

PERT

(Program Evaluation and Review Technique)

(Program Değerlendirme ve Gözden Geçirme Tekniği)

Program Değerlendirme ve Gözden Geçirme Tekniği (PERT)

Program değerlendirme ve gözden geçirme tekniği (PERT);

faaliyetlerin süre tahminlerinin belirsiz olduğu zaman, **proje süresini** tahmin etmek için kullanılan bir **olay-ağ** analiz tekniğidir.

PERT, **olasılıksal** veya **stokastik** (değişken, rastlantısal, rastsal) yöntem olarak da bilinir.

Program Değerlendirme ve Gözden Geçirme Tekniği (PERT)

1950'lerde, ABD Deniz Kuvvetleri, **Polaris** füze sistemi projesinde % 50 kadar bir süre gecikmesi yaşamıştır. Asıl sorun geçmişte proje ile ilgili herhangi bir tarihsel verinin olmamasıydı. Proje ekibi; ABD Deniz Kuvvetleri (proje sahibi), Lockheed Aircraft Corporation (ana yüklenici) ve Booz Allen Hamilton (yönetim danışmanı ekibi) Polaris projesinin planlamasına yardımcı bir araç geliştirmek için ortak bir araştırma başlattı.



Prof. Dr. Mürsel ERDAL

Sayfa 3

Program Değerlendirme ve Gözden Geçirme Tekniği (PERT)

Amaç, olasılık teorisini kullanarak, belli bir olasılıkla bir projenin tamamlanma tarihini tahmin eden bir yöntem geliştirmektir. 1958 yılında bu yöntem; **program değerlendirme inceleme** tekniği kapsamında geliştirildi ve daha sonra **PERT** olarak tanındı.

Prof. Dr. Mürsel ERDAL

Sayfa 4

Program Değerlendirme ve Gözden Geçirme Tekniği (PERT)

PERT, her faaliyet için bir süre frekans dağılımı gerektiren bir olasılık yaklaşımı kullanır. Çoğu durumda, bu tür dağılımlar bilinmez veya kullanılmaz durumda bulunmaktadır. Bu nedenle her bir faaliyet süresi için, PERT, 3 ayrı süre belirler. Örneğin, yükseltilmiş bir plak döşeme için iskele kurulumu en büyük olasılıkla 5 gün gerektirecektir. Tüm ara vermeler veya engeller olmadan, çalışma iyi giderse, süresi belki 4 güne iner. Ancak pratikte kötü durum senaryosunda, bu etkinlik 8 gün sürebilir.

Program Değerlendirme ve Gözden Geçirme Tekniği (PERT)

Bir inşaatın yapım sürecinde, belirli bir olayda, örneğin geçici kabulde, başından itibaren bütün imalatların (faaliyetlerin), kesintisiz geçici kabule kadar tamamlanması gerekir. İşte bizim geçici kabulün belirlenen tarihte yapılıp yapılamayacağının olasılığını hesaplayabilmeliyiz.

PERT Hesaplamaları

PERT uygulamasında, süresi belirlenemeyen faaliyetler için 3 ayrı süre öngörülerek istatistiki bir sistem geliştirilmiştir. Bu süreler şunlardır;

- **İYİMSER** (Her şeyin umulandan daha iyi gittiği) süre, a
- **MUHEMEL** (Her şeyin yolunda gittiği) süre, m
- **KÖTÜMSER** (Her şeyin kötü gittiği) süre, b

PERT Hesaplamaları

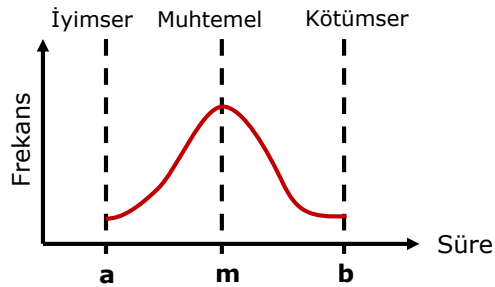
PERT'de bu sürelerle dayalı olarak, beklenen süre T_B ;

$$T_B = \frac{a + 4m + b}{6}$$

formülü ile hesaplanır.

PERT Hesaplamaları

Bu formülün dayandığı teori, 50% doğru olma ihtimalini kabul ederek belirsizliği dağıtmaktır. Yani sürelerle bunların ihtimalini noktalar ve çıkan eğriyi çizerek T_B değeri eğriyi 2 eşit alana böler.

