uzaklık

Düğüm P-merkez formülasyonu

$$\text{Minimize } W \quad (1)$$

Subject to

$$\sum_j Y_{ij} = 1, \quad \forall i \quad (2)$$

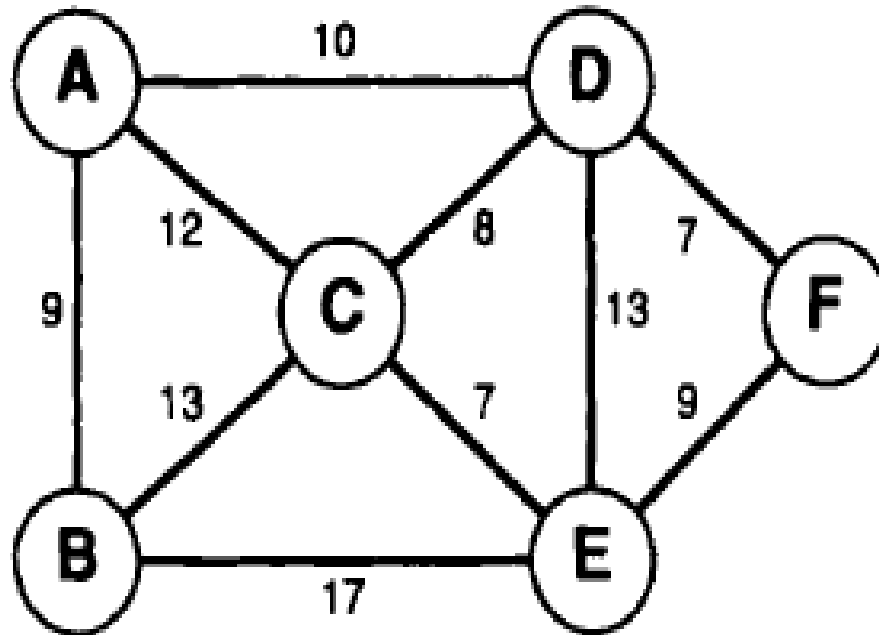
$$\sum_j X_j = P \quad (3)$$

$$Y_{ij} \leq X_j, \quad \forall i, \forall j \quad (4)$$

$$W \geq \sum_j d_{ij} \cdot Y_{ij}, \quad \forall i \quad (5)$$

$$X_j \in \{0,1\} \quad \forall j \quad (6), \quad Y_{ij} \geq 0, \quad \forall i, \forall j \quad (7)$$

Düğüm P-merkez formülasyonu - Örnek (Daskin (2013), sayfa 195)



$$P = 2$$

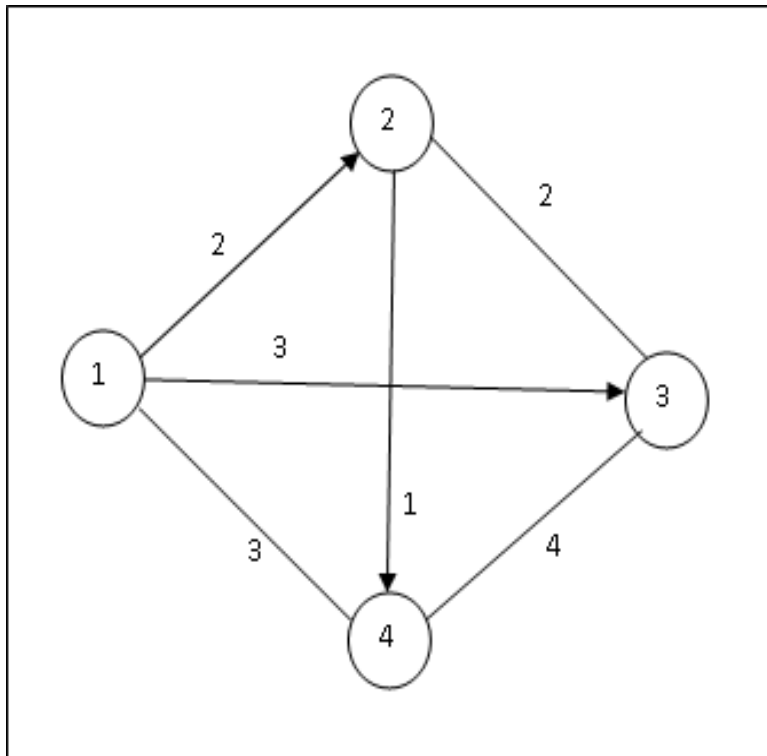
Genel Graf Üzerinde Düğüm 1-merkez

- Düğüm merkez, düğüm-düğüm arası uzaklıkların maksimumunun minimize edilmesiyle bulunur. Bunun anlamı, merkez, kendisinden en uzak düğümün mümkün olduğu kadar yakın olduğu bir düğümdür.

$d(i, j)$: i düğümünden j düğüme en kısa yolun uzaklığı olsun (düğüm-düğüm uzaklık matrisi Floyd ya da Dantzig algoritması kullanılarak hesaplanabilir)

$MVV(i)$: Herhangi bir i düğümünün herhangi bir düğümden maksimum uzaklığı. $MVV(i)$, D matrisinin (uzaklık matrisi) i satırındaki en büyük elemandır. Merkez ise $MVV(x)$ 'in en küçük maksimum değere sahip düğümdür.

Genel Graf Üzerinde Düğüm 1-merkez



$$D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Genel Graf Üzerinde Düğüm 1-merkez

$$MVV(1) = \max\{0,2,3,3\} = 3$$

$$MVV(2) = \max\{4,0,2,1\} = 4$$

$$MVV(3) = \max\{6,2,0,3\} = 6$$

$$MVV(4) = \max\{3,5,4,0\} = 5$$

Dolayısıyla, $\min_i MVV(i) = \min\{3,4,6,5\} = 3 = MVV(1)$

Sonuç olarak, düğüm 1 grafın merkezidir. Düğüm 1'den en uzak düğüm 3 birim uzaklıktadır.

Genel Graf Üzerinde Mutlak 1-merkez

- Çözüm yöntemine geçmeden önce bazı tanımlara ihtiyaç vardır.
- Dikkate alınan G grafindaki düğümleri 1'den n 'e kadar numaralandırın. Uzunluğu $a(i, j) > 0$ olarak verilen herhangi bir (i, j) kenarını ele alın. (i, j) kenarındaki f -noktası (i, j) dalının i düğümünden $f \cdot a(i, j)$ birim ve j düğümünden $(1-f) \cdot a(i, j)$ birim uzaklıktaki noktasını gösterebilir ($0 \leq f \leq 1$).
- (i, j) kenarının 0-noktası i düğümü, 1-noktası j düğümüdür.

Genel Graf Üzerinde Mutlak 1-merkez

- $d(i, j)$: i düğümünden j düğümüne en kısa yolun uzunluğu
- D : (i, j) elemanı $d(i, j)$ olan $n \times n$ matris (D 'nin elemanları düğüm-düğüm uzaklıklardır)
- $d(f_ (r, s), j)$: (r, s) kenarı üzerindeki f noktasından j düğümüne en kısa yolun uzunluğu

(r, s) kenarı yönsüz ise, yani iki doğrultuda da seyahate izin veriliyorsa, bu uzaklık aşağıdaki iki uzaklığın küçük olanıdır.

Genel Graf Üzerinde Mutlak 1-merkez

- a) f -noktasından r düğümüne uzaklık + r düğümünden j düğümüne uzaklık
- b) f -noktasından s düğümüne uzaklık + s düğümünden j düğümüne uzaklık

Böylece;

$$d(f_ (r, s), j) = \min\{f \cdot a(r, s) + d(r, j), (1 - f) \cdot a(r, s) + d(s, j)\} \quad (1a)$$

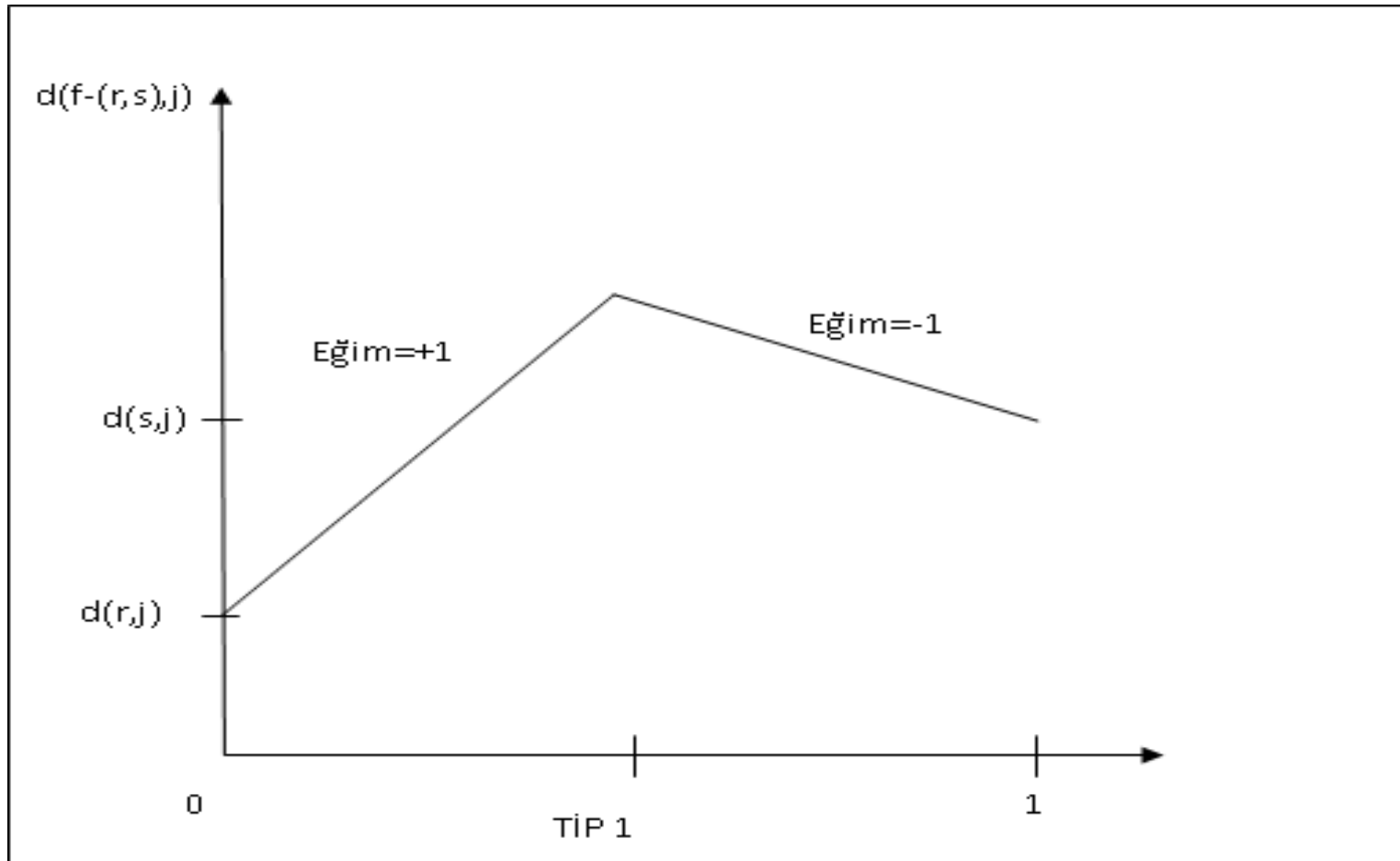
Eğer (r, s) yönlü bir dal ise, sadece r 'den s 'ye seyahate izin veriliyor ise, yukarıdaki minimizasyon ifadesinde ilk terim yok edilir

