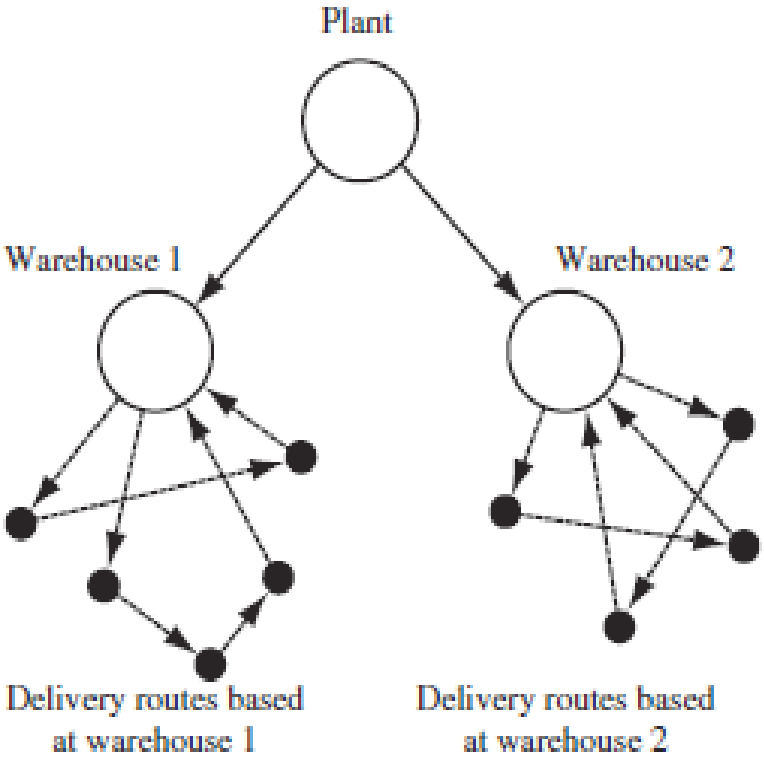
5. KISA MESAFE MAL NAKLİYE PLANLAMASI VE YÖNETİMİ

Kısa mesafe yük taşıma

- Kısa mesafe yük taşıma, bir kamyon (araç) filosu kullanarak malların göreceli olarak küçük bir alanda toplanması ve dağıtımıyla ilgilenir.
- Kural olarak, araçlar tek bir depoda konuşlandırılır, araç turları tek bir çalışma vardiyası içinde gerçekleştirilir ve birkaç toplama ve dağıtım noktası içerir.

Kısa mesafe taşıma hizmetlerinin sınıflandırılması

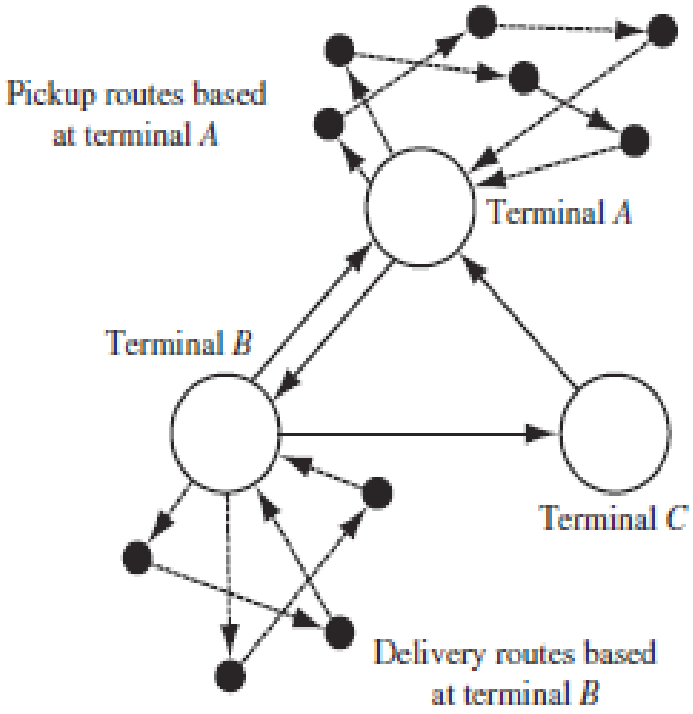
- Kısa mesafe taşıma, bir ambardan küçük minibüslerle perakendeci mağazaları ya da müşteri siparişlerini tedarik eden dağıtım şirketlerinin işidir.
- Ayrıca, yükleri aynı bölgede yerleşmiş orjin-hedef çiftleri arasında taşıyan yerel hızlı kuryeler için de oldukça önemlidir.



Ambarlardaki dağıtım rotaları

Kısa mesafe taşıma hizmetlerinin sınıflandırılması

- Benzer olarak, uzun mesafe taşıyıcıların da uzak bir terminale birleştirilmiş bir yük olarak göndermeden önce yerel birimlerden çıkış parçalarını toplaması ve uzak terminallerden gelen yükleri yerel birimlere dağıtması gerekmektedir.



Uzak mesafe taşıyıcısının terminallerindeki toplama ve dağıtım rotaları

Karar problemleri

- Kısa mesafe taşıma sıklıkla çok sayıda kullanıcı içerir.
- Stratejik seviyede temel karar, ambar yeri ile ilgilidir. Bu amaçla daha önce incelediğimiz yaklaşımlar kullanılabilir, ancak bazı uygulamalarda araç rotalarının açıkça dikkate alınmasına ihtiyaç duyulabilir.
- Taktik seviyede temel problem, filo büyüklüğünün belirlenmesidir.
- Operasyonel seviyede temel problem, müşteri taleplerini karşılamak için araç rotalarının oluşturulmasıdır.

Araç Rotalama Problemleri (Vehichle Routing Problems-VRP)

- VRP, bir müşteri setine hizmet vermek için bir araç filosu tarafından kullanılacak rotaların belirlenmesi problemidir.
- VRP, G=(V, A, E) karışık grafı üzerinde tanımlanabilir.
- Burada;

  V$\Rightarrow$ düğümler kümesi,

  A $\Rightarrow$ oklar kümesi (yönlü dallar),

  E $\Rightarrow$ kenarlar (ayrıtlar) kümesi (yönsüz dallar)

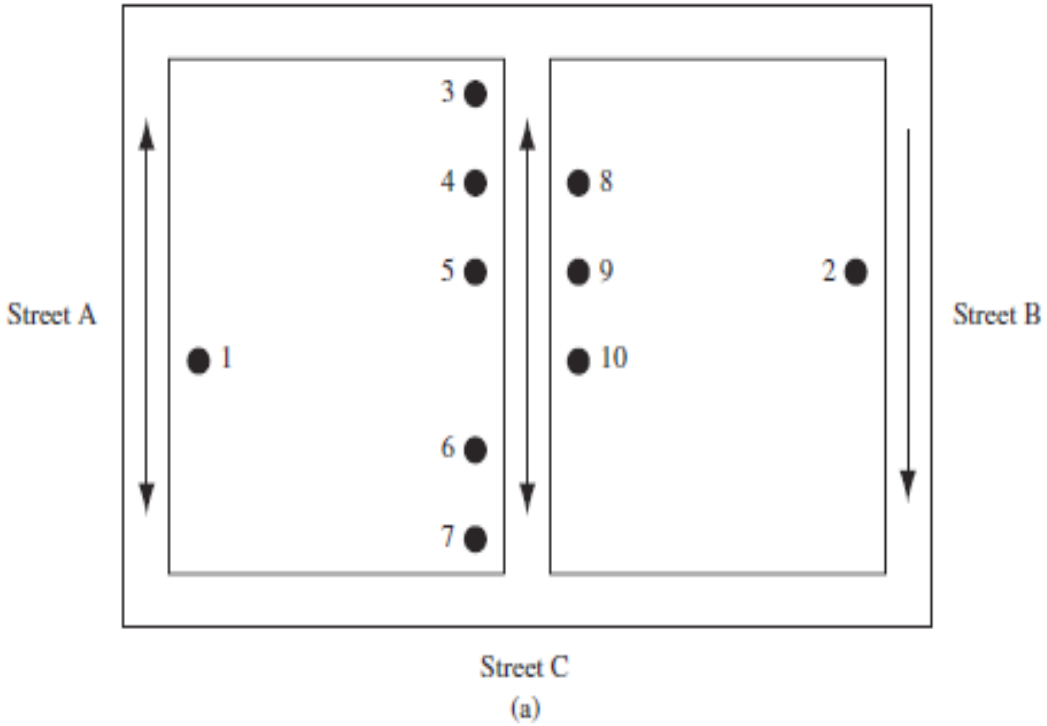
Araç Rotalama Problemleri (Vehichle Routing Problems-VRP)

- “0” düğümü, m aracın konumlandırıldığı depoyu, $U \subseteq V$ ihtiyaç duyulan düğümlerin bir alt kümesi ve $R \subseteq A \cup E$ ihtiyaç duyulan oklar ve kenarların bir alt kümesi de kullanıcıları (müşterileri) temsil eder.
- VRP, ihtiyaç duyulan düğüm, ok ve kenarları içeren, bir depoyu baz alan minimum maliyetli m tur kümesinin belirlenmesi ile ilgilenir.

Araç Rotalama Problemleri (Vehichle Routing Problems-VRP)

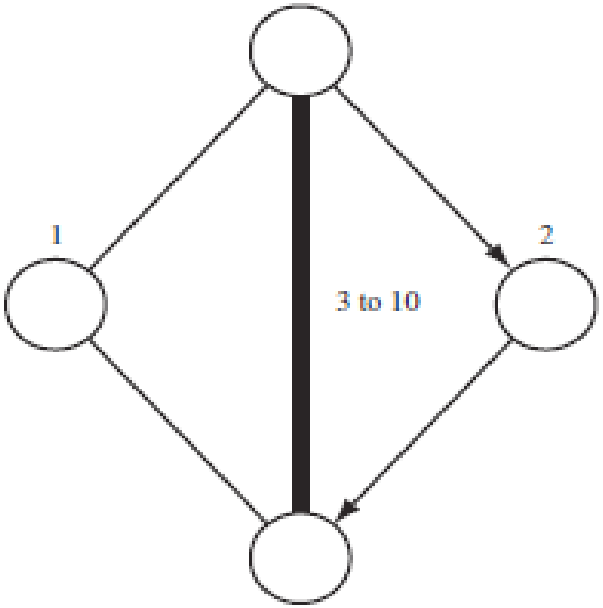
- İzole edilmiş kullanıcılar ihtiyaç duyulan düğümler, bir müşteri kümesi boyunca hemen hemen sürekli olarak dağılmış müşteri alt kümeleri ihtiyaç duyulan oklar ve kenarlarla modellenir (buna genellikle posta dağıtım ve katı atık toplama durumlarında rastlanır).

Araç Rotalama Problemleri (Vehichle Routing Problems-VRP)



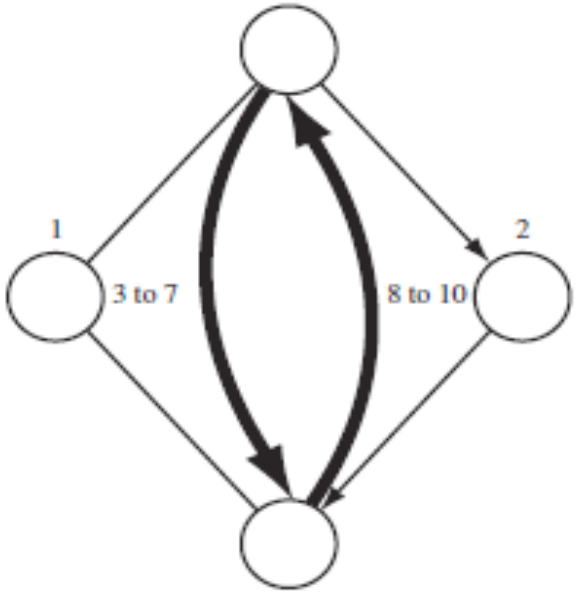
10 müşterinin bulunduğu bir yol şebekesi. A ve C caddeleri çift yönlü, B caddesi tek yönlü.