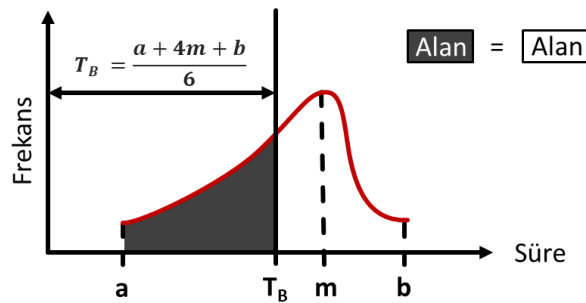


Prof. Dr. Mürsel ERDAL

Sayfa 9

PERT Hesaplamaları

" T_B " değeri, eğri (olasılık eğrisi) altında kalan alanı 2 eşit parçaya böler.



Prof. Dr. Mürsel ERDAL

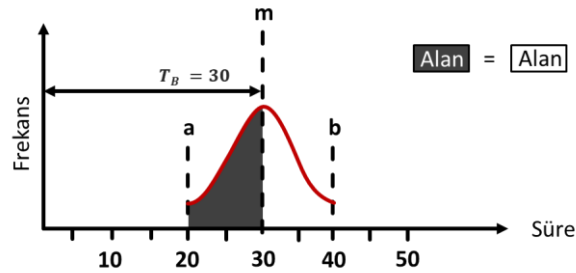
Sayfa 10

PERT Hesaplamaları

Bu durumu daha iyi anlamak için beklenen süre (T_B) formülünü 3 ayrı faaliyette örnekleyelim.

1. faaliyet: (a = 20, m = 30, b = 40 saat, gün, hafta vb.)

$$T_B = \frac{20 + (4 * 30) + 40}{6} = \frac{180}{6} = 30$$



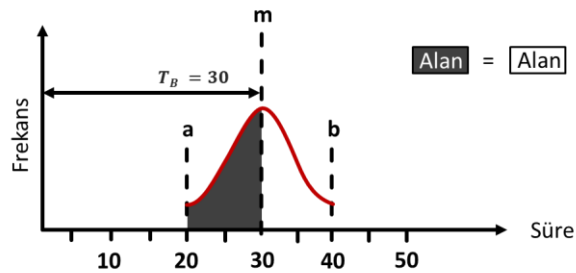
Prof. Dr. Mürsel ERDAL

Sayfa 11

PERT Hesaplamaları

Olasılık eğrisinin altında kalan alanın simetrik olmasının sebebi, iyimser ve kötümser sürelerin muhtemel süreyle olan farkının birbirine eşit olmasıdır.

(30 – 20 = 10) ve (40 – 30 = 10)



Prof. Dr. Mürsel ERDAL

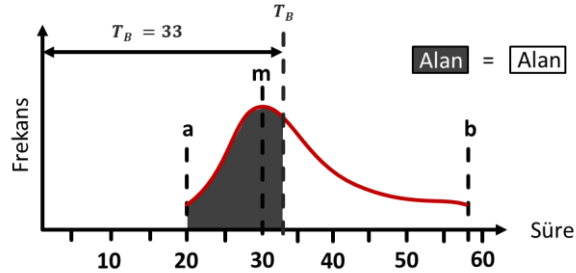
Sayfa 12

PERT Hesaplamaları

2. faaliyet: (a = 20, m = 30, b = 58)

$$T_B = \frac{20 + (4 * 30) + 58}{6} = \frac{198}{6} = 33$$

T_B , m'den daha büyük ise eğriye sola yatık denir.



Prof. Dr. Mürsel ERDAL

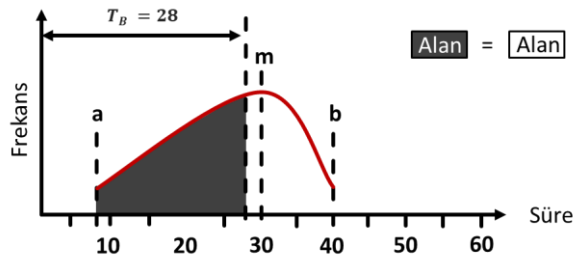
Sayfa 13

PERT Hesaplamaları

3. faaliyet: (a = 8, m = 30, b = 40)

$$T_B = \frac{8 + (4 * 30) + 40}{6} = \frac{168}{6} = 28$$

T_B , m'den daha büyük ise eğriye sağa yatık denir.



Prof. Dr. Mürsel ERDAL

Sayfa 14

PERT Hesaplamaları

Şimdi PERT'de kullanılan bu 3 zamanı daha iyi anlamak için istatistikte kullanılan bazı terimleri hatırlayalım.

