Adi Nokta Civarında Seri Çözümler

⊛ $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$ --- (*)

diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Bu taktirde a, b, c fonksiyonları $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasının bir J komşuluğunda ortak çarpana sahip olmayan analitik fonksiyonlar ve $\forall x \in J$ için $a(x) \neq 0$ ise bu taktirde x_0 noktasına (*) dif. denkleminin bir adi noktası denir. Eğer x_0 noktası (*) denkleminin bir adi noktası değilse bu taktirde bu noktaya (*) denkleminin singüler (aykırı) noktası denir.

⊛ Eğer x_0 noktası (*) denkleminin bir adi noktası ise çözüm

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x - x_0)^n$$ şeklinde aranır.

⊛ $f(x)$ x_0 noktasında seriye açılabilir bir fonksiyon olmak üzere

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x_0) \cdot \frac{(x - x_0)^n}{n!}, \quad x \in J$$

denkleminin çözümü de $y = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \cdot (x - x_0)^n$ şeklinde aranabilir.

⊛ Bazı serilerin $x_0 = 0$ noktasındaki seri açılımları aşağıda verilmiştir.

→ $$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

→ $$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

→ $$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

→ $$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1$$

→ $$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

→ $$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

ÖR,

$y'' - x^2 y' + xy = 0$ dif denkleminin $x=0$ noktası civarında seri çözümünü bulunuz.

$x=0$ noktası denklemin bir adi noktasıdır. Buna göre

$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ şeklinde çözüm arayalım.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1}, \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n.(n-1).a_n.x^{n-2}$$

ifadeleri denklemde yazılırsa

$$y'' - x^2 y' + xy = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n.(n-1).a_n.x^{n-2} - x^2.\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1} + x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n.(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n.(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

$(n \to n+2)$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+2).(n+1).a_{n+2}\, x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n-1).a_n.x^{n+1} = 0$$

$$\Rightarrow a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2}\, x^n - \sum_{n=1}^{\infty} (n-2).a_{n-1}.x^n = 0$$

$$\Rightarrow a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} - (n-2)\, a_{n-1}\right] x^n = 0$$

$$\Rightarrow a_2 = 0, \quad (n+2)(n+1)\, a_{n+2} - (n-2)\, a_{n-2} = 0$$

$$\Rightarrow a_2 = 0, \quad a_{n+2} = \frac{n-2}{(n+2)(n+1)}\, a_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

yazılabilir. Buna göre

- $a_3 = -\frac{1}{3.2} a_0$
- $a_4 = 0$
- $a_5 = \frac{1}{5.4} a_2 = 0$
- $a_6 = \frac{2}{6.5} a_3 = -\frac{2}{6.5.3.2} a_0$
- $a_7 = \frac{3}{7.6} a_4 = 0$
- $a_8 = \frac{4}{8.7} a_5 = 0$

- $a_9 = \frac{5}{9\,8} a_6 = -\frac{\cancel{2}.\cancel{5}}{9\,8\,6\cancel{5}\,3\cancel{2}} a_0 = -\frac{1}{3.6.8.9} a_0$, $a_{10} = 0$, $a_{11} = 0$

- $a_{12} = \frac{8}{12\,11} a_9 = -\frac{\cancel{2}.\cancel{5}.\cancel{8}}{12.11.9.\cancel{8}\,6\cancel{5}\,3\cancel{2}} a_0 = -\frac{1}{3.6.9.11.12} a_0$

şeklinde yazabiliriz. O halde çözüm

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n . x^n$$

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

$$y = a_0 + a_1 x - \frac{1}{3.2} a_0 x^3 - \frac{1}{6.5.3} . a_0 x^6 - \frac{1}{3.6.8.9} a_0 x^9 + \cdots$$

$$y = a_0 . \left(1 - \frac{x^3}{3.2} - \frac{x^6}{6.5.3} - \frac{x^9}{9.8.6.3} - \frac{x^{12}}{12.11.9.6.3} - \cdots\right) + a_1 x$$

şeklinde çözüm bulunur.

ÖR $(x^2-1)y'' + 3xy' - 3y = 0$ diferensiyel denkleminin $y(0) = 3$ ve $y'(0) = -2$ koşuluna uygun çözümünü bulunuz.

$x_0 = 0$ denklemin bir adi noktasıdır. Buna göre

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} y^{(n)}(0) . \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n . x^n$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n . x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

şeklinde çözüm ararsak

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad , \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n . a_n x^{n-1} , \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n.(n-1).a_n . x^{n-2}$$

olacağından bu değerler denklemde yazılırsa

$$(x^2-1) . y'' + 3xy' - 3y = 0$$

$$\Rightarrow x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n.(n-1).a_n . x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n.(n-1).a_n . x^{n-2} + 3x . \sum_{n=1}^{\infty} n.a_n . x^{n-1} - 3 . \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n.(n-1).a_n . x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n.(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 3n a_n . x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 3 a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n.(n-1).a_n.x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n.(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} 3n a_n.x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 3a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n.(n-1).a_n.x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+2).(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3n a_n.x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 3a_n x^n = 0$$

(n-yi 0 dan başlatabiliriz) (n → n+2 alındı) (n-yi sıfırdan başlatabiliriz)

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n^2-n) a_n - (n+2).(n+1).a_{n+2} + 3n a_n - 3a_n \right] x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n^2+2n-3) a_n - (n+2).(n+1).a_{n+2} \right] x^n = 0$$