Araç Rotalama Problemleri (Vehichle Routing Problems-VRP)



(b)

B yolunu geçen aracın 2 taraftaki müşterilere de hizmet verebildiği durum için graf gösterimi



(c)

B yolunu geçen aracın sadece tek taraftaki müşterilere hizmet verebildiği durum için graf gösterimi

Araç Rotalama Problemleri (Vehichle Routing Problems-VRP)

- ⇒ Eğer $R=\emptyset$ ise VRP, düğüm rotalama problemi (Node Routing Problem-NRP) olarak nitelenir.
- ⇒ Eğer $U=\emptyset$ ise VRP, ok rotalama problemi (Arc Routing Problem-ARP) olarak nitelenir.
- ⇒ NRP, ARP'den daha fazla çalışılmış bir problemdir ve genellikle basitçe VRP olarak adlandırılır.
- ⇒ Eğer $m=1$ ise ve yan kısıtlar yoksa, NRP klasik gezgin satıcı problemine, ARP ise kırsal postacı problemine (rural postman problem-RPP) dönüşür.
- ⇒ Eğer tüm oklar ve kenarlar hizmet görmek durumundaysa ($R=A\cup E$), RPP Çinli Postacı Problemi (Chineese postman problem-CPP) olarak adlandırılır.

Araç Rotalama Problemleri (Vehichle Routing Problems-VRP)

- Operasyonel kısıtlar
  - Araç sayısı m sabit olabilir ya da bir üst sınır kısıtı altında karar değişkeni olabilir,
  - Bir araç tarafından taşınan toplam talep aracın kapasitesini geçemez,
  - Hiç bir rotanın süresi vardiya süresini geçemez,
  - Müşteriler önceden belirlenmiş zaman pencereleri arasında hizmet görmek zorunda olabilir,
  - Bazı müşteriler özel araçlar ile hizmet görmek zorunda olabilir,
  - Müşterilerin öncelik kısıtları olabilir.

Araç Rotalama Problemleri (Vehichle Routing Problems-VRP)

- Müşterilere zaman pencereleri içinde servis yapılması gerektiğinde ya da seyahat zamanları gün içinde değiştiğinde, araç rotalarının belirlenmesinde zaman faktörü de göz önüne alınmalıdır. Bu durumda VRP problemi VRSP (vehichle routing and scheduling problem) olarak nitelenir.
- **Amaç**, her $(i, j) \in A \cup E$ ok ve kenarı için bir t_{ij} seyahat zamanı ve c_{ij} seyahat maliyeti mevcuttur. Ayrıca her araç ile ilgili bir sabit maliyet olabilir. En yaygın amaç, grafın okları ve kenarlarını geçme maliyeti ile araçları kullanmanın sabit maliyetleri toplamını minimize etmektir.

Gezgin Satıcı Problemi (Traveling Salesman Problem-TSP)

- Operasyonel kısıtların yokluğunda, NRP, tüm ihtiyaç duyulan düğümleri ve depoyu kapsayan en düşük maliyetli turun bulunmasını amaçlayan TSP'ye indirgeniyordu.
- G grafı üzerinde, herhangi bir uygun TSP çözümünde her $U \cup \{0\}$ düğümü en azından bir defa kullanılır.
- Sonuç olarak, TSP, $G'=(V', A')$ yardımcı tam yönlü grafı üzerinde yeniden formüle edilir. Burada, $V'=U \cup \{0\}$ düğüm seti, A' ok setidir. Her $(i, j) \in A'$ okunun G'de i'den j'ye minimum maliyetli yola eşit bir c_{ij} maliyeti vardır.

Gezgin Satıcı Problemi (Traveling Salesman Problem-TSP)

- Bu maliyetler üçgen eşitsizliğini (triangle inequality) sağlamaktadır.

$$c_{ij} \leq c_{ik} + c_{kj}, \quad \forall (i,j) \in A', \forall k \in V', k \neq i,j$$

- Bu özellik nedeniyle, G''de Hamilton turu olan (yani V''deki her düğümün sadece bir kere dahil olduğu bir çevrim) bir TSP optimal çözümü mevcuttur. Optimal ya da alt optimal TSP çözüm arayışı Hamilton turlarıyla sınırlıdır.
- Farklı düğümler için $c_{ij}=c_{ji}$, $(i, j) \in V'$ ise TSP'nin simetrik olduğu söylenir (STSP), aksi halde asimetriktir (ATSP).

Asimetrik Gezgin Satıcı Problemi (Asymmetric Traveling Salesman Problem)

ATSP aşağıdaki gibi formüle edilebilir.

$$X_{ij}, (i,j) \in A' \rightarrow \begin{cases} 1, \text{eğer } (i,j) \text{oku çözümün bir parçası ise} \\ 0, \text{aksi halde} \end{cases}$$

$$Minimize \sum_{i \in V'} \sum_{j \in V'} c_{ij} X_{ij} \qquad (1)$$

Subject to

$$\sum_{i \in V' \setminus \{j\}} X_{ij} = 1, \qquad j \in V' \qquad (2)$$

$$\sum_{j \in V' \setminus \{i\}} X_{ij} = 1, \qquad i \in V' \qquad (3)$$

$$X_{ij} \in \{0,1\}, \qquad (i,j) \in A'$$

Asimetrik Gezgin Satıcı Problemi

- (1), (2) ve (3) çok bilinen atama problemini (assignment problem) tanımlar.
- Ancak bu kısıtlar yeterli değildir. Bu modelin çözümü tek bir alt tur yerine birkaç alt tur içerebilir.
- Bu alt turları engelleyecek kısıtların eklenmesi gerekir.
- Tek bir yönlü tur içeren uygun bir çözümü sağlamak için aşağıdaki kısıtlardan biri eklenebilir. İkisi de aynı işi yapar.

Asimetrik Gezgin Satıcı Problemi

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \notin S} X_{ij} \geq 1, \quad S \subset V', \ |S| \geq 2, \qquad (4)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} X_{ij} \leq |S| - 1, \quad S \subset V', |S| \geq 2 \qquad (5)$$

Kısıt (4), turun V′'deki uygun ve boş olmayan S alt kümelerinin her birinden çıkan en az bir ok olmasını sağlar (connectivity constraints).

Kısıt (5), $|S|$ düğümden daha az düğüm içeren alt turların oluşmasını engeller (subcircuit elimination constraints).

Asimetrik Gezgin Satıcı Problemi

- <u>Bir alt sınır</u>: ATSP, NP-hard bir problemdir. ATSP optimal çözüm maliyeti Z^*_{ATSP} üzerinde iyi bir alt sınır, ATSP formülasyonundan alt turların oluşmasını engelleyen kısıtlar silinerek elde edilir. Gevşetilmiş problem aşağıdaki doğrusal atama problemidir.

$$Minimize \sum_{i \in V'} \sum_{j \in V'} c_{ij} X_{ij}$$

Subject to

$$\sum_{i \in V'} X_{ij} = 1, \qquad j \in V'$$

$$\sum_{j \in V'} X_{ij} = 1, \qquad i \in V'$$

$$X_{ij} \in \{0,1\}, \qquad (i,j) \in V'$$

$$where \;\; c_{ii} = \infty, i \in V'$$

Asimetrik Gezgin Satıcı Problemi

- Optimal AP çözümü X^*_{AP}, G′ yönlü grafının tüm düğümlerine yayılmış, p adet alt tur (C_1,…, C_p) içerir. Eğer p=1 ise, AP çözümü ATSP için uygun ve dolayısıyla optimaldir.
- Kural olarak, eğer maliyet matrisi güçlü bir şekilde asimetrikse, Z^*_{AP}, Z^*_{ATSP} için iyi bir alt sınırdır.

Asimetrik Gezgin Satıcı Problemi

- **Yamama (Patching) Sezgiseli:**
  Yamama sezgiseli şu şekilde çalışır. İlk önce, AP gevşetmesi çözülür. Eğer tek bir tur (çevrim) elde edilmişse, prosedür sonlandırılır (AP çözümü optimal ATSP çözümüdür). Aksi halde AP çözümünün alt turları birleştirilerek uygun bir ATSP çözümü elde edilir. İki alt turu birleştirirken, her alt turdan bir ok silinir ve tek bir bağlı alt tur elde edilecek şekilde iki yeni ok eklenir.

Asimetrik Gezgin Satıcı Problemi

- Sezgiselin adımları aşağıda verilmiştir.

  <u>Adım 0:</u> $C=\{C_1,\ldots,C_p\}$, AP optimal çözümünde p adet alt tur olsun. Eğer p=1 ise DUR. AP çözümü ATSP için uygun ve optimaldir.

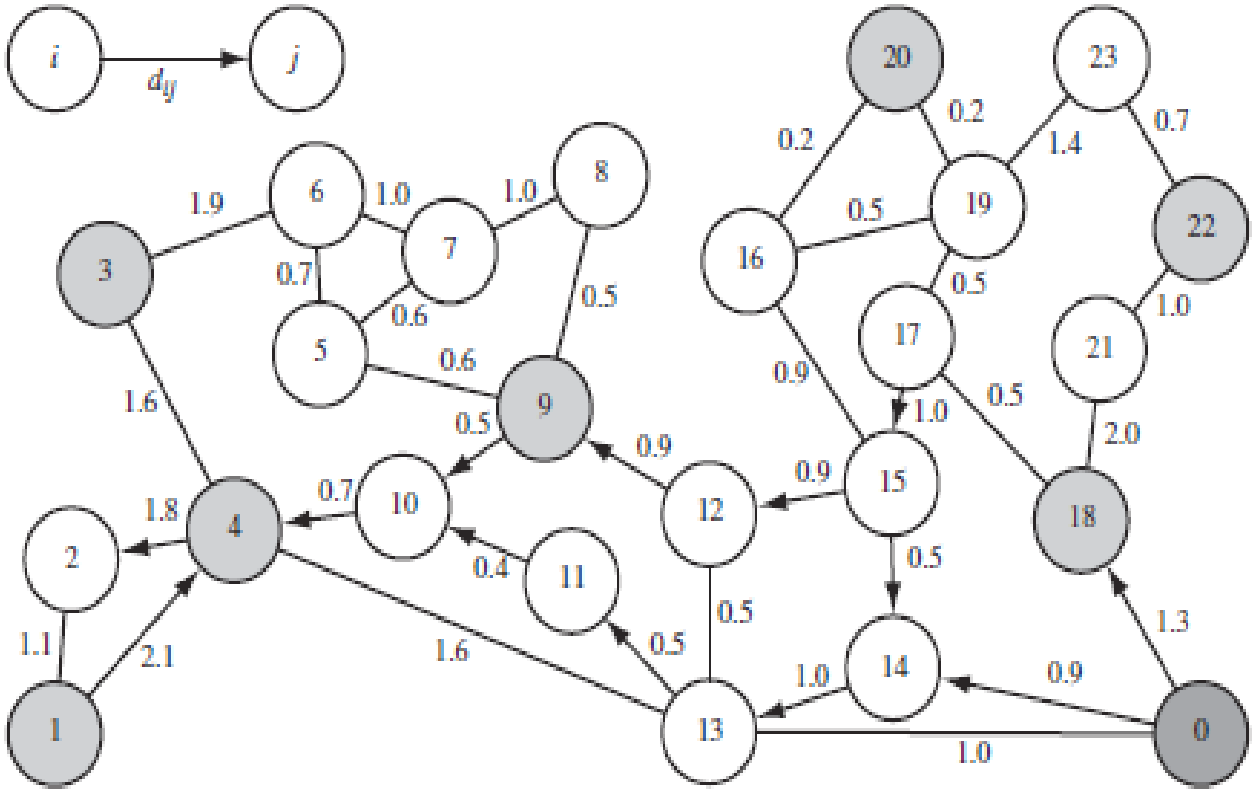
  <u>Adım 1:</u> C_h, $C_k \in C$ olmak üzere en fazla düğüm içeren 2 alt turu belirle.