Bir doğrama profili geliştirilmesi için ilgili 10 kişiye bu işi ne kadar sürede yapabilecekleri sorulmuş ve şu cevaplar alınmıştır: 12, 20, 30, 30, 30, 40, 40, 40, 40 ve 48. Bu bilgileri tekerrür sayılarını göreceğ şekilde düzenlersek;

Tahmin süreleri	Frekans (Tekerrür Sayıları)
12	1
20	1
30	3
40	4
48	1

Prof. Dr. Mürsel ERDAL

Sayfa 15

PERT Hesaplamaları

Bu bilgileri kullanarak frekans dağılım eğrisini çizebiliriz.

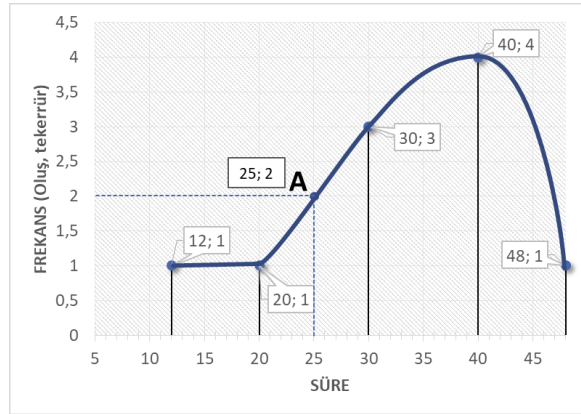


Prof. Dr. Mürsel ERDAL

Sayfa 16

PERT Hesaplamaları

Çizilmiş olan bu eğriye göre; her bir süre için frekansı çizelgeden okuyabiliriz. Örneğin 25 süre için frekans 2 olmaktadır. (A noktası)



Prof. Dr. Mürsel ERDAL

Sayfa 17

PERT Hesaplamaları

Şimdi, olasılık dağılımı ile ilgili olarak **ortalama**, **ortanca**, **mod**, **standart sapma**, **varyans** ve **açıklık** terimlerini tanımlayabiliriz.

Tahmin süreleri	Frekans (Tekerrür Sayıları)	Değerler x Frekans
12	1	(12x1) = 12
20	1	20
30	3	90
40	4	160
48	1	48
Σ	10	330

$$\text{Ortalama, } \bar{x} = \frac{330}{10} = 33$$

Prof. Dr. Mürsel ERDAL

Sayfa 18

PERT Hesaplamaları

Mod: Eğer varsa, en büyük frekansı olan değerdir. Örneğimizde mod 40'tır.

Ortanca: Orta ölçü veya enterpolasyonla bulunan değerdir. Bir veri grubu küçükten büyüğe sıralandığında, terim sayısı tek ise ortadaki sayı, çift ise ortadaki iki sayının toplamının yarısıdır.

Veri grubu {12, 20, 30, 30, 30, 30, 40, 40, 40, 48}

Ortanca = $(30+40)/2 = 35$

Örneğimizde ortanca 35'dir. Normal olarak ortanca, ortalamaya eşit değildir.

Açıklık: En küçük ve en büyük değerler arasındaki yayılmadır. Örneğimizde açıklık $48 - 12 = 36$ 'dır.

PERT Hesaplamaları

Varyans: Değerler ile ortalama arasındaki sapmayı gösteren ölçüdür ve σ^2 ile gösterilir.

x ; değerleri, \bar{x} ; ortalamayı ve n 'de frekans toplamı ise;

$$\sigma^2 = \frac{(x - \bar{x})^2}{n} \text{ eşitliği bize varyansı verir.}$$

PERT Hesaplamaları

Örneğimizde

x	Frekans	\bar{x}	$(x - \bar{x})$	Frekans * $(x - \bar{x})^2$
12	1	33	-21	441
20	1	33	-13	169
30	3	33	-3	27
40	4	33	+7	196
48	1	33	+15	225
Σ	n = 10			1058

$$\sigma^2 = \frac{1058}{10} = 105,8 \text{ olur.}$$

Prof. Dr. Mürsel ERDAL

Sayfa 21

PERT Hesaplamaları

Standart sapma: Varyansın karekökü standart sapmayı verir.

Standart sapma σ ile gösterilir.

eşitliği bize varyansı verir.