$$d(f_ (r, s), j) = (1 - f) \cdot a(r, s) + d(s, j) \quad (1b)$$

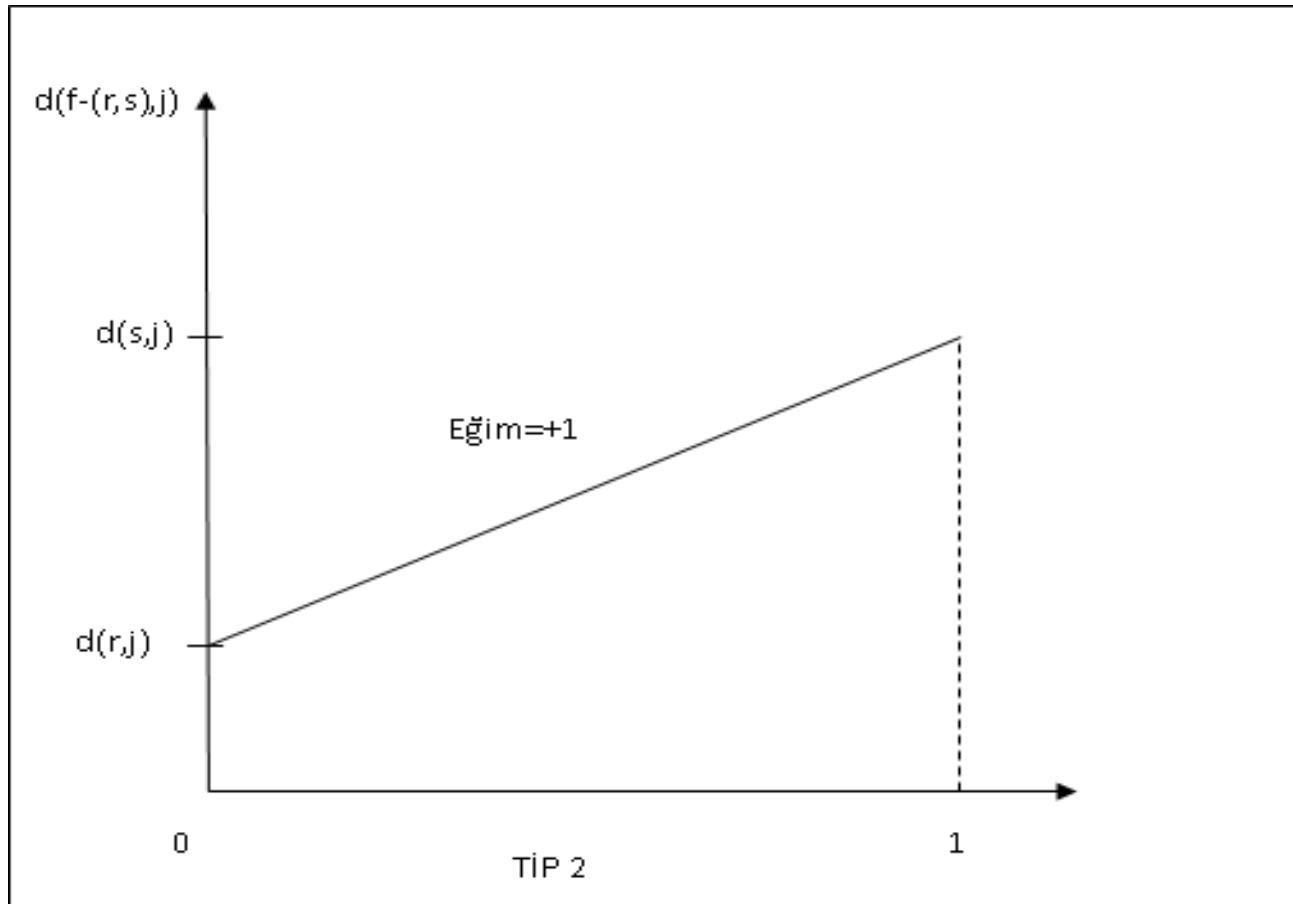
Genel Graf Üzerinde Mutlak 1-merkez

- Tüm nokta düğüm uzaklıklarını hesaplamak için sadece kenar uzunluklarına ve D matrisine ihtiyaç vardır.
- f 'in bir fonksiyonu olarak grafiği çizildiğinde, verilen bir (r,s) kenarı ve j düğümü için nokta-düğüm uzaklığı aşağıdaki 3 formdan birini almak zorundadır.
- Bu parçalı doğrusal eğrinin eğimi ya $+1$ ya da -1 'dir ve eğim $+1$ 'den -1 'e en fazla bir değişim yapar.

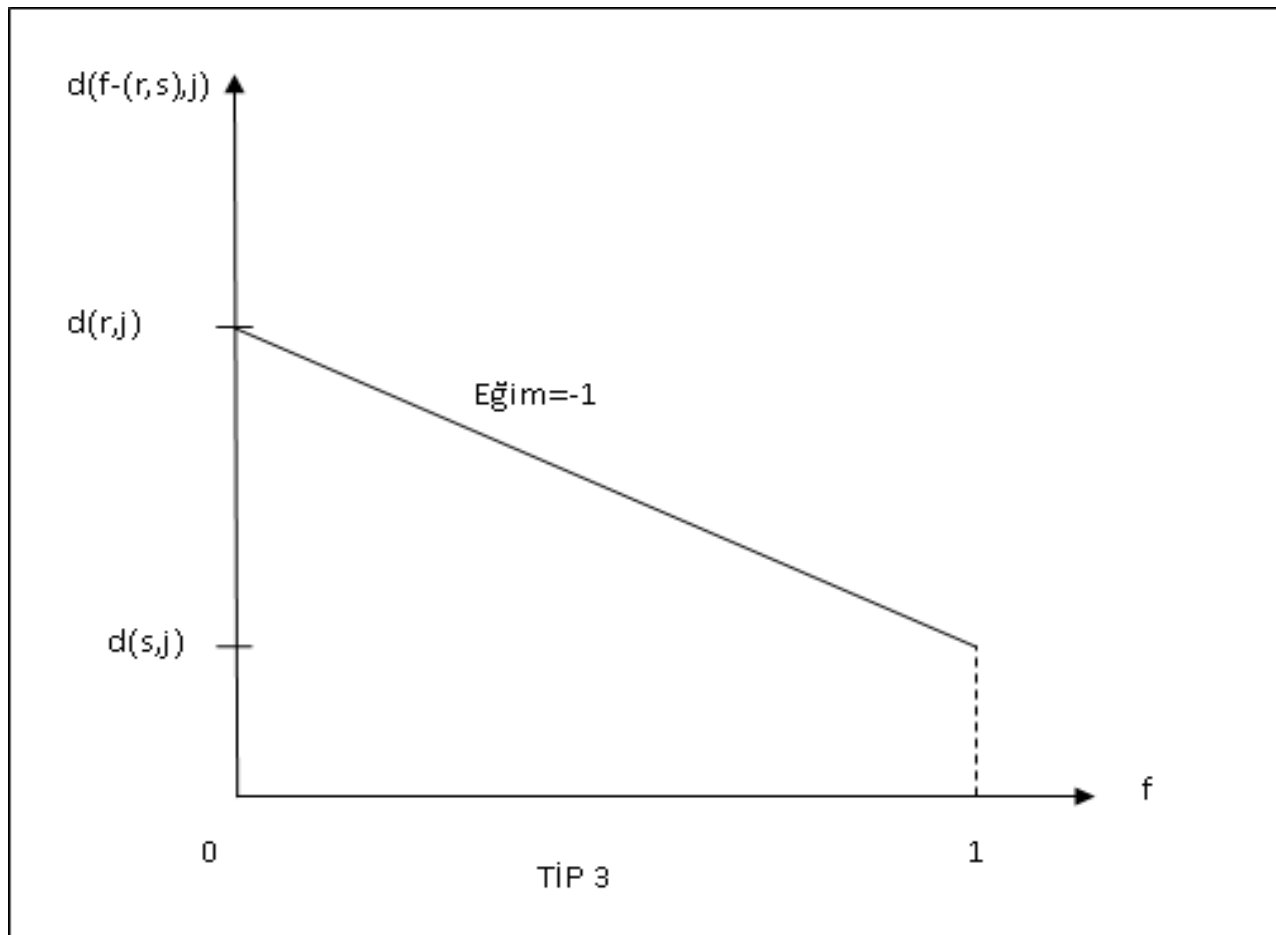
Genel Graf Üzerinde Mutlak 1-merkez



Genel Graf Üzerinde Mutlak 1-merkez



Genel Graf Üzerinde Mutlak 1-merkez



Genel Graf Üzerinde Mutlak 1-merkez

- Mutlak merkez problemi, düğüm merkez probleminden daha zordur çünkü sadece düğümler değil tüm noktalar dikkate alınmalıdır.
- Yönlü bir dalın (kenarın) iç bir noktası mutlak merkez olamaz. Yönlü bir dal üzerindeki tüm seyahat tek yönde olacağından, yönlü dalın ucundaki düğüm graftaki her bir düğüme yönlü dalın iç noktasından daha yakın olacaktır.
- Sonuç olarak, mutlak merkezi araştırırken sadece düğümleri ve yönsüz dalların iç noktalarını dikkate almamız gerekir.