  <u>Adım 2:</u> Maliyet artışını minimum tutacak şekilde C_h ile C_k'yı birleştir. C'yi güncelle, p=p-1 yap. Eğer p=1 ise DUR, ATSP'nin uygun çözümü belirlenmiştir. Aksi halde Adım 1'e git.

Asimetrik Gezgin Satıcı Problemi-Örnek

Bontur, Prag'da bir atölyeye sahip bir pasta üreticisidir. Atölye, her sabah 6:30'da Vlatava nehri bölgesindeki perakendeci dükkanları tek bir araçla tedarik etmektedir. Şekilde karışık G(V,A) grafı olarak modellenen yol şebekesi verilmiştir. Ok taşıma maliyetlerinin ok uzunluklarıyla orantılı olduğu varsayılmaktadır. Atölye ve araç istasyonu 0 düğümündedir. Bir sonraki gün için 7 dükkan (düğüm 1, 3, 9, 18, 20 ve 22) tedarik edilmelidir. Problem V´'nin müşterilerle ilgili 7 düğüm ve 0 düğümünden meydana geldiği tam yönlü G´=(V´, A´) grafıyla formüle edilebilir. Her $(i,j) \in A'$ okunun maliyeti (c_{ij}) G'de i ile j arasındaki en kısa yol ile gösterilir .

Asimetrik Gezgin Satıcı Problemi-Örnek



Bontur şirketinin dağıtım şebekesi (tek yönlü sokaklar yönlü dallarla, 2 yönlü sokaklar yönsüz dallarla gösterilmiştir)

Asimetrik Gezgin Satıcı Problemi-Örnek

	0	1	3	4	9	18	20	22
0	0.0	5.5	4.2	2.6	2.4	1.3	2.5	4.3
1	4.7	0.0	3.7	2.1	5.1	6.0	7.2	9.0
3	4.2	4.5	0.0	1.6	3.2	5.5	6.7	8.5
4	2.6	2.9	1.6	0.0	3.0	3.9	5.1	6.9
9	3.8	4.1	2.8	1.2	0.0	5.1	6.3	8.1
18	3.9	7.4	6.1	4.5	3.3	0.0	1.2	3.0
20	3.5	7.0	5.7	4.1	2.9	1.2	0.0	2.3
22	5.8	9.3	8.0	6.4	5.2	3.0	2.3	0.0

i'den j'ye ($i,j \in V'$) en kısa yol uzunluğu (km)

Asimetrik Gezgin Satıcı Problemi-Örnek

Optimal AP çözümü X_{AP}^{*} 3 alt turdan oluşmaktadır.

C_1={(1,4), (4,3), (3,9), (9,1)}

maliyeti 11.0 km

C_2={(0,18), (18,0)}

maliyeti 5.2 km

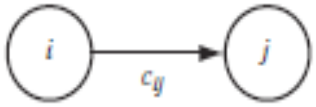
C_3={(20,22), (22,20)}

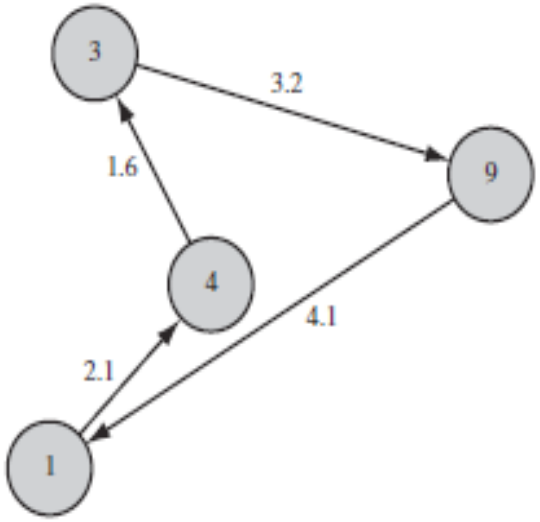
maliyeti 4.6 km

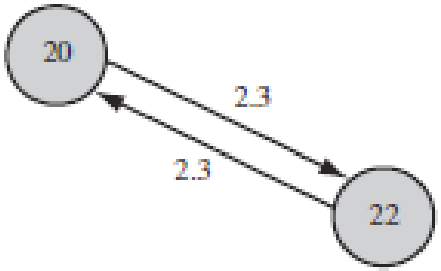
⇒Dolayısıyla, ATSP amaç fonksiyonu üzerindeki Z_{AP}^{*} alt sınırı

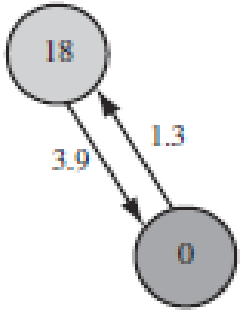
$$Z_{AP}^{*} = 11.0 + 5.2 + 4.6 = 20.8\ km'dir.$$

Asimetrik Gezgin Satıcı Problemi-Örnek









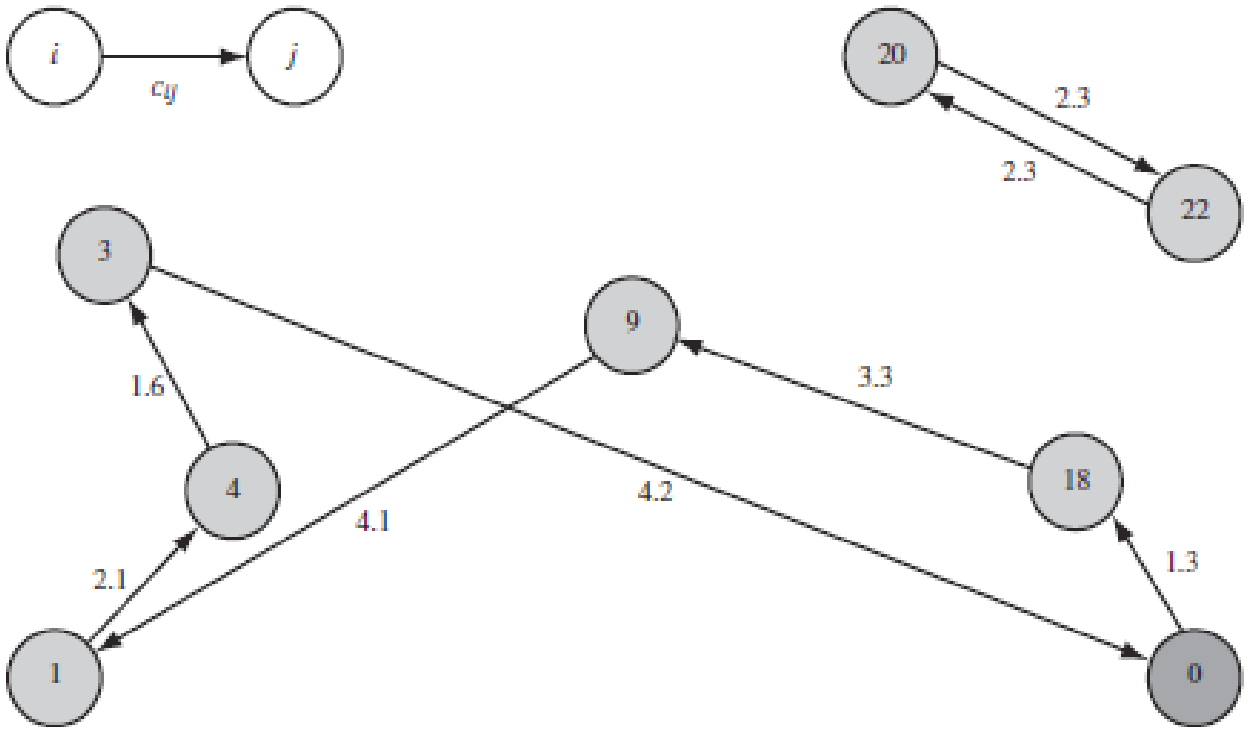
Bontur probleminde AP gevşetmesinin optimal çözümü

Asimetrik Gezgin Satıcı Problemi

⇒ Bontur probleminde bir $\overline{X}_{ATSP}$ uygun çözümü bulmak için, yukarıdaki AP çözümüne yamama algoritması uygulanır .

<u>Adım 1:</u> Birleştirilmek üzere C_1 ve C_2 alt turları seçilir (alternatif olarak C2 yerine C3 de seçilebilir). C_1 ve C_2'yi minimum maliyetle birleştirmek için (3,9) ve (18,0) okları silinir, (3,0) ve (18,9) okları eklenir ve aşağıdaki şekildeki alt tur elde edilir (16.6 km'lik uzunluğa sahiptir).

Asimetrik Gezgin Satıcı Problemi



$$C_4 = \{(0,18), (18,9), (9,1), (1,4), (4,3), (3,0)\}$$

Asimetrik Gezgin Satıcı Problemi

Adım 2: p=3-1=2

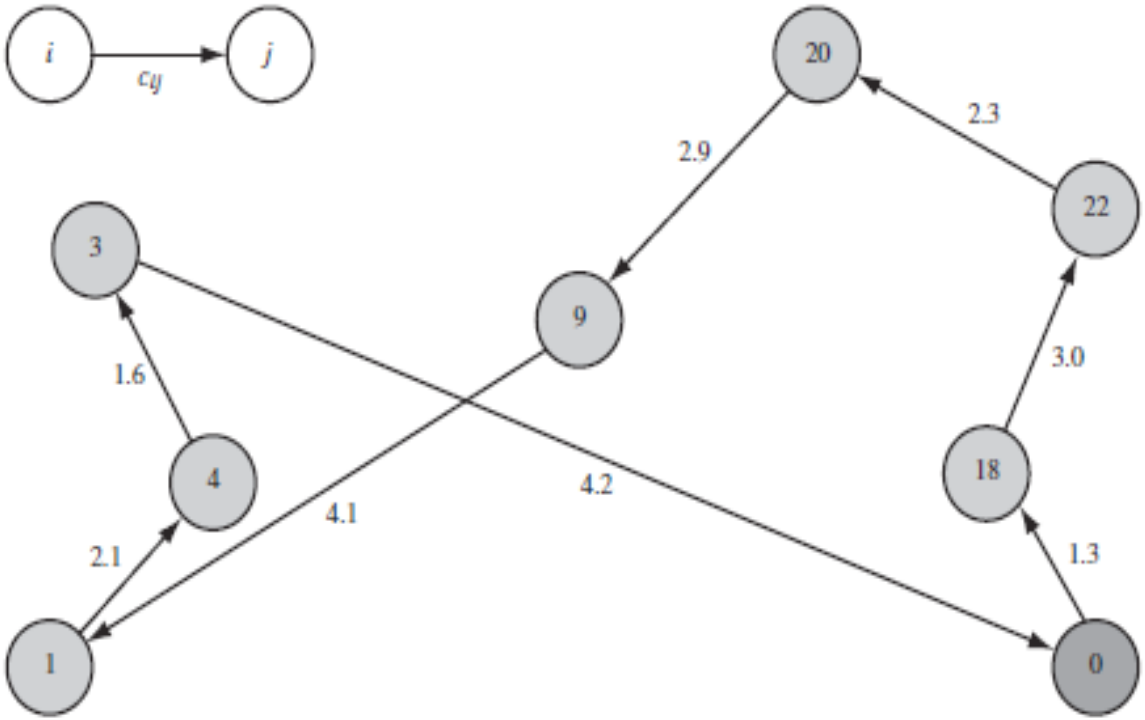
Adım 1: C4 ve C3'ü birleştirmek için (18,9) ve (20,22) silinir ve yerlerine (18,22) ve (20,9) eklenir. Bu çözüm minimum maliyette 0.3 km'lik bir artışa sebep olur.