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Örneğimizde standart sapma;

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

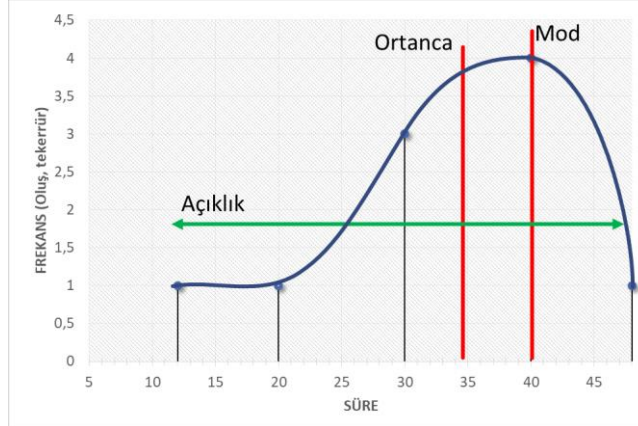
$$\sigma = \sqrt{105,8} = 10,29 \text{ olur.}$$

Prof. Dr. Mürsel ERDAL

Sayfa 22

PERT Hesaplamaları

Bu istatistiki değerleri daha önce çizmiş olduğumuz dağılım eğrisi üzerinde gösterelim



Prof. Dr. Mürsel ERDAL

Sayfa 23

PERT Hesaplamaları

Beklenen süre formülü, süre dağılımının tek mod ve varyansı, açıklığın kabaca altıda biri ($1/6$) olarak tahmin edebilme kabulleri üzerine kurulmuştur. Bu durumda açıklık, iyimser (a) ve kötümser (b) tahminleri arasındaki farktır ($\text{Açıklık} = b - a$).

$$T_B = \frac{a + 4 * m + b}{6} \quad \text{yerine} \quad \frac{1}{3} \left(2 * ma + \frac{a + b}{2} \right) \text{ yazılabilir.}$$

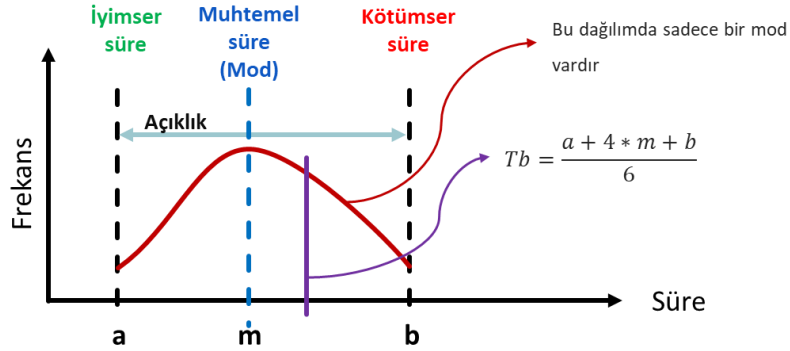
Böylece, beklenen süre, mod ile açıklık ortasının $\left(\frac{a+b}{2}\right)$, üçte birine düşer.

Prof. Dr. Mürsel ERDAL

Sayfa 24

PERT Hesaplamaları

Bu durum aşağıdaki kabullerden çıkarılmıştır.



Şekilde a, m, b ve T_B arasındaki ilişki görülebilmektedir.

Prof. Dr. Mürsel ERDAL

Sayfa 25

PERT Hesaplamaları

PERT'de beklenen süre, varyans ve standart sapma aşağıdaki eşitliklerle hesaplanır.

$$\text{Beklenen süre, } TB = \frac{a + 4 * m + b}{6}$$

$$T_B \text{'nin varyansı, } \sigma_{T_B}^2 = \left(\frac{b - a}{6} \right)^2$$

$$\text{Standart sapma, } \sigma_{T_B} = \frac{b - a}{6}$$

Prof. Dr. Mürsel ERDAL

Sayfa 26

PERT Hesaplamaları

Şimdi bu formülleri beklenen süre ile ilgili daha önce incelediğimiz 3 faaliyet üzerinde uygulayalım.

1. faaliyet: $a = 20$, $m = 30$, $b = 40$

$$TB = \frac{20 + 4 * 30 + 40}{6} = 30 = m = \text{en muhtemel zaman}$$

$$\sigma_{T_B} = \frac{b - a}{6} = \frac{40 - 20}{6} = \frac{20}{6} = 3,33$$

Prof. Dr. Mürsel ERDAL

Sayfa 27

PERT Hesaplamaları

2. faaliyet: $a = 20$, $m = 30$, $b = 58$

$T_B = 33$ 'tür ve $T_b > m$ 'dir.

$$\sigma_{T_B} = \frac{b - a}{6} = \frac{58 - 20}{6} = \frac{38}{6} = 6,33$$

3. faaliyet: $a = 8$, $m = 30$, $b = 40$

$T_B = 28$ 'tür ve $T_b < m$ 'dir.

$$\sigma_{T_B} = \frac{b - a}{6} = \frac{40 - 8}{6} = \frac{32}{6} = 5,33$$

Prof. Dr. Mürsel ERDAL

Sayfa 28

PERT Hesaplamaları

Bilindiği gibi varyans **belirsizliğin ölçüsüdür**. Eğer bir faaliyetin varyansı büyükse; o faaliyetin tamamlanma süresine dair belirsizlikte büyüktür.