$\Rightarrow$ $n=0,1,2,\dots$ için $(n^2+2n-3)a_n - (n+2).(n+1)a_{n+2} = 0$

$\Rightarrow$ $n=0,1,2,\dots$ için $a_{n+2} = \dfrac{n^2+2n-3}{(n+1).(n+2)} a_n = \dfrac{(n+3).(n-1)}{(n+1).(n+2)} a_n$

yazılabilir. Buna göre

- $n=0$ için $a_2 = -\dfrac{3}{2} a_0$
- $n=1$ için $a_3 = 0$
- $n=2$ için $a_4 = \dfrac{4}{3.4} a_2 = \dfrac{4}{3.4} \cdot \left(-\dfrac{3}{2} a_0\right) = \dfrac{-3.4}{2.3.4} a_0$
- $n=3$ için $a_5 = \dfrac{6.2}{4.5} a_3 = 0$
- $n=4$ için $a_6 = \dfrac{7.3}{5.6} . a_4 = \dfrac{7.3}{6.5} \cdot \left(\dfrac{-3.4}{2.3.4}\right) a_0 = -\dfrac{3.3.4.7}{6!}$

  ...

- $k \in \mathbb{N}$ için $a_{2k+1} = 0$
- $k \in \mathbb{N}$ için $a_{2k} = \dfrac{(2k+1).(2k-3)}{(2k-1).2k} \cdot a_{2k-2}$

$$a_{2k} = \frac{(2k+1).(2k-3)}{(2k-1).2k} \cdot \frac{(2k-1).(2k-5)}{(2k-3).(2k-2)} a_{2k-4}$$

$$a_{2k} = \frac{(2k+1).(2k-3)}{(2k-1).2k} \cdot \frac{(2k-1).(2k-5)}{(2k-3).(2k-2)} \cdot \frac{(2k-3).(2k-7)}{(2k-5).(2k-4)} a_{2k-6}$$

$$a_{2k} = -\frac{[(2k+1).(2k-1).\cdots 5.3.1].[(2k-3).(2k-5)\cdots 3.1]}{(2k)!}a_0$$

$$a_{2k} = -\frac{[(2k+1).(2k-1).\cdots 5.3.1].[(2k-3).(2k-5)\cdots 3.1]}{(2.4.6\cdots 2k).(1.3.5\cdots(2k-3).(2k-1))}a_0$$

$$a_{2k} = -\frac{1.3.5\cdots(2k-1).(2k+1)}{(2.4.\cdots 2k).(2k-1)}a_0$$

$$a_{2k} = -\frac{1.3.5\cdots(2k-1).(2k+1)}{(2.4.\cdots 2k).(2k-1)}\cdot\frac{2.4.6.\cdots 2k}{2.4.6.\cdots 2k}a_0$$

$$a_{2k} = -\frac{(2k+1)!}{(2.4.\cdots 2.k)^2.(2k-1)}a_0$$

$$a_{2k} = -\frac{(2k+1)!}{2^{2k}.(k!)^2.(2k-1)}a_0 \quad , k=1,2,\ldots$$

olarak elde edilir. Buna göre denklemin genel çözümü

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

$$y = a_0 + a_1 x - \frac{3}{2}a_0 x^2 - \frac{3.1}{3.2}a_0 x^4 - \cdots$$

$$y = a_1 x + a_0.\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k+1)!}{2^{2k}.(k!)^2.(2k-1)}x^{2k}\right)$$

yazılabilir. Buna göre $y(0)=3$ ve $y'(0)=-2$ koşuluna uygun çözüm

$$y(0)=3 \Rightarrow a_0 = 3 \quad \text{ve} \quad y'(0)=-2 \Rightarrow a_1 = -2$$

olacağından BDP çözümü $y = -2x + 3.\left(1 + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k+1)!}{2^{2k}.(k!)^2.(2k-1)}x^{2k}\right)$

bulunur.

Örn: $\left.\begin{array}{l} y''-xy'-y=0 \\ y(0)=1,\ y'(0)=0 \end{array}\right\}$ BDP serisel çözümünü bulunuz

$x_0=0$ noktası denklemin adi noktası olduğundan denklemin çözümünü

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} y^{(n)}(0)\cdot\frac{x^n}{n!} = y(0)+y'(0).x+y''(0).\frac{x^2}{2!}+---$$

şeklinde yazabiliriz. O halde denklemde $y(x)$ fonksiyonun türevlerini bulalım.

- $y''=xy'+y \Rightarrow y''(0)=0.y'(0)+\underbrace{y(0)}_{1}=1 \Rightarrow y''(0)=1$

- $\left.\begin{array}{l} y'''=xy''+y'+y' \\ y'''=xy''+2y' \end{array}\right\} \Rightarrow y'''(0)=0.y''(0)+2\underbrace{y'(0)}_{0}=0 \Rightarrow y'''(0)=0$

- $\left.\begin{array}{l} y^{(4)}=xy'''+y''+2y'' \\ y^{(4)}=xy'''+3y'' \end{array}\right\} \Rightarrow y^{(4)}(0)=0.y'''(0)+3\underbrace{y''(0)}_{1} \Rightarrow y^{(4)}(0)=3$

- $y^{(5)}=xy^{(4)}+4y''' \Rightarrow y^{(5)}(0)=0.y^{(4)}(0)+4\underbrace{y'''(0)}_{0} \Rightarrow y^{(5)}(0)=0$