Adım 2: p=2-1=1, DUR.

Böylece, $\bar{Z}_{ATSP}$ maliyetiyle uygun bir ATSP çözümü elde edilmiş olur. Sezgisel çözümün kalitesini değerlendirmek için AP alt sınırından sapma hesaplanır.

$$\frac{\bar{Z}_{ATSP} - Z^*_{AP}}{Z^*_{AP}} = \frac{21.5 - 20.8}{20.8} = 0.0337 \Rightarrow \%3.3$$

Asimetrik Gezgin Satıcı Problemi



Bontur probleminde yamama algoritmasıyla elde edilen uygun ATSP çözümü

Simetrik Gezgin Satıcı Problemi (The symmetric Traveling Salesman Problem)

Simetrik gezgin satıcı probleminde $c_{ij}=c_{ji}$ $(i,j\in E')$'dir.

<u>En yakın komşu (Nearest Neighbour) sezgiseli:</u>

İteratif olarak en son dahil edilmiş düğümü rotaya dahil olmamış en yakın komşuya bağlayarak Hamilton yolunu oluşturan kurucu bir algoritmadır.

<u>Adım 0:</u> $C=\{r\}$, $r\in V'$, keyfi olarak bir r düğümü seç, h=r.

<u>Adım 1:</u> $c_{hk} = \min_{j\in V'\setminus C}\{c_{hj}\}$ olacak şekilde $k\in V'$ düğümünü belirle. k'yı C'nin sonuna ekle (en yakın ziyaret edilmemiş komşuyu bul).

<u>Adım 2:</u> $|C| = |V'|$ ise r'yi C'nin arkasına ekle, DUR, aksi halde h=k, Adım 1'e git.

Simetrik Gezgin Satıcı Problemi

ÖRNEK:

	Şehir 1	**Şehir 2**	**Şehir 3**	**Şehir 4**	**Şehir 5**
Şehir 1	0	132	217	164	58
Şehir 2	132	0	290	201	79
Şehir 3	217	290	0	113	303
Şehir 4	164	201	113	0	196
Şehir 5	58	79	303	196	0

Simetrik Gezgin Satıcı Problemi

- **Christofides Sezgiseli:** Kurucu bir algoritmadır. Christofides (1976) tarafından önerilmiş basit ve zeki bir sezgiseldir. Bu metot üçgen eşitsizliğinin karşılanmasını gerektirir ve aşağıdaki gibi çalışır.

  Adım1: Grafın minimum yayılan ağacını belirle (minimum yayılan ağaç algoritmalarından biri kullanılabilir).

  Adım 2: Yayılan ağaçta tek dereceli düğümlerin minimum maliyetli eşlemesini bul. Ağaca optimal eşleme kenarlarını ekleyerek Euler grafını oluştur.

Simetrik Gezgin Satıcı Problemi

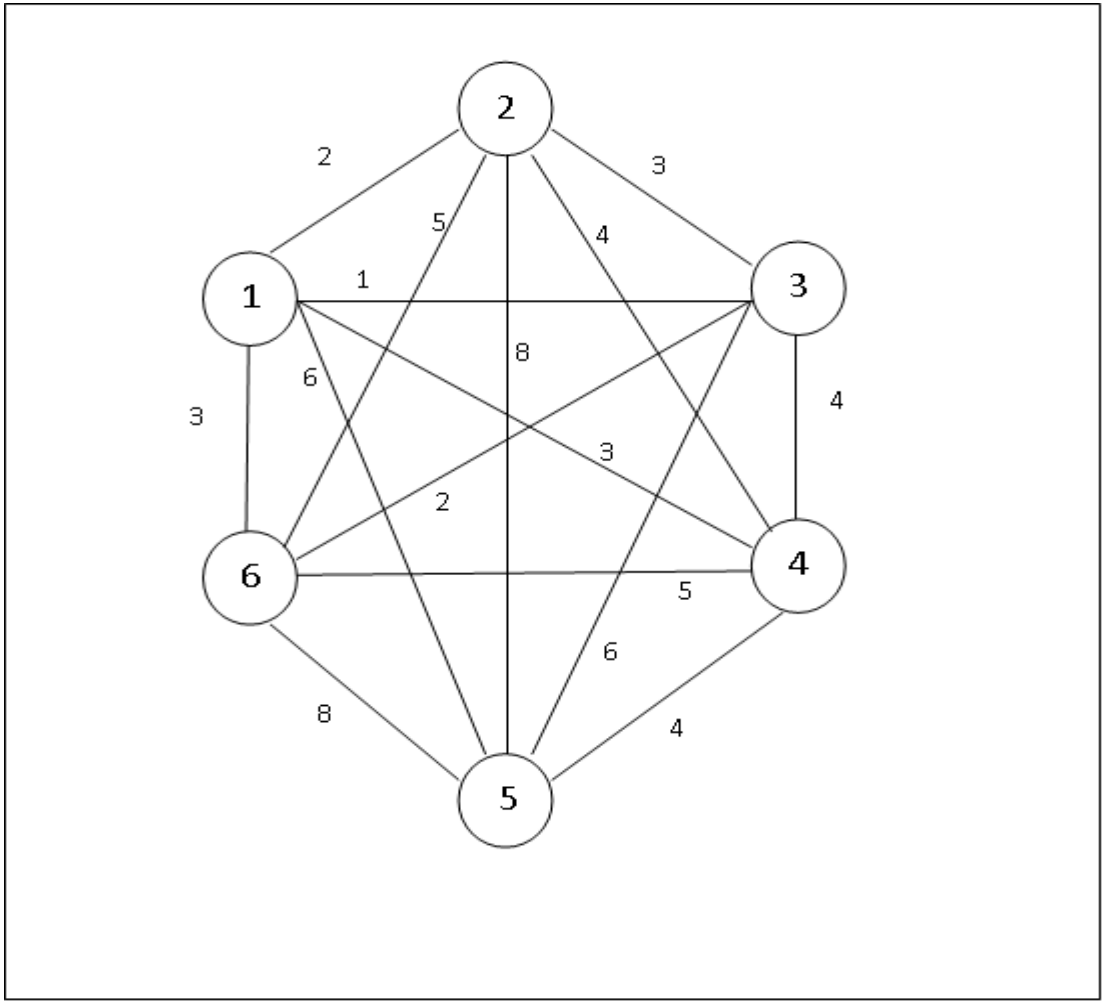
<u>Adım 3:</u> Bu grafta bir Euler turu bul. Euler turunu Hamilton çevrimine dönüştür. Bu şu şekilde yapılır: X_1, X_2,…,X_k Euler turunda ziyaret edilen düğümlerin sırası olsun. X_i düğümünün tekrarlanan ilk düğüm olduğunu varsayalım. X_j, X_i'den sonra gelen ve Euler turunda tekrarlanmayan ilk düğüm olsun. X_{i-1}, X_i,…, X_j yolunu (X_{i-1}, X_j) kenarı ile değiştir. Bir Hamilton çevrimi elde edene kadar bu işlemi tekrarla.

Simetrik Gezgin Satıcı Problemi

- **Kavramlar ve Tanımlar:**
  - Düğümün derecesi: Bir düğüme ait olan kenarların sayısı (o düğüme bağlanan kenar (dal) sayısı, o düğüme giren/çıkan toplam kenar sayısı).
  - Euler grafı: Euler turuna sahip olan grafa Euler grafı denir. Bir Euler grafı, her düğümün çift dereceye sahip olduğu bağlı bir graftır.
  - Euler turu: Bir grafta her kenardan tam olarak 1 kere geçen çevrime Euler turu denir.
  - Hamilton çevrimi: Grafın tüm düğümlerinden geçen bir çevrimdir. Bir graf, en azından bir Hamilton çevrimi içeriyorsa Hamilton grafıdır.

Christofides Sezgiseli - Örnek

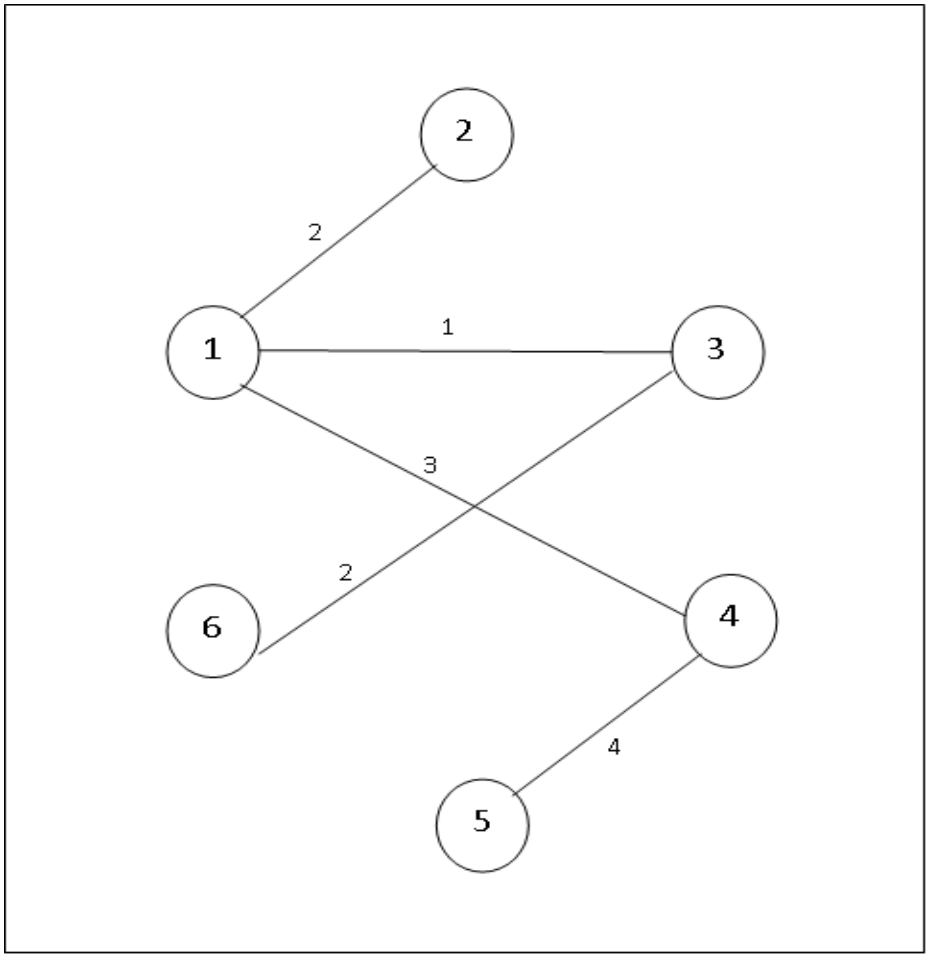
Yandaki TSP problemini ele alalım.