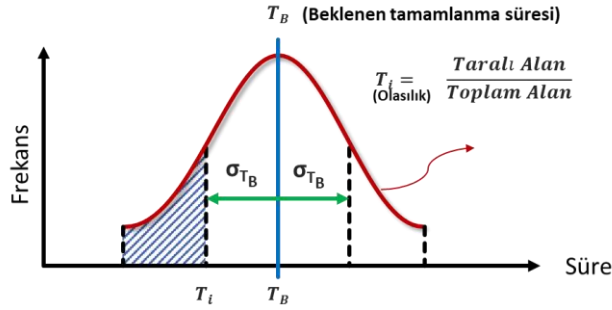
Bir ağ diyagramındaki herhangi bir düğüm noktasının, T_B beklenen tamamlanma süresi; bu düğüm noktasında biten işlerin istenen (T_i) sürede tamamlanma olasılığı, **olasılık teorisine** göre hesaplanır.

PERT Hesaplamaları

T_B ve σ_{T_B} değerlerine göre; normal olasılık dağılım eğrisi (beta eğrisi) göz önüne alınırsa bu eğrinin maksimumu T_B 'den geçer ve simetriktir. Standart sapmanın değerine bağlı olarak, beta eğrisi dikleşir veya yatıklaşır. σ_{T_B} **küçük ise bu eğri diktir, yani T_B 'nin hesabında doğruluk çok fazladır.**

PERT Hesaplamaları

Verilen σ_{TB} 'ye göre çizilen beta eğrisi aşağıdaki gibi olsun. Bu düğüm noktasının, T_i istenen zamanda tamamlanması isteniyorsa, bunun gerçekleşebilme olasılığı yüzdesi, **şeklin solunda kalan taralı alanın, eğrinin altındaki toplam alana bölünmesiyle bulunur.**



Prof. Dr. Mürsel ERDAL

Sayfa 31

PERT Hesaplamaları

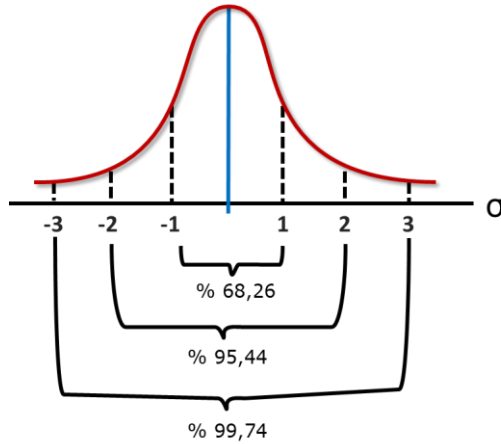
Normal dağılım eğrisi, olasılıklar hesabı teorisinde, sonsuz terimli serilerle hesaplanır. Pratik gayeler için bu eğrinin belirli bir alanının bilinmesi yeterlidir.

Normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu, bir çan eğrisi ile temsil edilir. Eğri altındaki alan 1,00 veya 100% olasılıklara sahiptir. Aşağıda normal dağılım olasılık yoğunluk fonksiyonu eğrisi görülmektedir.

Prof. Dr. Mürsel ERDAL

Sayfa 32

PERT Hesaplamaları



Prof. Dr. Mürsel ERDAL

Sayfa 33

PERT Hesaplamaları

Beklenen tamamlanma süresi T_{Bi} , standart sapması da $\sigma_{T_{Bi}}$ olan bir düğüm noktasının T_i süresinde tamamlanma olasılığının yüzdesi;

$$Z = \frac{T_{i_i} - T_{B_i}}{\sigma_{T_R}} \quad \text{bağıntısı ile tarif edilen bir z parametresine}$$

bağlı olarak hesaplanır.