- $y^{(6)}=xy^{(5)}+5y^{(4)} \Rightarrow y^{(6)}(0)=0y^{(5)}(0)+5y^{(4)}(0) \Rightarrow y^{(6)}(0)=3.5$

ooo

- $y^{(2n+1)}(0)=0, \quad n=0,1,2---$
- $y^{(2n)}(0)=1.3.5.\dots(2n-1), \quad n=1,2,3,---$

elde edilir. Buna göre istenen çözüm:

$$y(x)=y(0)+y'(0)x+y''(0)\frac{x^2}{2!}+---$$

$$y(x)=1+1.x^2+3.\frac{x^4}{4!}+3.5.\frac{x^6}{6!}+---$$

$$y(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty} 1.3.5.7.\dots(2n-1).\frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$y(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 1.3.5.7 \ldots (2n-1) . \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$y(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 1.3.5 \ldots (2n-1) . \frac{2.4.6 \ldots 2n}{2.4.6 \ldots 2n} . \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$y(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cancel{(2n)!}}{2^n . (1.2.3 \ldots n)} . \frac{x^{2n}}{\cancel{(2n)!}}$$

$$y(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{2}\right)^n . \frac{1}{n!}$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{2}\right)^n . \frac{1}{n!} \Rightarrow y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$$

şeklinde çözüm elde edilir. (İkinci yol olarak bir önceki soruyu düşününüz)

ÖR ↗ $y' + 2y = (x-1)^2$ diferensiyel denkleminin $x=0$ civarındaki seri çözümünü bulunuz.

$x=0$ noktası denklemin bir adi noktasıdır. Buna göre denklemin çözümü $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ şeklindedir. Buna göre

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad , \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

ifadeleri denklemde yazılırsa

$$y' + 2y = x^2 - 2x + 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n . a_n . x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n x^n = x^2 - 2x + 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) . a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n x^n = x^2 - 2x + 1$$

$n \rightarrow n+1$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1) a_{n+1} + 2a_n \right] x^n = x^2 - 2x + 1$$

$$\Rightarrow a_1 + 2a_0 + (2a_2 + 2a_1)x + (3a_3 + 2a_2)x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \left[(n+1) a_{n+1} + 2a_n \right] x^n = x^2 - 2x + 1$$

elde edilir. Buna göre polinom eşitliğinden

$$\left.\begin{aligned} a_1 + 2a_0 &= 1 \\ 2a_2 + 2a_1 &= -2 \\ 3a_3 + 2a_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

- $a_1 = 1 - 2a_0$
- $a_2 = -1 - a_1 = -1 - (1-2a_0) = 2a_0 - 2$
- $a_3 = \dfrac{1-2a_2}{3} = \dfrac{1-2(2a_0-2)}{3} = \dfrac{5-4a_0}{3}$
- $a_{n+1} = -\dfrac{2}{n+1} a_n \,,\; n = 3,4,\ldots$

$(n+1)\, a_{n+1} + 2\, a_n = 0$

$n = 3,4,\ldots$

yazılabilir. Buna göre

- $a_4 = -\dfrac{2}{4} a_3 = -\dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{5}{3} - \dfrac{4}{3} a_0\right) = -\dfrac{5}{6} + \dfrac{2}{3} a_0$
- $a_5 = -\dfrac{2}{5} a_4 = -\dfrac{2}{5} \cdot \left(-\dfrac{5}{6} + \dfrac{2}{3} a_0\right) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{4}{15} a_0$

$\ldots$

olacağından denklemin aranan çözümü

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \ldots$$

$$y(x) = a_0 + (1-2a_0)x + (2a_0-2)x^2 + \frac{5-4a_0}{3} x^3 + \left(-\frac{5}{6} + \frac{2}{3} a_0\right) x^4 + \left(\frac{1}{3} - \frac{4a_0}{15}\right) x^5 + \ldots$$

$$y(x) = a_0 \cdot \left(1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3} x^3 + \frac{2}{3} x^4 - \frac{4}{15} x^5 + \ldots\right) + \left(x - 2x^2 + \frac{5}{3} x^3 - \frac{5}{6} x^4 + \frac{1}{3} x^5 + \ldots\right)$$

şeklinde çözüm elde edilir.

ÖR → $y'' + y = e^x$ diferensiyel denkleminin $x_0 = 0$ noktası civarındaki seri çözümü bulunuz.

$x_0 = 0$ noktası denklemin bir adi noktası olduğundan aranan çözüm

$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ şeklindedir. Buna göre

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad y'=\sum_{n=1}^{\infty} n.a_n.x^{n-1}, \quad y''=\sum_{n=2}^{\infty} n.(n-1).a_n.x^{n-2}$$

ifadeleri denklemde yazılırsa

$$y''+y=e^x$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n.(n-1).a_n.x^{n-2}+\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$(n \to n+2)$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2}+a_n\right]x^n=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$$

$\Rightarrow$ $n=0,1,\ldots$ için $(n+2)(n+1)a_{n+2}+a_n=\frac{1}{n!}$

$\Rightarrow$ $n=0,1,2,\ldots$ için $a_{n+2}=-\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+2)!}$

elde edilir. Buna göre,

- $a_2=-\frac{1}{2}a_0+\frac{1}{2!}$
- $a_4=-\frac{a_2}{3.4}+\frac{1}{4!}=-\frac{1}{3.4}\left(-\frac{1}{2}a_0+\frac{1}{2!}\right)+\frac{1}{4!}=\frac{1}{4!}a_0$
- $a_6=-\frac{a_4}{5.6}+\frac{1}{6!}=-\frac{1}{5.6}\cdot\frac{1}{4!}a_0+\frac{1}{6!}=\frac{-1}{6!}a_0+\frac{1}{6!}$
- $a_8=\frac{1}{8!}a_0$