Genel Graf Üzerinde Mutlak 1-merkez

- Herhangi bir yönsüz dal (r, s) üzerindeki f -noktasından j düğümüne $d(f(r, s), j)$ uzaklığı (1a) eşitliği ile elde edilir.
- Bu uzaklığın f 'in bir fonksiyonu olarak çizimi , grafik en fazla iki parça içeren doğrusal bir yapıda olacağı için kolaydır.

Mutlak 1-merkez problemi Hakimi (1964) tarafından önerilen aşağıdaki algoritma ile çözülebilir.

Genel Graf Üzerinde Mutlak 1-merkez

Adım 1: *Seyahat zamanının hesaplanması.* Her (r, s) kenarı ve her düğüm için, j düğümünden (r, s) kenarının f noktasına seyahat zamanını (uzaklığını) belirle.

$$d(f_{-}(r, s), j) = \min\{f \cdot a(r, s) + d(r, j), (1 - f) \cdot a(r, s) + d(s, j)\}$$

Bunu yaparken, $0 \leq f \leq 1$ tüm f 'ler ve tüm j 'ler için $d(f_{-}(r, s), j)$ 'nin grafiği çizilir.

Adım2: *Yerel merkezin bulunması.* Her (r, s) kenarı için, (r, s) kenarı üzerindeki yerel merkez f^* en dezavantajlı düğümünden seyahat zamanı (uzaklık) minimize edilerek belirlenir.

Yani, tüm çizilen grafiklerin üst kısmının minimum değerini aldığı f^* mutlak merkez için (r, s) kenarı üzerindeki en iyi adaydır.

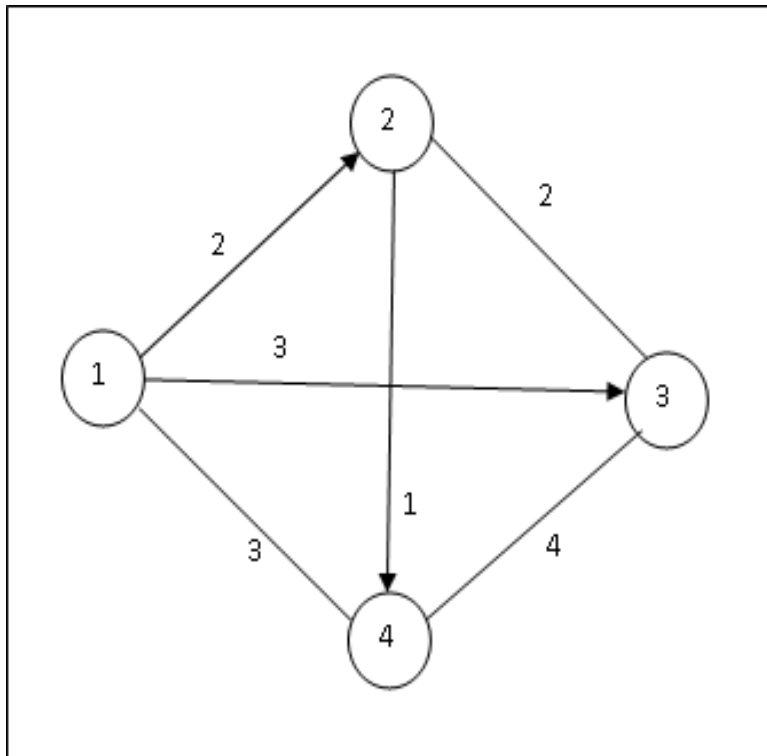
Genel Graf Üzerinde Mutlak 1-merkez

Adım 3: *1-merkezin belirlenmesi.* Mutlak merkez, en uzaktaki düğüme minimum uzaklıktaki aday $f^*-(r, s)^*$ noktasıdır.

$$\max_j \{d(f^*-(r, s)^*, j)\} = \min_{(t,u)} \left\{ \max_j d(f^*-(t, u), j) \right\}$$

* Her kenar üzerindeki adayın seçimi kenar üzerindeki noktaların fonksiyonu olarak tüm nokta düğüm uzaklıklarının grafiğinin çizilmesini gerektirir. Bu nispeten az karışık bir iştir. Çünkü bu uzaklık fonksiyonları en fazla iki parçadan oluşan parçalı doğrusal eğrilerdir.

Genel Graf Üzerinde Mutlak 1-merkez: ÖRNEK



$$D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Genel Graf Üzerinde Mutlak 1-merkez: ÖRNEK

İlk önce, $(3, 4)$ kenarını inceleyelim

$$d(f_{(3,4)}, 1) = \min\{fa(3,4) + d(3,1), (1-f)a(3,4) + d(4,1)\}$$

$$= \min\{4f + 6, 4(1-f) + 3\}$$

$$4f + 6 = 4 - 4f + 3 \rightarrow f = 1/8$$

$$= \begin{cases} 4f + 6 & f \leq 1/8 \\ 7 - 4f & f \geq 1/8 \end{cases}$$

$$d(f_{(3,4)}, 2) = \min\{fa(3,4) + d(3,2), (1-f)a(3,4) + d(4,2)\}$$

$$= \min\{4f + 2, 4(1-f) + 5\}$$

$$4f + 2 = 9 - 4f \rightarrow f = 7/8$$

$$= \begin{cases} 4f + 2 & f \leq 7/8 \\ 9 - 4f & f \geq 7/8 \end{cases}$$

Genel Graf Üzerinde Mutlak 1-merkez: ÖRNEK

$$d(f_{(3,4)}, 3) = \min\{fa(3,4) + d(3,3), (1-f)a(3,4) + d(4,3)\}$$

$$= \min\{4f, 4(1-f) + 4\}$$

$$4f = 8 - 4f \rightarrow f = 1$$

$$= \{4f \quad f \leq 1\}$$

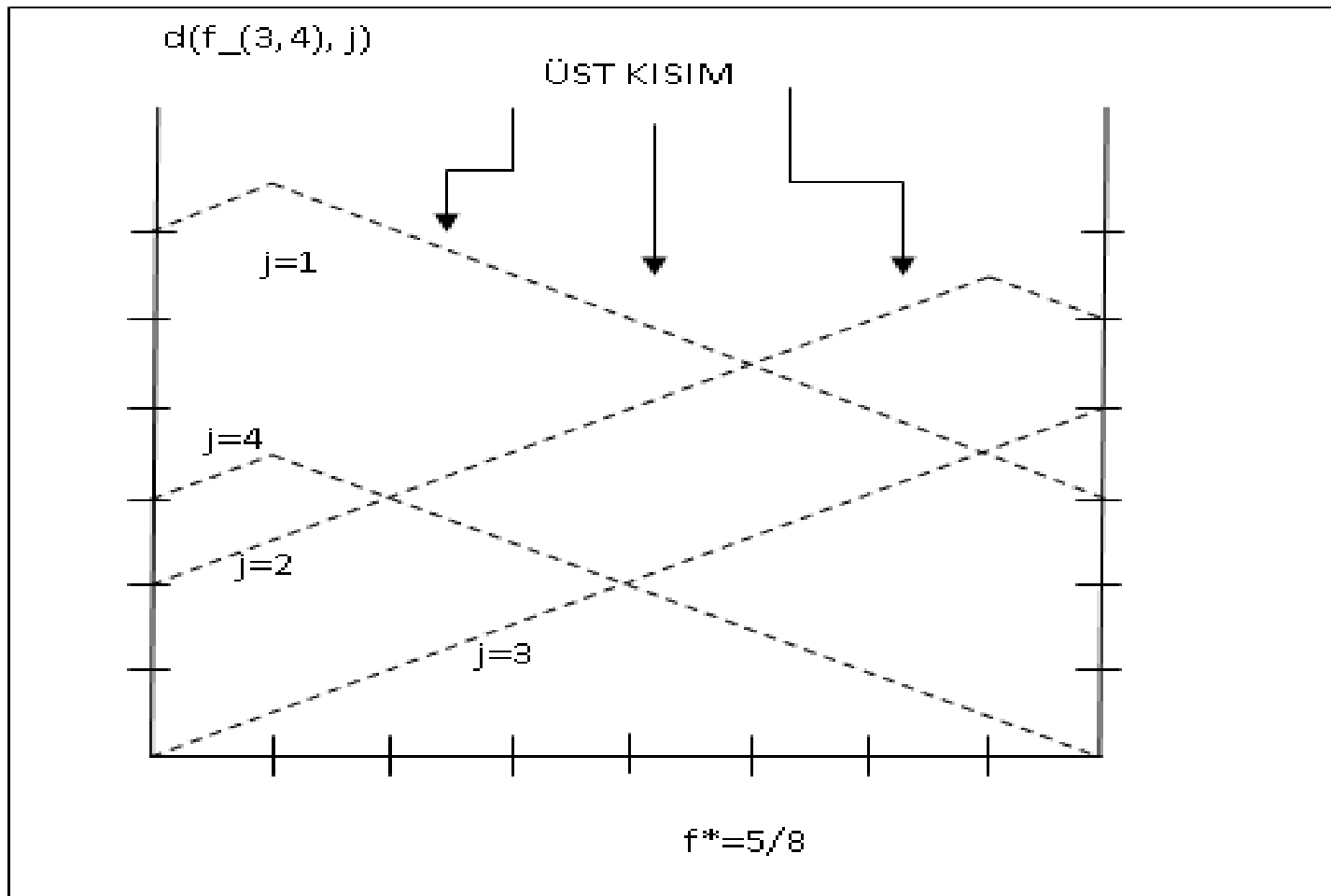
$$d(f_{(3,4)}, 4) = \min\{fa(3,4) + d(3,4), (1-f)a(3,4) + d(4,4)\}$$