Prof. Dr. Mürsel ERDAL

Sayfa 34

Standart Normal Dağılım Kümülatif Olasılık Tablosu
(Z Tablosu)

Z	Olasılık	Olasılık	Z
- 2	0,02	0,98	2
- 1,5	0,07	0,93	1,5
- 1,3	0,10	0,90	1,3
- 1,0	0,16	0,84	1,0
- 0,9	0,18	0,82	0,9
- 0,8	0,21	0,79	0,8
- 0,7	0,24	0,76	0,7
- 0,6	0,27	0,73	0,6
- 0,5	0,31	0,69	0,5
- 0,4	0,34	0,66	0,4
- 0,3	0,38	0,62	0,3
- 0,2	0,42	0,58	0,2
- 0,1	0,46	0,54	0,1
0	0,50	0,50	0

Prof. Dr. Mürsel ERDAL

Sayfa 35

PERT Hesaplamaları

Belirli bir yüzde olasılıkla da işlerin ne kadar sürede tamamlanabileceği;

$$T_{i_i} = T_{B_i} + Z * \sigma_{T_{B_i}} \quad \text{eşitliği ile hesaplanır.}$$

Prof. Dr. Mürsel ERDAL

Sayfa 36

PERT Hesaplamaları

Kritik yol üzerindeki faaliyetlerin herhangi birinin (i) bitme noktasına kadar olan beklenen süre $T_{Bi} = T_{i_i} - Z * \sigma_{T_{Bi}}$ eşitliği ile hesaplanır.

Eşitlikte; $T_{Bi} = (i)$ Bitme noktasına kadarki faaliyetlerin beklenen süresini,
 $T_{i_i} =$ Aynı noktaya kadarki faaliyetlerin gerçekleşmesi için öngörülen yani istenilen süreyi,
 $\sigma_{T_{Bi}} =$ Aynı noktaya kadar ki faaliyetlerin standart sapmalarının toplamını,
 $Z =$ Normal dağılım tablosu değerini ifade eder.

Prof. Dr. Mürsel ERDAL

Sayfa 37

PERT

(Program Evaluation and Review Technique)

(Program Değerlendirme ve Gözden Geçirme Tekniği)

ÖRNEK UYGULAMA

Prof. Dr. Mürsel ERDAL

Sayfa 38

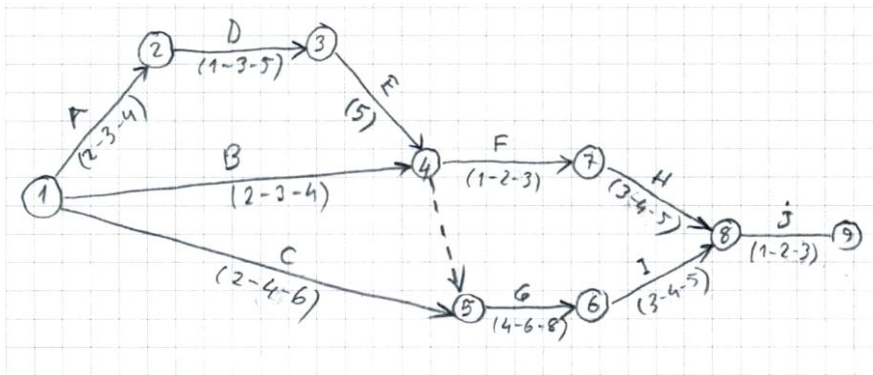
ÖRNEK UYGULAMA

Aktivite	Öncelik	Aktivite Süresi (gün)					
		a	m	b	T _B	Stan. Sap	Varyans
A	-	2	3	4			
B	-	2	3	4			
C	-	2	4	6			
D	A	1	3	5			
E	D	3	5	7			
F	B, E	1	2	3			
G	B, C, E	4	6	8			
H	F	3	4	5			
I	G	3	4	5			
J	H, I	1	2	3			

Prof. Dr. Mürsel ERDAL

Sayfa 39

ÖRNEK UYGULAMA (Ağ oluşturma)



Prof. Dr. Mürsel ERDAL

Sayfa 40

PERT Hesaplamaları

PERT’de beklenen süre aşağıdaki eşitlikler hesaplanır.

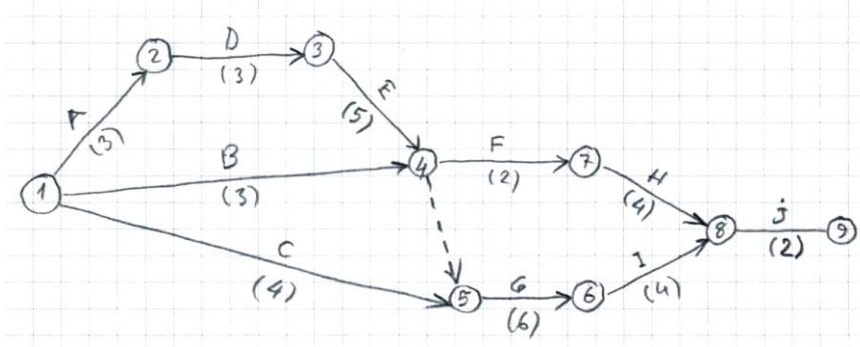
A aktivitesi için beklenen süre (TB_A)’nin hesabı aşağıda verilmiştir.