$\ldots$

- $a_3 = -\frac{a_1}{2.3} + \frac{1}{3!} = -\frac{a_1}{3!} + \frac{1}{3!}$

- $a_5 = -\frac{a_3}{4.5} + \frac{1}{5!} = -\frac{1}{4.5}\left(-\frac{a_1}{3!} + \frac{1}{3!}\right) + \frac{1}{5!} = \frac{a_1}{5!}$

- $a_7 = -\frac{a_5}{6 7} + \frac{1}{7!} = -\frac{1}{6.7}\cdot\frac{a_1}{5!} + \frac{1}{7!} = -\frac{a_1}{7!} + \frac{1}{7!}$

- $a_9 = \frac{a_1}{9!}$

...

olacagından aranan çözüm

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

$$y(x) = a_0 + a_1 x + \left(-\frac{1}{2!}a_0 + \frac{1}{2!}\right)x^2 + \left(-\frac{1}{3!}a_1 + \frac{1}{3!}\right)x^3 + \frac{a_0}{4!}x^4$$

$$+ \frac{a_1}{5!}x^5 + \left(-\frac{a_0}{6!} + \frac{1}{6!}\right)x^6 + \left(-\frac{1}{7}a_1 + \frac{1}{7!}\right)x^7 + \dots$$

$$y(x) = a_0 . \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots\right)$$

$$+ a_1 . \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right)$$

$$+ \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \dots\right)$$

$$y(x) = a_0 . \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n . \frac{x^{2n}}{(2n)!} + a_1 . \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n . \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$+ \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \dots\right)$$

$$y(x) = a_0 . \cos x + a_1 \sin x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

şeklinde elde edilir

ÖR: $(x^3-2)y'' + 3x^2y' + xy = 0$ dif denkleminin $x=0$ noktası civarında seri çözümünü bulunuz.

1 ✻ Diferensiyel denklem $P(x)\,y'' + Q(x)\,y' + R(x)\,y = 0$ formatında ve

$$\left.\begin{aligned} P(x) &= x^3-2 \\ Q(x) &= 3x^2 \\ R(x) &= x \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$P(0) = -2 \neq 0$ ve P, Q, R fonksiyonları $x_0=0$ noktasının bir komşuluğunda her mertebeden türeve sahip olduğundan analitiktir. O halde $x_0=0$ noktası bu diferensiyel denklem için bir adi noktadır.

2 ✻ $x_0=0$ noktası bu diferensiyel denklem için bir adi nokta olduğundan denklemin çözümü $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ şeklindedir. Buna göre

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \;,\quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n.a_n.x^{n-1} \;,\quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n.(n-1)\,a_n\,x^{n} \;\; --- \;(*)$$

ifadeleri elde edilir.

3 ✻ $(*)$ ifadelerini denklemde yazalım ve serinin genel terimi hakkında bilgi edinelim.

$$(x^3-2)\,y'' + 3x^2y' + xy = 0$$

$$\Rightarrow (x^3-2).\sum_{n=2}^{\infty} n.(n-1).a_n.x^{n-2} + 3x^2\sum_{n=1}^{\infty} n.a_n.x^{n-1} + x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n.(n-1)\,a_n\,x^{n+1} - \sum_{n=2}^{\infty} 2n(n-1)\,a_n\,x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} 3n\,a_n\,x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^{n+1} = 0$$

$(n \to n+2)$ $\quad(n \to n+5)$ $\quad(n \to n+2)$ $\quad(n \to n+2)$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+2).(n+1)\,a_{n+2}\,x^{n+3} - \sum_{n=-3}^{\infty} 2(n+5).(n+4)\,a_{n+5}\,x^{n+3}$$

$$+ \sum_{n=-1}^{\infty} 3(n+2)\,a_{n+2}\,x^{n+3} + \sum_{n=-2}^{\infty} a_{n+2}\,x^{n+3} = 0$$

yazılabilir. Buna göre,

$$-4a_2-12a_3x-24a_4x^2+3a_1x^2+a_0x+a_1x^2$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}-2(n+5)(n+4)a_{n+5}+3(n+2)a_{n+2}+a_{n+2}\right]x^{n+3}=0$$

$$\Rightarrow -4a_2+(a_0-12a_3)x+(4a_1-24a_4)x^2$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left[\underline{(n+3)^2}\cdot a_{n+2}-2(n+4)(n+5)a_{n+5}\right]x^n=0$$

$(n+2)(n+1)=n^2+3n+2$
$3(n+2)=3n+6$
$1=1$
$+$
$A=n^2+6n+9$
$A=(n+3)^2$

elde edilir. Bu eşitliğin sağlanması için:

$$-4a_2=0$$
$$a_0-12a_3=0$$
$$4a_1-24a_4=0$$

$$(n+3)^2a_{n+2}-2(n+4)(n+5)a_{n+5}=0 \qquad n=0,1,2,\ldots$$

olmalıdır. Buna göre,

$$a_2=0$$
$$a_3=\frac{a_0}{12}$$
$$a_4=\frac{a_1}{6}$$

ve

$$a_{n+5}=\frac{(n+3)^2}{2(n+4)(n+5)}a_{n+2}, \quad n=0,1,2,\ldots$$

(Yenileme bağıntısı)

elde edilir.

4 ⊛ Genel terimin yenileme bağıntısını kullanarak dizinin tüm terimlerini iki terim cinsinden yazmaya çalışalım. (Burada denklem ikinci mertebeden olduğunda genel çözümdeki keyfi parametre sayısı 2 olduğundan dizinin terimlerini sade iki terim cinsinden yazmalıyız)

Diğer taraftan yineleme bağıntısındaki $n+5$ ve $n+2$ terimi arasındaki fark $n+5-(n+2)=3$ olduğundan genel terimin formülünü $n=0,1,2,\ldots$ için $3n$, $3n+1$ ve $3n+2$ formunda aramalıyız.