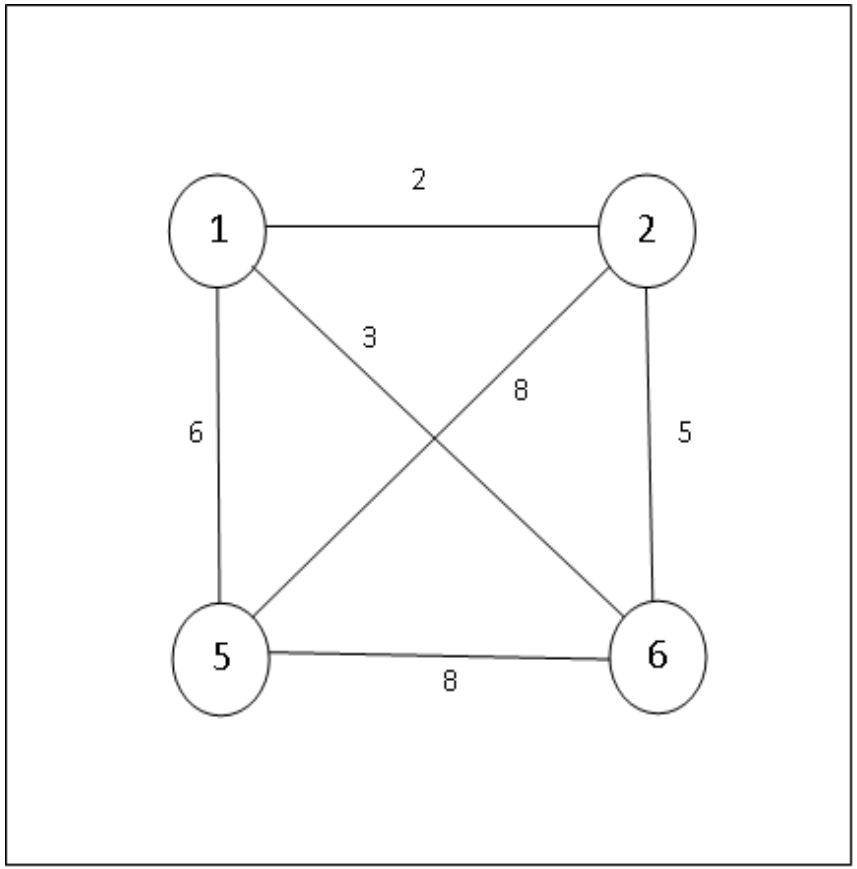
Christofides Sezgiseli - Örnek

Minimum yayılan ağaç yanda görülmektedir.

Tek dereceli düğümler 1, 2, 5 ve 6'dır.



Christofides Sezgiseli - Örnek

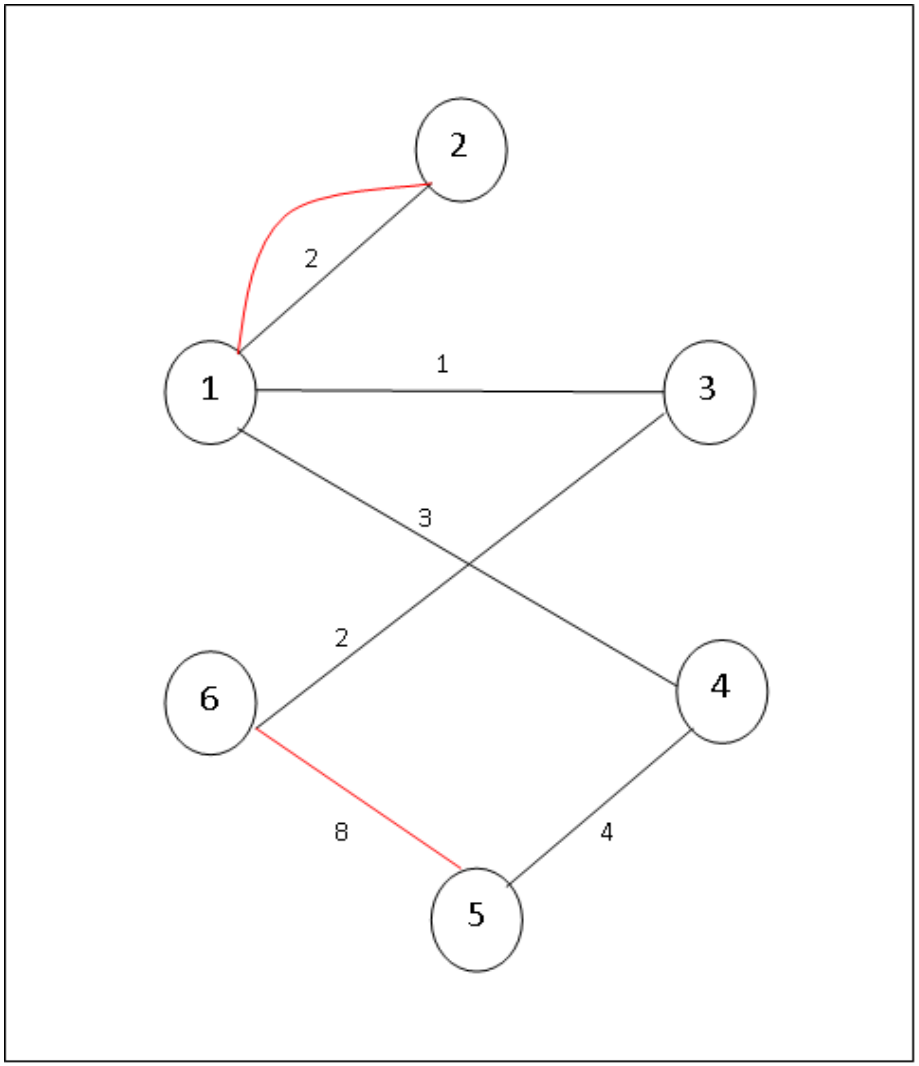


Bu düğümler arasındaki eşleme problemi yandaki gibidir.

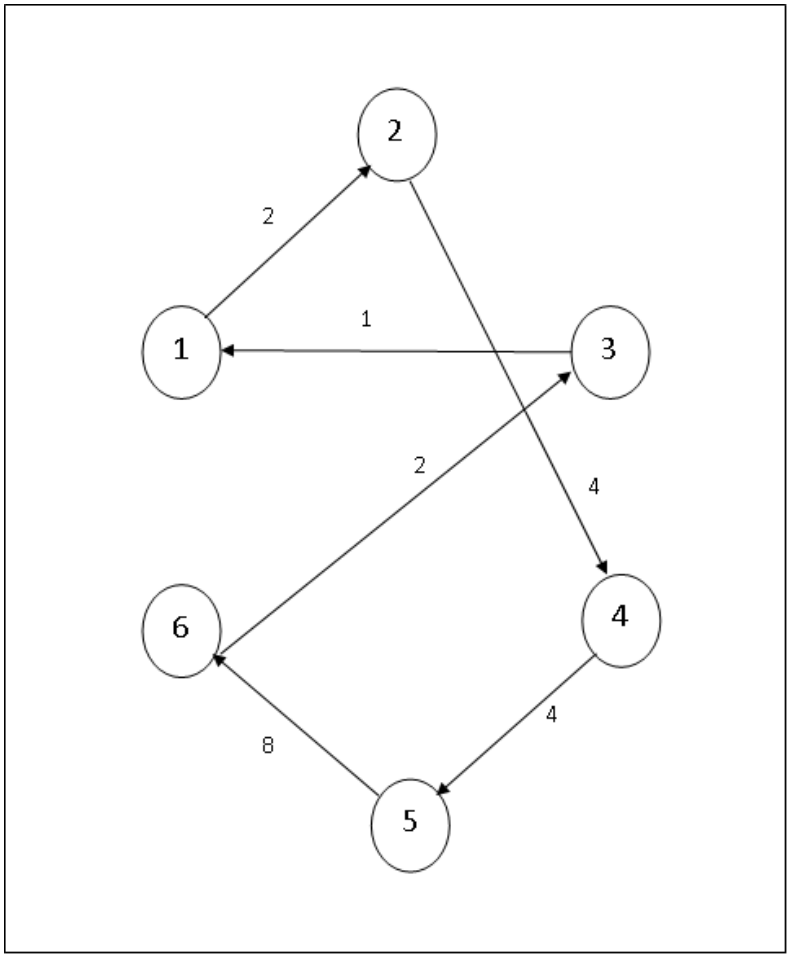
Eşleme	Maliyet
(1,2), (5,6)	2+8=10*
(1,5), (2,6)	6+5=11
(1,6), (2,5)	3+8=11

Christofides Sezgiseli - Örnek

- Optimal eşleme (1,2) ve (5,6)'dır.
- Bu dalları minimum yayılan ağaca eklersek yandaki Euler grafını elde ederiz.
- Bu graftaki bir Euler turu 1-2-1-4-5-6-3-1'dir.
- Düğüm 1 tekrarlandığında, 2-1-4 yolunu (2,4) dalıyla değiştiririz ve 1-2-4-5-6-3-1 Hamilton çevrimini elde ederiz.



Christofides Sezgiseli - Örnek



<u>Tur Uzunluğu</u>

(1,2)		2
(2,4)		4
(4,5)		4
(5,6)		8
(6,3)		2
(3,1)	+	1
		21

Düğüm Rotalama Problemi (Node Routing Problem)-Kapasite ve uzunluk kısıtları ile

- ⇒ Gezgin Satıcı Problemi, sadece bir turun ya da aracın olduğu bir düğüm rotalama problemi idi.
- ⇒ Daha önce de belirtildiği gibi araç rotalarını belirlerken bir takım operasyonel kısıtlarla karşılaşabiliriz.
- ⇒ Bu kısıtlamalar literatürde, genellikle kullanılan kısıtın tipine bağlı olan çok sayıda farklı algoritma tanımlanmasına yol açmıştır.
- ⇒ Burada, düğüm rotalama problemi (NRP) ile ilgili bazı yöntemler incelenecektir.

Düğüm Rotalama Problemi (Node Routing Problem)-Kapasite ve uzunluk kısıtları ile

Kapasite ve uzunluk kısıtlarıyla düğüm rotalama problemi, aşağıdaki kısıtları dikkate alarak, bir depoda başlayıp biten, m en az maliyetli araç rotasının belirlenmesini içerir.

- Her müşteri tam bir kere ziyaret edilecektir.
- Her i müşterisi ile ilgili bir p_i talebi vardır (talepler ya toplanacak ya dağıtılacak, hem toplama hem dağıtım olmayacak) ve her aracın toplam talebi verilen bir q araç kapasitesini geçmemelidir (araçların aynı tip olduğu varsayılıyor).
- Her müşteri için bir s_i servis zamanı vardır ve her rotanın toplam zamanı bir T vardiya zamanını geçmemelidir.

Set Bölümleme formülasyonu (Set partitioning formulation)

$K \rightarrow G''$'de kapasite ve uzunluk kısıtlarını sağlayan rotalar seti olsun

c_k, $k \in K \rightarrow k$ rotasının maliyeti

a_{ik}, $i \in V'$, $k \in K \rightarrow$ eğer i düğümü k rotasına dahil edilmişse 1, aksi halde 0 değerini alan binary (0-1) sabit

y_k, $k \in K \rightarrow k$ rotası optimal bir çözümde kullanılmışsa 1, aksi halde 0 değerini alan (0-1) karar değişkeni

Set Bölümleme formülasyonu (Set partitioning formulation)

NRPCL problemi set bölümleme (set partitioning) problemi olarak (NRPSP) aşağıdaki gibi formüle edilebilir.

$$\textit{Minimize} \qquad \sum_{k \in K} c_k y_k$$

Subject to

$$\sum_{k \in K} a_{ik} y_k = 1, \qquad i \in V' \qquad (1)$$

$$\sum_{k \in K} y_k = m, \qquad (2)$$

$$y_k \in \{0,1\}, \qquad k \in K$$

Set Bölümleme formülasyonu (Set partitioning formulation)

- ⇒ NRPSP kolaylıkla ilave operasyonel kısıtları içerecek şekilde modifiye edilebilir. Formülasyonun temel zayıflığı özellikle az kısıtlandırılmış problemlerdeki çok yüksek değişken sayısıdır.
- ⇒ Kısıt (1), $\sum_{k \in K} a_{ik} y_k \geq 1, \qquad i \in V'$ ile değiştirilerek çözümü daha kolay olan küme kaplama formülasyonu (set covering formulation-NRPSC) elde edilebilir.