$$= \min\{4f + 3, 4(1-f) + 0\}$$

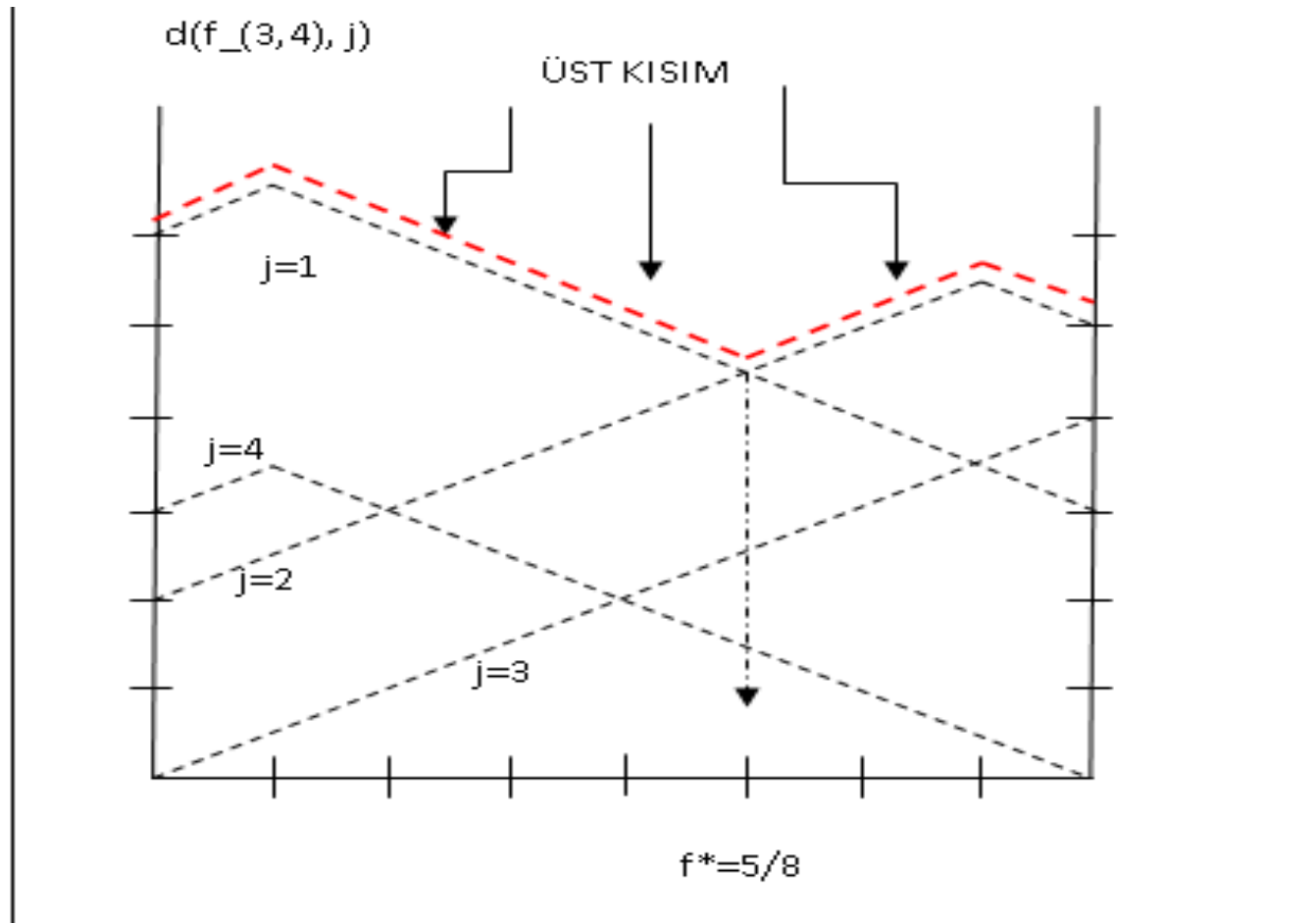
$$4f + 3 = 4 - 4f \rightarrow f = 1/8$$

$$= \begin{cases} 4f + 3 & f \leq 1/8 \\ 4 - 4f & f \geq 1/8 \end{cases}$$

Genel Graf Üzerinde Mutlak 1-merkez: ÖRNEK



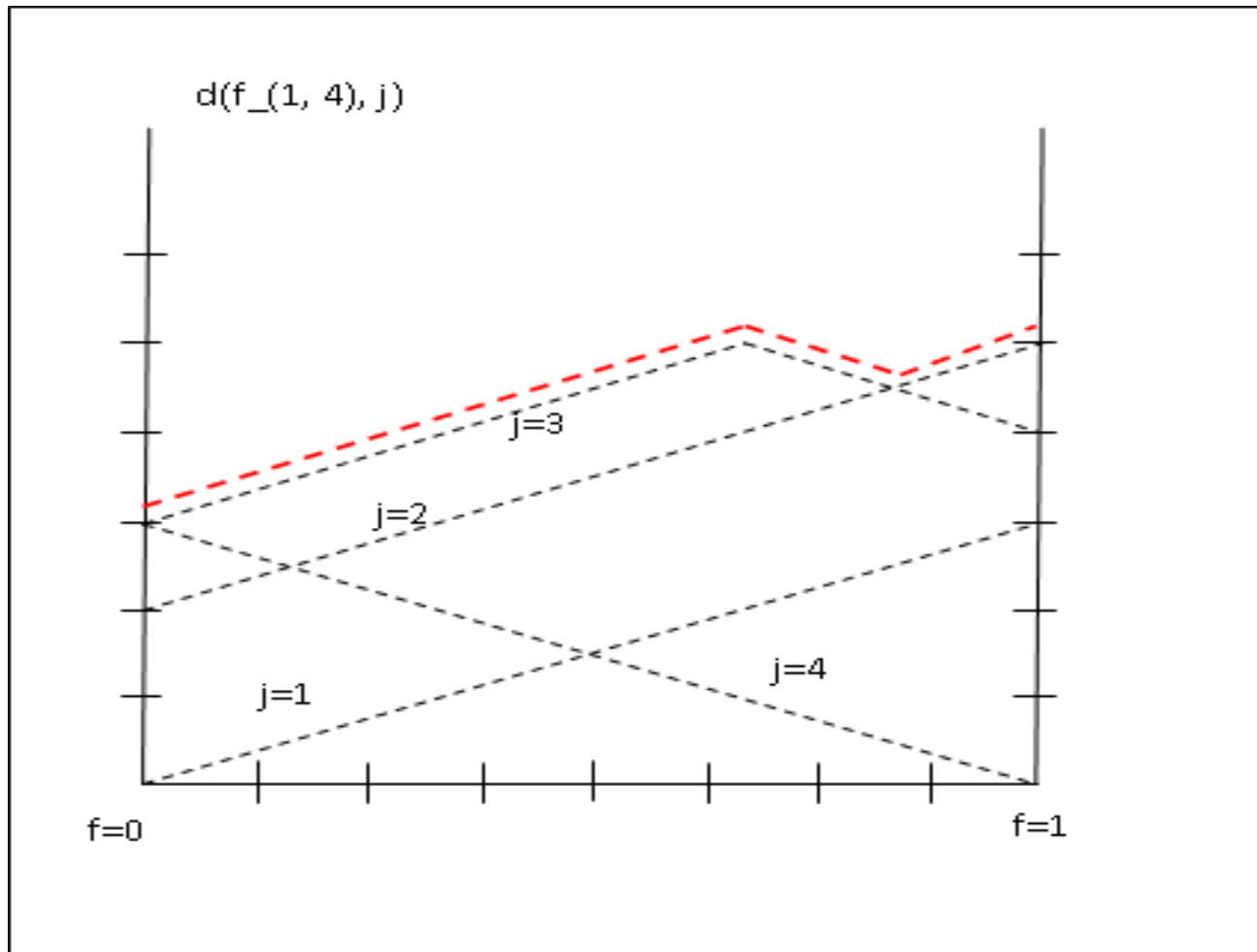
Genel Graf Üzerinde Mutlak 1-merkez: ÖRNEK