Ayrıca buna göre aradığımız çözüm

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_{3n}x^{3n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_{3n+1}x^{3n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_{3n+2}x^{3n+2}$$

şeklinde olacaktır.

Dizinin a_{3n} , $n=0,1,2,\dots$ terimlerini bulalım

$$a_{n+5} = \frac{(n+3)^2}{2(n+4)(n+5)} a_{n+2} \quad , \quad n=0,1,2,\dots$$

- $a_0 = a_0$
- $a_3 = \dfrac{a_0}{12}$

- $a_6 = \dfrac{4^2}{2.5.6} a_3 = \dfrac{4^2}{2.5.6} \cdot \dfrac{a_0}{12}$
- $a_9 = \dfrac{7^2}{2.8.9} a_6 = \dfrac{4^2.7^2}{2^2.5.6.8.9} \cdot \dfrac{a_0}{12}$

$\vdots$

- $a_{3n} = \dfrac{(4.7.10.13\dots(3n-2))^2}{2^{n-1}.(5.8.11\dots(3n-1)).6.9.12\dots 3n} \cdot \dfrac{a_0}{12} \quad , \; n=2,3,\dots$
- $a_{3n} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{(4.7.10.13\dots(3n-2))^2}{2^n.(5.8.11\dots(3n-1)).3.6.9.12\dots 3n} \cdot a_0 \quad , \; n=2,3,\dots$
- $a_{3n} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{(4.7.10.13\dots(3n-2))^2}{2^n.(5.8.11\dots(3n-1)).3^n.(1.2.\dots.n)} \cdot a_0 \quad , \; n=2,3,\dots$
- $a_{3n} = \dfrac{(4.7.10.13\dots(3n-2))^2}{(2.5.8.11\dots(3n-1)).6^n.n!} \cdot a_0 \quad , \; n=2,3,\dots$

olur.

Dizinin a_{3n+1}, $n=0,1,2,\dots$ terimlerini bulalım.

- $a_1 = a_1$
- $a_4 = \dfrac{a_1}{6}$
- $a_7 = \dfrac{5^2}{2.6.7} a_4 = \dfrac{5^2}{2.6.7} \cdot \dfrac{a_1}{6}$
- $a_{10} = \dfrac{8^2}{2.9.10} \cdot a_7 = \dfrac{5^2.8^2}{2^2.6.7.9.10} a_4 = \dfrac{5^2.8^2}{2^2.6.7.9.10} \cdot \dfrac{a_1}{6}$

$\vdots$

- $a_{3n+1} = \dfrac{(5.8.11.\dots.(3n-2))^2}{2^{n-1}.(7.10.13.\dots).6.9.\dots 3n} \cdot \dfrac{a_1}{2.3}$
- $a_{3n+1} = \dfrac{(5.8.11.\dots.(3n-2))^2}{2^n.(7.10.13.\dots).3^n.n!} a_1 \quad , \; n=2,3,\dots$

Dizinin a_{3n+2}, $n=0,1,\ldots$ terimlerini bulalım.

- $a_2 = 0$
- $a_5 = \dfrac{3^2}{2.4.5}\, a_0 = 0$
- $a_8 = \dfrac{6^2}{2.7.8}\, a_5 = 0$

$\vdots$

- $a_{3n+2} = 0, \quad n=1,2,\ldots$

elde edilir.

5 (*) Bulduğumuz genel terimleri çözümde yazarsak

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{3n} x^{3n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{3n+1} x^{3n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{3n+2} x^{3n+2}$$

$$\Rightarrow y(x) = a_0 + \frac{a_0}{12} x^3 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(4.7.10.13\ldots(3n-2))^2}{(2.5.8.11.\ldots(3n-1)).\, 6^n.\, n!} . a_0 . x^{3n}$$

$$+ a_1 x + \frac{a_1}{6} x^4 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(5.8.11.\ldots.(3n-2))^2}{2^n.(7.10.13.\ldots).\, 3^n.\, n!} a_1 . x^{3n+1}$$

$$\Rightarrow y(x) = a_0 . \left(1 + \frac{x^3}{12} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(4.7.10.13\ldots(3n-2))^2}{(2.5.8.11.\ldots(3n-1)).\, 6^n.\, n!} x^{3n}\right)$$

$$+ a_1 . \left(x + \frac{x^4}{6} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(5.8.11.\ldots.(3n-2))^2 . x^{3n+1}}{2^n.(7.10.13.\ldots).\, 3^n.\, n!}\right)$$

elde edilir.

ÖR) $(x^2+1)y'' + xy' + y = 0$ diferensiyel denkleminin $x_0 = 0$ noktası civarında seri çözümünü bulunuz.

$x_0 = 0$ noktası denklemin bir adi noktasıdır. Buna göre çözüm $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ şeklinde olacaktır. Buna göre,

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad y'=\sum_{n=1}^{\infty} n.a_n.x^{n-1}, \quad y''=\sum_{n=2}^{\infty} n.(n-1).a_n\, x^{n-2}$$

yazılabilir. Buna göre y, y' ve y'' fonksiyonlarının seri gösterimleri denklemde yazılırsa

$$(x^2+1)y''+xy'+y=0$$

$$\Rightarrow \quad (x^2+1)\sum_{n=2}^{\infty} n.(n-1).a_n.x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} n.a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\sum_{n=0}^{\infty}} n.(n-1)a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n.(n-1)a_n x^{n-2} + \underline{\sum_{n=0}^{\infty}} n.a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$(n \to n+2)$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} n.(n-1)a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2).(n+1)a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n.a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n^2+1)a_n\right] x^n = 0$$

$$\Rightarrow \quad (n+2)(n+1)a_{n+2} + (n^2+1)a_n = 0, \quad n=0,1,2,\dots$$

$$\Rightarrow \quad a_{n+2} = -\frac{n^2+1}{(n+1).(n+2)}\, a_n, \quad n=0,1,2,\dots \quad \text{---} (*)$$

elde edilir.