Set Bölümleme formülasyonu-Örnek

Bengular Oil Hindistan'daki Karnatoka bölgesindeki istasyonları tedarik etmek için üretim ve dağıtım yapmaktadır. Firma, önümüzdeki hafta için 5 sipariş almıştır (Tablo 1). Yakıt istasyonları ve firmanın deposu arasındaki uzaklıklar Tablo 2'de verilmiştir. Araçların kapasitesi 150 hektolitredir. Problemi NRPSC olarak formüle ediniz.

Set Bölümleme formülasyonu-Örnek

Tablo 1

Yakıt istasyonu	Sipariş
1	50
2	75
3	50
4	50
5	75

Tablo 2

	0	1	2	3	4	5
0	0	90	100	90	80	80
1	90	0	10	20	10	30
2	100	10	0	10	20	40
3	90	20	10	0	10	30
4	80	10	20	10	0	20
5	80	30	40	30	20	0

Set Bölümleme formülasyonu-Örnek

Problemi NRPSC olarak formüle etmek için uygun rotalar aşağıdaki tabloda sıralanmıştır.

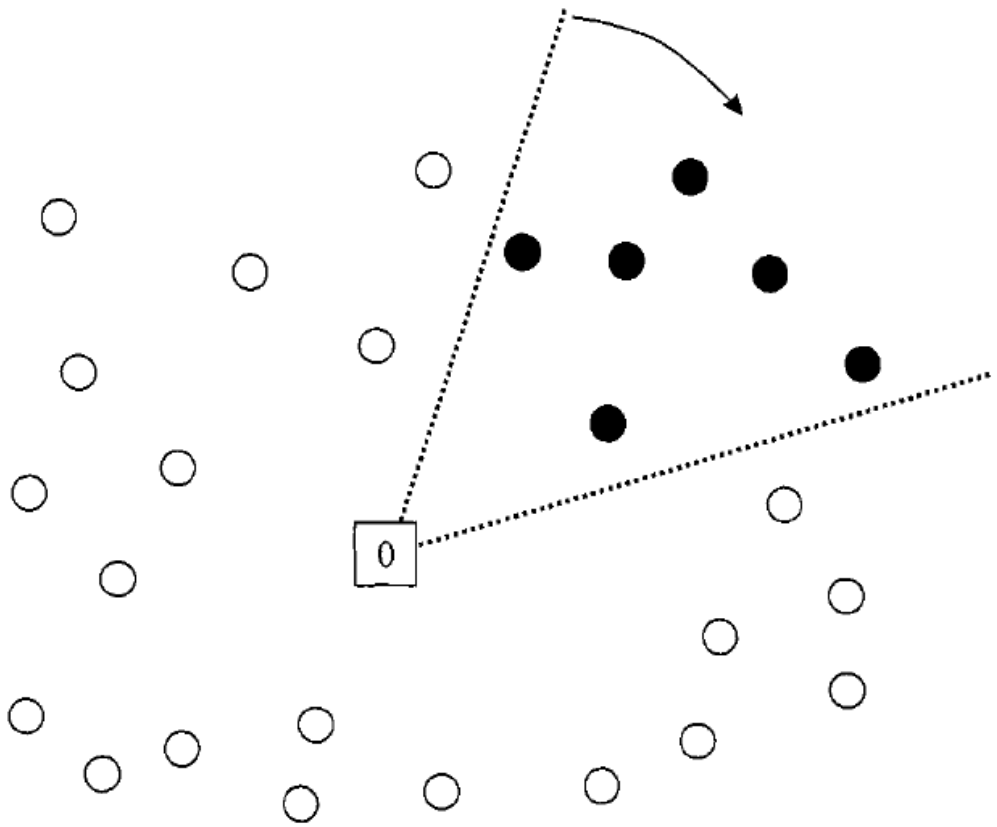
Rota	Düğümler	Maliyet	Rota	Düğümler	Maliyet
1	{0,1,0}	180	9	{0,1,5,0}	200
2	{0,2,0}	200	10	{0,2,3,0}	200
3	{0,3,0}	180	11	{0,2,4,0}	200
4	{0,4,0}	160	12	{0,2,5,0}	220
5	{0,5,0}	160	13	{0,3,4,0}	180
6	{0,1,2,0}	200	14	{0,3,5,0}	200
7	{0,1,3,0}	200	15	{0,4,5,0}	180
8	{0,1,4,0}	180	16	{0,1,3,4,0}	200

Kurucu Sezgiseller

- **Önce kümele, sonra rotala (Cluster first, route second) sezgiselleri**

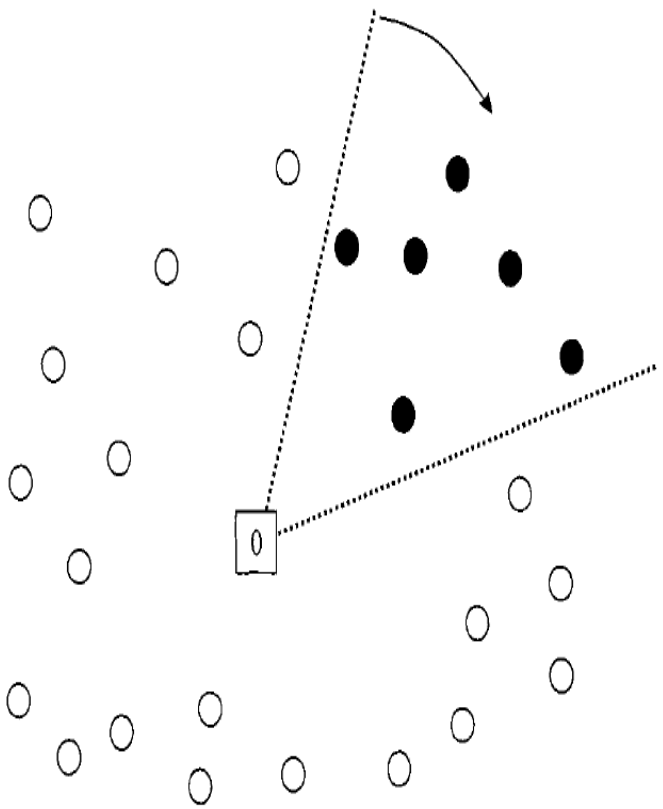
  Önce kümele sonra rotala sezgiselleri 2 adımda iyi NRPCL çözümleri elde etmeye çalışır. İlk önce müşteriler $U_k \subset V' \setminus \{0\}$ olacak şekilde k alt kümeye ayrılır. Bu kümelerin her biri (k=1,…,m) bir araçla ilgilidir. Daha sonra, her k=1,….,m aracı için $U_k \cup \{0\}$'dan oluşturulan alt grafta STSP (sezgisel ya da optimal olarak) çözülür. Müşterilerin kümelenmesi görsel ya da daha formal (örnek: Fisher ve Jaikumar) olarak yapılabilir.

Görsel kümeleme-Süpürme metodu



Görsel kümeleme-Süpürme metodu

Eski ve sezgisel bir sıralı ayrıştırma yöntemi Gillet ve Miller (1974) tarafından önerilmiştir ve süpürme (sweep) metodu olarak adlandırılmaktadır. Bu yaklaşım, şekilde gösterilen güçlü bir geometrik motivasyona sahiptir. Depodan itibaren bir doğru (ışın-ray) çizeriz, doğruyu saat yönünde ya da tersine döndürürüz; bu şekilde müşterileri bulundukları yere bağlı olarak süpürürüz. Doğru, bir müşterinin üzerinden geçtiğinde, müşteri geçerli kümeye dahil edilir ve bu proses aracın artık kapasitesine uydurulamayan bir müşteri bulana kadar devam eder. Daha sonra süpürülmüş müşterilerden bir küme oluştururuz; bu kümedeki müşterileri içeren bir TSP çözerek ilgili rotayı buluruz ve bir sonraki kümeyi oluşturarak ve rotalayarak devam ederiz.

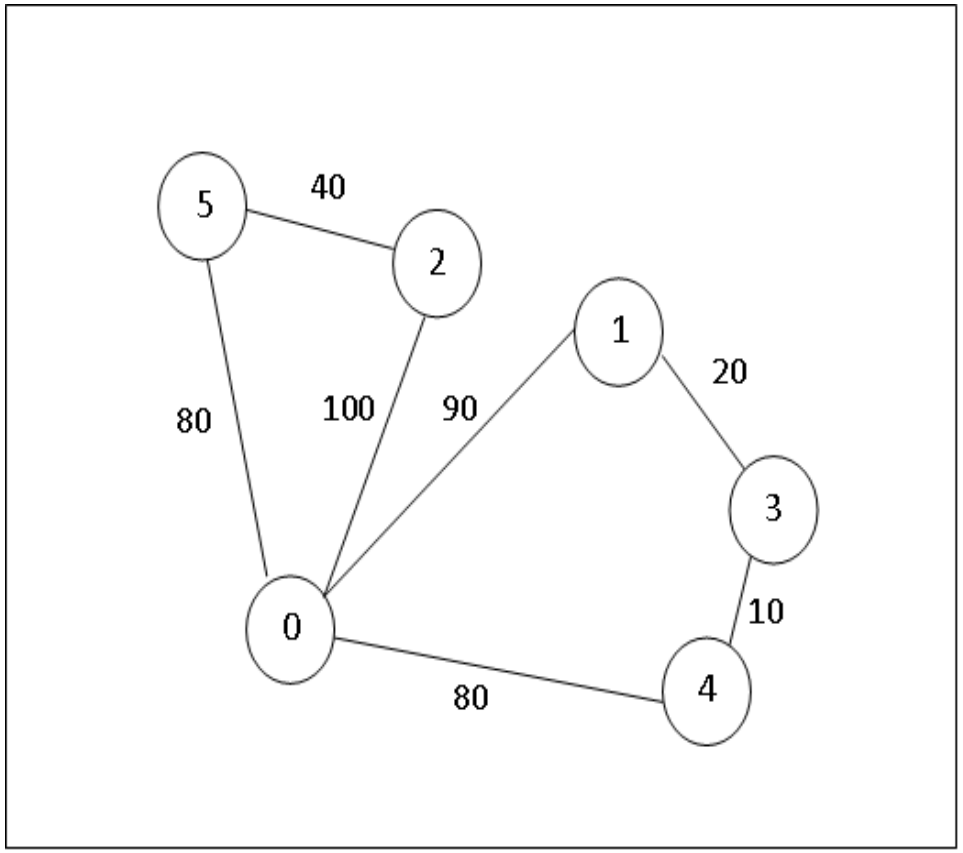


Önce kümele, sonra rotala (Cluster first, route second)

Bengular Oil probleminde müşteriler, araç kapasiteleri dikkate alınarak iki kümeye ayrılabilir.

$U_1=\{2,5\}$, $U_2=\{1,3,4\}$

Daha sonra, $U_1 \cup \{0\}$ ve $U_2 \cup \{0\}$ altgraflarında 2 STSP problemi çözülür.