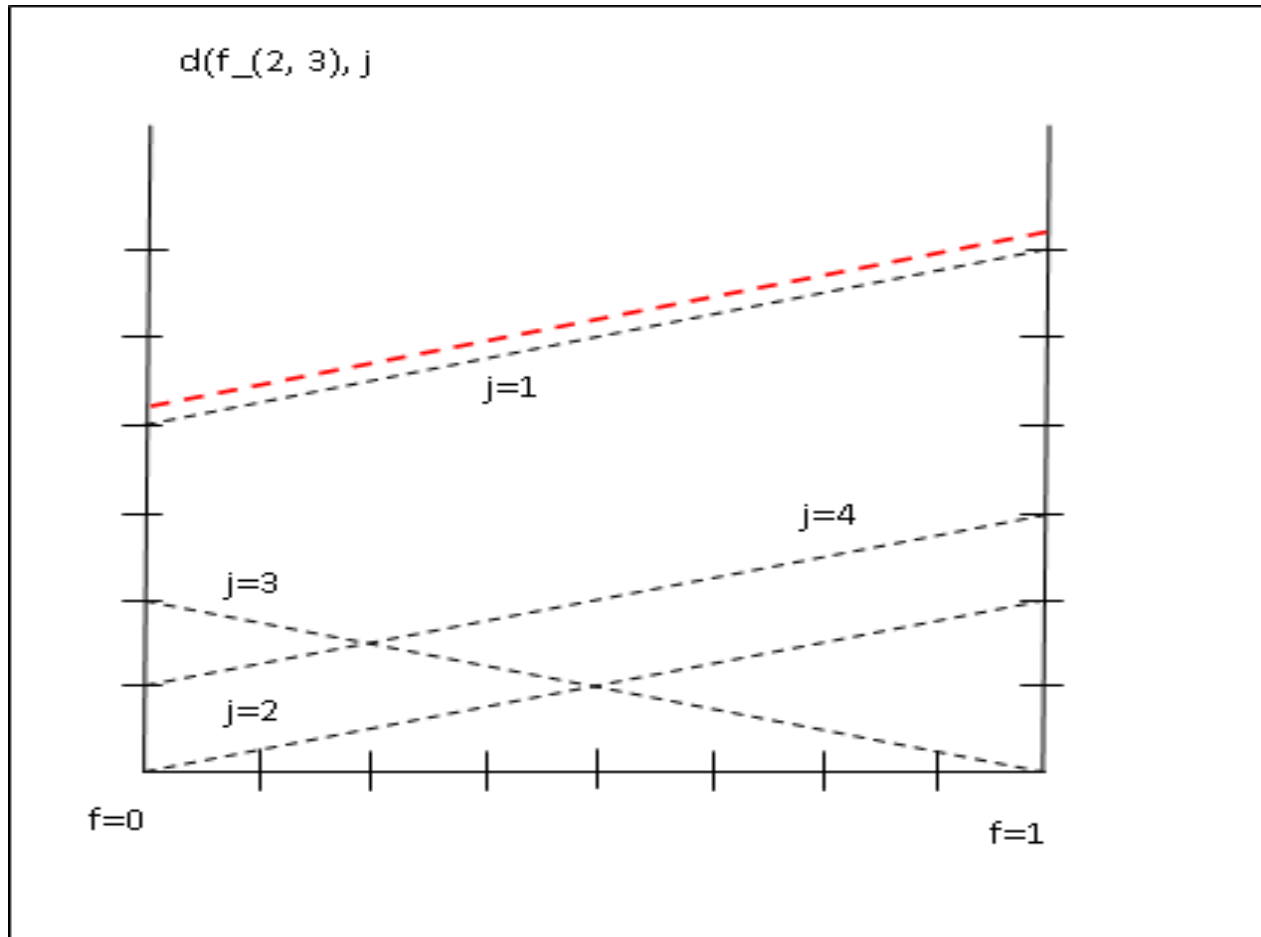
Genel Graf Üzerinde Mutlak 1-merkez: ÖRNEK

- Sonuç olarak, $5/8$ _noktası $(3, 4)$ kenarı üzerindeki mutlak merkez için en iyi adaydır ve hiçbir düğüm $(3, 4)$ kenarının $5/8$ _noktasına 4.5 birimden daha uzak değildir.
- $(1, 4)$ ve $(2, 3)$ kenarları için de uzaklık grafikleri aşağıdaki gibi çizilmiştir.

Genel Graf Üzerinde Mutlak 1-merkez: ÖRNEK



Genel Graf Üzerinde Mutlak 1-merkez: ÖRNEK



Genel Graf Üzerinde Mutlak 1-merkez: ÖRNEK

- $(1, 4)$ kenarı için en iyi aday $o_{\text{noktası}}$ (1 düğüme karşılık gelen) hiçbir düğüme 3 birimden daha uzak değildir.
- $(2, 3)$ kenarı için en iyi aday $o_{\text{noktası}}$ (2 düğüme karşılık gelen) hiçbir düğüme 4 birimden daha uzak değildir.
- Dolayısıyla, Düğüm 1, grafın mutlak merkezidir.

Ağaç Problemleri-Genel Graf Problemleri

- Bir çok gerçek hayat problemi ağaç olarak oldukça iyi ifade edilebilmektedir. Örneğin; eğer şehrin ana bölgelerini çevreleyen yollar tarafından oluşturulan çevrimler ihmal edilirse, bir bölgedeki ana yolları temsil eden dallar bir ağaç oluşturur. Ayrıca, güç aktarım ve telekomünikasyon şebekelerinin ana parçaları - özellikle yerel hizmetlerin dağıtımı için kullanılan kısımları – aslında ağaçtır.
- Bir yerleşim problemi söz konusu olduğunda, bu problemi bir ağaç üzerinde çözmek , daha genel bir şebeke üzerinde çözmekten çok daha kolaydır.

Ağaç Üzerinde Mutlak 1- ve 2- Merkez Problemleri

- Genel bir graf üzerinde P'nin değişken değerleri için mutlak P-merkez problemi NP-complete'dir. Ancak, bir ağaç üzerinde tek bir tesisi yerleştiriyorsak, problemin optimal çözümü için çok etkin algoritmalar mevcuttur.
- Bu bölümde, ağaç üzerinde mutlak 1- ve 2- merkez problemleri için taleplerin dikkate alınmadığı ya da tüm düğümler için eşit olduğu durumda kullanılabilecek yaklaşımlar incelenecektir.

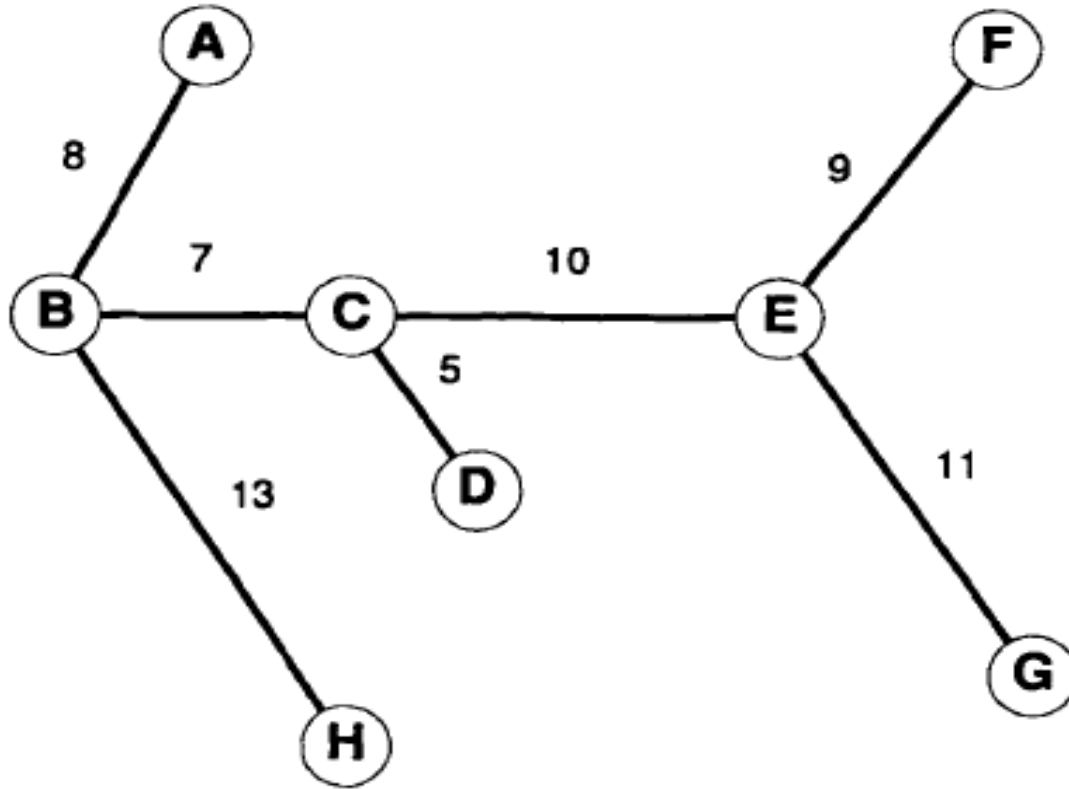
Ağırlıklandırılmamış ağaç üzerinde mutlak 1-merkez Problemi

Adım 1: Ağaç üzerinde herhangi bir nokta seç ve seçilen noktadan en uzak düğümü bul. Bu düğümü e_1 olarak adlandır.

Adım 2: e_1 'den en uzak düğümü bul ve bu düğümü e_2 olarak adlandır.

Adım 3: Ağırlıklandırılmamış ağacın mutlak 1-merkezi (X^*) e_1 - e_2 arasındaki (tek) yolun orta noktasıdır. Ağırlıklandırılmamış ağacın düğüm 1-merkezi (vertex 1-center) mutlak merkeze en yakın düğümdür (Eğer mutlak 1-merkez bir dalın orta noktasıysa bu şartı sağlayan iki düğüm olacaktır).

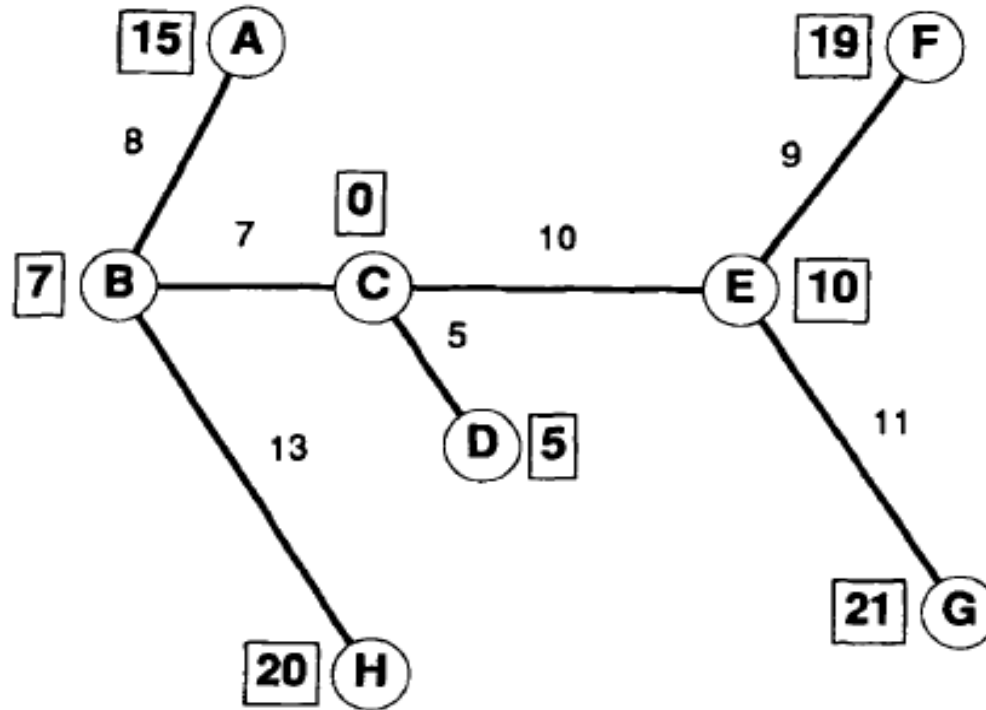
Ağırlıklandırılmamış ağaç üzerinde mutlak 1-merkez Problemi-Örnek