$$\text{Beklenen süre, } TB_A = \frac{a + 4 * m + b}{6} = \frac{2 + 4 * 3 + 4}{6} = 3$$

ÖRNEK UYGULAMA

Aktivite	Öncelik	a	Aktivite Süresi (gün)				Stan. Sap	Varyans
			m	b	T_B			
A	-	2	3	4	3			
B	-	2	3	4	3			
C	-	2	4	6	4			
D	A	1	3	5	3			
E	D	3	5	7	5			
F	B, E	1	2	3	2			
G	B, C, E	4	6	8	6			
H	F	3	4	5	4			
I	G	3	4	5	4			
J	H, I	1	2	3	2			

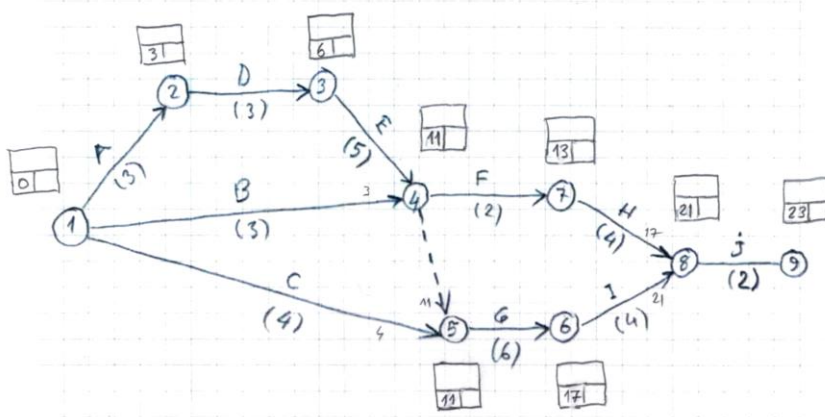
ÖRNEK UYGULAMA



Prof. Dr. Mürsel ERDAL

Sayfa 43

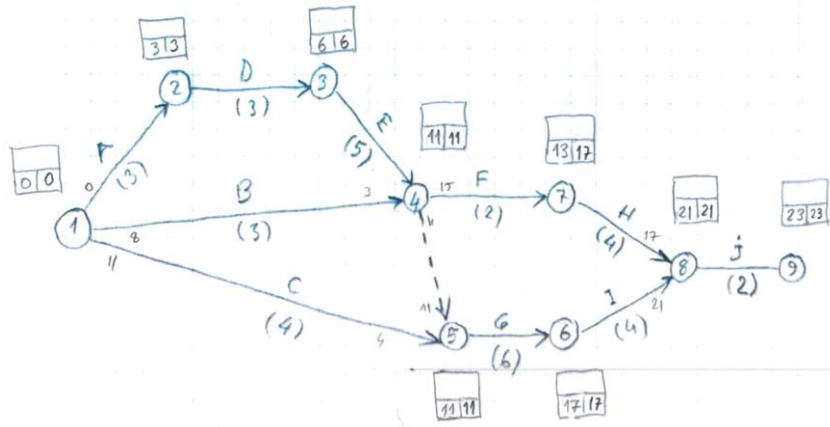
ÖRNEK UYGULAMA (İleri Gidiş)



Prof. Dr. Mürsel ERDAL

Sayfa 44

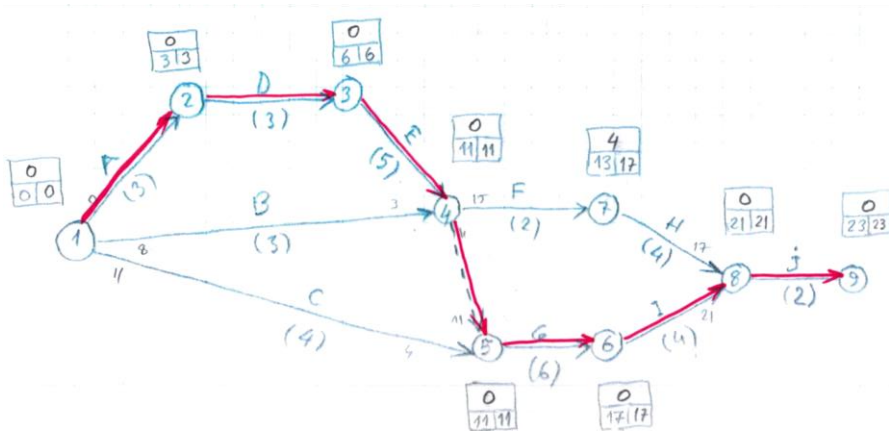
ÖRNEK UYGULAMA (Geri Geliş)



Prof. Dr. Mürsel ERDAL

Sayfa 45

ÖRNEK UYGULAMA (Kritik Yol)



Prof. Dr. Mürsel ERDAL

Sayfa 46

PERT Hesaplamaları

PERT'de varyans ve standart sapma aşağıdaki eşitliklerle hesaplanır.