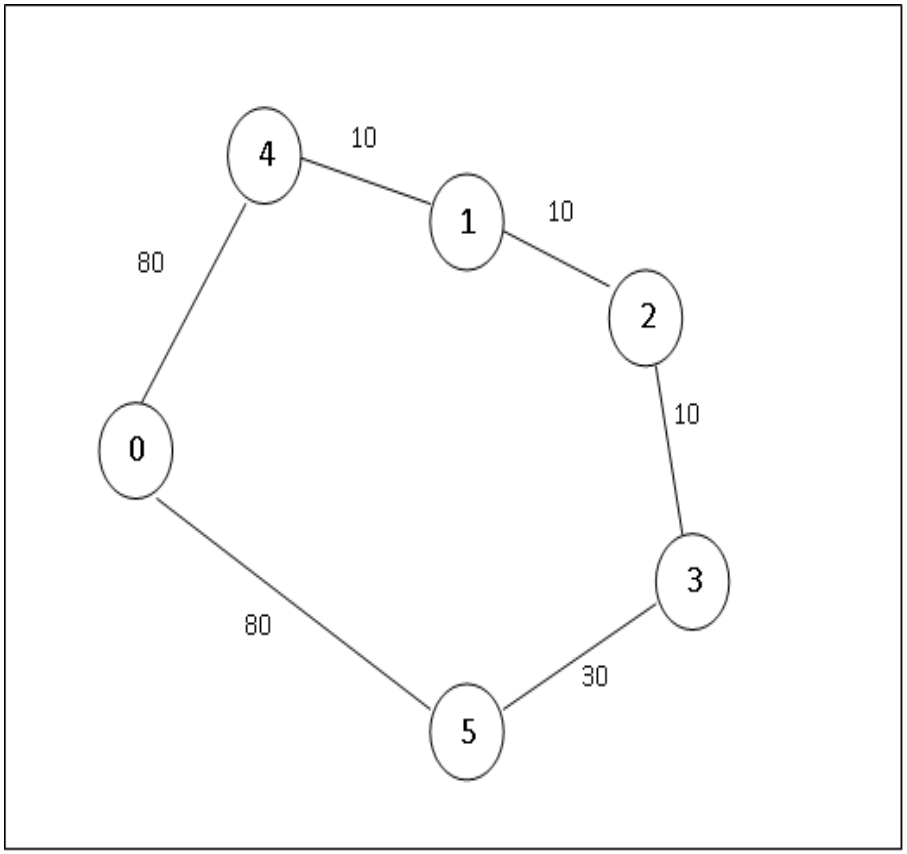


Kurucu Sezgiseller

- **Önce rotala, sonra kümele (Route first, cluster second) sezgiselleri**

  Önce rotala sonra kümele sezgiselleri de NRPCL çözümlerini 2 aşamada belirlemeye çalışır. İlk önce, optimal ya da sezgisel STSP algoritmaları kullanılarak tek bir Hamilton çevrimi bulunur (Bu çözüm NRPCL için genellikle uygun değildir). Daha sonra bu çevrim, depoda başlayıp sonlanan m uygun çevrime ayrıştırılır. Rota ayrıştırma görsel ya da formal prosedürler (örnek: Beasley) kullanılarak gerçekleştirilebilir.

Önce rotala, sonra kümele (Route first, cluster second)

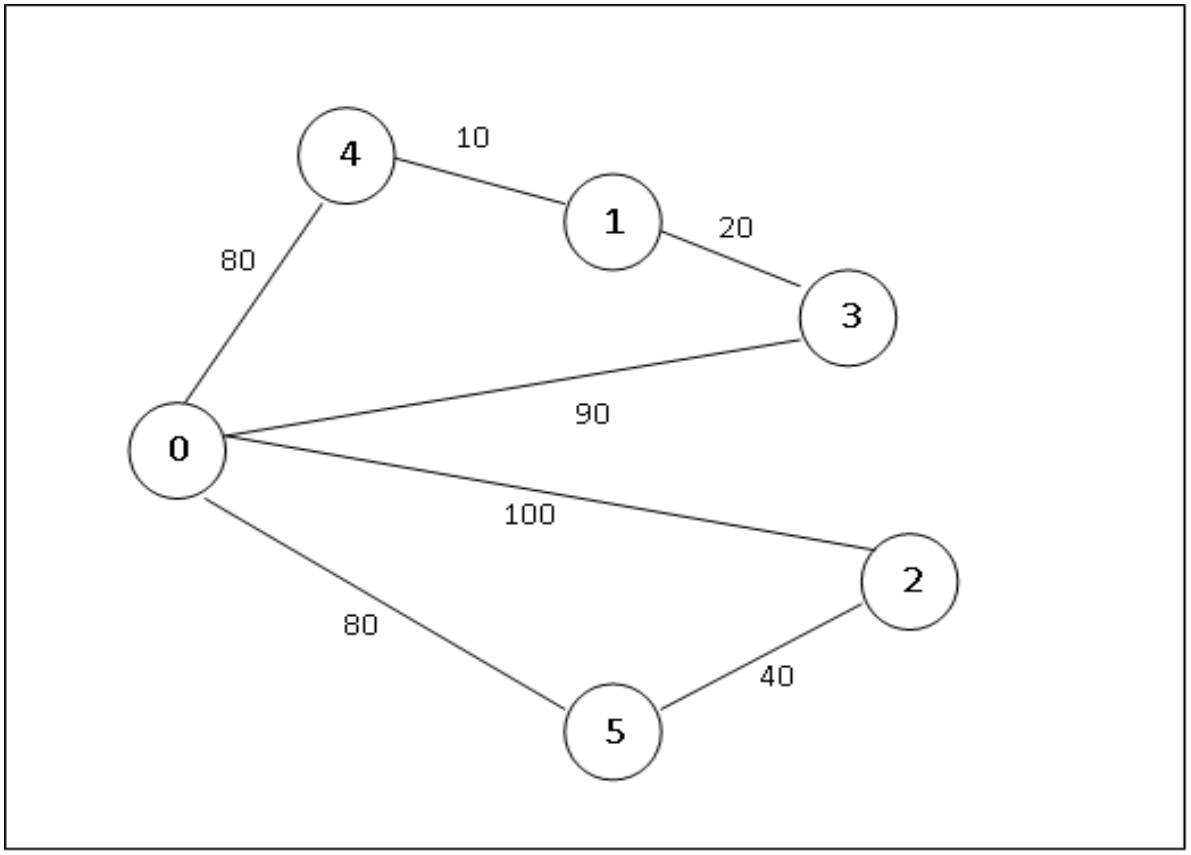


En yakın komşu algoritmasına göre

Daha sonra çevrim uygun rotalara ayrıştırılır (araç kapasitesi=150 hektolitre).

	Yük	Uzunluk
0-4-1-3-0	150	200
0-2-5-0	150	220

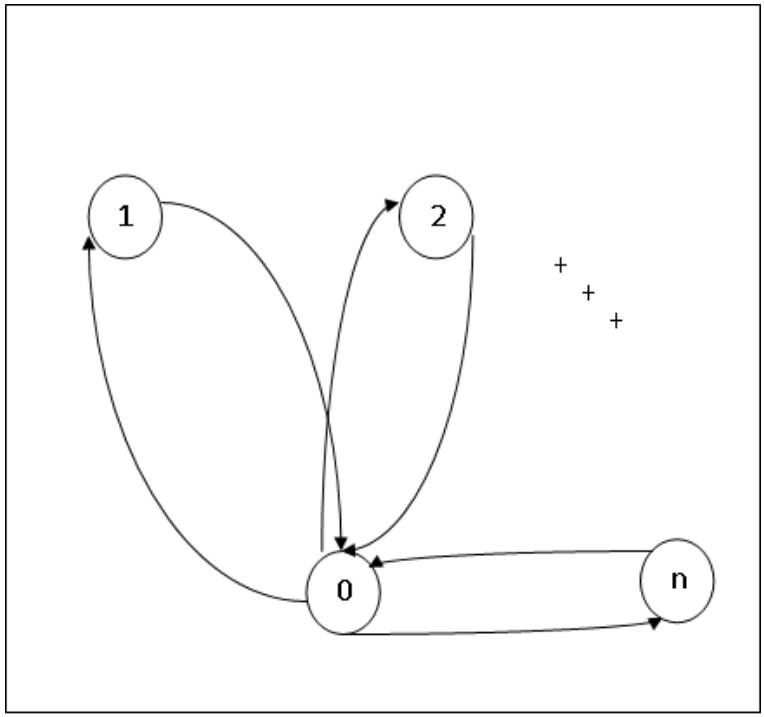
Önce rotala, sonra kümele (Route first, cluster second)



Tasarruf Algoritması (Savings Algorithm)

- Clarke ve Wright (1963) araç rotalama problem için etkin bir sezgisel geliştirmişlerdir. Bu sezgisel tasarruf yaklaşımı olarak da bilinir.
- Prosedür, her müşterinin bireysel olarak depodan tedarik edildiği bir başlangıç çözümü ile başlar. Araç, her müşteriye hizmet götürdükten sonra depoya dönmek zorunda olduğu için böyle bir çözüm çok verimsizdir.

Tasarruf Algoritması (Savings Algorithm)



- Buna bir alternatif, gereksiz dönüş turlarını ortadan kaldırmak için rotaları birleştirmektir.

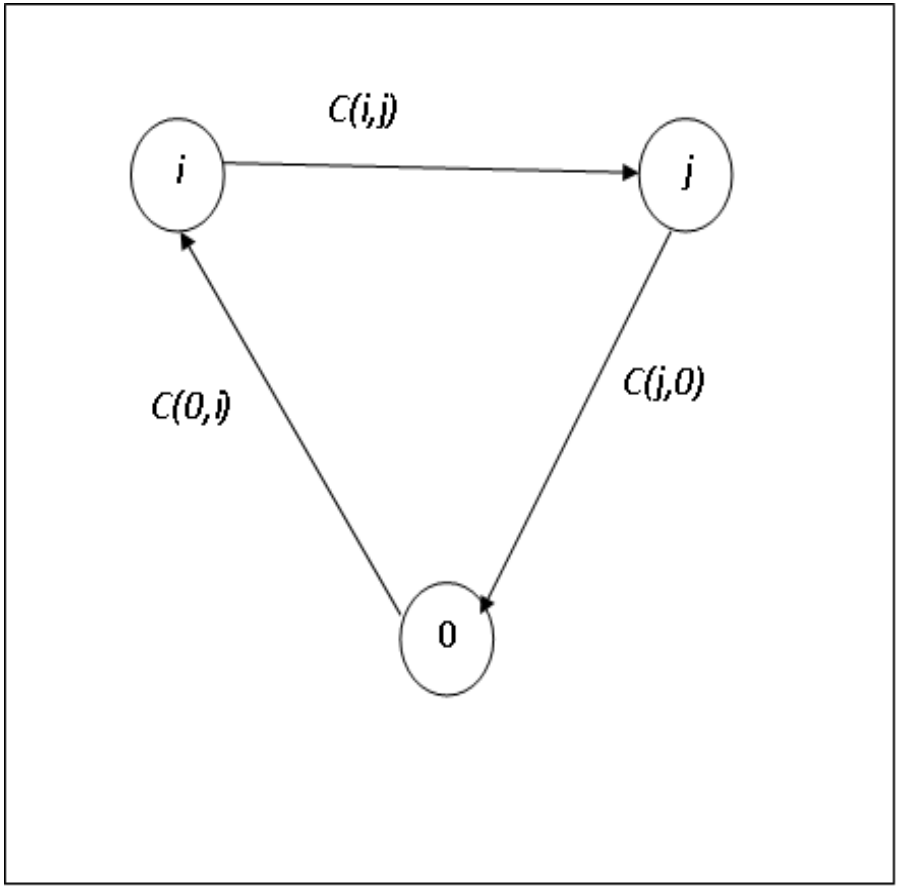
Tasarruf Algoritması (Savings Algorithm)

i ve j müşterilerine olan rotaların yandaki şekilde gösterildiği gibi bir rotada birleştirildiğini varsayalım. Bu rotaları birleştirmekten doğacak tasarruf,

$$s(i,j) = c(0,i) + c(0,j) - c(i,j)$$

'dir.