(*) eşitliğinde $(n+2)$. ve n. terim arasındaki fark:

$n+2-n=2$ olduğundan dizinin genel terimini $2n$ ve $2n+1$ formatında araştırmalıyız.

<u>a_{2n} terimini araştıralım</u>

- $a_0 = a_0$
- $a_2 = -\dfrac{(0^2+1)}{1.2}.a_0 = -\dfrac{1}{1.2}a_0$

$$\bullet\ a_4 = -\frac{(2^2+1)}{3.4}\,a_2 = -\frac{(2^2+1)}{3.4}\cdot\left(-\frac{(0^2+1)}{1.2}a_0\right) = \frac{(0^2+1).(2^2+1)}{4!}\,a_0$$

$\circ\circ\circ$

$$\bullet\ a_{2n} = (-1)^n\cdot\frac{1.(2^2+1).(4^2+1).\dots.((2n-2)^2+1)}{(2n)!}\,a_0\,,\quad n=1,2,\dots$$

şeklindedir.

a_{2n+1} terimini araştıralım...

$$\bullet\ a_1 = a_1$$

$$\bullet\ a_3 = -\frac{1^2+1}{2.3}\,a_1$$

$$\bullet\ a_5 = -\frac{3^2+1}{4.5}\,a_3 = -\frac{3^2+1}{4.5}\cdot\left(-\frac{1^2+1}{2.3}\right) = \frac{(1^2+1)(3^2+1)}{5!}$$

$\circ\circ\circ$

$$\bullet\ a_{2n+1} = (-1)^n\cdot\frac{(1^2+1).(3^2+1).\dots((2n-1)^2+1)}{(2n+1)!}\,a_1\,,\quad n=1,2,\dots$$

elde edilir. Buna göre denklemin $x_0=0$ noktası civarındaki çözümü

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}\,x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}\cdot x^{2n+1}$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\cdot\frac{1.(2^2+1).(4^2+1).\dots.((2n-2)^2+1)}{(2n)!}\,a_0\cdot x^{2n}$$

$$+\ a_1 x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\cdot\frac{(1+1).(3^2+1).(5^2+1).\dots((2n-1)^2+1)}{(2n+1)!}\,a_1\cdot x^{2n+1}$$

$$= a_0\cdot\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1.(2^2+1).(4^2+1).\dots.((2n-2)^2+1)}{(2n)!}\,x^{2n}\right)$$

$$+\ a_1\cdot\left(x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(1+1).(3^2+1).(5^2+1).\dots((2n-1)^2+1)}{(2n+1)!}\,x^{2n+1}\right)$$ elde edilir.

Örn $(x^2-2x+2)y''-4(x-1)y'+6y=0$

diferensiyel denkleminin $x_0=1$ noktası civarında seri çözümünü bulunuz.

$$(x^2-2x+2)y''-4(x-1)y'+6y=0$$

$$\Rightarrow \quad y''-\underbrace{\frac{4(x-1)}{x^2-2x+2}}_{P(x)}y'+\underbrace{\frac{6}{x^2-2x+2}}_{Q(x)}y=0$$

$P(x)=-\dfrac{4(x-1)}{x^2-2x+2}$ ve $Q(x)=\dfrac{6}{x^2-2x+2}$ fonksiyonları $x_0=1$ noktasında analitiklerdir. (Dikkat edin: $x_0=1$ için bu fonksiyonlar tanımsız değil ve $x_0=1$ noktasında bu fonksiyonlar her mertebeden türeve sahiptir. Dolayısıyla bu iki fonksiyonda bu noktada analitiktirler.)

O halde $x_0=1$ noktası bu denklemin bir adi noktasıdır.

Kolaylık olması adına denklemde

$$t=x-1$$

diyelim. Buna göre $dt=dx$ olduğundan denklem

$$(x^2-2x+2)y''-4(x-1)y'+6y=0$$

$$\Rightarrow \left((x-1)^2+1\right)y''-4(x-1)y'+6y=0$$

$$\Rightarrow (t^2+1)z''-4z'+6z=0 \quad ---(*) \quad , \quad z(t)=y(t+1)=y(x)$$

şeklinde olacaktır. $t_0=0$ noktası $(*)$ denklemi için bir adi noktadır. O halde $(*)$ denkleminin çözümü $z(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n.t^n$ şeklindedir. O halde

$$z=\sum_{n=0}^{\infty}a_n.t^n, \quad z'=\sum_{n=1}^{\infty}n.a_n.t^{n-1}, \quad z''=\sum_{n=2}^{\infty}n.(n-1)a_n t^{n-2}$$

ifadeleri $(*)$ denkleminde yazılırsa

$$(t^2+1)z'' - 4z' + 6z = 0$$

$$\Rightarrow (t^2+1).\sum_{n=2}^{\infty} n.(n-1)a_n t^{n-2} - 4t\sum_{n=1}^{\infty} n.a_n.t^{n-1} + 6\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n.(n-1)a_n t^n + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2}}_{(n\to n+2)} - \sum_{n=1}^{\infty} 4n a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} 6a_n t^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n.(n-1)a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} t^n - \sum_{n=0}^{\infty} 4n a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} 6a_n t^n = 0$$