Örnek problemin ağacı

Ağırlıklandırılmamış ağaç üzerinde mutlak 1-merkez Problemi-Örnek

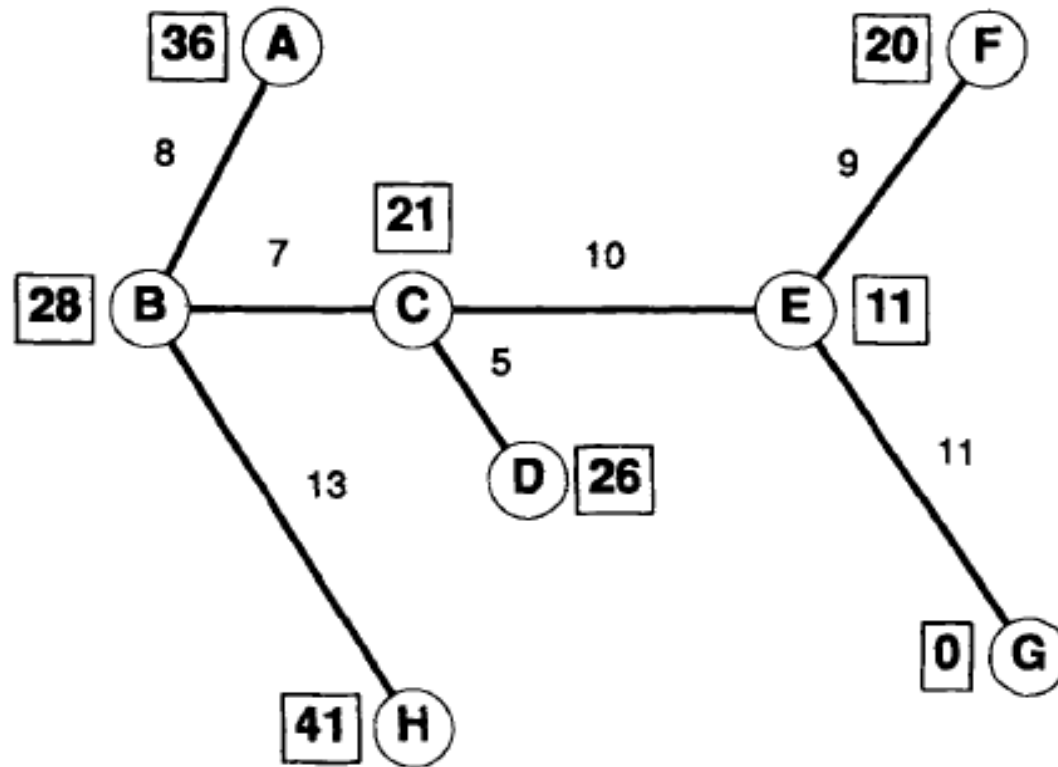
Adım 1:



C noktasından uzaklıklar

Ağırlıklandırılmamış ağaç üzerinde mutlak 1-merkez Problemi-Örnek

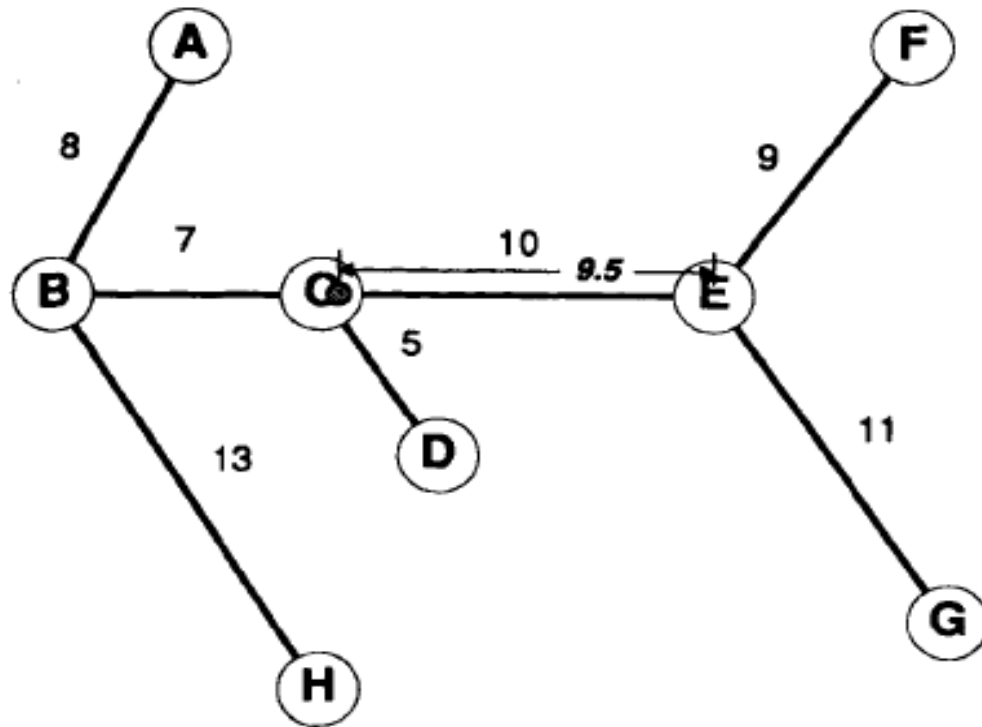
Adım 2:



G noktasından uzaklıklar

Ağırlıklandırılmamış ağaç üzerinde mutlak 1-merkez Problemi-Örnek

Adım 3:



Merkez, CE dalı üzerinde E düğümünden 9.5 birim uzaklıktadır.

Ağırlıklandırılmamış ağaç üzerinde mutlak 2-merkez Problemi

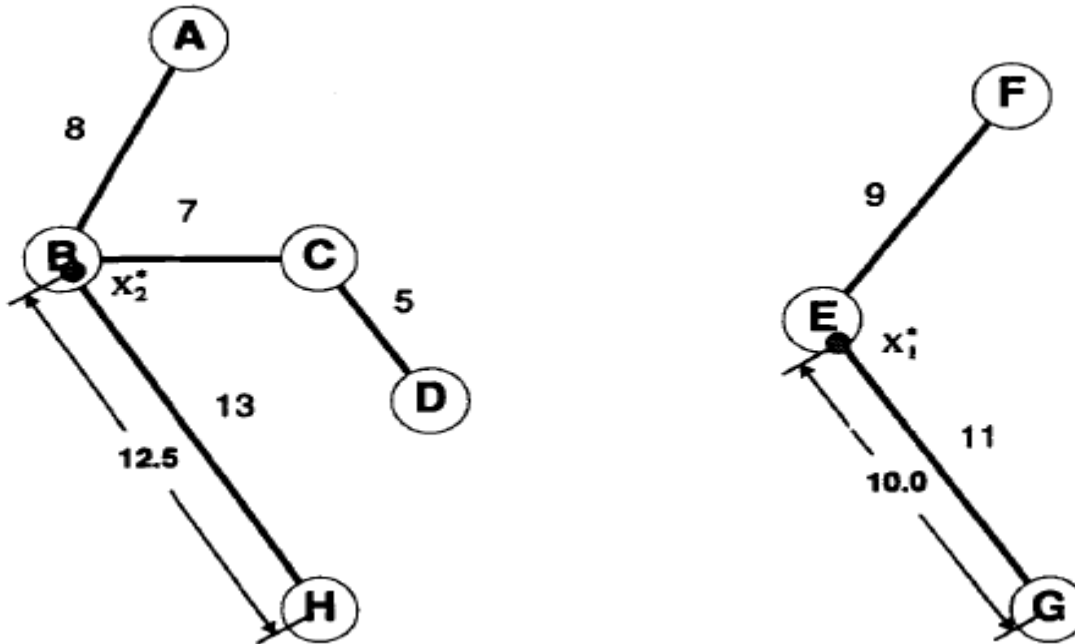
Adım 1: Yukarıda verilen algoritmayı kullanarak mutlak 1-merkezi bul.

Adım 2: Mutlak 1-merkez noktasını içeren dalı ağaçtan sil (Eğer mutlak 1-merkez bir düğümse, e_1 - e_2 yolu üzerindeki merkeze ait dallardan birini sil). Bu ağacı, 2 bağlı olmayan alt ağaca böler.

Adım 3: Her bir alt ağacın mutlak 1-merkezini bulmak için mutlak 1-merkez algoritmasını kullan. Bulunan yerler, mutlak 2-merkez problemi için çözümü verir.

Ağırlıklandırılmamış ağaç üzerinde mutlak 2-merkez Problemi-Örnek

Önceki problemde kullanılan ağacı dikkate alalım.



Merkez 1, EG dalı üzerinde G düğümünden 10 br uzaklıktadır.
Merkez 2 , BH dalı üzerinde H düğümünden 12.5 br uzaklıktadır.

BÖLGE KAPLAMA (LOCATION COVERING) MODELLERİ

- Yerleşimle ilgili bir çok durumda, müşterilere hizmet, müşteriyle atandığı tesis arasındaki uzaklığa bağlıdır.
- Sıklıkla, eğer müşteri tesise belli bir uzaklıkta ya da daha yakınsa, aldığı hizmet yeterli olarak kabul edilir.
- Eğer müşterinin tesise uzaklığı belli bir kritik değeri aşıyorsa hizmetin yetersiz olduğu söylenir.