Eğer tasarruf pozitifse, rotaları birleştirmek faydalıdır.



Tasarruf Algoritması (Savings Algorithm)

Clarke-Wright algoritmasının adımları aşağıdaki gibidir.

Adım 1: Tüm müşteri çiftleri için $s(i, j)$ tasarruflarını hesapla.

Adım 2: En büyük tasarrufa sahip müşteri çiftini seç ve bu müşterileri birleştirmenin uygun (feasible) olup olmadığını belirle. Eğer uygunsa, onları birleştirecek yeni bir rota oluştur. Eğer değilse, bu müşteri çiftini ihmal et, en büyük tasarrufa sahip bir sonraki çifti seç.

Adım 3: Tasarruflar pozitif olduğu sürece adım 2'yi tekrarla. Tüm pozitif tasarruflar dikkate alındığında, DUR.

Tasarruf Algoritması-Örnek

Yakıt istasyonu	Sipariş
1	50
2	75
3	50
4	50
5	75

	0	1	2	3	4	5
0	0	90	100	90	80	80
1	90	0	10	20	10	30
2	100	10	0	10	20	40
3	90	20	10	0	10	30
4	80	10	20	10	0	20
5	80	30	40	30	20	0

Tasarruf Algoritması-Örnek

Başlangıç çözümü

0-1-0

0-2-0

0-3-0

0-4-0

0-5-0

$S(1,2)=C(0,1)+C(0,2)-C(1,2)=90+100-10=180$

$S(1,3)=C(0,1)+C(0,3)-C(1,3)=90+90-20=160$

$S(1,4)= C(0,1)+C(0,4)-C(1,4)= 90+80-10=160$

$S(1,5)= C(0,1)+C(0,5)-C(1,5)= 90+80-30=140$

$S(2,3)= C(0,2)+C(0,3)-C(2,3)= 100+90-10=180$

Tasarruf Algoritması-Örnek

S(2,4)=C(0,2)+C(0,4)-C(2,4)=100+80-20=160
S(2,5)=C(0,2)+C(0,5)-C(2,5)=100+80-40=140
S(3,4)= C(0,3)+C(0,4)-C(3,4)= 90+80-10=160
S(3,5)= C(0,3)+C(0,5)-C(3,5)= 90+80-30=140
S(4,5)= C(0,4)+C(0,5)-C(4,5)= 80+80-20=140

Daha sonra tasarruf matrisi oluşturulur.

Tasarruf Algoritması-Örnek

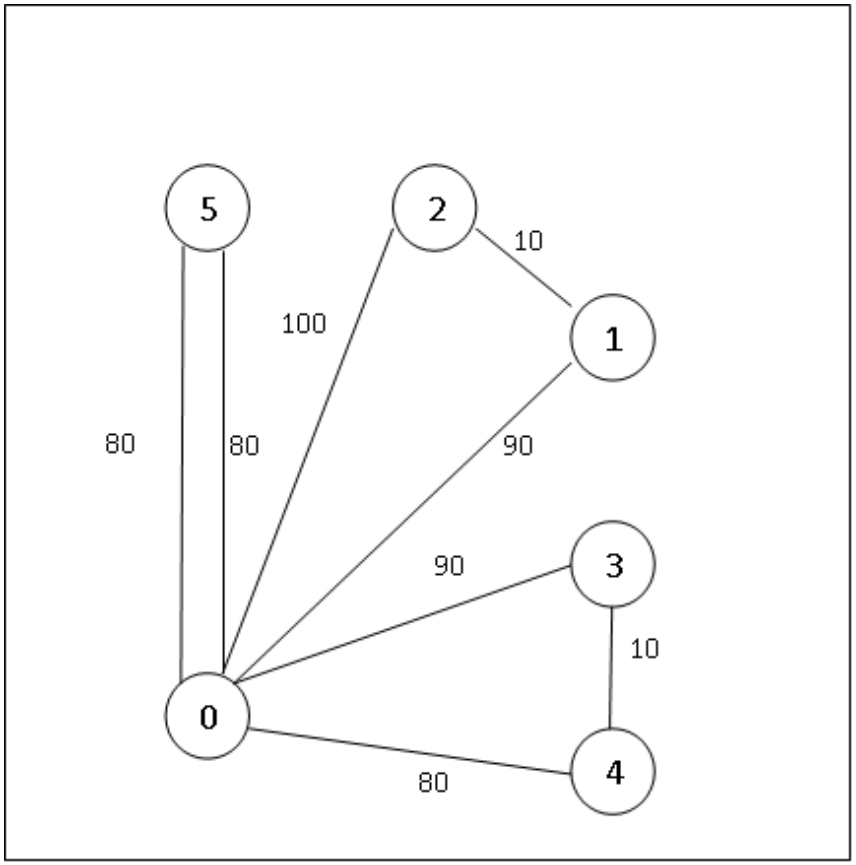
Tasarruflar

	1	2	3	4	5
1	-				
2	180	-			
3	160	180	-		
4	160	160	160	-	
5	140	140	140	140	-

Tasarruf Algoritması-Örnek

Çözüm:

Rota		Uzunluk
1	0-1-2-0	200
2	0-3-4-0	180
3	0-5-0	160
	Toplam	540



Ok Rotalama Problemleri (Arc Routing Problems)

- ARP, bir $R \subseteq A \cup E$ alt kümesindeki her yönlü ya da yönsüz dal ziyaret edilecek şekilde bir G(V,A,E) grafında en düşük maliyetli araç rotalarının belirlenmesini içerir.
- Yardımcı tam G′ grafları (complete graph) üzerinde formüle edilip çözülebilen NRP'lerin aksine, ARP'ler G üzerinde genellikle doğrudan modellenebilir.
- Burada, graftaki tüm ok ve dalların hizmet görmesinin gerektiği Çinli Postacı Problemi (Chineese Postman Problem) ele alınmıştır.

Çinli Postacı Problemi (Chineese Postman Problem)

- CPP, bir grafın tüm oklarını (yönlü dal) ve yönsüz dallarını en azından bir kere geçen minimum maliyetli rotanın belirlenmesi ile ilgilenir.
- Ana uygulamaları, şehirlerde çöp toplama, posta dağıtım, şebeke bakım, sayaç okuma gibi alanlarda görülür.
- CPP, G(V,A,E) grafının Euler olup olmadığı ile ilgilidir. Nonnegatif ok ve dal maliyetlerine sahip bir Euler grafında her Euler turu optimal bir CPP çözümü oluşturur.

Çinli Postacı Problemi (Chineese Postman Problem)

- Euler olmayan bir grafta, optimal bir CPP çözümü en azından bir ok ya da dalı 2 kere geçmek zorundadır.
- Bir Euler turunun varlığı için gerek ve yeter şart ele alınan G grafının tipine bağlıdır (yönlü, yönsüz ya da karışık).
- <u>Özellik:</u> Yönlü ve güçlü derecede bağlı bir G grafı sadece ve sadece simetrik ise, yani her bir düğüm için giren okların sayısı çıkan okların sayısına eşit ise (simetrik düğüm) Euler'dir.
- <u>Özellik:</u> Yönsüz ve bağlı G grafı sadece ve sadece çift ise, yani her düğümün derecesi çift ise Euler'dir.

Çinli Postacı Probleminin (CPP) çözümü 2 adıma ayrıştırılabilir.

<u>Adım 1:</u> Çoklu graf $G^{(a)}=(V, A\cup A^{(a)}, E \cup E^{(a)})$ Euler grafı olacak şekilde en az maliyetli $A^{(a)}$ ok veya $E^{(a)}$ kenar kümesini belirle (eğer G zaten Euler ise, $A^{(a)}=\emptyset$ ve $E^{(a)}= \emptyset$ olur ve $G=G^{(a)}$'dır).

<u>Adım 2:</u> $G^{(a)}$'da bir Euler turu belirle.

Prosedürün ilk adımı G yönlü ya da yönsüz bir graf ise polinomsal zamanda gerçekleştirilebilir.

İkinci adımdaki Euler turu aşağıdaki prosedür ile bulunabilir.

<u>Adım 1:</u> C tur kümesi ile $G^{(a)}$'nın kenarlarını ve oklarını bir ok/kenar sadece bir kere geçilecek şekilde kapla.

<u>Adım 2:</u> $|C|=1$ ise DUR, elde edilen tur Euler turudur.

<u>Adım 3:</u> C'de en azından bir ortak düğümü olan 2 tur belirle. Bu iki turu birleştir, C'yi güncelle, adım 2'ye git.

Adım 1'de, $G^{(a)}$'da bir tur, çoklu grafın başlangıç düğümü ikinci kez dahil edilene kadar rassal olarak ziyaret edilmesiyle elde edilebilir. Daha sonra, turun kenarları/okları silinir. Yeni çoklu grafta yeni bir tur aranabilir.

<u>Yönlü Çinli Postacı Problemi:</u> G yönlü olduğunda, optimal bir çözümde $A^{(a)}$'daki oklar asimetrik düğümleri birleştiren minimum maliyetli yolları oluşturur. Dolayısıyla $A^{(a)}$ uygun bir şekilde tanımlanmış iki parçalı yönlü graf üzerinde bir minimum maliyetli akış problemini çözerek elde edilebilir.

V^+: giren ve çıkan ok sayısı arasındaki farkın pozitif olduğu düğümlerin alt kümesi

V^-: giren ve çıkan ok sayısı arasındaki farkın negatif olduğu düğümlerin alt kümesi

$G_T(V^+ \cup V^-, A_T)$: iki parçalı yönlü graf

$A_T=\{(i,j): i\in V^+, j\in V^-\}$

W_{ij}: Her $(i,j)\in A_T$ okuyla ilgili G'de i düğümünden j düğümüne en düşük maliyetli yola eşit bir maliyet vardır

O_i (>0): $i \in V^+$ düğümü için o düğüme giren oklarla çıkan oklar arasındaki farka eşit arz miktarı olsun

d_j (>0): $j \in V^-$ düğümü için o düğüme giren oklarla çıkan oklar arasındaki farka eşit j düğümü talebi olsun

S_{ij}, $(i,j) \in A_T$: (i,j) okunun akış miktarı

Ulaştırma problemi aşağıdaki gibidir:

$$Min \quad \sum_{(i,j) \in A_T} w_{ij} s_{ij} \qquad (1)$$

$$s.t.$$

$$\sum_{j \in V^-} s_{ij} = o_i, \quad i \in V^+ \qquad (2)$$

$$\sum_{i \in V^+} s_{ij} = d_j, \quad j \in V^- \qquad (3)$$

$$s_{ij} \geq 0, \quad (i,j) \in A_T \qquad (4)$$

Yönsüz Çinli Postacı Problemi

G grafı yönsüz olduğunda, $E^{(a)}$ kümesi, $G_D(V_D, E_D)$ yardımcı grafı üzerinde bir eşleme probleminin çözümü olarak elde edilebilir. V_D, G'deki tek dereceli düğümlerin kümesidir (çift sayıda düğüm) ve $E_D=\{(i, j): i\in V_D, i\neq j\}$. Her $(i, j)\in E_D$ kenarı için G'deki i ve j düğümleri arasındaki minimum maliyetli yola eşit bir w_{ij} maliyeti vardır. $E^{(a)}$ kümesi, G_D'deki optimal eşleme sonucu elde edilen minimum maliyetli kenarları içerir.