$$\Rightarrow 2a_2 + 6a_3 t - 4a_1 t + 6a_0 + 6a_1 t$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} n.(n-1)a_n t^n + \sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} t^n - \sum_{n=2}^{\infty} 4n a_n t^n + \sum_{n=2}^{\infty} 6a_n t^n = 0$$

$$\Rightarrow 2a_2 + 6a_0 + (6a_3 + 2a_1)t$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n^2-5n+6)a_n\right] = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a_2 + 6a_0 = 0 \\ 6a_3 + 2a_1 = 0 \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} + (n^2-5n+6)a_n = 0, \quad n=2,3,4,\dots \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_2 = -3a_0 \\ a_3 = -\frac{1}{3}a_1 \end{cases} \quad \text{ve} \quad a_{n+2} = \frac{n^2-5n+6}{(n+2)(n+1)}a_n$$

$$a_{n+2} = \frac{(n-3)(n-2)}{(n+2)(n+1)}a_n, \quad n=2,3,\dots$$

elde edilir. Buna göre

$$a_{n+2} = \frac{(n-3)(n-2)}{(n+2)(n+1)} a_n \quad , n = 2, 3, \ldots$$

- $n=2$ için $a_4 = \frac{(-1).0}{4.3} a_2 = 0$
- $n=4$ için $a_6 = \frac{1.2}{6.5} a_4 = 0$

$\circ \circ \circ$

- $a_{2n} = 0 \quad , n = 2, 3, \ldots$

- $n=3$ için $a_5 = \frac{0.1}{5.4} a_3 = 0$
- $n=5$ için $a_7 = \frac{2.3}{7.6} a_5 = 0$

$\circ \circ \circ$

- $a_{2n+1} = 0, \quad n = 2, 3, \ldots$

olur. Buna göre denklemin seri çözümü

$$z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

$$z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} t^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} t^{2n+1}$$

$$z(t) = \left(a_0 + a_2 t^2 + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} a_{2n} t^{2n}}_{0}\right) + \left(a_1 t + a_3 t^3 + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} a_{2n+1} t^{2n+1}}_{0}\right)$$

$$z(t) = a_0 - 3a_0 t^2 + a_1 t - \frac{1}{3} a_1 t^3$$

$$z(t) = a_0 . (1 - 3t^2) + a_1 t . \left(1 - \frac{t^2}{3}\right)$$

$$y(x) = a_0 . \left(1 - 3(x-1)^2\right) + a_1 . (x-1) . \left(1 - \frac{(x-1)^2}{3}\right)$$ elde edilir.

ÖDEV: $xy'' + y' - 4y = x^2$ diferensiyel denkleminin $x=-1$ noktası civarındaki seri çözümünü bulunuz.

İpucu: Denklemde $x+1 = t$ dersek

$x = t-1$

$y(x) = y(t-1) = z(t)$

olmak üzere verilen denklem:

$$(t-1) z'' + z' - 4z = (t-1)^2$$

şeklini alacaktır. Bu diferensiyel denklemin $t_0 = 0$ noktası civarındaki seri çözümünü bularak devam edebiliriz.

ÖDEV

$y'' - 2xy = \sin x$ denkleminin $x_0 = 0$ noktası civarındaki seri çözümünü bulunuz.

İpucu

$\sin x$ fonksiyonun kuvvet serisi $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

şeklindedir. Bunu kullanırsak;

$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ aranan çözüm için

$$\sum_{n=2}^{\infty} n.(n-1) a_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$(n \to n+2)$ (n=0 dan da başlayabilir.)

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+1} - 2n a_n \right] x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

eşitliğinden a_n ifadesini bularak çözüme gidebiliriz.

NOT

Denklemin sağ kısmında $\sin x$ fonksiyonu yerine:

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1$
- $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$

fonksiyonları veya bunların lineer bir birleşimi olduğunda da benzer düşünceyi kullanabiliriz.

Ör:
$$y'' - \sin x \, y = 0$$
diferensiyel denkleminin $x_0 = 0$ noktası civarındaki seri çözümünü bulunuz.

$x_0 = 0$ denklemin adi noktasıdır. $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ şeklinde çözüm ararsak $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$ olacaktır.

Buna göre

$$y'' - \sin x \, y = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n.(n-1) a_n x^{n-2} - \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n . \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) . \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = 0$$

$$\Rightarrow 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \cdots$$
$$+ \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \cdots \right) . \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots \right) = 0$$

$$\Rightarrow 2a_2 + (6a_3 + a_0)x + (12a_4 + a_1)x^2 + \left(20a_5 + a_2 - \frac{a_0}{3!}\right)x^3 + \cdots = 0$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a_2 = 0 \\ 6a_3 + a_0 = 0 \\ 12a_4 + a_1 = 0 \\ 20a_5 + a_2 - \frac{a_0}{6} = 0 \\ \vdots \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_2 = 0 \\ a_3 = -\frac{a_0}{6} \\ a_4 = -\frac{a_1}{12} \\ a_5 = \frac{a_0}{120} \\ \vdots \end{array}$$ şeklindedir.

O halde aranan çözüm

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$
$$= a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{6} x^3 - \frac{a_1}{12} x^4 + \frac{a_0}{120} x^5 + \cdots$$
$$= a_0 . \left(1 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots \right) + a_1 . \left(x - \frac{x^4}{12} + \cdots \right)$$

şeklinde bulunur.