Küme Kaplama (Set Covering) Modeli

- En basit tesis yerleşim modelidir.
- Sonlu sayıda aday tesis içinden, her talep noktası en az bir kere kaplanacak şekilde minimum maliyetli tesis kümesini bulmakla ilgilenir.

Girdiler:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{eğer } j \text{ aday tesisi } i \text{ düğümündeki talebi} \\ & \text{kaplayabiliyorsa} \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

$$f_j = \text{tesisin } j \text{ düğümüne yerleştirilme maliyeti}$$

Küme Kaplama (Set Covering) Modeli

Karar Değişkenleri:

$$X_j = \begin{cases} 1, & \text{eğer } j \text{ düğümüne tesis kurulursa} \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

Formülasyon:

$$\text{Minimize} \quad \sum_j f_j \cdot X_j \quad (1)$$

Subject to

$$\sum_j a_{ij} \cdot X_j \geq 1 \quad \forall i \quad (2)$$

$$X_j \in \{0,1\} \quad \forall j \quad (3)$$

Küme Kaplama (Set Covering) Modeli

Eğer N_i , i talep noktasını kaplayabilen tesisler kümesi olarak tanımlanırsa Kısıt (2) aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\sum_{j \in N_i} X_j \geq 1 \quad \forall i \quad (2')$$

Eğer tüm tesis maliyetleri eşitse ya da basitçe kurulan tesis sayısının minimize edilmesi isteniyorsa, amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\text{Minimize} \quad \sum_j X_j \quad (1')$$

Küme Kaplama (Set Covering) Modeli

- Yerleşim problemlerinde N_i kümesi (ya da a_{ij} katsayıları) talep noktası i ile aday tesisler arasındaki uzaklık cinsinden tanımlanır. Eğer D_c kaplama uzaklığı ise, $d_{ij} \leq D_c$ şartı sağlanıyorsa $a_{ij}=1$ 'dir ($N_i = \{j | d_{ij} \leq D_c\}$).
- Genel graf üzerinde küme kaplama problemi NP-complete'dir (Garey ve Johnson (1979)).
- Talep noktaları ile aday tesis yerleri her zaman aynı olmak zorunda değildir. Ancak, genellikle aynıdır.

Küme Kaplama (Set Covering) Modeli

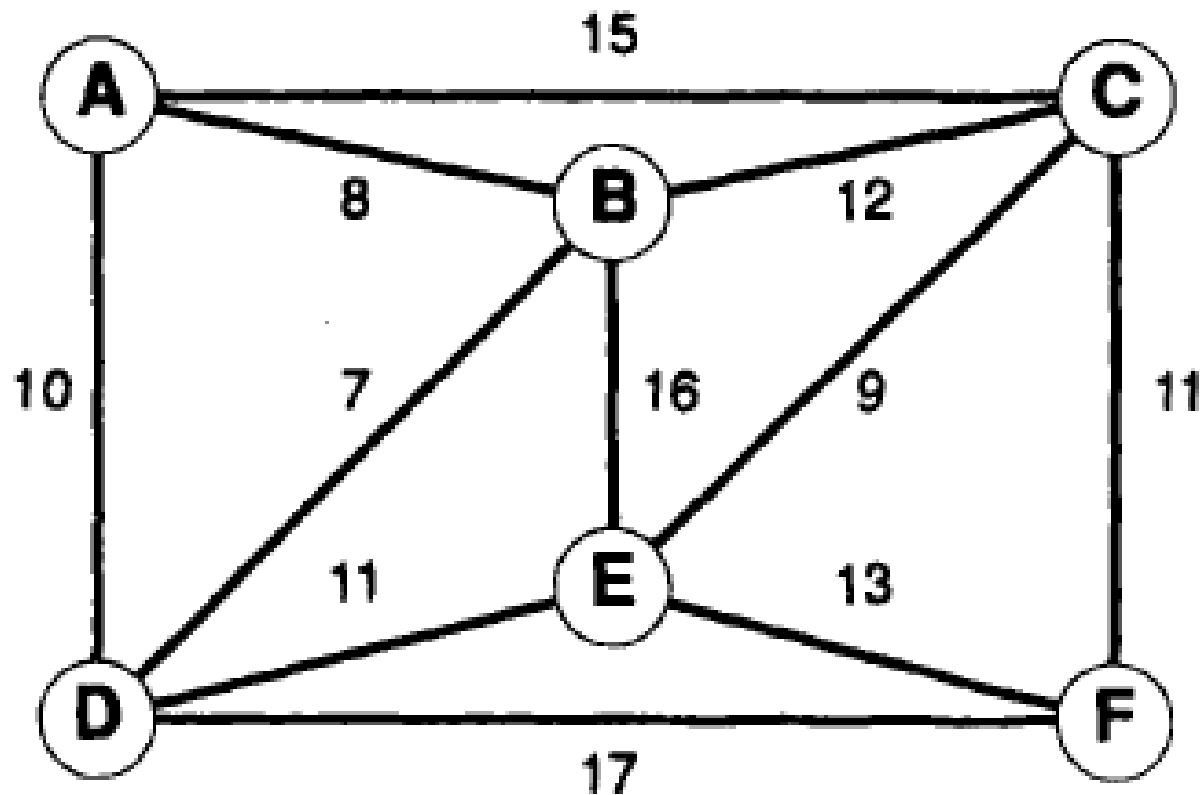


- Eğer kaplama uzaklığı 5 ise ve aday tesislerle talep noktaları seti (A, B) aynı ise, yukarıdaki şekilde, 2 tesise ihtiyacımız vardır. Ancak tesislerin şebekede herhangi bir yere kurulmasına izin verirse, A ve B düğümlerinin orta yerine tek bir tesis kurabiliriz (bu tesis 2 talep noktasını da kapsar).

Küme Kaplama (Set Covering) Modeli

- Church ve Meadows (1979), eğer talep düğümleri kümesini sonlu bir şebeke kesişim noktaları (network intersection points) kümesiyle genişletirsek, aday tesislerin genişletilmiş küme (talep noktaları+şebeke kesişim noktaları) ile sınırlandığı küme kaplama probleminin çözümünün, tesislerin şebekenin herhangi bir noktasında kurulmasına izin verildiği durumun çözümüyle aynı sayıda tesis içereceğini göstermişlerdir.
- Şebeke kesişim noktaları, şebekenin dalları üzerinde, bir şebeke kesişim noktası ile en azından bir düğüm arasındaki uzaklık kaplama uzaklığına eşit olacak şekilde seçilir.

Küme Kaplama (Set Covering) Modeli-Örnek



$$D_c = 11$$

Küme Kaplama (Set Covering) Modeli-Örnek

MINIMIZE

(No. Selected)

$$X_A + X_B + X_C + X_D + X_E + X_F$$

SUBJECT TO:

$$\text{(Node } A \text{ Covered)} \quad X_A + X_B + \quad X_D \quad \geq 1$$

$$\text{(Node } B \text{ Covered)} \quad X_A + X_B + \quad X_D \quad \geq 1$$

$$\text{(Node } C \text{ Covered)} \quad \quad X_C + \quad X_E + X_F \geq 1$$

$$\text{(Node } D \text{ Covered)} \quad X_A + X_B + \quad X_D + X_E \quad \geq 1$$

$$\text{(Node } E \text{ Covered)} \quad \quad X_C + X_D + X_E \quad \geq 1$$

$$\text{(Node } F \text{ Covered)} \quad \quad X_C + \quad X_F \geq 1$$

$$\text{(Integrality)} \quad X_A, X_B, X_C, X_D, X_E, X_F = 0, 1$$

Bu problemin bir çözümü $X_C = X_D = 1, X_A = X_B = X_E = X_F = 0$ dir. Amaç fonksiyonu 2'ye eşittir.

Küme kaplama-Sütun azaltma

j ve k gibi 2 kolonu dikkate alalım. Eğer tüm i talep noktaları için $a_{ij} \leq a_{ik}$ ve en azından bir talep noktası için $a_{ij} < a_{ik}$ ise, k, j ile kaplanan tüm talepleri kaplıyordur. Yani, k, j 'ye baskındır.

Bu durumda, tesisi k 'ya yerleştirdiğimizde j 'ye tesis yerleştirmemize gerek kalmayacağından, j 'yi eleyebiliriz. İlaveten, $X_j = 0$ yazabiliriz.

Küme kaplama-Sütun azaltma

Örneğin, yukarıdaki problemde, D aday yeri A ve B düğümlerine baskındır. Dolayısıyla, $X_A = X_B = 0$ yazılabilir.

Aynı şekilde, C aday yeri F yerine baskındır. Bu nedenle, $X_F = 0$ yazılabilir.

Birbirine denk olan yerlerin biri dışındakiler de elenebilir. Tüm i talep noktaları için $a_{ij} = a_{ik}$ ise j ve k denktir.

Küme kaplama-Sütun azaltma

Sütun azaltma tekniğinin uygulanmasından sonra problem aşağıdaki şekle dönüşür.

MINIMIZE

(No. Selected)

$$X_C + X_D + X_E$$

SUBJECT TO:

(Node *A* Covered)

$$X_D \geq 1$$

(Node *B* Covered)

$$X_D \geq 1$$

(Node *C* Covered)

$$X_C + X_E \geq 1$$

(Node *D* Covered)

$$X_D + X_E \geq 1$$

(Node *E* Covered)

$$X_C + X_D + X_E \geq 1$$

(Node *F* Covered)

$$X_C \geq 1$$

(Integrality)

$$X_C, X_D, X_E = 0, 1$$

Küme kaplama-Satır azaltma (1)

Satır azaltma teknikleri ile problemin satırları elenir. i satırını dikkate alın. Eğer $\sum_j a_{ij} = 1$ ise i düğümünü kaplayabilecek tek bir tesis vardır. Bu durumda, $a_{ij^*} = 1$ 'e eşit olan j^* tesisi bulunur ve $X_{j^*} = 1$ yapılır. Bundan sonra X_{j^*} 'ın olduğu her satır elenebilir, çünkü $X_{j^*} = 1$ ile o satırlar zaten sağlanacaktır. Yukarıdaki problemde X_D ve X_C 1'e eşitlenir. X_D ve X_C 'nin olduğu tüm satırlar silinebilir. Bu anda silinmedik hiçbir satır kalmayacaktır ve problem çözülmüş olacaktır.