A aktivitesi için varyans ve standart sapma hesabı aşağıda verilmiştir.

$$T_B \text{'nin varyansı, } \sigma_{TB_A}^2 = \left(\frac{b-a}{6} \right)^2 = \left(\frac{4-2}{6} \right)^2 = 0,111$$

$$\text{Standart sapma, } \sigma_{TB_A} = \frac{b-a}{6} = \frac{4-2}{6} = 0,333$$

ÖRNEK UYGULAMA

Aktivite	Öncelik	a	Aktivite Süresi (gün)				
			m	b	T _B	Stan. Sap	Varyans
A	-	2	3	4	3	0,333	0,111
B	-	2	3	4	3	0,333	0,111
C	-	2	4	6	4	0,666	0,444
D	A	1	3	5	3	0,666	0,444
E	D	3	5	7	5	0,666	0,444
F	B, E	1	2	3	2	0,333	0,111
G	B, C, E	4	6	8	6	0,666	0,444
H	F	3	4	5	4	0,333	0,111
I	G	3	4	5	4	0,333	0,111
J	H, I	1	2	3	2	0,333	0,111

PERT Hesaplamaları

Kritik Yol ($\sum T_B$) = 3+3+5+6+4+2=23 gün.

Varyans (α^2) = 0,111+0,444+0,444+0,444+0,111+0,111= 1,665

Standart Sapma (α)= $\sqrt{1,665}$ =1.290

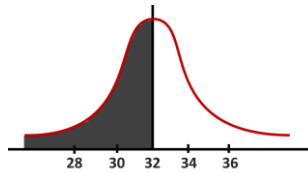
ÖRNEK UYGULAMA

Aktivite	Öncelik	a	Aktivite Süresi (gün)				S. Sap (α)	Varyans (α^2)
			m	b	T_B			
A	-	2	3	4	3			0,111
B	-	2	3	4	3			0,111
C	-	2	4	6	4			0,444
D	A	1	3	5	3			0,444
E	D	3	5	7	5			0,444
F	B, E	1	2	3	2			0,111
G	B, C, E	4	6	8	6			0,444
H	F	3	4	5	4			0,111
I	G	3	4	5	4			0,111
J	H, I	1	2	3	2			0,111
Toplam					23	1,290		1,665

Projenin istenilen 23 günde ($T_i = 23$) tamamlanabilme olasılığı;

$$Z = \frac{T_i - T_B}{\alpha_{TB}} = \frac{23 - 23}{1,290} = 0$$

Z tablosundan 0 için 0,50 yani % 50 okunur. Bu durum aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Prof. Dr. Mürsel ERDAL

Sayfa 51

Standart normal dağılım kümülatif olasılık tablosu
(z tablosu)

Z	Olasılık	Olasılık	Z
-2	0,02	0,98	2
-1,5	0,07	0,93	1,5
-1,3	0,10	0,90	1,3
-1,0	0,16	0,84	1,0
-0,9	0,18	0,82	0,9
-0,8	0,21	0,79	0,8
-0,7	0,24	0,76	0,7
-0,6	0,27	0,73	0,6
-0,5	0,31	0,69	0,5
-0,4	0,34	0,66	0,4
-0,3	0,38	0,62	0,3
-0,2	0,42	0,58	0,2
-0,1	0,46	0,54	0,1
0	0,50	0,50	0

Prof. Dr. Mürsel ERDAL

Sayfa 52

Projenin istenilen 25 günde ($T_i = 25$) tamamlanabilme olasılığı;

$$Z = \frac{T_i - T_B}{\alpha_{TB}} = \frac{25 - 23}{1,290} = 1,55$$

Z tablosundan 1,55 için 0,93 yani Bu proje % 93 olasılıkla 25 günde tamamlanır.

Proje % 70 olasılıkla ne kadar sürede tamamlanır?

$$T_i = T_B + Z * \alpha_{TB} = 23 + 0,525 * 1,290 = 23,68$$

Z tablosundan % 70 olasılık için Z değeri okunur. % 70 için bu değer 0,525 alındı.

$$T_i = 24 \text{ gün}$$