Ör: $y'' + 4x^2 y = 0$ diferensiyel denkleminin $x_0 = 0$ noktası civarındaki seri çözümünü bulunuz.

!!! Çözüm serisinin genel terimini bulamıyorsan bu soruyu kesin çöz !!!

$x_0 = 0$ denklemin adi noktasıdır. Buna göre $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ şeklinde çözüm arayalım. Buna göre

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n . a_n x^{n-1} \qquad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n.(n-1) a_n x^{n-2}$$

olacaktır. O halde

$$y'' + 4x^2 y = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n.(n-1) a_n x^{n-2} + 4x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n.(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^{n+2} = 0$$

$n \to n+2$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^{n+2} = 0$$

$$\Rightarrow 2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^{n+2} = 0$$

$n \to n+2$

$$\Rightarrow 2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n=0}^{\infty} (n+4)(n+3) a_{n+4} x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^{n+2} = 0$$

$$\Rightarrow 2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+4)(n+3) a_{n+4} + 4a_n\right] x^{n+2} = 0$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_2 = 0, \quad a_3 = 0 \\ (n+4)(n+3) a_{n+4} + 4a_n = 0 \\ n = 0, 1, 2, \dots \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \\ a_{n+4} = -\dfrac{4}{(n+3)(n+4)} a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{array}$$

a_{n+4} ile a_n arasındaki fark 4 olduğundan $4n$, $4n+1$, $4n+2$ ve $4n+3$ durumlarına göre bir genel terim araştırması yapmalıyız.

a_{4n} terimini bulalım

$$a_4 = -\frac{4}{3.4} a_0$$

$$a_8 = -\frac{4}{7.8} a_4$$

$$a_{12} = -\frac{4}{11.12} a_8$$

$$\cdots$$

$$a_{4n} = -\frac{4}{(4n-1)\,4n} a_{4n-4}$$

Yandaki ifadeleri taraf tarafa çarparsak:

$$\cancel{a_4}\cdot\cancel{a_8}\cdot\cancel{a_{12}}\cdots\cancel{a_{4n-4}}\cdot a_{4n}$$

$$= \left(-\frac{4}{3.4}a_0\right)\cdot\left(-\frac{4}{7.8}\cancel{a_4}\right)\cdot\left(-\frac{4}{11.12}\cancel{a_8}\right)\cdots\left(-\frac{4\,\cancel{a_{4n-4}}}{(4n-1).4n}\right)$$

$$\Rightarrow a_{4n} = \frac{(-1)^n . 4^n \; a_0}{[3.7.11.\ldots(4n-1)].(4.8.12\ldots(4n))}$$

$$\Rightarrow a_{4n} = \frac{(-1)^n . \cancel{4^n} \; a_0}{[3.7.11.\ldots(4n-1)].\cancel{4^n}.n!}$$

$$\Rightarrow a_{4n} = \frac{(-1)^n \; a_0}{3.7.11\ldots(4n-1)\,n!}, \quad n=1,2,\ldots$$

a_{4n+1} terimini bulalım

$$\cancel{a_5} = -\frac{4}{4.5} a_1$$

$$\cancel{a_9} = -\frac{4}{8.9} \cancel{a_5}$$

$$\cancel{a_{13}} = -\frac{4}{12.13} \cancel{a_9}$$

$$\cdots$$

$$a_{4n+1} = -\frac{4}{4n.(4n+1)} \cancel{a_{4n-3}}$$

ifadeleri taraf tarafa çarpılırsa

$$a_{4n+1} = \frac{(-1)^n . 4^n \; a_1}{4.8.12\ldots4n.(5.9.13\ldots(4n+1))}$$

$$a_{4n+1} = \frac{(-1)^n . 4^n \; a_1}{4^n.n!\,(5.9.\ldots(4n+1))}$$

$$a_{4n+1} = \frac{(-1)^n \; a_1}{n!\,(5.9\ldots(4n+1))}, \quad n=1,2,\ldots$$

a_{4n+2} terimini bulalım

$$a_2 = 0$$

$$a_6 = -\frac{4}{5.6} a_2 = 0$$

$$a_{10} = -\frac{4}{9.10} . a_6 = 0$$

$$\cdots$$

$$\Rightarrow a_{4n+2} = 0, \quad n=0,1,2,\ldots$$

a_{4n+3} terimini bulalım.

$$a_3 = 0$$

$$a_7 = -\frac{4}{6.7} a_3 = 0$$

$$a_{11} = -\frac{4}{10.11} . a_7 = 0$$

$$\cdots$$

$$a_{4n+3} = 0, \quad n=0,1,2,\ldots$$

elde edilir. O halde denklemin genel çözümü:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_{4n} x^{4n}+\sum_{n=0}^{\infty} a_{4n+1} x^{4n+1}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{a_{4n+2}}_{=0} x^{4n+2}}_{0}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{a_{4n+3}}_{=0} x^{4n+3}}_{0}$$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_{4n} x^{4n}+\sum_{n=0}^{\infty} a_{4n+1} x^{4n+1}$$

$$y=a_0+\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_0 \, x^{4n}}{3.7.11\cdots(4n-1)\,n!}\right)+a_1 x+\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_1 \, x^{4n+1}}{n!\,(5.9\cdots(4n+1))}\right)$$

$$y=a_0\cdot\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \, x^{4n}}{3.7.11\cdots(4n-1)\,n!}\right)+a_1\cdot\left(x+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \, x^{4n+1}}{n!\,(5.9\cdots(4n+1))}\right)$$

şeklinde elde edilir.