Küme kaplama-Satır azaltma (2)

Farklı bir satır azaltma tekniğini tanıtmak için $D_C=18$ olduğu aşağıdaki modeli inceleyelim.

MINIMIZE

(No. Selected)

$$X_A + X_B + X_C + X_D + X_E + X_F$$

SUBJECT TO:

(Node *A* Covered) $X_A + X_B + X_C + X_D \geq 1$

(Node *B* Covered) $X_A + X_B + X_C + X_D + X_E \geq 1$

(Node *C* Covered) $X_A + X_B + X_C + X_E + X_F \geq 1$

(Node *D* Covered) $X_A + X_B + X_D + X_E + X_F \geq 1$

(Node *E* Covered) $X_B + X_C + X_D + X_E + X_F \geq 1$

(Node *F* Covered) $X_C + X_D + X_E + X_F \geq 1$

(Integrality) $X_A, X_B, X_C, X_D, X_E, X_F = 0, 1$

Küme kaplama-Satır azaltma (2)

Yukarıda verilen sütun azaltma tekniğini kullanarak A ve F aday yerlerini eleriz. Kalan problem aşağıdaki gibi olur.

MINIMIZE	
(No. Selected)	$X_B + X_C + X_D + X_E$
SUBJECT TO:	
(Node A Covered)	$X_B + X_C + X_D \geq 1$
(Node B Covered)	$X_B + X_C + X_D + X_E \geq 1$
(Node C Covered)	$X_B + X_C + X_E \geq 1$
(Node D Covered)	$X_B + X_D + X_E \geq 1$
(Node E Covered)	$X_B + X_C + X_D + X_E \geq 1$
(Node F Covered)	$X_C + X_D + X_E \geq 1$
(Integrality)	$X_B, X_C, X_D, X_E = 0, 1$

Hiçbir satır tek elemana sahip olmadığı için yukarıdaki satır azaltma tekniğini kullanamayız.

Küme kaplama-Satır azaltma (2)

Ancak, ikinci bir satır azaltma tekniği kullanabiliriz.

- m ve n olmak üzere 2 satırı dikkate alalım. Eğer tüm aday yerleri için $a_{mj} \leq a_{nj}$ ise ve en az bir aday j yeri için $a_{mj} < a_{nj}$ ise n satırını eleyebiliriz. Çünkü m satırının kaplanacak olması n satırının da kaplanmasını garanti eder. Bu kural B ve E düğümlerine karşılık gelen satırları elememizi sağlar.

MINIMIZE

(No. Selected)

$$X_B + X_C + X_D + X_E$$

SUBJECT TO:

(Node A Covered)

$$X_B + X_C + X_D \geq 1$$

(Node C Covered)

$$X_B + X_C + X_E \geq 1$$

(Node D Covered)

$$X_B + X_D + X_E \geq 1$$

(Node F Covered)

$$X_C + X_D + X_E \geq 1$$

(Integrality)

$$X_B, X_C, X_D, X_E = 0, 1$$

KÜME KAPLAMA MODELİNİN FARKLI ŞEKİLLERİ

1. İki kere kaplanan noktalarının sayısını maksimize eden küme kaplama modeli
2. Maksimum Kaplama Yerleşim Modeli (Maximum Covering Location Model)

İki kere kaplanan noktalarının sayısını maksimize eden küme kaplama modeli

Bu problem, daha önce verilen notasyonlara ek olarak aşağıdakileri kullanarak formüle edilebilir.

Girdi:

I = talep noktalarının sayısı

Karar değişkeni:

$$S_i = \begin{cases} 1, & \text{eğer } i \text{ talep noktası en azından} \\ & \text{iki kere kaplanmışsa} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

İki kere kaplanan noktalarının sayısını maksimize eden küme kaplama modeli

$$\text{Minimize } (I + 1) \sum_j X_j - \sum_i S_i \quad (1)$$

Subject To

$$\sum_j a_{ij} X_j - S_i \geq 1 \quad \forall i \quad (2)$$

$$X_j \in \{0,1\} \quad \forall j \quad (3)$$

$$S_i \in \{0,1\} \quad \forall i \quad (4)$$

Maksimum kaplama yerleşim modeli

Model ile kurulacak tesis sayısı sabitlenebilir ve kaplanan talep sayısı maksimize edilebilir. Klasik küme kaplama modeline ek olarak kullanılan notasyonlar aşağıdadır.

Girdi:

h_i = i noktasındaki talep

P = yerleştirilecek tesis sayısı

Karar değişkeni:

$$Z_i = \begin{cases} 1, & i \text{ düğümü kaplanmışsa} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

Maksimum kaplama yerleşim modeli- Formülasyon

$$\text{Maximize} \quad \sum_i h_i \cdot Z_i \quad (1)$$

Subject to

$$\sum_j a_{ij} \cdot X_j \geq Z_i \quad \forall i \quad (2)$$

$$\sum_j X_j \leq P \quad (3)$$

$$X_j \in \{0,1\}, \quad \forall j \quad (4)$$

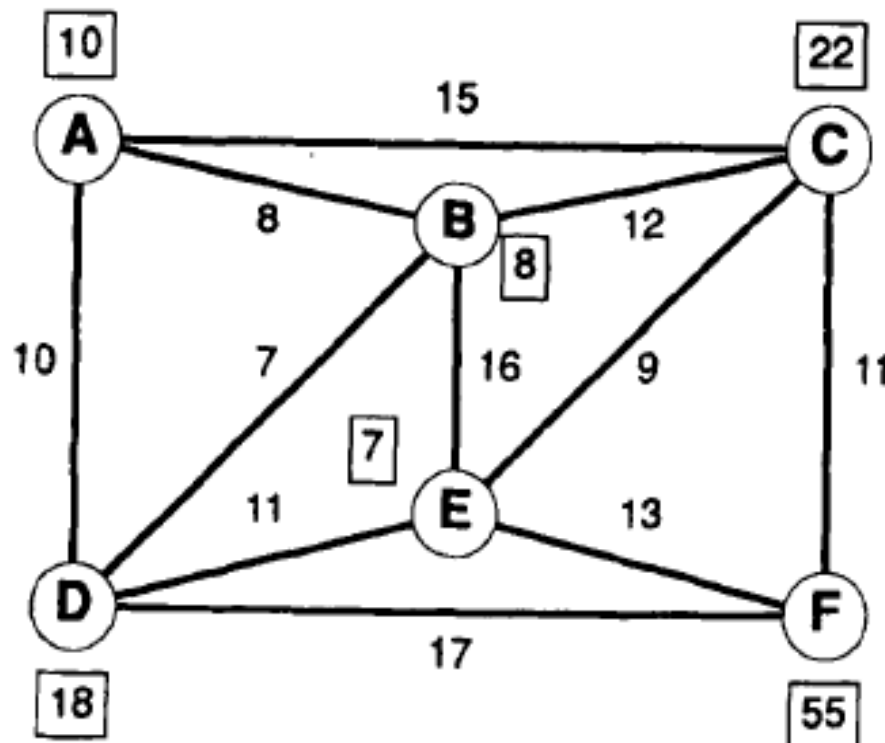
$$Z_i \in \{0,1\}, \quad \forall i \quad (5)$$

Maksimum kaplama yerleşim modeli- Örnek

Daha önce çözdüğümüz probleme talepleri ekleyerek tekrar çözelim.

$$D_C = 11$$

$$P = 1$$



Maksimum kaplama yerleşim modeli- Örnek

MAXIMIZE

(Covered Demands) $10Z_A + 8Z_B + 22Z_C + 18Z_D + 7Z_E + 55Z_F$

SUBJECT TO:

(Node A Coverage) $X_A + X_B + X_D \geq Z_A$

(Node B Coverage) $X_A + X_B + X_D \geq Z_B$

(Node C Coverage) $X_C + X_E + X_F \geq Z_C$

(Node D Coverage) $X_A + X_B + X_D + X_E \geq Z_D$

(Node E Coverage) $X_C + X_D + X_E \geq Z_E$

(Node F Coverage) $X_C + X_F \geq Z_F$

(No. to Locate) $X_A + X_B + X_C + X_D + X_E + X_F \leq 1$

(Integrality) $X_A, X_B, X_C, X_D, X_E, X_F = 0, 1$

$Z_A, Z_B, Z_C, Z_D, Z_E, Z_F = 0, 1$

Maksimum kaplama yerleşim modeli- Örnek

- Daha önce tanımladığımız sütun azaltma tekniğini kullanarak A, B ve F sütunlarını eleyebilir ve $X_A = X_B = X_F = 0$ yapabiliriz. Problem aşağıdaki şekle dönüşür.
- Ancak, maksimum kaplama modelinde satır azaltma tekniklerinden hiç birini kullanamayız (sağ tarafların $\{0-1\}$ değişken olmasından dolayı).

Maksimum kaplama yerleşim modeli- Örnek

MAXIMIZE

(Covered Demands) $10Z_A + 8Z_B + 22Z_C + 18Z_D + 7Z_E + 55Z_F$

SUBJECT TO:

(Node *A* Coverage) $X_D \geq Z_A$

(Node *B* Coverage) $X_D \geq Z_B$

(Node *C* Coverage) $X_C + X_E \geq Z_C$

(Node *D* Coverage) $X_D + X_E \geq Z_D$

(Node *E* Coverage) $X_C + X_D + X_E \geq Z_E$

(Node *F* Coverage) $X_C \geq Z_F$

(No. to Locate) $X_C + X_D + X_E \leq 1$

(Integrality) $X_C, X_D, X_E = 0, 1$

$Z_A, Z_B, Z_C, Z_D, Z_E, Z_F = 0, 1$